Aula 04 – Fourier I

Prof. Dr. Thiago Martini Pereira
Processamentos de sinais

Aviso

Trabalho T2

será no dia 26/10/2019

Serie de Fourier

Decomposição de Sinais em Componentes Senoidais:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nwt) + b_n sen(nwt))$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(nwt) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) sen(nwt) dt$$

Serie Fourier complexa

Pode-se representar um sinal periódico, por meio de uma série de Fourier complexa. A ideia básica é escrever a série de Fourier em qualquer uma das formas complexas

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{jn\frac{2\pi t}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{jnwt}$$

Onde:

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

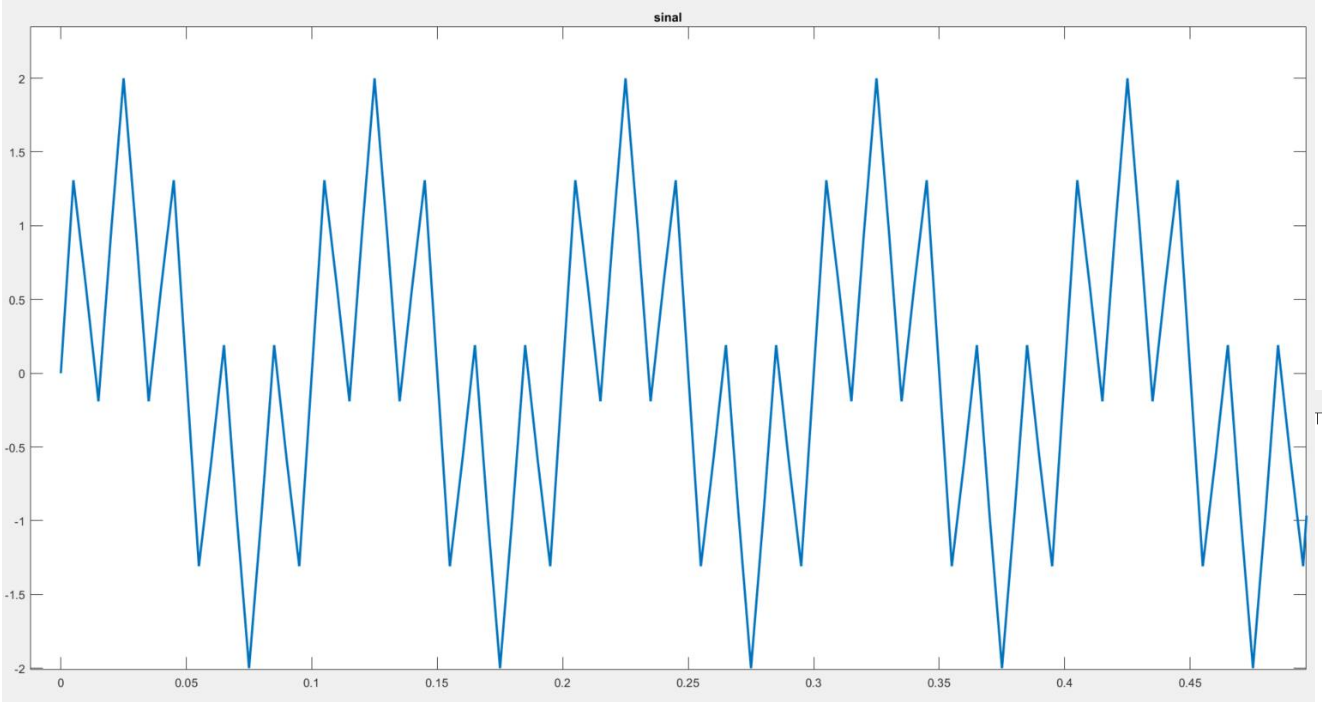
n : número inteiro.

