Transformações Geométricas - Parte 1

Petrúcio Ricardo Tavares de Medeiros

Universidade Federal Rural do Semi-Árido

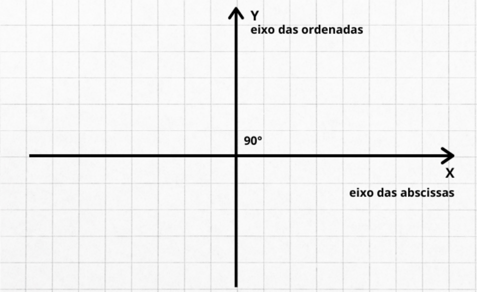
petrucior@gmail.com

Tópicos da aula

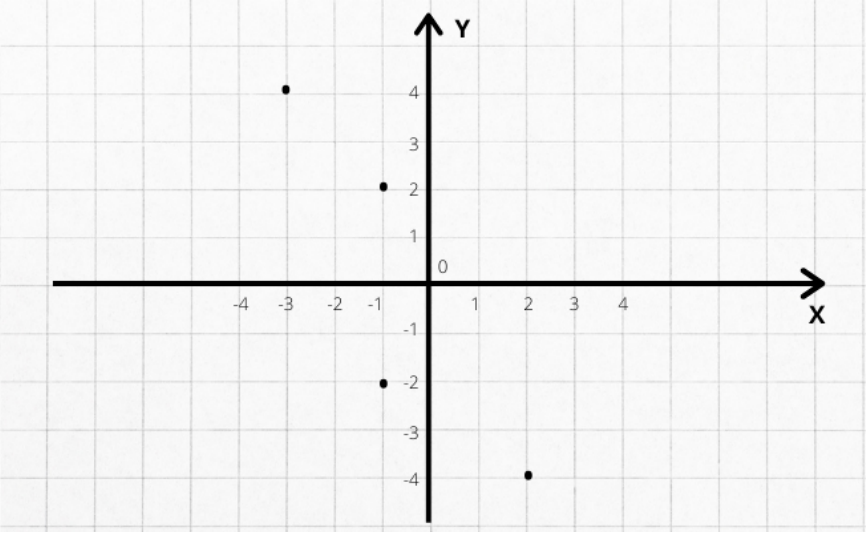
1. Sistemas de coordenadas Cartesianas
2. Pipeline Gráfico
   - Múltiplos sistemas de coordenadas
     - Sistema de coordenadas do objeto
     - Sistema de coordenadas do mundo
     - Sistema de coordenadas da câmera
     - Sistema de coordenadas normalizado
     - Sistema de coordenadas do dispositivo
3. Escalar, Pontos e Vetores
   - Vetor a partir de pontos
   - Norma de um vetor
   - Deslocando um ponto no espaço com vetor
   - Soma de vetores
   - Multiplicação de um vetor por escalar
   - Produto interno / produto escalar
   - Produto vetorial

Sistemas de coordenadas Cartesianas

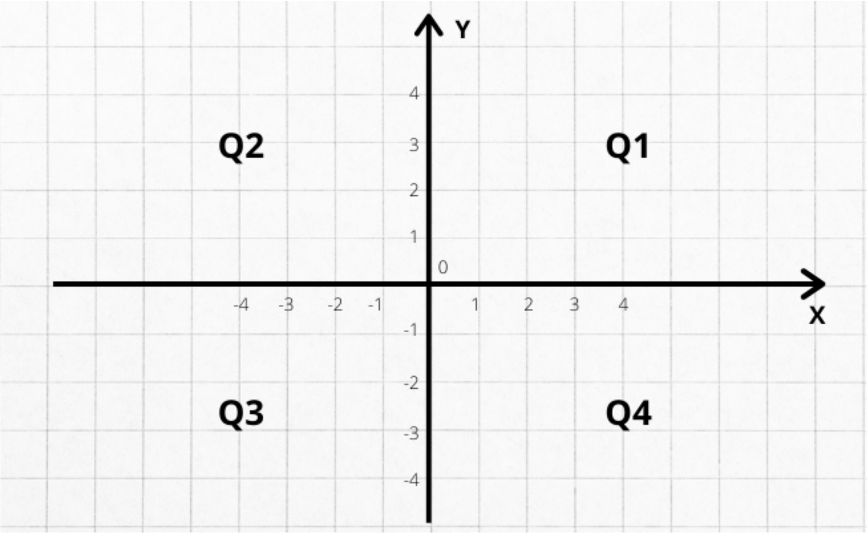
- Duras retas concorrentes;
- Eixo x (eixo das abscissas);
- Eixo y (eixo das ordenadas);
- Origem do sistema.



