Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática

Relações de Recorrência

por
Eliane Alves de Jesus
Elisa Fonseca Sena e Silva

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima

Belo Horizonte-MG
2006

ELIANE ALVES DE JESUS [1]
ELISA FONSECA SENA E SILVA [2]

Relações de Recorrência

Monografia apresentada ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, como proposta de apresentação de trabalho nas Jornadas de Iniciação Científica. Estudo feito sob orientação de Bernardo Nunes Borges de Lima.

Belo Horizonte-MG
2006

[1] Bolsista do PET - PROGRAD (Pró-Reitoria de Graduação da UFMG)
[2] Bolsista do CNPq - Brasil

Resumo

É importante saber como lidar com relações de recorrência, uma vez que são muito comuns não só na Matemática como também em Computação, na construção de algoritmos. No entanto, dada uma relação recorrente se quisermos saber seu n-ésimo termo, teremos que calcular os $n-1$ anteriores, o que não é interessante na prática. A procura de uma forma fechada para a solução de tais relações é o tema desta monografia.

Relações de recorrência estão intimamente relacionadas com somas; e algoritmos recursivos podem ser melhorados através da introdução de pisos e tetos, logo tais assuntos também serão abordados, bem como a descoberta de formas fechadas em representação binária. Dentre os problemas estudados estão Torre de Hanói e o Problema de Josefus.

Introdução

Uma equação tem caráter recursivo quando é definida em termos dela própria, ou seja, quando encontrar a solução de um determinado valor de n significa ter que calcular as soluções de todos os valores anteriores a esse n. É importante saber como lidar com essas relações de recorrência, já que são muito comuns. Na Matemática, por exemplo, podemos encontrar a idéia de recursividade em algo simples como o cálculo fatorial

$$\begin{aligned} 0! &= 1; \\ n! &= n.(n-1)!, \ \ n > 0. \end{aligned}$$

ou em assuntos mais sofisticados, como a construção dos números naturais a partir dos axiomas de Peano. Outro exemplo clássico de relação de recorrência é o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum:

$$\begin{aligned} mdc(0,n) &= n; \\ mdc(m,n) &= mdc(n \, mod \, m, m), \ \ \ m > 0. \end{aligned}$$

Não podemos nos esquecer da seqüência de Fibonacci:

$$\begin{aligned} F_0 &= 1; \\ F_1 &= 1; \\ F_n &= F_{n-2} + F_{n-1}, \quad n > 1. \end{aligned}$$

A recursão ocorre também no domínio visual, como no trabalho de M.C.Escher,

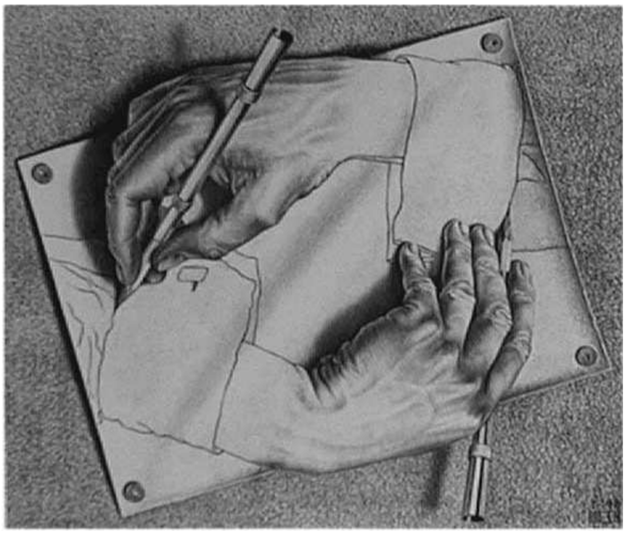


Figura 1: *"Drawing Hands"* de M.C. Escher

ou ainda nos fractais.

Figura 2: Conjunto de Mandelbrot

Muitos algoritmos são baseados em relações recorrentes e problemas combinatórios considerados difíceis à primeira vista podem ser resolvidos mais facilmente se escritos na forma de relações de recorrência. Estas, como vimos nos exemplos anteriores, geralmente são dadas por um conjunto de equações contendo um valor inicial e outra equação para o valor geral em termos dos anteriores. Isso significa que, se quisermos saber o n-ésimo termo de uma seqüência dada por uma relação recorrente, teremos que calcular os $n-1$ termos anteriores, o que, na prática, não é nada interessante, especialmente para n grande. Então, o mais natural é que encontremos uma forma fechada para a relação de recorrência, ou seja, uma solução que não dependa dos termos anteriores, mas somente do valor de n.

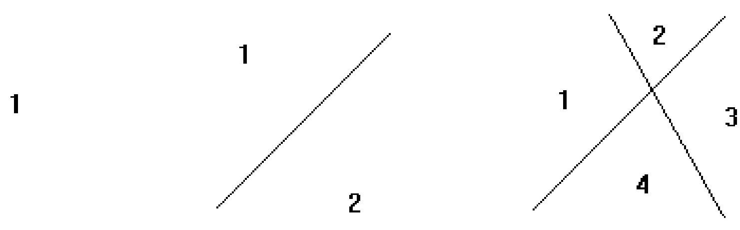
A procura de uma forma fechada para diversas relações de recorrência é o tema dos capítulos que seguem.

1 Relações de Recorrência: descoberta e resolução

1.1 Como generalizar os casos menores

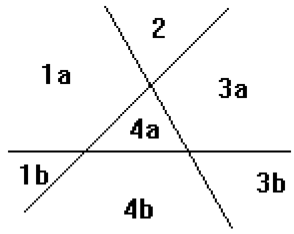
Vamos considerar primeiro um problema geométrico: qual é o número máximo L_n de regiões definidas por n retas no plano?

Começaremos observando os casos menores: quando nenhuma reta divide o plano, temos somente uma região; quando uma reta o divide, temos duas regiões. Para $n = 2$, temos duas opções: posicionar as retas de forma que fiquem paralelas, formando três regiões, ou de forma que fiquem concorrentes, formando quatro regiões. Escolheremos esta última opção, uma vez que queremos que L_n seja o maior possível. A partir desse caso, percebemos que, ao acrescentar uma reta às $n-1$ previamente existentes, a n-ésima reta deve interceptar todas as anteriores, de forma a conseguirmos a maior quantidade de regiões definidas por n retas no plano.