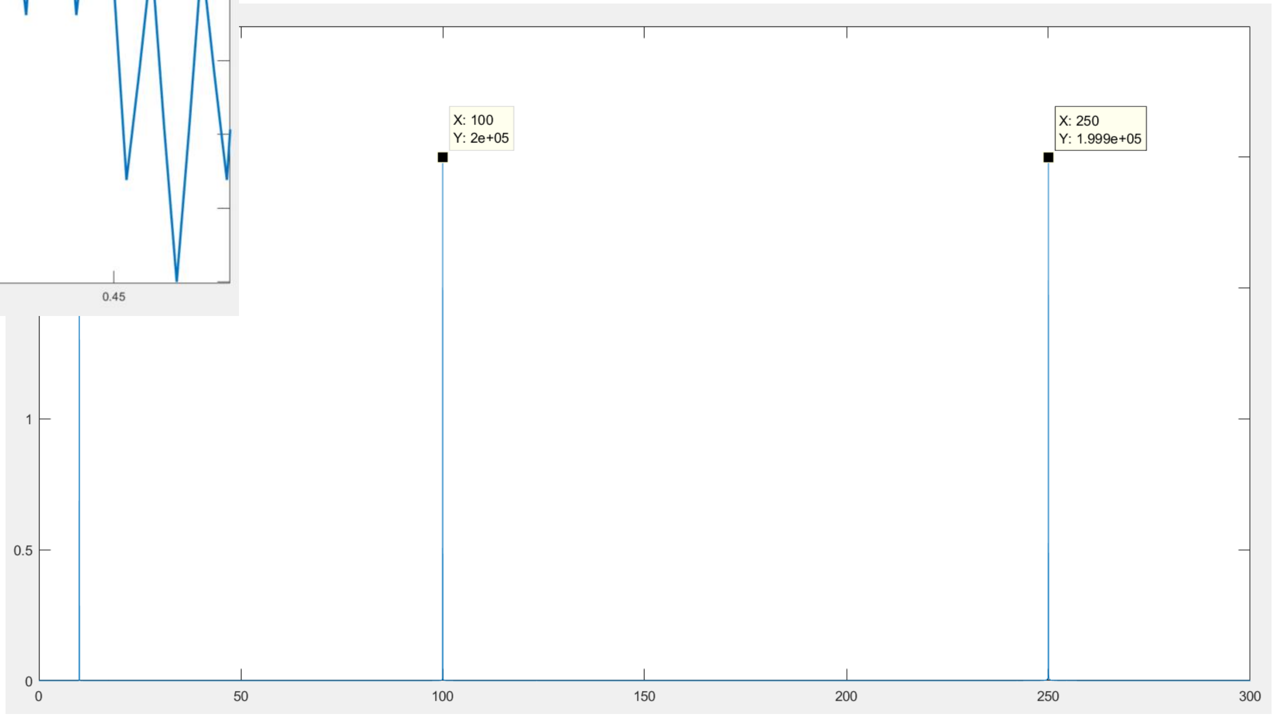
Exemplo 01

```
y = sin(t) + sin(3*t)/3 + sin(5*t)/5+ sin(7*t)/7+ sin(9*t)/9;
```

Gerar um sinal na forma de uma onda quadrada, com período 2 pi. Demonstrar que a série de Fourier é valida para a construção dessa onda quadrada. Faça um gráfico contendo a soma cumulativa das harmônicas 1ª, 3ª, 5ª, 7ª e 9ª

Transformada de fourier





Transformada de fourier

Embora a série de Fourier tenha sido desenvolvida para a representação de sinais periódicos, é possível representar também sinais não periódicos, usando uma técnica, denominada Transformada de Fourier.

Transformada continua de fourier

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

propriedades da transformada

Periodicidade: A transformada de Fourier de tempo discreto X (ejω) é periódica
em ω com o período 2π.

$$\omega \in [0, 2\pi]$$

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j[\omega+2\pi]})$$

$$[-\pi, \pi]$$

$$\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] \quad \text{(even symmetry)}$$

$$\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})] = -\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] \quad \text{(odd symmetry)}$$

$$|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \quad \text{(even symmetry)}$$

$$\angle X(e^{-j\omega}) = -\angle X(e^{j\omega}) \quad \text{(odd symmetry)}$$

Exemplo 02

- Dada as funções

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad\qquad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