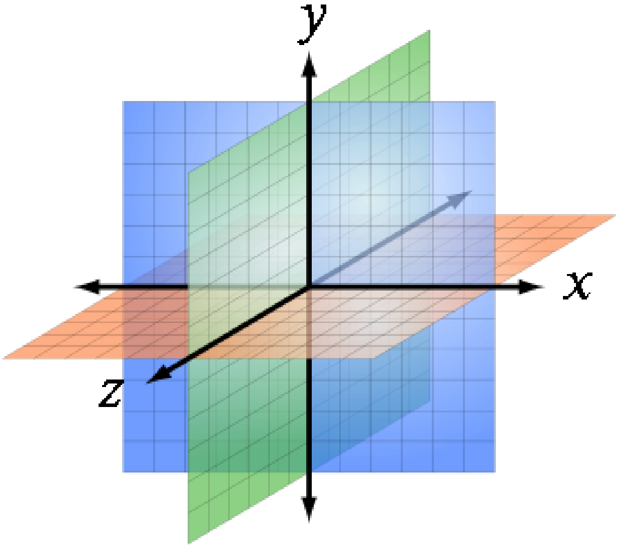
Ponto é par ordenado



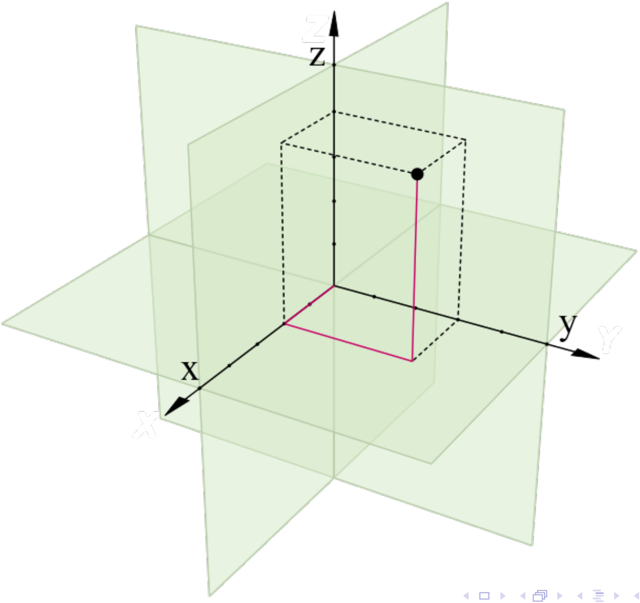
2 eixos em um plano separamos em 4 quadrantes



