

Problema da Árvore Geradora Mínima

*The Minimum Spanning Tree
Problem*

O Problema da Árvore Geradora Mínima (*The Minimum Spanning Tree Problem*)

Considere uma rede não-direcionada (grafo), conectada e associado a cada arco uma distância (custo, tempo, etc) não-negativa. O objetivo é encontrar o caminho mais curto de tal maneira que os arcos forneçam um caminho entre todos os pares de nós.

Exemplos de Aplicações:

- 1)Projeto de redes de telecomunicação (redes de computadores, redes de fibra-ótica, redes de telefonia, redes de televisão a cabo, etc).
- 2)Projeto de rodovias, ferrovias, etc.
- 3)Projeto de redes de transmissão de energia.

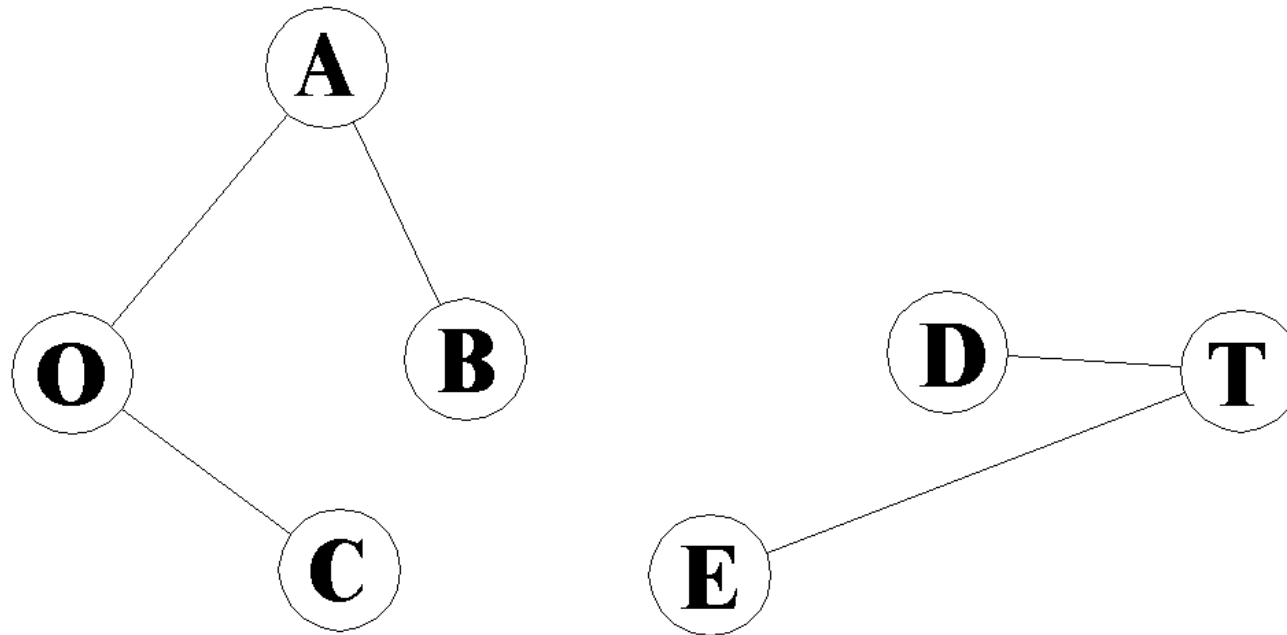
Conceito Fundamental Envolvido

Uma rede com n nós requer somente $n-1$ arcos para fornecer um caminho entre cada par de nós.

Os $n-1$ arcos devem formar uma Árvore Geradora. O problema então é encontrar a Árvore Geradora com o menor comprimento total.