- Determine a transformada contínua de Fourier da função. A seguir determine a transformada inversa para retornar a função original. Dica utilize matematica simbolica do matlab

Transformada discreta de fourier

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{-j\frac{\pi}{N}kn}$$

$$\mathbf{X} \quad = \mathbf{x} \quad \left[\exp\left(-j \frac{\pi}{M} \mathbf{n}^T \mathbf{k} \right) \right]$$

Transformada discreta de fourier

K = 1:M

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{-j\frac{\pi}{M}kn}$$

Demonstrar a vetorização na losa

$$e^{-j\frac{\pi}{N}kn} = (e^{-j\frac{\pi}{M}}).\hat{}kn$$

propriedades da transformada

Periodicidade: A transformada de Fourier de tempo discreto X (ejω) é periódica
em ω com o período 2π.

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j[\omega+2\pi]})$$

$\omega \in [0, 2\pi]$

$[-\pi, \pi]$

Transformada Rápida de Fourier

- As transformadas rápidas de Fourier, mais conhecidas por FFT (*Fast Fourier Transforms*) nada mais são do que algoritmos para computador desenvolvidos especialmente para realizar a transformada discreta de Fourier de forma rápida e eficiente.

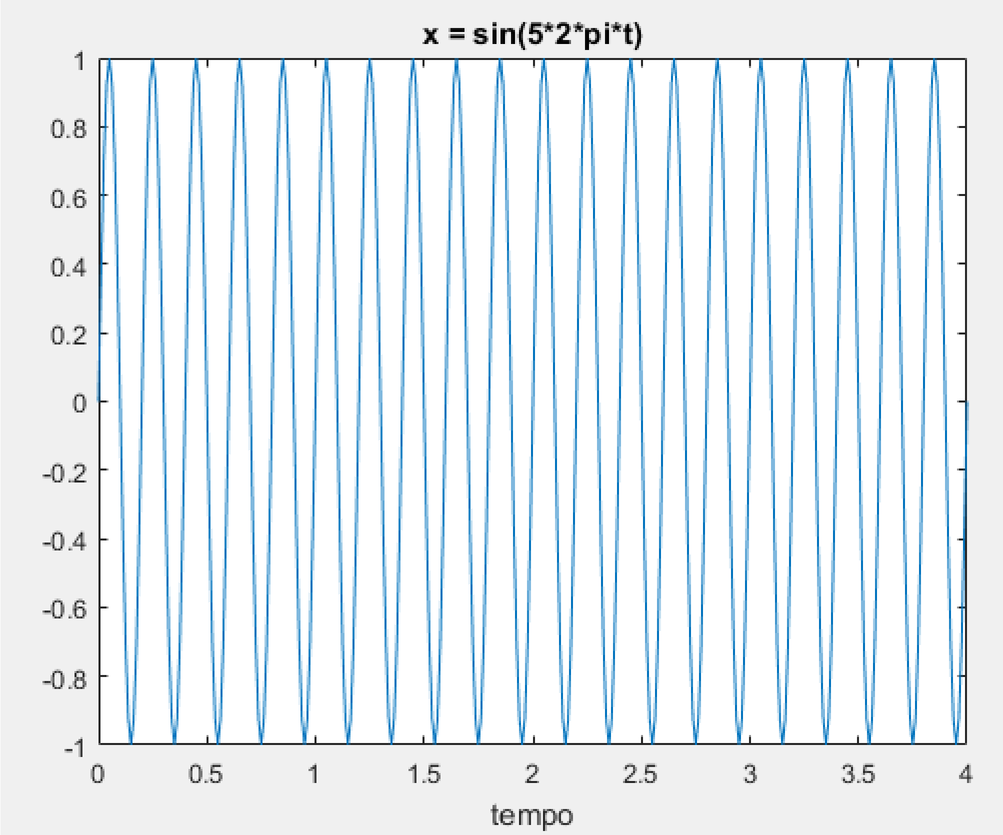
- FFT é o método computacional mais eficiente para implementação da DFT (*Discrete Fourier Transform* – Transformada Discreta de Fourier).