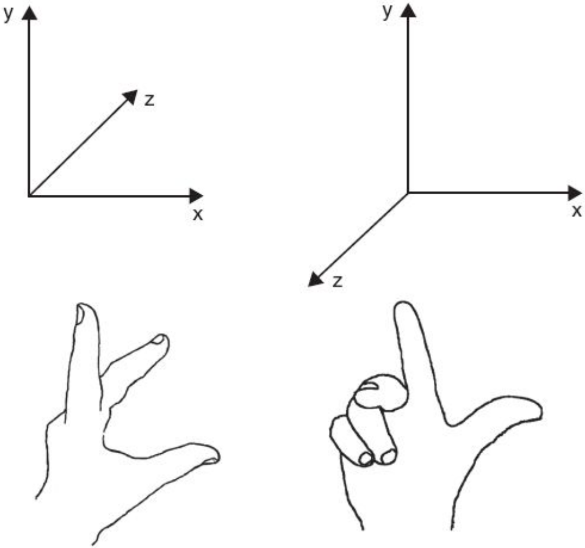
Sistemas de coordenadas em espaço 3D



Ponto representado no espaço 3D



Regra da mão direita e mão esquerda

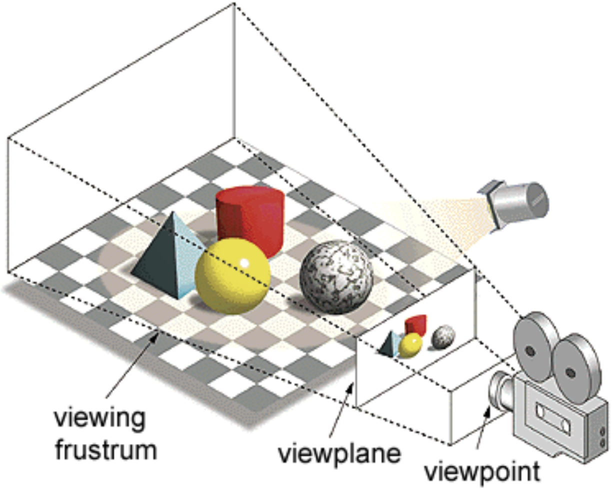


Mão Esquerda

Mão Direita

Pipeline Gráfico

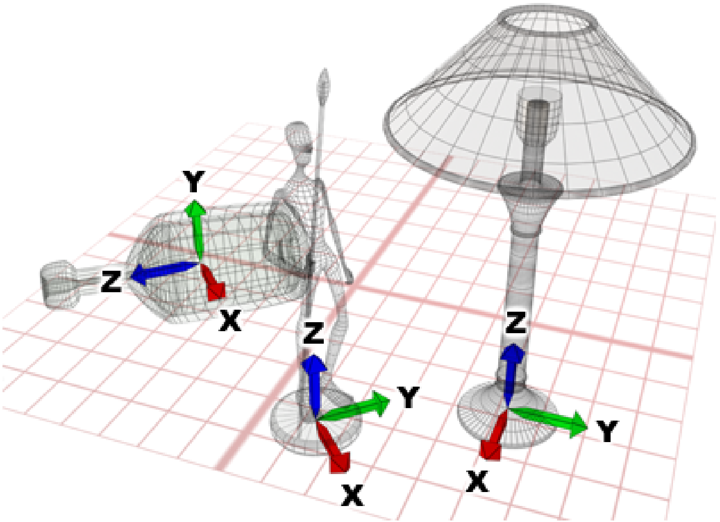
From Computer Desktop Encyclopedia
Reprinted with permission.