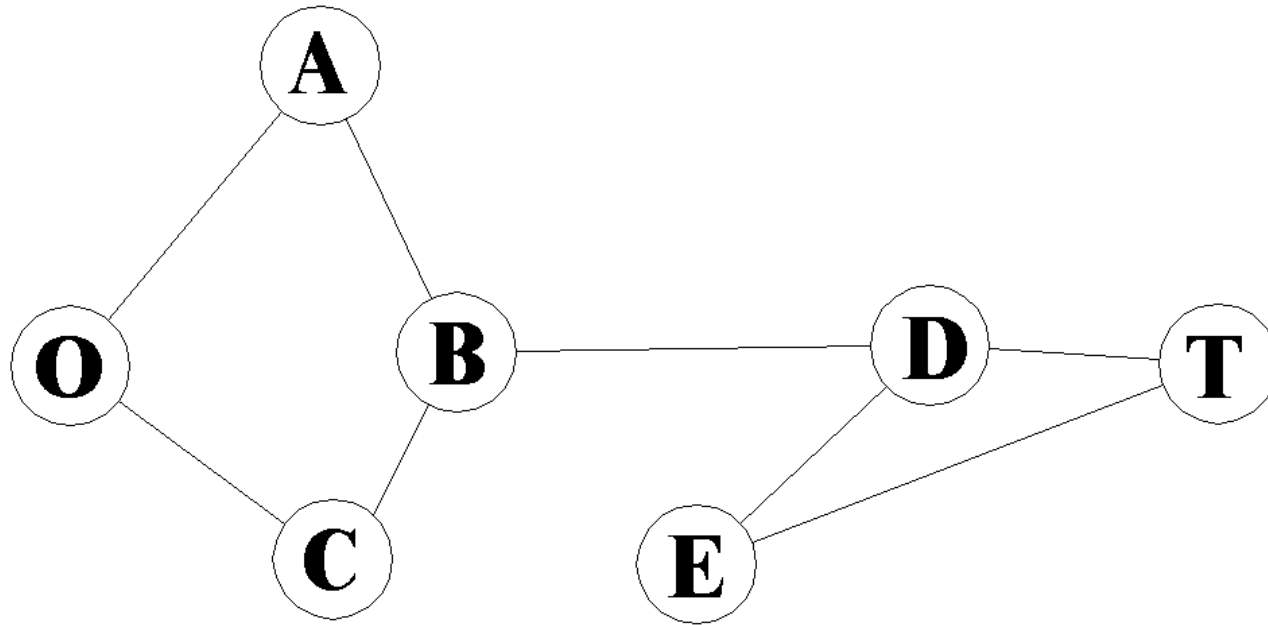
O problema parte do princípio que existe apenas os nós de uma rede. Os arcos são “arcos potenciais”.

Exemplo 1 (contra-exemplo)



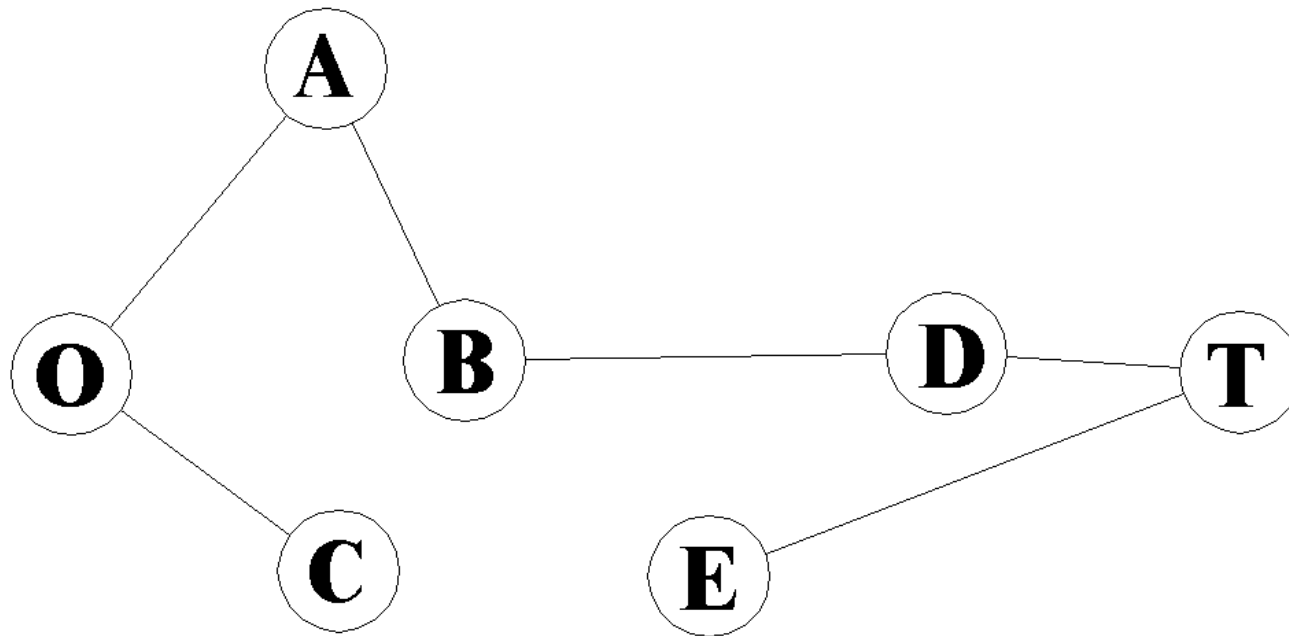
A figura acima não é uma Árvore Geradora porque os nós O, A, B e C não estão conectados aos nós D, E e T. Aqui existe, 2 Árvore Geradoras.

