Tarea

Felipe Gerard

18 de noviembre de 2015

¿Por qué Gibbs es un caso particular de M-H?

Gibbs se puede ver como un caso particular de M-H tomando en cuenta la siguiente función de propuesta:

Si estamos en la iteración t-ésima y hay p parámetros, definimos $i = (t \; mod \; p)$ y proponemos $X \sim q$, con $q(X|\theta^t) = p_{\theta_i}(X|\theta^t_{-i})$, donde $\theta_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_p)$. Para ello evidentemente necesitamos conocer las condicionales de cada parámetro con respecto a los demás, como se requiere en Gibbs. Cabe mencionar que, como $X_{-i} = \theta^t_{-i}$, entonces la probabilidad de aceptación de la propuesta es 1:

$$\frac{p(X)q(\theta^t|X)}{p(\theta_t)q(X|\theta^t)} = \frac{p(X_{-i})p(X_i|X_{-i})p_{\theta_i}(\theta^t_i|X_{-i})}{p(\theta^t_{-i})p(\theta^t_i|\theta^t_{-i})p_{\theta_i}(X_i|\theta^t_{-i})} = \frac{p(\theta^t_{-i})p(X_i|\theta^t_{-i})p_{\theta_i}(\theta^t_i|\theta^t_{-i})}{p(\theta^t_{-i})p(\theta^t_i|\theta^t_{-i})p_{\theta_i}(X_i|\theta^t_{-i})} = 1$$

Método para detectar convergencia en MCMC de Gelman y Rubin

La idea es correr m cadenas con valores iniciales dispersos y comparar la media de las varianzas $W = \frac{1}{m}\sum_j s_j^2$ y n por la varianza de las medias $B = \frac{n}{m-1}\sum_j(\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})$. Podemos estimar la varianza "real" con un promedio de ambas cantidades vía $\hat{Var}(X) = (1 - 1/n)W + (1/n)B$.

Para probar convergencia se busca que la estadística $\hat{R} = \sqrt{\hat{Var}(X)/W}$ sea cercana a 1. La idea es que en cadenas que se mezclan lentamente, $\hat{Var}(X)$, será grande porque los valores iniciales fueron muy distintos, mientras que W tenderá a atinarle. De este modo, cuando sean "similares" (digamos $\hat{R} < 1.1$), podemos decir que la cadena "convergió".