Transformada Rápida de Fourier

- O algoritmo foi desenvolvido por volta de 1960 por dois matemáticos, Cooley e Tukey, e consegue executar a DFT a partir de uma série de pontos amostrados do sinal original (chamados de amostras) sem conhecer a função matemática que os gerou.

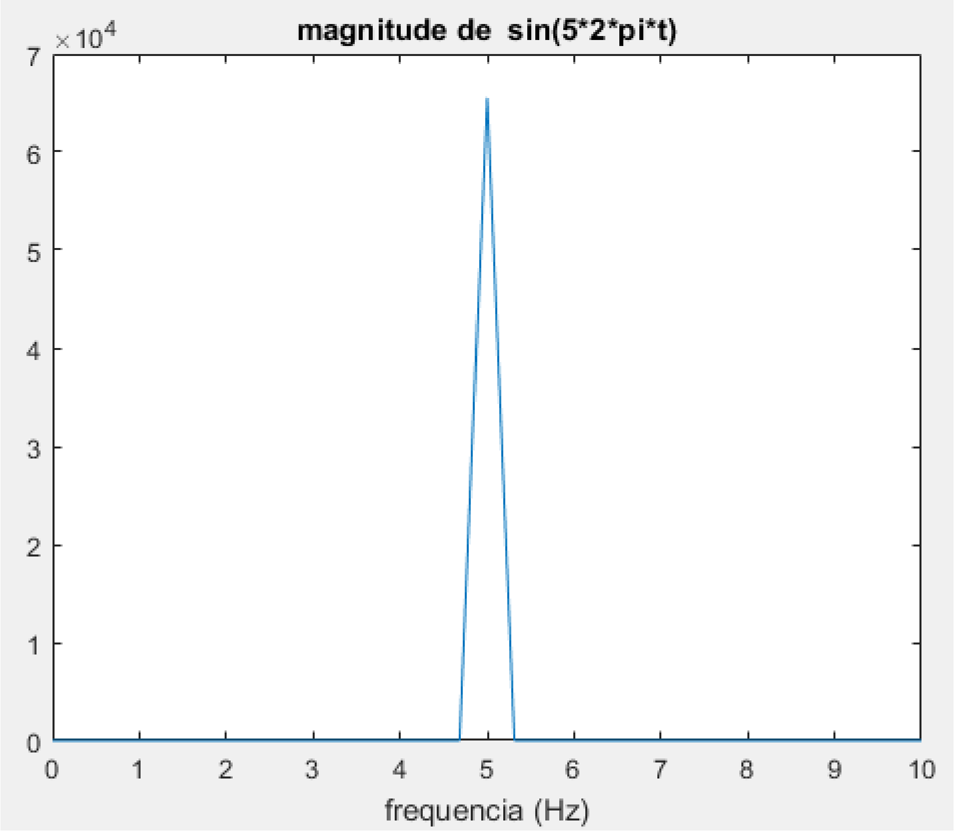
- A única exigência é que seja utilizado um número de amostras do sinal original na forma de uma potência de 2, ou seja, amostras.