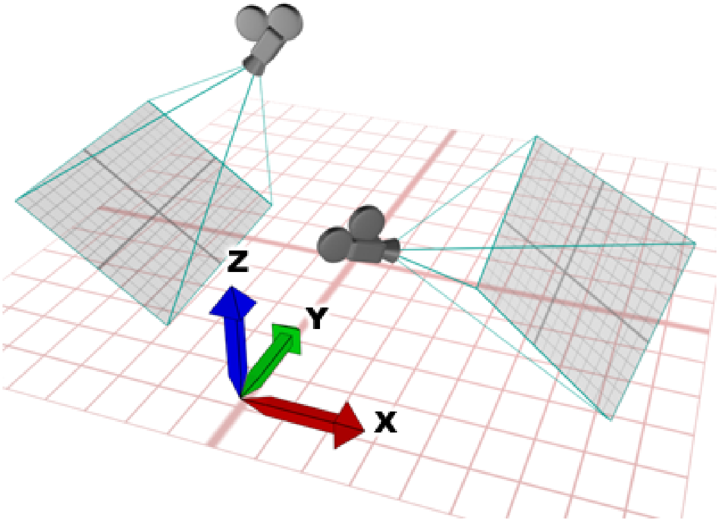
Múltiplos sistemas de coordenadas

- Objeto;
- Mundo;
- Câmera;
- Normalizado;
- Dispositivo

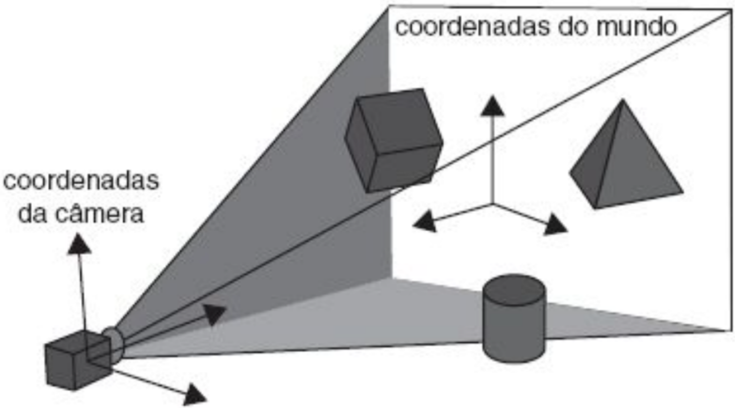
Sistema de coordenadas do objeto



Sistema de coordenadas do mundo



Sistema de coordenadas da câmera



Volume de visão da câmera

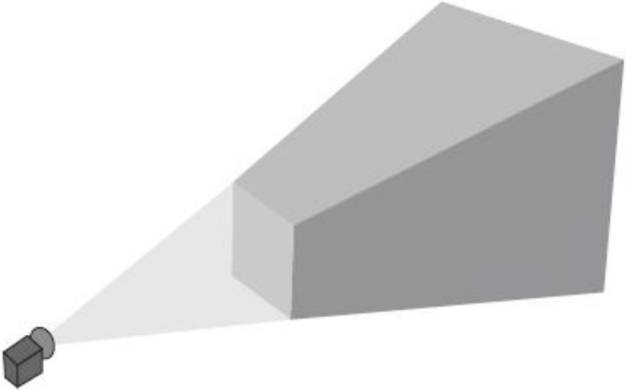


FIGURA 2.7 . Volume de visão da câmera.

Sistema de coordenadas normalizado

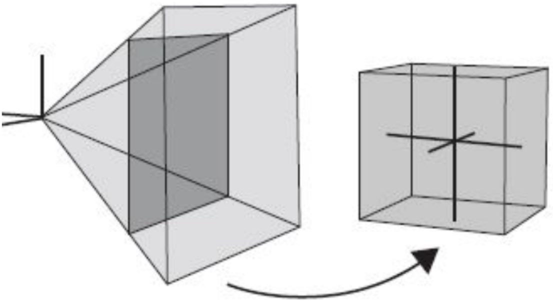
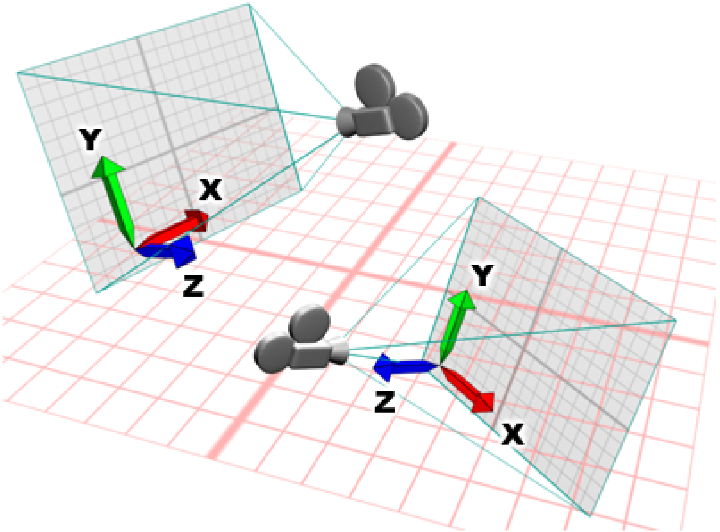


FIGURA 2.9. *Sistema de Coordenadas Normalizado (ou de Recorte): transformação do Frustrum para o cubo normalizado.*

Figura: Cada eixo do frustum será normalizado entre [-1, 1]

Sistema de coordenadas do dispositivo



Escalar: representa um valor numérico associado a unidade de medida;

Ponto: conjunto ordenado de escalares (localização no espaço);

Vetor: grandeza física que possui módulo, direção e sentido;

Vetor

O vetor é representado como uma seta partindo do ponto inicial (p_i) para um ponto final (p_f).
2D:

$$v = \overrightarrow{p_i p_f} = p_f - p_i = (x_{pf}, y_{pf}) - (x_{pi}, y_{pi}) = < x_{pf} - x_{pi}, y_{pf} - y_{pi} >$$

3D:

$$v = \overrightarrow{p_i p_f} = p_f - p_i = (x_{pf}, y_{pf}, z_{pf}) - (x_{pi}, y_{pi}, z_{pi}) = < x_{pf} - x_{pi}, y_{pf} - y_{pi}, z_{pf} - z_{pi} >$$

Exercícios: Encontre o vetor a partir dos pontos abaixo:

- $a = (2, 4)$ e $b = (6, 2)$;
- $a = (6, 7)$ e $b = (-1, -2)$;
- $a = (2, 2, 4)$ e $b = (1, 1, 1)$;
- $a = (-2, 4, -5)$ e $b = (5, 2, -5)$

Norma de um vetor

Dado um vetor $v =< x, y, z >$, temos que a norma desse vetor é dada por:

$$| v |= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exercícios: Encontre a norma dos vetores abaixo.