Exemplo 2 (contra-exemplo)



A figura acima gera uma rede, porém não é uma árvore porque existe 2 ciclos (O-A-B-C e D-E-T).

Exemplo 3



A figura acima é uma Árvore Geradora (não há ciclos, todo par de nós está conectado e existe 6 $(n-1)$ arcos para 7 (n) nós. Esta rede é uma solução viável, porém não é ótima (não é uma Árvore Geradora Mínima). Existe outra configuração desta rede que fornece menor distância total.

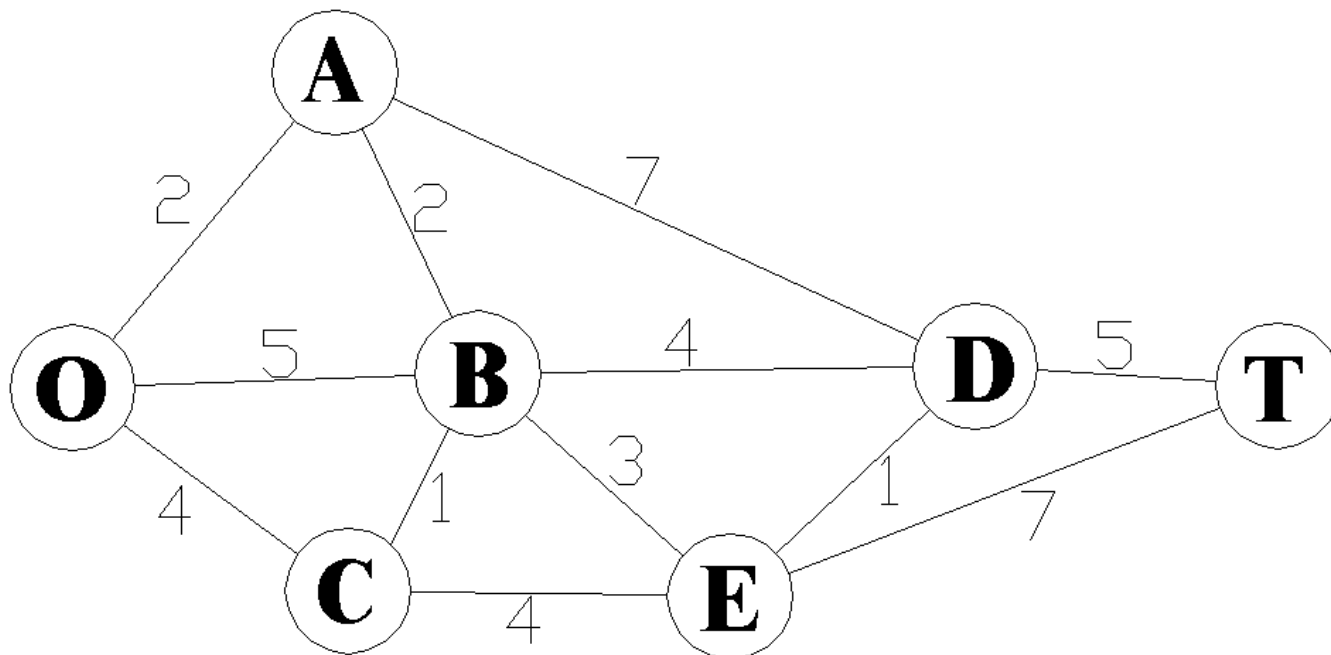
Algoritmo

- 1) Selecionar qualquer nó e conectá-lo (isto é, adicionar um arco) para o nó mais próximo.
- 2) Identificar o nó desconectado mais próximo para um nó conectado e então conectar estes dois nós. Repetir este passo até que todos os nós tenham sido conectados.

Observação: no caso de empate de dois ou mais nós não conectados mais próximos de um nó conectado, escolher arbitrariamente um dos nós não conectados. Ainda assim, a solução ótima é garantida, porém este fato pode ser um sinal de que exista múltiplas soluções ótimas. Todas as soluções ótimas podem ser obtidas executando novamente o algoritmo com decisões diferentes nos casos de empate.