$L_0 = 1$ $\qquad$ $L_1 = 2$ $\qquad$ $L_2 = 4$

Retornando à análise de casos menores, ao acrescentarmos a terceira reta, percebemos que ela só pode interceptar três das quatro regiões existentes, independente da posição das duas primeiras retas.



Portanto, $L_3 = L_2 + 3 = 7$ é o máximo que conseguimos.

Com esses casos menores em consideração, vamos generalizar o raciocínio. Ao posicionar a n-ésima reta acrescentaremos k regiões se, e somente se, tal reta dividir k regiões previamente existentes, o que ocorre se, e somente se, interceptar em $k-1$ pontos as retas anteriores. Como duas retas podem se interceptar em, no máximo, um ponto, temos que a n-ésima reta pode interceptar as $n-1$ anteriores em, no máximo, $n-1$ pontos, criando n regiões novas. Sendo $k \leq n$, encontramos um limite superior:

$$L_n \leq L_{n-1} + n \quad , \; n > 0.$$

Para que se consiga o número máximo de regiões, como discutido previamente, a n-ésima reta acrescida não deve ser paralela a nenhuma das outras anteriormente existentes. Além disso, se colocarmos a reta de forma que não passe por nenhum dos pontos de intersecção anteriores atingiremos a igualdade nessa fórmula, uma vez que a nova reta intercepta todas as $n-1$ anteriores em $n-1$ pontos distintos, caracterizando a criação de n novas regiões. Logo, obtivemos a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 \\ L_n &= L_{n-1} + n \quad , \; \text{para } n > 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Achada a relação de recorrência, precisamos agora encontrar sua forma fechada.

Com o intuito de melhor entender a relação, vamos expandi-la ao máximo:

$$
\begin{aligned}
L_n &= L_{n-1} + n \\
&= L_{n-2} + (n-1) + n \\
&= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\
&\quad\vdots \\
&= L_0 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + S_n\,, \quad \text{onde } S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n.
\end{aligned}
$$

Encontraremos a soma S_n dos n primeiros inteiros positivos a partir do seguinte truque (aparentemente inventado por Gauss em 1786, quando tinha nove anos):

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & (n-1) & + & n \\
+\,S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & +\cdots+ & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n & = & \multicolumn{9}{c}{\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) +\cdots+ (n+1) + (n+1)}_{n \text{ vezes}}}
\end{array}
$$

Basta somar S_n consigo mesmo, mas com os termos na ordem inversa, de forma que cada uma das n parcelas à direita do sinal de igualdade seja igual a $n+1$. Logo,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{para } n \geq 0. \tag{1.2}$$

Então, a solução do nosso problema é:

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \quad \text{para } n \geq 0. \tag{1.3}$$

Para verificar se a solução está realmente correta, vamos provar por indução: o primeiro passo é trivial, pois $L_0 = \frac{0.1}{2} + 1 = 1$. Se supusermos que a equação 1.3 é válida para $n-1$, basta mostrar que a mesma vale para n. De fato:

$$L_n = L_{n-1} + n = \left(\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right) + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1.$$

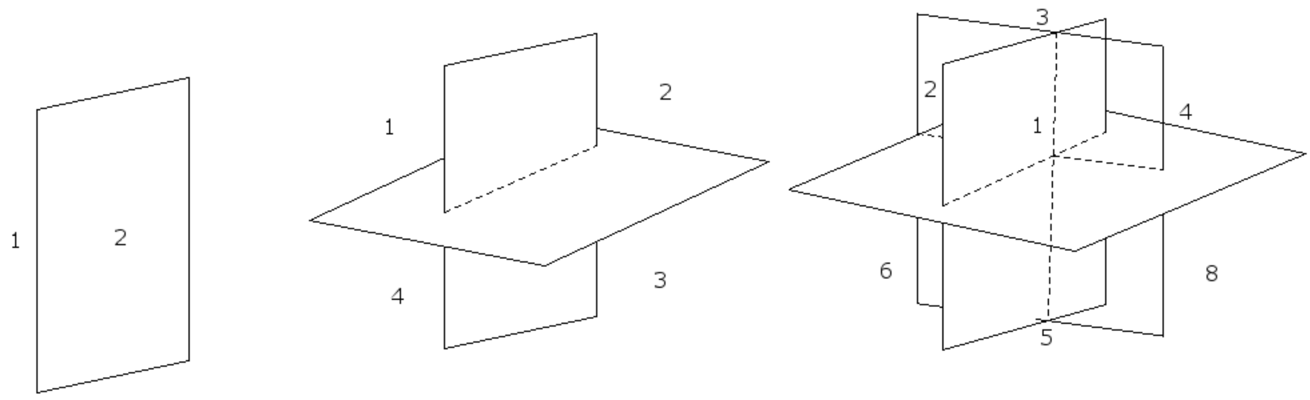
Portanto, nossa solução está correta.

Relações de recorrência similares a 1.1 são comuns em diversas aplicações. Para achar a forma fechada para relações semelhantes a L_n, passamos por três etapas:

1. Analise a solução de casos simples e procure perceber o padrão do problema.
2. Generalize a solução do problema, encontre uma relação de recorrência e prove sua validade.
3. A partir da relação de recorrência, encontre a forma fechada da solução e demonstre sua validade.

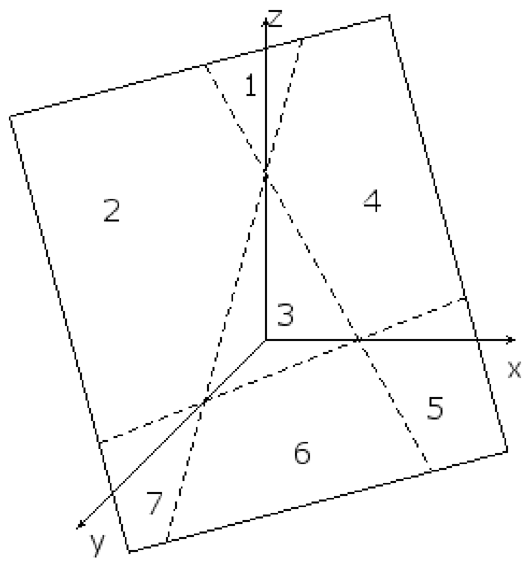
Vamos colocar nosso método em prática em outro problema geométrico: qual é o número máximo P_n de regiões tridimensionais que podem ser definidas por n planos diferentes?

