Transformações Geométricas - Parte 3

Petrúcio Ricardo Tavares de Medeiros

Universidade Federal Rural do Semi-Árido

petrucior@gmail.com

Tópicos da aula

1. Rotação
   - Rotações com ângulos de euler
2. Transformações lineares
   - Reflexão/espelhamento/*flip*
   - Cisalhamento/*shear*
3. Transformação afim
   - Translação
4. Transformações Homogêneas
5. Quatérnios
   - *Gimbal lock*: alinhamento de eixos
   - Números Complexos
   - Definição
   - Soma e Subtração
   - Soma e Subtração
   - Multiplicação por escalar
   - Produto de quatérnios

Transformação de rotação

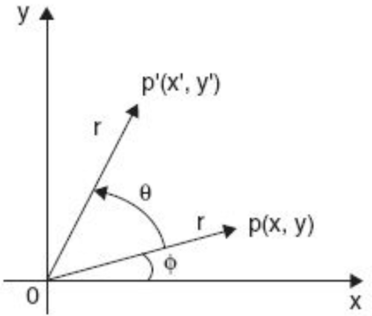


FIGURA 2.19 . Rotação do ponto p.

Transformação de rotação

Uma rotação de um ponto **p** no plano xy é realizado em torno do eixo z. O raio de **p** é calculado da seguinte forma:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

As coordenadas do ponto $p = (x, y)$ podem ser reescrita como:

$$x = r * cos(\phi)$$
$$y = r * sen(\phi)$$

Expansão trigonométrica

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$$
$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

Aplicando as expansões trigonométricas para o ponto rotacionado **p'**:

$$x' = r * cos(\phi + \theta) = r * cos(\phi) * cos(\theta) - r * sen(\phi) * sen(\theta)$$
$$y' = r * sen(\phi + \theta) = r * sen(\phi) * cos(\theta) + r * cos(\phi) * sen(\theta)$$

Transformação de rotação

Substituindo pelas coordenadas originais de $p = (x, y) = (r * cos(\phi), r * sen(\phi))$, temos:

$$x' = x * cos(\theta) - y * sen(\theta)$$
$$y' = y * cos(\theta) + x * sen(\theta)$$

Representando em forma matricial:

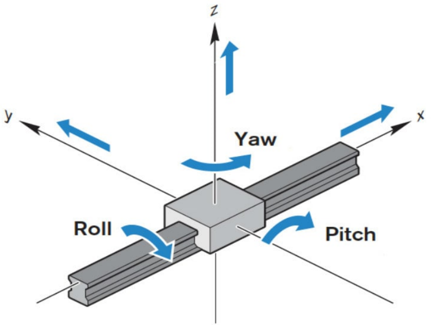
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotações com ângulos de euler: $R_x(\beta)$, $R_y(\delta)$ e $R_z(\phi)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\beta) & -sen(\beta) \\ 0 & sen(\beta) & sen(\beta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\delta) & 0 & sen(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\delta) & 0 & cos(\delta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\phi) & -sen(\phi) & 0 \\ sen(\phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$R^{-1} = R^T$$

Exercício: Encontre as matrizes de rotação dos ângulos de euler.

Reflexão/espelhamento/*flip*

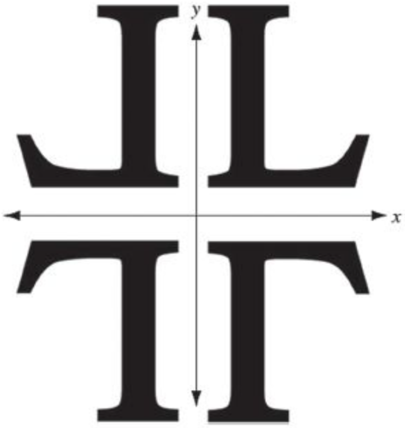


FIGURA 2.24. *Exemplo de reflexão 2D.*

Reflexão

Espelhar uma imagem ou objeto em relação a um eixo (horizontal, vertical ou diagonal), gerando uma cópia simétrica.