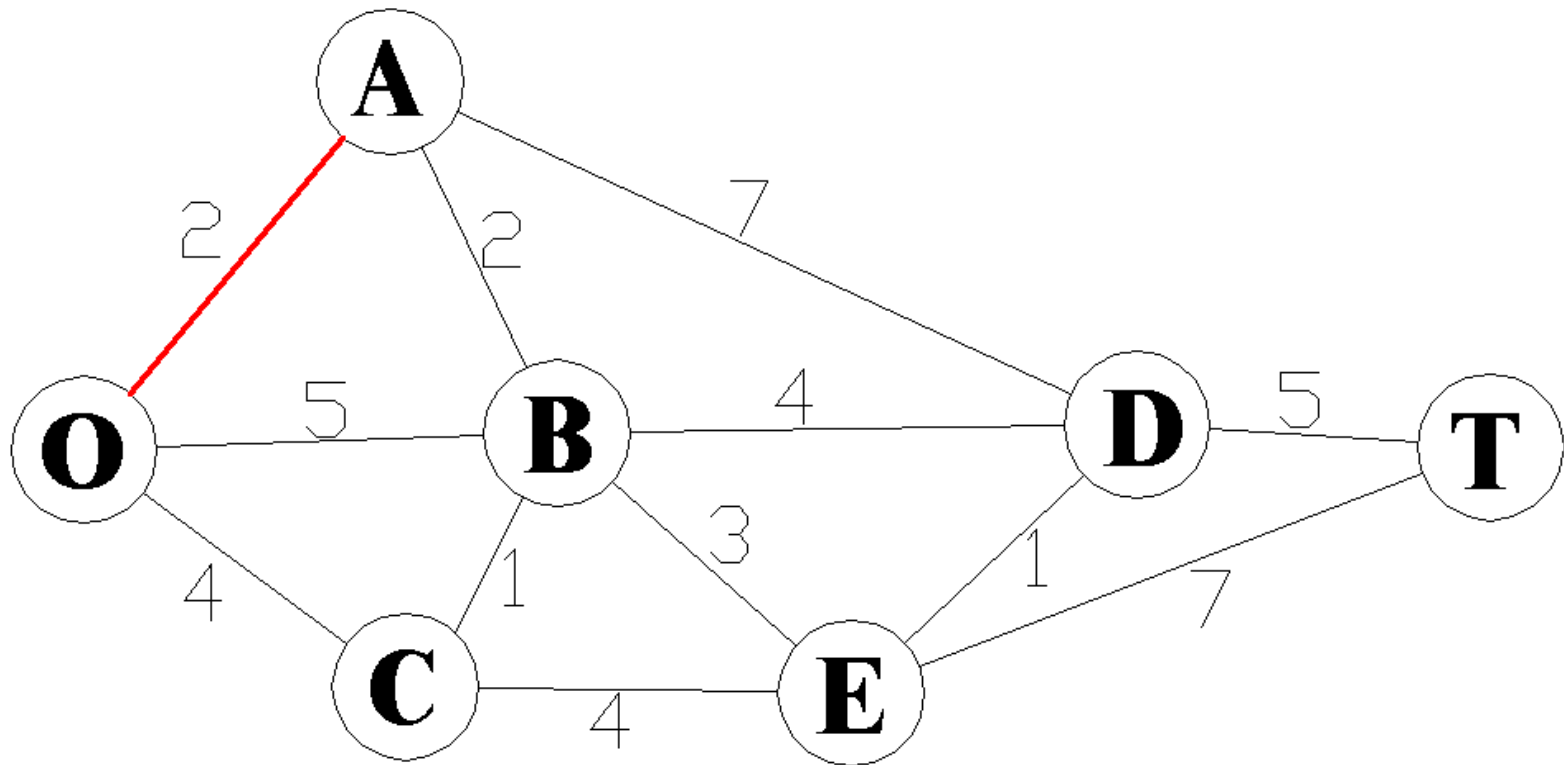
Exemplo

A rede do Parque Seervada necessita interligar todos os postos de guarda por uma linha telefônica.