Começando pelos casos menores: naturalmente, $P_0 = 1$, quando há um plano seccionando o espaço temos duas regiões. Sabemos pelo exemplo anterior que o novo plano não pode ser paralelo aos antigos, logo o segundo plano acrescido deve interceptar o anterior, dividindo as duas regiões anteriores, fazendo com que $P_2 = 4$. O terceiro plano dividirá as quatro regiões anteriores, de forma que $P_3 = 8$.



$P_1 = 2$ $P_2 = 4$ $P_3 = 8$

Tal seqüência nos leva a crer que $P_n = 2^n$, contudo ao acrescentar o quarto plano percebemos que não é essa a forma fechada que procuramos. Para que possamos visualizar melhor o problema, vamos imaginar que temos os três planos coordenados xy, yz e xz do sistema cartesiano. Ao traçar o quarto plano, conforme a figura abaixo, teremos três retas formadas da intersecção deste com os planos coordenados. As regiões determinadas por essas retas no plano acrescido dividem as antigas regiões tridimensionais, gerando sete novas regiões no espaço. Logo, teremos $P_4 = 8 + 7 = 15$.



Note que ao acrescentar um plano temos que nos assegurar de que este não contenha nenhuma das retas de interseção já existentes. Sem esquecer-se desse aspecto e observando os casos menores, chegamos à generalização apropriada. O n-ésimo plano intercepta os $n-1$ planos antigos em $n-1$ retas distintas, que o dividem em L_{n-1} regiões. O plano, por sua vez, divide o espaço em L_{n-1} novas regiões. Encontramos, portanto, a nossa relação de recorrência:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1; \\ P_n &= P_{n-1} + L_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Podemos partir em busca da forma fechada para 1.4. Como esse foi um problema similar ao anterior (até as suas relações de recorrência se parecem), vamos resolvê-lo analogamente, expandindo 1.4:

$$\begin{aligned}
P_n &= P_{n-1} + L_{n-1} \\
&= P_{n-2} + L_{n-2} + L_{n-1} \\
&= P_{n-3} + L_{n-3} + L_{n-2} + L_{n-1} \\
&= \quad \vdots \\
&= P_0 + L_0 + L_1 + \cdots + L_{n-3} + L_{n-2} + L_{n-1} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} L_k, \qquad \text{como sabemos } L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \text{ temos que} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k(k+1)}{2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

Agora basta manipular a soma:

$$\begin{aligned}
P_n &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (k^2+k) + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1.
\end{aligned}$$

O último somatório é simplesmente o número de parcelas a serem somadas quando k vai de zero a $n-1$, ou seja, n. O penúltimo somatório já foi calculado anteriormente: a soma dos $n-1$ primeiros inteiros positivos, representada por 1.2 com n no lugar $n-1$. No entanto, o primeiro somatório representa uma relação de recorrência que calcularemos apenas na seção 2.1, mas colocaremos aqui sua forma fechada $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}\right)$ para não ficarmos sem a solução para P_n. Finalizando nosso cálculos:

$$
\begin{aligned}
P_n &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)(n-\frac{1}{2})n}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) + n \\
&= 1 + n\left[\frac{(n-1)(n-\frac{1}{2})}{6} + \frac{n-1}{4} + 1\right] \\
&= 1 + n\left[\frac{2n^2-3n+1+3n-3+12}{12}\right] \\
&= 1 + \frac{n(n^2+5)}{6}, \quad \text{para } n \geq 0. \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

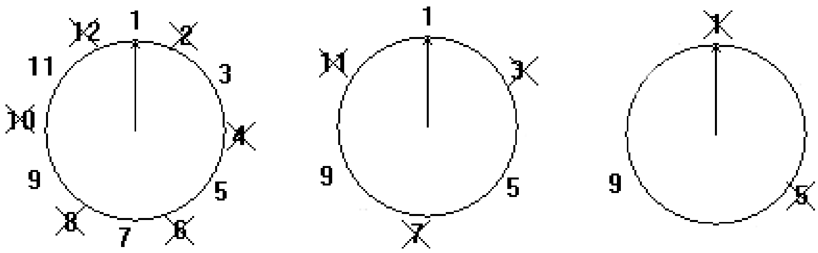
Encontramos a forma fechada de 1.4, falta demonstrar sua validade. O primeiro passo da indução é básico: $P_0 = 1 + \frac{0(0+5)}{6} = 1$. Supondo que 1.5 seja válida para $n-1$, vamos mostrar que vale para n. De fato:

$$
\begin{aligned}
P_n &= P_{n-1} + L_{n-1} \\
&= 1 + (n-1)\left(\frac{(n-1)^2+5}{6}\right) + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\
&= 1 + \frac{n^3-3n^2+8n-6+3n^2-3n+6}{6} \\
&= 1 + \frac{n^3+5n}{6} \\
&= 1 + \frac{n(n^2+5)}{6}.
\end{aligned}
$$

Para que não achemos que todas as relações de recorrência são resolvidos ao expandir a equação principal, vamos a um outro exemplo: o Problema de Josefus. Conta a lenda que um historiador famoso do primeiro século, Flavius Josefus, estava encurralado pelos romanos em uma caverna, juntamente com 11 rebeldes judeus, durante uma guerra entre judeus e romanos. O grupo de rebeldes, preferindo o suicídio à captura, decidiu formar um círculo e, contando ao longo deste, matar cada terceira pessoa restante até não sobrar ninguém.

Contudo Josefus, junto com um amigo, não queria participar do pacto suicida, e calculou rapidamente onde ele e o amigo deveriam ficar nesse círculo.

Vamos estudar uma variação desse problema: sabendo que há n pessoas numeradas de 1 a n em um círculo, eliminaremos cada segunda pessoa restante até sobrar um única pessoa. Estamos interessados em calcular $J(n)$, o número do sobrevivente. Para entendermos melhor a questão veremos o que acontece quando $n = 12$. Após a primeira volta, eliminamos, nessa ordem, as pessoas de número 2, 4, 6, 8, 10 e 12. Na segunda volta descartamos 3, 7 e 11; e finalmente, na última volta, eliminamos 5 e 1, restando somente a pessoa de número 9.