Transformada Rápida de Fourier



$$\Delta t = \frac{1}{f_s}$$

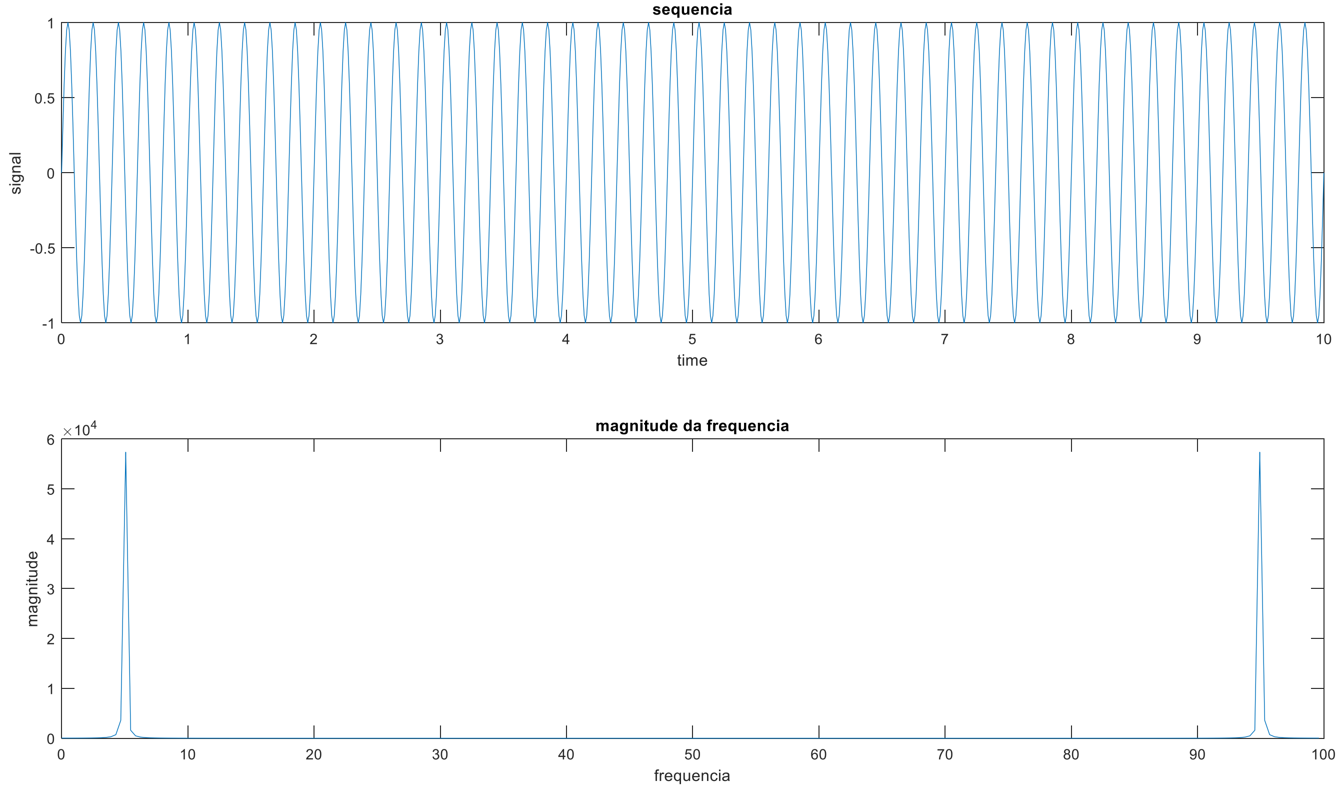
$$\Delta f = \frac{f_s}{N}(Hz)$$



Transformada Rápida de Fourier

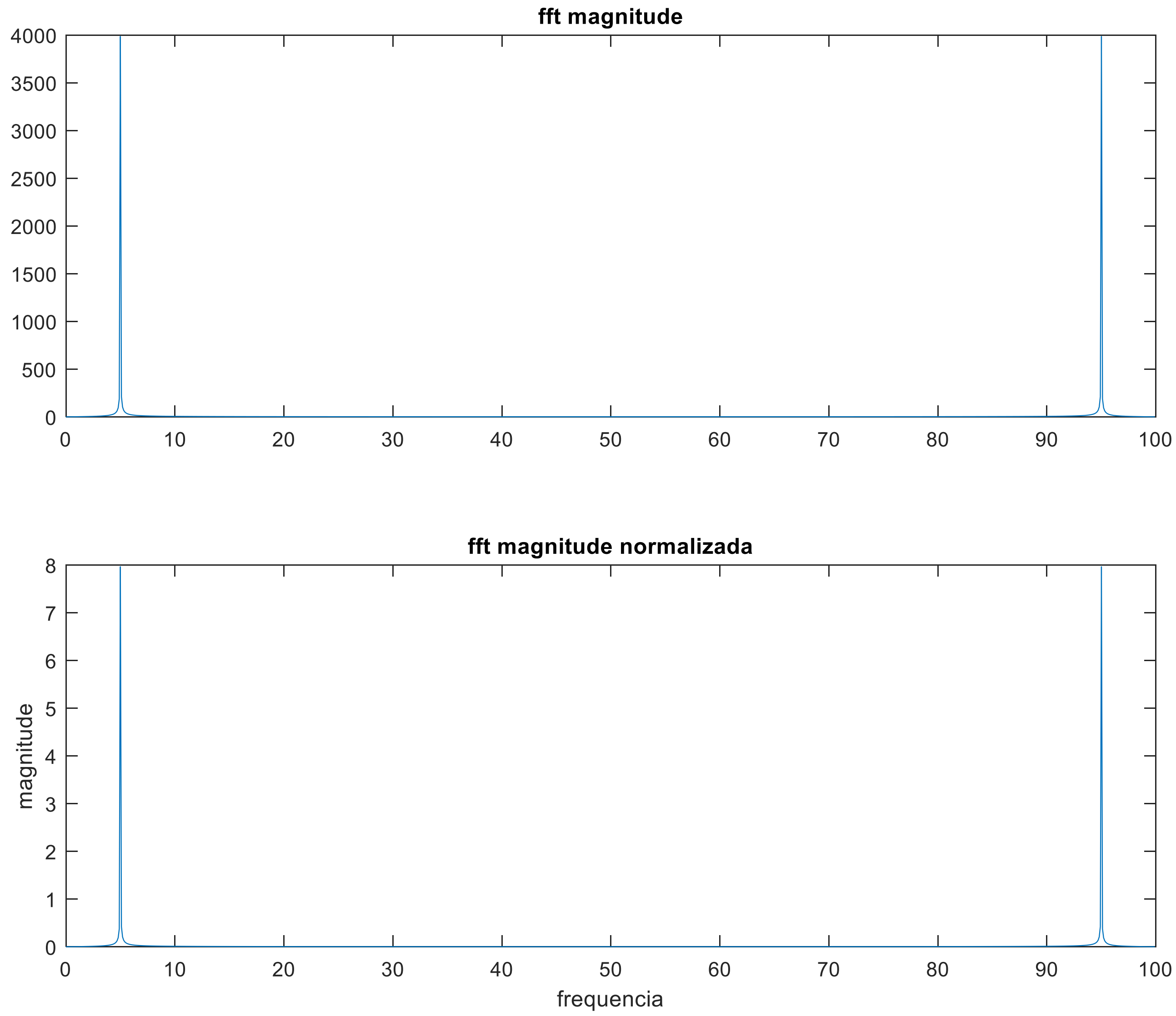
```
close all
clear
clc
fs = 100
t = 0:1/fs:10;
x = sin(5*2*pi*t);
y = fft(x,256);
freq = (0:numel(y)-1)*fs/numel(y);
% freq = freq(1:floor(numel(y)/2))
% y = y(1:floor(numel(y)/2))
subplot(2,1,1); plot(t,x);
title('sequencia');
xlabel('time');
ylabel('signal')
subplot(2,1,2);plot(freq,(2*abs(y)).^2);
title('magnitude da frequencia');
xlabel('frequencia');
ylabel('magnitude')
```

freq	1x256 double
fs	100
t	1x1001 double
x	1x1001 double
y	1x256 compl...



FFT – Normalização

```
close all
clear
clc
fs = 100
t = 0:1/fs:10;
x = 8*sin(5*2*pi*t);
y = fft(x);
freq = (0:numel(y)-1)*fs/numel(y);
subplot(2,1,1); plot(freq,abs(y));
title('fft magnitude');
subplot(2,1,2);plot(freq,(2*abs(y))/numel(y));
title('fft magnitude normalizada');
xlabel('frequencia');
ylabel('magnitude')
```



Transformada Rápida de Fourier

$$|X(e^{-j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \quad \text{(even symmetry)}$$

```
subplot(2,1,1); plot(t,x);
title('sequencia');
xlabel('time');
ylabel('signal')
subplot(2,1,2);plot(freq,(2*abs(y)).^2);
xlim([0 fs/2])
title('magnitude da frequencia');
xlabel('frequencia');
ylabel('magnitude')
```