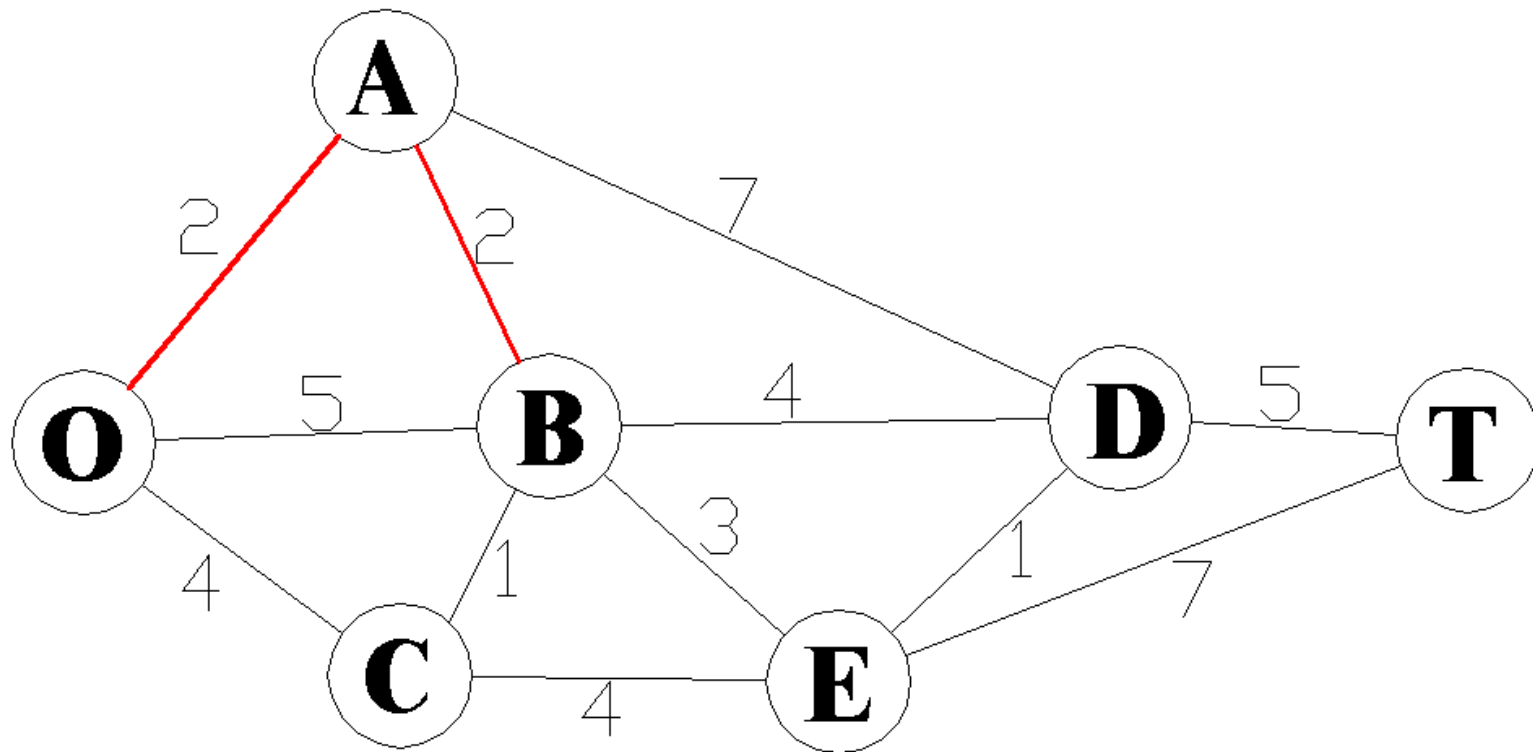


As linhas representam “arcos potenciais”.

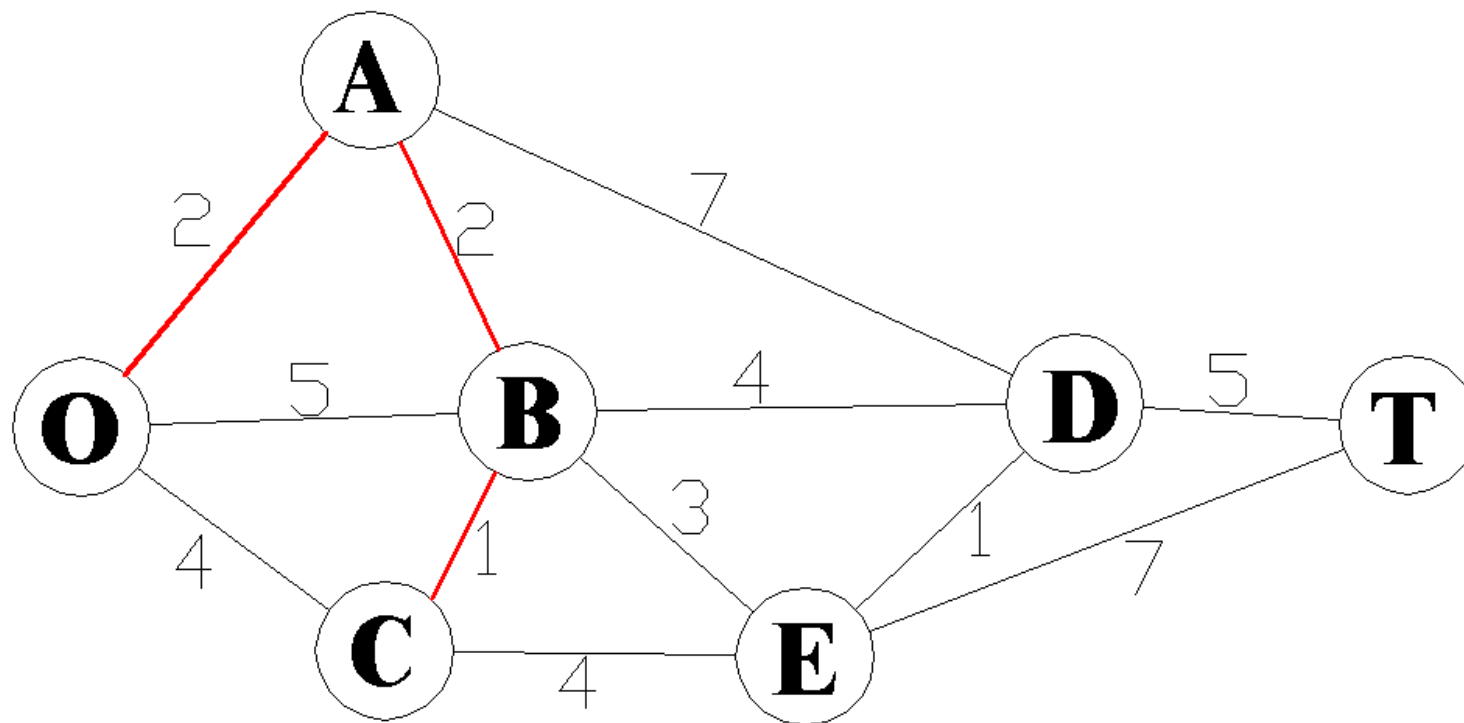
Arbitrariamente, seleciona o nó O para iniciar (poderia ter sido qualquer outro nó). O nó não conectado mais próximo de O é A. Conectar o nó A para o nó O.