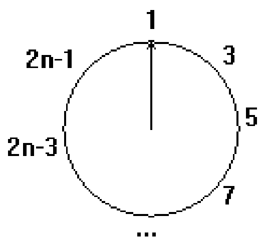


Uma vez entendido o problema, vamos analisar os exemplos com valores pequenos:

n	1	2	3	4	5	6
$J(n)$	1	1	3	1	3	5

Observamos que $J(n)$ é sempre ímpar, o que é coerente com o problema, uma vez que, como foi observado para $n = 12$, na primeira volta eliminamos todos que possuem número par.

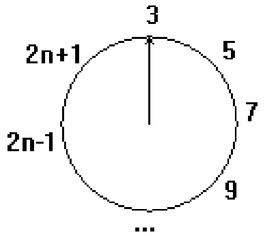
Vamos supor então que temos $2n$ pessoas originalmente. Depois da primeira volta, em que eliminamos todos os pares, ficamos com:



Chegamos a uma situação semelhante à que começa com n pessoas, exceto que cada pessoa tem seu número dobrado e diminuído de 1, ou seja,

$$J(2n) \;=\; 2J(n) \;-\; 1, \quad n \geq 1.$$

No caso ímpar, supondo que temos $2n+1$ pessoas, a pessoa de número 1 é eliminada logo após a $2n$, restando novamente n pessoas que, desta vez, tiveram seus números dobrados e aumentados de 1.



Logo, $\quad J(2n+1) \;=\; 2J(n) \;+\; 1, \quad n \geq 1.$

Combinando estas equações com sua condição inicial, chegamos à nossa relação de recorrência:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1; \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, \quad \text{para } n \geq 1; \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1, \quad \text{para } n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

A partir desta relação de recorrência podemos construir a seguinte tabela para valores pequenos de n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Percebermos que a cada potência de 2 em n é formado um grupo que sempre se inicia com $J(n) = 1$ e, à medida em que n cresce, $J(n)$ aumenta de 2 em 2 dentro desse grupo. Então se escrevermos n na forma $n = 2^m + l$, em que 2^m é a maior potência de 2 que não é maior que n, e l é o que sobrou, teremos:

$$J(2^m + l) \;=\; 2l \;+\; 1, \quad m \geq 0 \;\; e \;\; 0 \leq l \leq 2^m, \tag{1.7}$$

que é a forma fechada para 1.6 que procurávamos.

Agora, temos que provar a validade de 1.7. Vamos fazer a indução em m: quando $m = 0$, temos $l = 0$, logo o primeiro passo da indução nos dá $J(1) = 1$, o que é verdade. Vamos dividir a segunda etapa da indução em duas partes: quando l é par ou ímpar. Se l é par, como $m > 0$, $2^m + l = 2n$ e, pela segunda equação de 1.6 e usando a hipótese de indução, temos que:

$$J(\underbrace{2^m + l}_{2n}) = 2J(\underbrace{2^{m-1} + l/2}_{n}) - 1 = 2(2l/2 + 1) - 1 = 2l + 1.$$

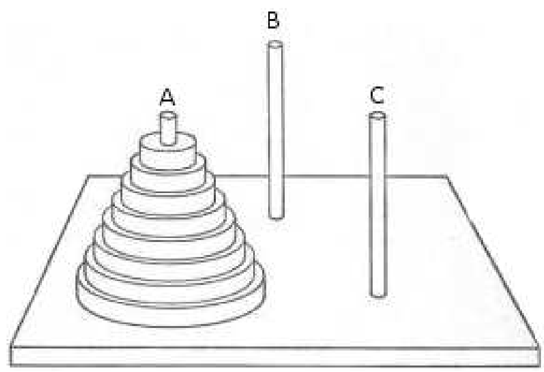
Se l é ímpar, como $m > 0$, $2^m + 1 = 2n + 1$, pela terceira equação de 1.6, temos:

$$J(\underbrace{2^m + l}_{2n+1}) = 2J(\underbrace{2^{m-1} + \frac{l-1}{2}}_{n}) + 1 = 2(2\frac{l-1}{2} + 1) + 1 = 2l + 1.$$

Portanto, a indução está completa e 1.7 está provada.

1.2 Método de compilação

Vamos estudar agora a Torre de Hanói, um quebra-cabeça criado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883, que consiste em uma base contendo três pinos, onde em um deles são dispostos oito discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo.



O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor.

Lucas anexou ao jogo uma lenda: no começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que continha três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus então chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, seguindo as regras acima. Os sacerdotes então obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Se e quando eles terminarem, a Torre de Brahma irá ruir e o mundo acabará.

Suponha que são dados n discos e seja T_n o número mínimo de movimentos que permite a transferência desses n discos de um pino para outro segundo as regras de Lucas. A melhor maneira de resolver problemas como esse é generalizar um pouco, mas para isso vamos começar analisando os casos menores: temos que $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ e $T_2 = 3$.

A resolução para T_3 nos dá uma idéia da generalização adequada. Primeiro movemos o menor disco para outro pino e o disco médio para o terceiro pino. Em seguida, como precisamos mover o maior disco, temos que deixar um pino vago e o único jeito de fazê-lo é colocando o disco menor no mesmo pino do médio. Agora, basta mover o disco grande para o pino vazio, em seguida, colocar a torre de dois discos sobre o disco maior, fazendo com que $T_3 = 2.T_2 + 1 = 7$. Generalizando, encontramos um limite superior para T_n: dada a torre com n discos, temos que mover a torre com $n-1$ discos para um outro pino, em seguida mover o n-ésimo disco e depois colocar a torre de $n-1$ discos sobre o disco maior. Logo, com $2T_{n-1}+1$ movimentos resolvemos nosso quebra-cabeça.