Eixo x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Eixo y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Eixo x e y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exercícios: Realize a reflexão dos pontos em todo plano:

- $a = (2, 4)$;
- $a = (-2, -4)$;
- $a = (-2, 3)$;
- $a = (5, -1)$;

Reflexão

x pelo plano yz

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

y pelo plano xz

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

z pelo plano xy

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exercícios: Realize a reflexão dos pontos:

- $a = (2, 4, 2)$;
- $a = (-2, -4, -7)$;
- $a = (2, -6, 2)$

Cisalhamento

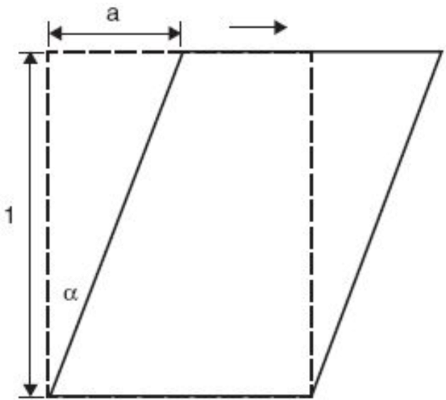


FIGURA 2.25 . Cisalhamento.

Cisalhamento

Transformação geométrica que desloca pontos de um objeto em uma direção específica, distorcendo sua forma original sem alterar suas dimensões básicas.

Eixo x

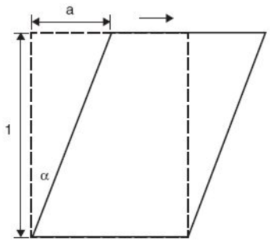
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

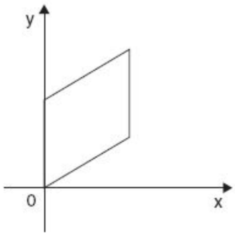
Eixo y

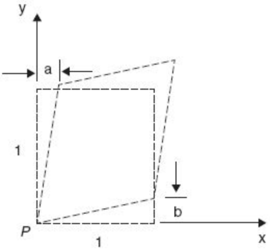
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Eixos x e y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$







Exercícios: Realize o cisalhamento dos pontos abaixo:

- $a = (2, 5)$;
- $a = (-3, -10)$;
- $a = (3, -7)$;
- $a = (1, 1)$;

Translação

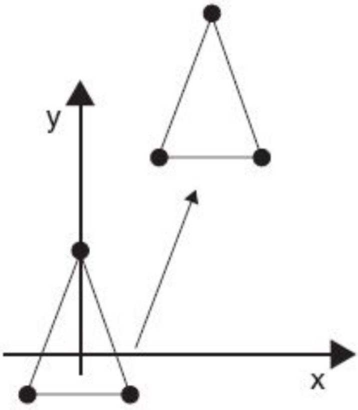


FIGURA 2.29 . Translação.

Coordenadas homogêneas permitem representar todas as transformações geométricas, incluindo translações, como multiplicações matriciais.

$$A_{3,3} = \begin{bmatrix} & L_{2x2} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2D

$$A_{4,4} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & L_{3x3} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D

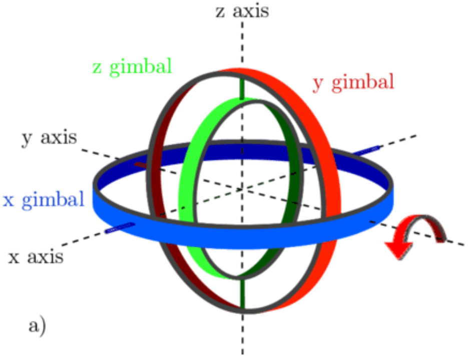
Transformação linear em 3D **Translação**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios: Dada as matrizs homogêneas abaixo identifique quais transformações elas representam:

- $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Gimbal lock: alinhamento de eixos



Número complexo

$C = R + jI$, onde $R, I \in \mathbb{R}$ e $j = \sqrt{-1}$

Conjugado

$C^* = R - jI$

Coordenadas polares

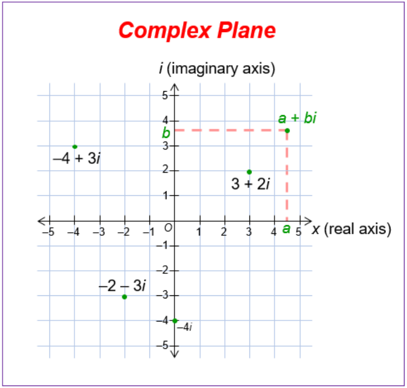
$C = |C|(cos\ \theta + j\ sin\ \theta)$, onde

$|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$ e

θ é o ângulo entre o vetor e o eixo real

Ângulo (θ) $\rightarrow$ atan2 $[-\pi, \pi]$

$$tg(\theta) = \frac{I}{R} \rightarrow \theta = arctan(\frac{I}{R}), \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Quatérnios, soma e subtração

Abstração matemática formada por um valor (real do quatérnio) e três componentes imaginários, representados por **i**, **j** e **k**:

Quatérnio

$$q =< a, b, c, d >= a + bi + cj + dk$$

Conjugado

$$q' =< a, -b, -c, -d >= a - bi - cj - dk$$

Norma

$$\mid q \mid = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Produto interno

$$q_1 . q_2 =< a_1, b_1, c_1, d_1 > . < a_2, b_2, c_2, d_2 >= a_1 * a_2 + b_1 * b_2 + c_1 * c2 + d_1 * d_2$$

Soma e subtração com quatérnios

Operações com Quatérnios (soma e subtração)

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k =$$
$$< a_1, b_1, c_1, d_1 > + < a_2, b_2, c_2, d_2 >=$$
$$< a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2 >$$

Exemplo:

$$(1 + 2i + 3j + 4k) + (5 + 4i + 3j + 2k) = 6 + 6i + 6j + 6k =< 6, 6, 6, 6 >$$

Exercícios: Realize as operações com quatérnios abaixo:

- Soma entre $a =< 2, 4, 5, 6 >$ e $b =< -5, 4, 2, 6 >$;
- Subtração entre $a =< -3, 10, 2, 5 >$ e $b =< 7, 4, 5, -9 >$;

Multiplicação de quatérnios por valores reais

$$e(a + bi + cj + dk) =$$
$$(e * a + e * bi + e * cj + e * dk) =$$
$$e* < a, b, c, d >=$$
$$< e * a, e * b, e * c, e * d >$$

Exemplo:

$$3 * (1 + 2i + 3j + 4k) = (3 + 6i + 9j + 12k) =< 3, 6, 9, 12 >$$

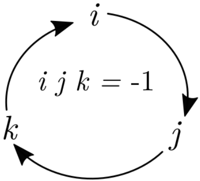
Exercícios: Realize as operações com quatérnios abaixo:

- Multiplique $a =< 4, 5, -6, 2 >$ por -1;
- Multiplique $a =< 0, -4, 2, 4 >$ por 2;

Produto de quatérnios (produto de Hamilton)

Propriedades

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$i * j = -j * i = k$$
$$j * k = -k * j = i$$
$$k * i = -i * k = j$$
$$i * j * k = -1$$



Multiplicação:

$$< a_1, b_1, c_1, d_1 >< a_2, b_2, c_2, d_2 >=$$
$$(a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2)+$$
$$(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i+$$
$$(a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j+$$
$$(a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k$$

Resumo

$q_1 =< r_1, v_1 >$ e $q_2 =< r_2, v_2 >$

$$q_1 * q_2 =< r_1, v_1 >< r_2, v_2 >=$$
$$< r_1 * r_2 - v_1.v_2, r_1 * v_2 + r_2 * v_1 + v_1 \times v_2)$$

Considerando $p = xi + yj + zk$ e o operador de rotação $R_q(p)$ por um angulo θ ao redor de um eixo $n =< n_x, n_y, n_z >$ representamos pela multiplicação $q * p * q'$:
$q =< cos(\theta/2), sen(\theta/2) * n >=< cos(\theta/2), sen(\theta/2) * n_x, sen(\theta/2) * n_y, sen(\theta/2) * n_z >$
Exemplo: Aplique uma rotação de 90º ao redor de y do ponto $p = (3, 0, 0)$.

$$p =< 0, 3, 0, 0 >$$

$$q =< cos(90/2), sen(90/2) * (0, 1, 0) >=$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 0)\right) =$$

$$< \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 >$$

$$qpq' =< \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 >< 0, 3, 0, 0 >< \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 >=< 0, 0, 0, 3 >$$

Produto e rotações com quatérnios

Exercícios: Realize as operações com quatérnios abaixo:

- Multiplique os quatérnios $a =< 4, 5, -6, 0 >$ e $b =< 1, 2, 3, -5 >$;
- Multiplique os quatérnios $a =< -7, -4, 2, 0 >$ e $b =< 5, 4, 3, 1 >$;
- Multiplique os quatérnios $a =< 5, 4, 3, 1 >$ e $b =< -7, -4, 2, 0 >$;
- Multiplique os quatérnios $a =< 1, 0, 0, 0 >$ e $b =< 1, 0, 1, 1 >$;
- Rotacione 45 graus ao redor de z o ponto $a = (2, 5, -1)$;
- Rotacione 30 graus ao redor de x o ponto $a = (2, 1, 7)$;
- Rotacione 60 graus ao redor de y o ponto $a = (-2, -1, -3)$;
- Rotacione 270 graus ao redor de z o ponto $a = (-1, -1, -5)$;

Transformações Geométricas - Parte 3

Petrúcio Ricardo Tavares de Medeiros

Universidade Federal Rural do Semi-Árido

petrucior@gmail.com