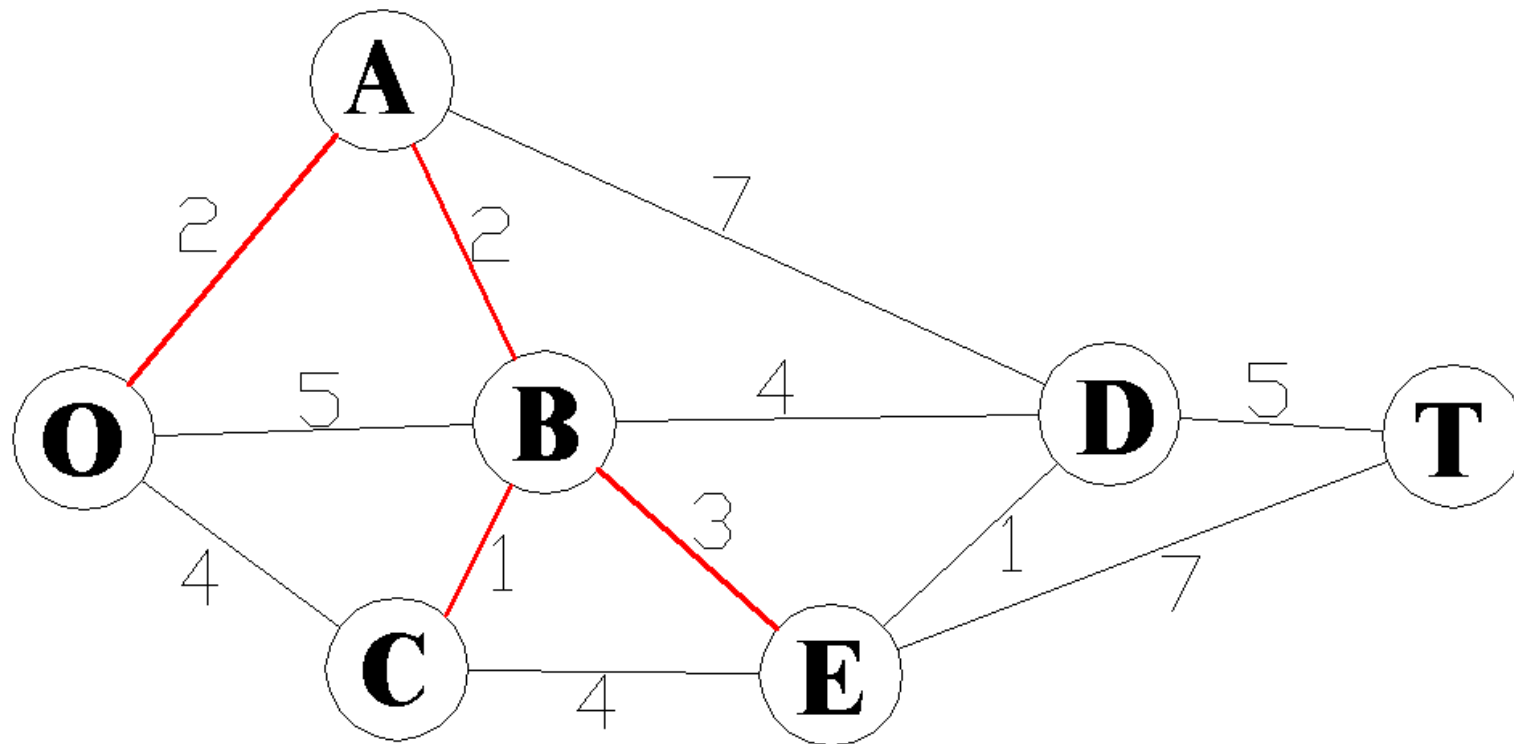
O nó não conectado mais próximo dos nós O e A é o nó B (mais próximo de A). Conectar o nó B para o nó A.