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1. \tag{1.8}$$

No entanto, percebe-se que movemos a torre com n discos se, e somente se, mudamos o n-ésimo disco de pino, o que ocorre se, e somente se, houver um pino vago, ou seja, se e somente se, os $n-1$ discos menores estiverem todos em um pino. Para obter tal configuração, foi necessário, no mínimo, T_{n-1} movimentos, que também é a quantidade mínima necessária para colocar a torre de $n-1$ discos sobre o n-ésimo disco, após ter movido este de pino. Então,

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1. \tag{1.9}$$

Portanto, a partir de 1.8 e 1.9 obtivemos uma igualdade e encontramos a relação de recorrência que procurávamos:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0; \\ T_n &= 2T_{n-1}+1, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Vamos primeiro generalizar a relação de recorrência. O que aconteceria se o problema tivesse produzido uma relação de recorrência parecida com 1.10 mas com constantes distintas? Tentaremos encontrar a forma fechada para a relação de recorrência mais geral:

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha; \\ f(n) &= 2f(n-1)+\beta, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Começando com $f(0) = \alpha$ e calculando progressivamente é possível construir a seguinte tabela:

n	$f(n)$
0	α
1	$2\alpha+\beta$
2	$4\alpha+3\beta$
3	$8\alpha+7\beta$
4	$16\alpha+15\beta$
5	$32\alpha+31\beta$

Parece que o coeficiente de α é 2^n e o de β é $2^n - 1$. Portanto, podemos escrever $f(n)$ da seguinte forma:

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta \tag{1.12}$$

em que

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^n, \\ B(n) &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Ao invés de provar isso por indução tentaremos um forma alternativa de chegar aos mesmos resultados. Como a relação de recorrência vale para quaisquer α e β, podemos escolher em particular $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ em 1.12, obtendo $f(n) = A(n)$ e substituindo esse resultado em 1.11 chegamos à seguinte relação:

$$\begin{aligned} A(0) &= 1, \\ A(n) &= 2A(n-1). \end{aligned}$$

cuja solução é simplesmente $A(n) = 2^n$.

Agora vamos usar a relação de recorrência 1.11 e a solução 1.12 na ordem contrária, começando com uma uma função simples $f(n)$ e procurando constantes α e β que a definirão. Substituindo a função constante $f(n) = 1$ em 1.11 temos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 2.1 + \beta. \end{aligned}$$

Estas equações são válidas para todo n quando $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, logo não precisamos provar por indução que estes parâmetros nos dão $f(n) = 1$. Já sabemos que $f(n) = 1$ é uma solução neste caso pois a relação de recorrência 1.11 define de maneira única $f(n)$ para todos os valores de n. Logo, ao substituir tais valores em 1.12, sem esquecer que $f(n) = 1$, obteremos $A(n) - B(n) = 1$.

Portanto, mostramos que as funções $A(n)$ e $B(n)$ em 1.12, que resolvem 1.11, satisfazem as equações:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^n, \\ A(n) - B(n) &= 1. \end{aligned}$$

Ao resolver estas equações, obtemos $B(n) = 2^n - 1$.

Agora que já resolvemos a generalização do nosso problema, para voltar a ele basta substituir $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ em 1.12 considerando os valores encontrados para $A(n)$ e $B(n)$. Então a solução de 1.10 é:

$$T_n = 2^n - 1. \tag{1.13}$$

O método de compilação que utilizamos consiste em escolher valores particulares para α e β e combiná-los, sendo dividido em quatro etapas:

1. Generalizar a relação de recorrência;
2. Achar valores de parâmetros gerais para os quais conhecemos a solução;
3. Compilar uma lista de casos particulares que podemos resolver;
4. Obter o caso geral combinando os casos particulares.

Precisamos de tantas soluções particulares independentes quantos forem os parâmetros independentes.

Para compreendermos melhor o método, vamos agora resolver a seguinte relação de recorrência hipotética:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0; \\ S_n &= S_{n-1} + a_n, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Supondo que a_n é igual a uma constante mais um múltiplo de n, a relação de recorrência 1.14 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha, \\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n, \quad \text{para } n > 0. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Procedendo como no exemplo anterior, percebemos que $R_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $R_2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma$ e assim por diante, fazendo com que a solução de 1.15 seja da forma geral

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma. \tag{1.16}$$

onde $A(n)$, $B(n)$ e $C(n)$ são os coeficientes de dependência nos parâmetros gerais α, β e γ.

Segundo o método de compilação, devemos tentar colocar funções simples de n no lugar de R_n, com o objetivo de encontrar parâmetros constantes α, β e γ em que a solução é particularmente simples. Ao tomar $R_n = 1$ em 1.15, temos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 1+\beta+\gamma n, \quad \text{para } n>0, \end{aligned}$$

o que implica $\alpha = 1$, $\beta = 0$, e $\gamma = 0$, logo, substituindo esses valores em 1.16, temos $A(n) = 1$.

Escolhendo $R_n = n$ em 1.15 teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ n &= n-1+\beta+\gamma n, \quad \text{para } n>0, \end{aligned}$$

donde $\alpha = 0$, $\beta = 1$, e $\gamma = 0$, e ao substituir esses valores em 1.16 teremos $B(n) = n$.

Ao escolher $R_n = n^2$ em 1.15 obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ n^2 &= (n-1)^2+\beta+\gamma n, \quad \text{para } n>0, \end{aligned}$$

o que implica $\alpha = 0$, $\beta = -1$, e $\gamma = 2$ e colocando esses valores em 1.16 temos $2C(n) - B(n) = n^2$, donde $C(n) = \frac{n^2+n}{2}$.

Ao voltarmos a 1.14, podemos supor, por exemplo, $a_0 = 2$, $a_n = 5n+7$, implicando $\alpha = 2$, $\beta = 7$ e $\gamma = 3$. A solução dessa relação de recorrência seria $S_n = A(n).2 + B(n).7 + C(n).3$, ou seja, $S_n = 1.2 + n.7 + \frac{n^2+n}{2}.3 = \frac{3n^2+17n+4}{2}$.

1.3 Representação Binária

As potências de 2 tiveram um papel importante nos dois problemas anteriores, logo é interessante examinarmos suas representações binárias. Começaremos com o Problema de Josefus (representado pela relação de recorrência 1.6) e consideraremos as representações de n e $J(n)$ em base 2. Suponha que a expansão binária de n seja:

$$n = (b_m\, b_{m-1}\, \ldots\, b_1\, b_0)_2,$$

isto é,

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2 + b_0, \text{ onde } b_m = 1 \text{ e } b_i = 0, 1.$$

Lembrando que $n = 2^m + l$, temos sucessivamente,

$$\begin{aligned}
n &= (1\, b_{m-1}\, b_{m-2}\, \ldots\, b_1\, b_0)_2 \\
l &= (0\, b_{m-1}\, b_{m-2}\, \ldots\, b_1\, b_0)_2 \\
2l &= (b_{m-1}\, b_{m-2}\, \ldots\, b_1\, b_0\, 0)_2 \\
2l+1 &= (b_{m-1}\, b_{m-2}\, \ldots\, b_1\, b_0\, 1)_2, \quad \text{como } b_m = 1 \text{ e } J(n) = 2l+1, \\
J(n) &= (b_{m-1}\, b_{m-2}\, \ldots\, b_1\, b_0\, b_m)_2.
\end{aligned}$$

Logo, acabamos de provar que

$$J((b_m\, b_{m-1}\, \ldots\, b_1\, b_0)_2) = (b_{m-1}\, b_{m-2}\, \ldots\, b_1\, b_0\, b_m)_2.$$

ou seja, obtemos $J(n)$ de n fazendo uma translação cíclica para a esquerda de um dígito binário.