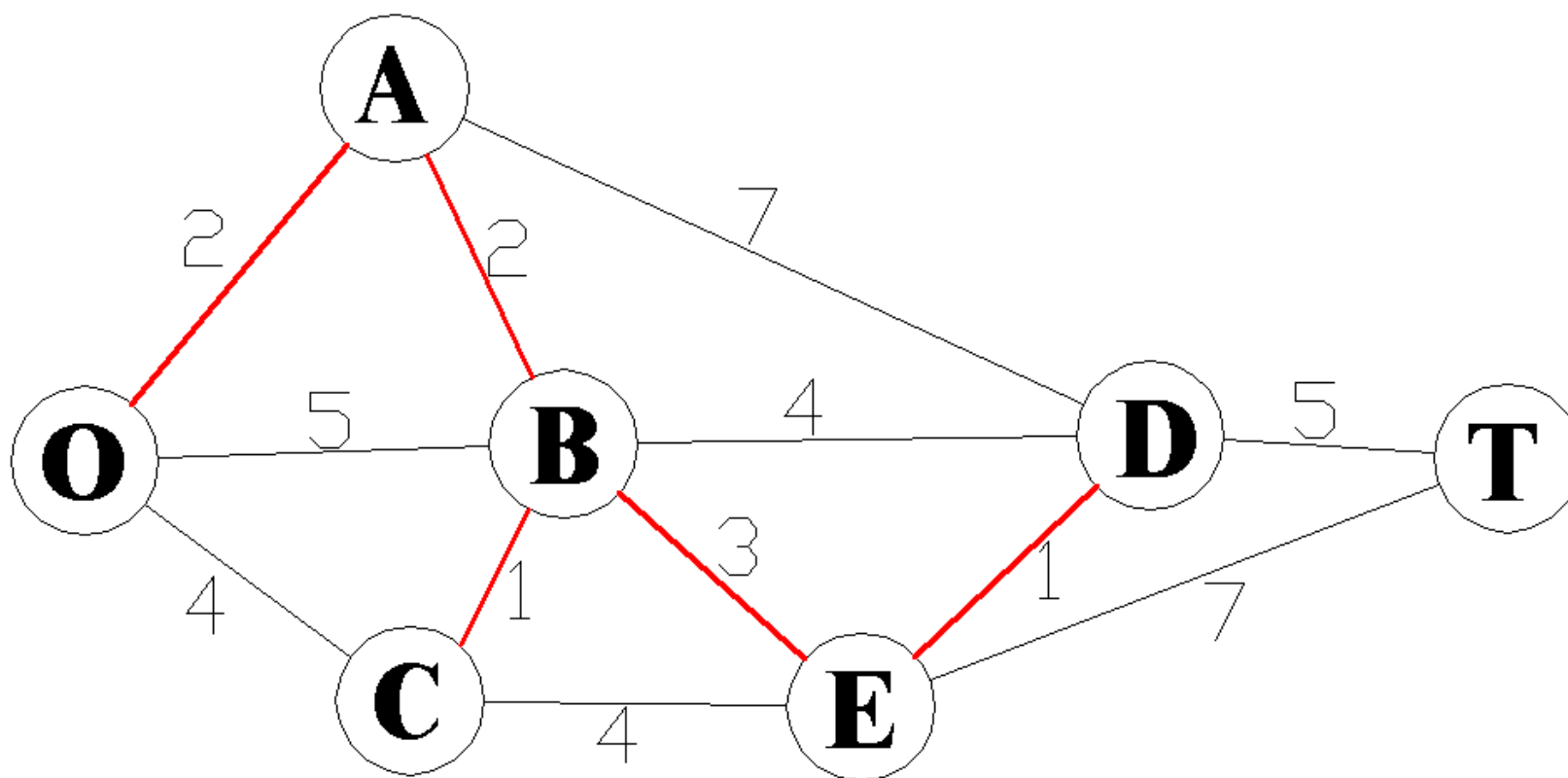
O nó não conectado mais próximo dos nós O, A e B é o nó C (mais próximo de B). Conectar o nó C para o nó B.