Vamos agora generalizar o Problema de Josefus da seguinte forma

$$\begin{aligned}
j(1) &= \alpha, \\
j(2n) &= 2j(n) + \beta, \quad n \geq 1, \\
j(2n+1) &= 2j(n) + \gamma, \quad n \geq 1,
\end{aligned} \tag{1.17}$$

e resolvê-lo em representação binária. Tomando $\beta_0 = \beta$ e $\beta_1 = \gamma$, podemos reescrever a relação de recorrência generalizada 1.17 como:

$$\begin{aligned} j(1) &= \alpha, \\ j(2n+k) &= 2j(n) + \beta_k, \quad \text{para } k = 0,1 \text{ e } n \geq 1. \end{aligned}$$

Expandindo esta relação de recorrência em notação binária:

$$\begin{aligned} j((\overbrace{b_m\, b_{m-1}\, \ldots\, b_1}^{2n}\ \overbrace{b_0}^{k})_2) &= 2j(\overbrace{b_m\, b_{m-1}\, \ldots\, b_1}^{n}) + \beta_{b_0} \\ &= 4j(b_m\, b_{m-1}\, \ldots\, b_2) + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= \quad \vdots \\ &= 2^m j((b_m)_2) + 2^{m-1}\beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= 2^m \alpha + 2^{m-1}\beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0}. \end{aligned}$$

Suponha que modifiquemos agora a notação em base 2 permitindo dígitos arbitrários em vez de apenas 0 e 1. Os cálculos acima nos dizem que:

$$j((b_m\, b_{m-1}\, \ldots\, b_1\, b_0)_2) = (\alpha\, \beta_{b_{m-1}}\, \beta_{b_{m-2}}\, \ldots\, \beta_{b_1}\, \beta_{b_0})_2. \tag{1.18}$$

Aproveitando que estamos tratando de uma forma alternativa de resolver o Problema de Josefus, vamos tentar outra forma de resolver o problema original. Para tanto, vamos utilizar as funções piso e teto (respectivamente, o maior inteiro menor ou igual a x, representado por $\lfloor x \rfloor$; e o menor inteiro maior ou igual a x, representado por $\lceil x \rceil$), que dão uma nova dimensão ao estudo de relações de recorrência. Por exemplo, a relação correspondente ao Problema de Josefus pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} J(1) &= 1, \\ J(n) &= 2J(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) - (-1)^n, \quad \text{para } n > 1. \end{aligned}$$

Considerando finalmente o Problema de Josefus original, em que cada terceira pessoa é eliminada, mas em outra abordagem: ao passarmos por uma pessoa que não é imediatamente eliminada podemos lhe dar um novo número. Logo, as pessoas de números 1 e 2 ganham novos números $n+1$ e $n+2$, em seguida eliminamos a pessoa de número 3, e renomeamos 4 e 5 como $n+5$ e $n+4$, depois eliminamos a pessoa com número 6. Continuando esse processo, renomearemos $3k+1$ e $3k+2$ como $n+2k+1$ e $n+2k+2$, depois eliminamos $3k+3$ e assim sucessivamente até que a pessoa $3n$ seja eliminada ou sobreviva.

Por exemplo, quando $n = 10$, os números são

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12		13	14		15	16		17
18			19	20			21		22
			23	24					25
			26						27
			28						
			29						
			30						

A k-ésima pessoa eliminada acaba com o número $3k$, logo descobriremos o sobrevivente se descobrirmos o número original da pessoa que ficou com o número $3n$.

Dada uma pessoa de número $N > n$, sabemos que a mesma tem que ter tido um número anterior e nosso objetivo é encontrá-lo . Como sabemos que $N = n+2k+1$ ou $N = n+2k+2$, percebe-se que teremos $k = \lfloor \frac{N-n-1}{2} \rfloor$; o número anterior era $3k+1$ ou $3k+2$, respectivamente, isto é, o número anterior era $3k+(N-n-2k) = k+N-n$. Portanto, podemos calcular o número original do sobrevivente $J_3(n)$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&N \;:=\; 3n;\\
&\textbf{while}\; N > n \;\textbf{do}\; N \;:=\; \left\lfloor \frac{N-n-1}{2} \right\rfloor + N - n;\\
&J_3 \;:=\; N.
\end{aligned}
$$

Isto não é uma forma fechada para o Problema de Josefus, mas certamente é uma forma mais rápida de calcular a resposta quando n é grande.

Podemos simplificar o algoritmo se usarmos a variável $D = 3n+1-N$ no lugar de N, mudança que corresponde a fazer a contagem regressiva de $3n$ a 1 ao invés de 1 a $3n$. Logo,

$$\begin{aligned} D &= := 3n+1-\left(\left\lfloor\frac{(3n+1-D)-n-1}{2}\right\rfloor+3n+1-D\right) \\ &= n+D-\left\lfloor\frac{2n-D}{2}\right\rfloor = D-\left\lfloor\frac{-D}{2}\right\rfloor = D+\left\lceil\frac{D}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{3}{2}D\right\rceil \end{aligned}$$

e podemos reescrever o algoritmo como

$$\begin{aligned} &D := 1; \\ &\textbf{while } D \leq 2n \textbf{ do } D := \left\lceil\frac{3}{2}D\right\rceil; \\ &J_3 := 3n+1-D. \end{aligned}$$

encontrando finalmente uma solução para o Problema de Josefus original.

Usando a notação em representação binária introduzida anteriormente, problemas complicados possuem soluções mais simples. Para exemplificar tal fato, vamos resolver uma variação do problema da Torre de Hanói, visto na seção anterior: suponha que em uma Torre de Hanói existem n tamanhos diferentes de discos e exatamente m_k discos de tamanho k. Vamos tentar determinar $A(m_1,\ldots,m_n)$, o número mínimo de movimentos necessários para transferir uma torre quando discos de mesmo tamanho são indistinguíveis.