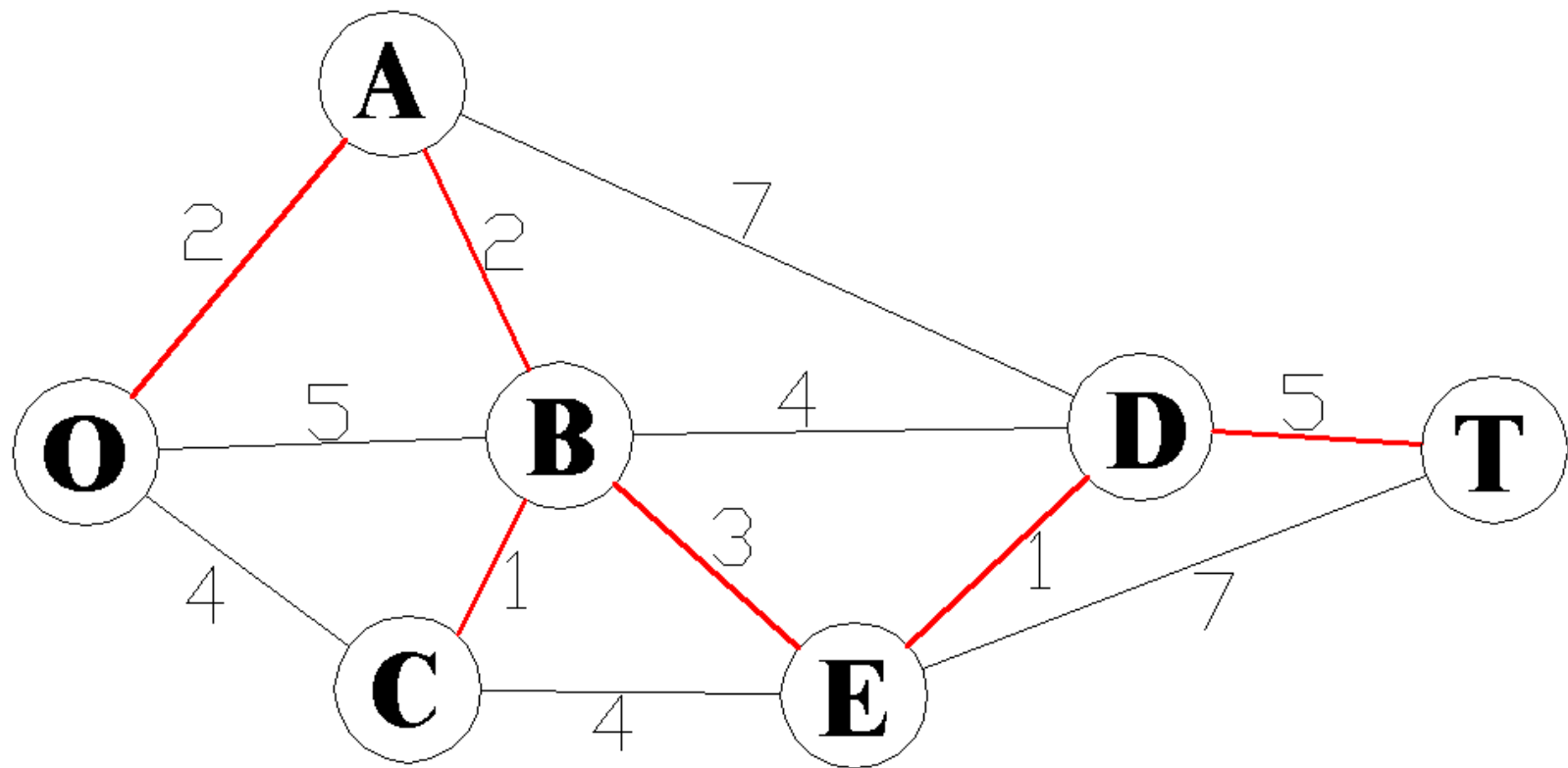
O nó não conectado mais próximo dos nós O, A, B e C é o nó E (mais próximo de B). Conectar o nó E para o nó B.



O nó não conectado mais próximo dos nós O, A, B, C e E é o nó D (mais próximo de E). Conectar o nó D para o nó E.



O nó não conectado mais próximo dos nós O, A, B, C, E e D é o nó T (mais próximo de D). Conectar o nó T para o nó D.



A solução final possui uma distância total de 14 milhas. Através desta rede, é possível ir de um posto a qualquer outro posto.

Independente do nó inicial, a solução será a mesma.