Para entendermos melhor o problema, começaremos com uma torre contendo $2n$ discos de n tamanhos diferentes, dois de cada tamanho. Quantos movimentos $A(2,\ldots,2)$ precisamos para transferir uma torre dupla de um pino para outro, se discos de mesmo tamanho são indistinguíveis entre si? O raciocínio é análogo ao feito na torre original, com a diferença de que toda vez que movermos um tamanho de disco em vez de movermos somente uma unidade, moveremos duas, ou seja (como discos de mesmo tamanho são indistinguíveis) é o mesmo que mover n discos, apenas fazemos cada movimento em dobro. Logo, $A(2,\ldots,2) = 2T_n = 2^{n+1}-2$.

Voltando à torre com n tamanhos de discos, sendo m_k discos de tamanho k, começaremos analisando casos menores: se temos somente um tamanho de disco, para mover a torre basta m_1 movimentos. Com dois tamanhos de disco, primeiro vamos mover os m_1 discos menores para um pino, em seguida os m_2 discos maiores para o pino vazio e depois recolocaremos a torre de m_1 discos menores sobre os m_2 maiores, totalizando $A(m_1,m_2) = m_1 + m_2 + m_1 = 2m_1 + m_2$. Percebemos que a generalização desse problema é análoga à da torre original: movemos os m_n discos do maior tamanho somente se movermos a torre de $n-1$ tamanhos menores de discos para outro pino, em seguida, após ter movido os m_n discos do maior tamanho, basta recolocar a torre de $n-1$ tamanhos menores de discos sobre os m_n maiores. Portanto, a relação de recorrência procurada é:

$$\begin{aligned} A(m_1) &= m_1, \\ A(m_1,\ldots,m_n) &= 2A(m_1,\ldots,m_{n-1}) + m_n. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Essa é uma equação do tipo "Josefus generalizada", isto é, do tipo 1.18 com $\alpha = m_1$ e $\beta_{b_k} = m_k$. Logo a solução de 1.19 é:

$$\begin{aligned} A(m_1,\ldots,m_n) &= (m_1 \ \ldots \ m_n)_2 \\ &= 2^{n-1}m_1 + \cdots + 2m_{n-1} + m_n. \end{aligned}$$

2 A Recorrência na Soma

Somas e relações de recorrência estão intimamente relacionadas. A soma

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

é equivalente à relação de recorrência 1.14

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_n &= S_{n-1} + a_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Podemos calcular, portanto, uma forma fechada para uma dada soma utilizando os métodos do capítulo anterior. Começaremos calculando a soma Q_n dos n primeiros quadrados perfeitos pelo método de compilação.

2.1 Método de compilação

A soma $Q_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$ dos n primeiros quadrados perfeitos pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} Q_0 &= 0; \\ Q_n &= Q_{n-1} + n^2, \quad n > 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Uma generalização da relação de recorrência 1.15 será suficiente para somarmos termos que envolvem n^2:

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha, \\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2, \quad \text{para } n > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A solução de 2.2 será da forma geral:

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta. \tag{2.3}$$

Perceba que já determinamos $A(n)$, $B(n)$ e $C(n)$, pois 2.2 é igual a 1.15 quando $\delta = 0$. Basta encontrar uma equação que determine $D(n)$, pra tanto vamos tomar $R_n = n^3$ em 2.2, obtendo

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ n^3 &= (n-1)^3 + \beta + \gamma n + \delta n^2, \quad \text{para } n > 0. \end{aligned}$$

o que implica $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$ e $\delta = 3$, e ao colocarmos esses valores em 2.3 teremos $B(n) - 3C(n) + 3D(n) = n^3$, donde $D(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Estamos interessados na soma $Q_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$, representada sob a forma de relação de recorrência por 2.1, que é 2.2 com $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ e $\delta = 1$. Portanto $Q_n = D(n)$ e a forma fechada para a soma que procuramos é:

$$Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Calcularemos agora uma soma que nos dará uma generalização um pouco diferente. Queremos calcular a soma alternada dos n primeiros quadrados perfeitos, ou seja, procuraremos a forma fechada para $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$, que escrita como relação de recorrência adquire a seguinte forma

$$\begin{aligned} P_0 &= 0, \\ P_n &= P_{n-1} + (-1)^n n^2, \quad n > 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

cuja generalização é

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha, \\ R_n &= R_{n-1} + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2, \quad \text{para } n > 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\tag{2.6}$$

A solução de 2.5 tem a forma geral:

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta. \tag{2.7}$$

Vamos partir para a compilação, lembrando sempre que escolhemos funções R_n de forma que ao descobrir os valores dos parâmetros α, β, γ e δ e substitui-los em 2.7 encontremos equações simples e mais fáceis de resolver. Começaremos com $R_n = 1$. Ao substituir essa função em 2.5 temos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 1 + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2, \quad \text{para } n > 0, \end{aligned}$$

o que implica $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma = \delta = 0$. Substituindo esses valores em 2.7 temos que $A(n) = 1$.

Tomando $R_n = (-1)^n$ em 2.5 teremos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ (-1)^n &= (-1)^{n-1} + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2, \quad \text{para } n > 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $\gamma = \delta = 0$. Ao substituir os valores dos parâmetros em 2.7 obtemos $A(n) + 2B(n) = (-1)^n$, donde $B(n) = \frac{(-1)^n + 1}{2}$.

Ao substituir $R_n = (-1)^n n$ em 2.5 teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ (-1)^n n &= (-1)^{n-1}(n-1) + (-1)^n\beta + (-1)^n\gamma n + (-1)^n\delta n^2, \quad \text{para } n > 0, \end{aligned}$$

donde $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$ e $\delta = 0$, que ao serem substituídos em 2.7 nos dá $-B(n) + 2C(n) = (-1)^n n$. Logo, $C(n) = \frac{(-1)^n 2n + (-1)^n + 1}{4}$.

Finalmente, escolhendo $R_n = (-1)^n n^2$ em 2.5 temos

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha, \\ (-1)^n n^2 &= (-1)^{n-1}(n-1)^2 + (-1)^n \beta + (-1)^n \gamma n + (-1)^n \delta n^2, \quad \text{para } n > 0, \end{aligned}$$

o que implica $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$ e $\delta = 2$. Substituindo os valores dos parâmetros em 2.7 obtemos $B(n) - 2C(n) + 2D(n) = (-1)^n n^2$, logo teremos $D(n) = \frac{(-1)^n (n^2+n)}{2}$.

Estamos interessados na soma $P_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$, representada sob a forma de relação de recorrência por 2.4, que é um caso particular de 2.5 com $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ e $\delta = 1$. Portanto $P_n = D(n)$ e a forma fechada para a soma que procuramos é:

$$P(n) = \frac{(-1)^n (n^2 + n)}{2}.$$

2.2 Fator Somante

Assim como muitas somas podem ser escritas como relações de recorrência, estas também podem ser reduzidas a somas, portanto vamos estudar um método especial para resolver relações de recorrência que poderiam ter uma resolução complicada por outros métodos. Vamos começar por um exemplo familiar, a Torre de Hanói:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \quad \text{para } n > 0. \end{aligned}$$

Colocaremos esta relação numa forma similar a 1.14.Para tanto, basta dividir os dois lados de 1.10 por 2^n:

$$\begin{aligned}\frac{T_0}{2^0} &= 0;\\ \frac{T_n}{2^n} &= \frac{T_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \quad \text{para } n > 0.\end{aligned}$$

Podemos tomar $S_n = \frac{T_n}{2^n}$ para obter

$$\begin{aligned}S_0 &= 0;\\ S_n &= S_{n-1} + 2^{n-1}, \quad \text{para } n > 0.\end{aligned}$$

Então 1.10 se transforma em

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}.$$

(Note que deixamos de fora da soma o termo com $k = 0$)

Para calcular essa soma, vamos utilizar uma truque parecido com o que foi utilizado na seção 1.1 para calcular a soma dos n primeiros números naturais:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_n = & 1 & + & r & + & r^2 & + \cdots + & r^{n-1} & + & r^n & & \\ -rS_n = & & & r & - & r^2 & - \cdots - & r^{n-1} & - & r^n & - & r^{n+1} \\ \hline (1-r)S_n = & 1 & + & 0 & + & 0 & + \cdots + & 0 & + & 0 & - & r^{n+1} \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(1-r)S_n &= 1 - r^{n+1}\\ S_n &= \frac{1-r^{n+1}}{(1-r)}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Como na nossa soma $r = \frac{1}{2}$,temos:

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

No entanto, ao fazer tal truque acabamos por somar a unidade referente a $k = 0$, logo temos que subtrair 1 do resultado que encontramos:

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Lembrando que queremos calcular a forma fechada para o problema da Torre de Hanói, como $S_n = \frac{T_n}{2^n}$, tornou-se simples encontrar a solução:

$$\begin{aligned} T_n &= S_n 2^n \\ &= \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] 2^n \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

A questão a ser respondida agora é: como saberemos por qual fator dividir a relação de recorrência? Tal truque reduz praticamente qualquer relação recorrente da forma

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n \tag{2.9}$$

a uma soma. A idéia é multiplicar ambos os lados por um *fator somante* s_n:

$$s_n a_n T_n = s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n.$$

Tal fator é escolhido de forma que

$$s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}.$$

Então escrevendo $S_n = s_n a_n T_n$ obtemos

$$\begin{aligned} s_n a_n T_n &= s_{n-1} a_{n-1} T_{n-1} + s_n c_n \\ S_n &= S_{n-1} + s_n c_n. \end{aligned}$$

Como em toda relação de recorrência temos que definir S_0, definiremos como $s_0 a_0 T_0$, logo

$$S_n = s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k$$

como $s_n b_n = s_{n-1}a_{n-1}$, temos $s_1 b_1 = s_0 a_0$, o que implica

$$S_n = s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k.$$

Mas como queremos encontrar a solução de 2.9, sabendo que $S_n = s_n a_n T_n$, temos que:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{S_n}{s_n a_n} \\ T_n &= \frac{1}{s_n a_n}\left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Resta ainda saber como vamos encontrar o fator somante s_n correto que resolve 2.9. A relação $s_n b_n = s_{n-1}a_{n-1}$, ou seja $s_n = \frac{s_{n-1}a_{n-1}}{b_n}$, pode ser expandida, nos dizendo que a fração

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_2} \tag{2.11}$$

ou qualquer múltiplo constante desse valor, será um fator somante apropriado. No caso da Torre de Hanói, por exemplo, $a_n = 1$ e $b_n = 2$, fazendo com que $s_n = 2^{-n-2}$. No nosso exemplo, escolhemos $s_n = 2^{-n}$, que é um múltiplo constante do fator somante encontrado usando 2.11.

Vamos aplicar esse método a uma relação de recorrência cuja solução seria um pouco mais difícil de encontrar pelos métodos do capitulo 1:

$$\begin{aligned} T_0 &= 5, \\ 2T_n &= nT_{n-1} + 3n!, \qquad n > 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nesse caso $a_n = 2$, $b_n = n$ e $c_n = 3n!$. Substituindo esses valores em 2.11, temos:

$$s_n = \frac{\overbrace{2.2.2\ldots 2}^{n-1\ vezes}}{n.(n-1)\ldots 2} = \frac{2^{n-1}}{n!}.$$

Logo, ao substituir esse valor, juntamente com os respectivos valores de a_n, b_n e c_n, em 2.10 vamos obter:

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{s_n a_n}\left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) \\
&= \frac{1}{\frac{2^{n-1}}{n!}.2}\left(1.1.5 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!}.3k!\right) \\
&= \frac{n!}{2^n}\left(5 + 3\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\right), \quad \text{usando o resultado encontrado em 2.8, temos que:} \\
&= \frac{n!}{2^n}(5 + 3(2^n - 1)), \quad \text{então chegamos à solução de 2.12:} \\
&= \frac{n!}{2^{n-1}} + 3n!.
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] GRAJAM,Ronald J., KNUTH, Donald E., PATASHNIK,Oren. *Matemática Concreta: Fundamentos para a Ciência da Computação*.Rio de Janeiro.Livros Técnicos e Científicos Editora, 1995.

[2] SANTOS, J.Plínio O., MELLO, Margarida P., MURARI, Idani T.C. *Introdução à Análise Combinatória*. Campinas. Editora da UNICAMP, 2002.