- $a =< 2, -5 >$;
- $b =< 4, 2 >$;
- $c =< 3, 5, -6 >$;
- $d =< 6, -2, 1 >$

Deslocamento de ponto no espaço através de um vetor

Podemos usar um vetor para deslocar um ponto do espaço para outra posição somando/subtraindo o vetor ao ponto.

$$p' = p + v = (x_p, y_p, z_p) + < x_v, y_v, z_v >= (x_p + x_v, y_p + y_v, z_p + z_v)$$

$$p' = p + v = (x_p, y_p, z_p) - < x_v, y_v, z_v >= (x_p - x_v, y_p - y_v, z_p - z_v)$$

Exercícios: Realize o deslocamento dos pontos usando os vetores.

- $a = (2, -5)$ e $v =< 2, 4 >$;
- $a = (3, 5, -6)$ e $v =< -3, 2, -3 >$;

Podemos representar um ponto como um vetor e vice-versa subtraindo/somando a origem.

Soma de vetores

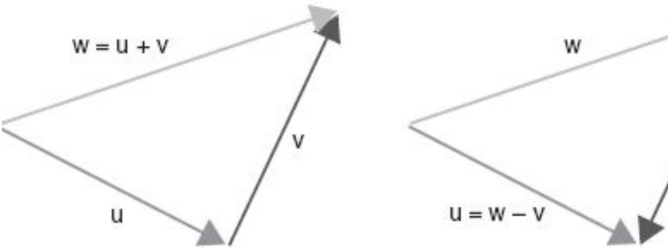


FIGURA 2.12 . Soma de vetores.

Soma de vetores

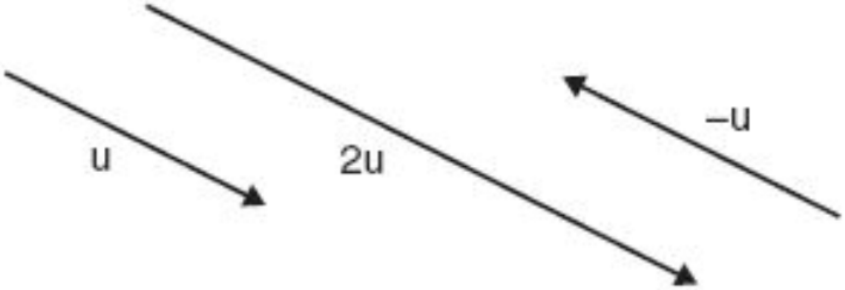
$$v_a + v_b = < x_{va}, y_{va}, z_{va} > + < x_{vb}, y_{vb}, z_{vb} > = < x_{va} + x_{vb}, y_{va} + y_{vb}, z_{va} + z_{vb} >$$

$$v_a - v_b = < x_{va}, y_{va}, z_{va} > - < x_{vb}, y_{vb}, z_{vb} > = < x_{va} - x_{vb}, y_{va} - y_{vb}, z_{va} - z_{vb} >$$

Exercícios: Realize as operações nos vetores abaixo:

- Soma entre $a = < 2, -5 >$ e $v = < 2, 4 >$;
- Subtração entre $a = < 3, 2 >$ e $v = < 1, 7 >$;
- Soma entre $a = < 3, 5, -6 >$ e $v = < -3, 2, -3 >$;
- Subtração entre $a = < 5, 5, 1 >$ e $v = < 3, 1, 7 >$;

Multiplicação de um vetor por escalar



Multiplicação de um vetor por escalar e a normalização

A multiplicação de um vetor por escalar é dada pela expressão abaixo:

$$c * v = c* < x_v, y_v, z_v > = < c * x_v, c * y_v, c * z_v >$$

Um vetor unitário é um vetor com norma 1. Podemos transformar um vetor em vetor unitário da seguinte forma:

$$u = \frac{v}{\mid v \mid} = \left\langle \frac{x_v}{\mid v \mid}, \frac{y_v}{\mid v \mid}, \frac{z_v}{\mid v \mid} \right\rangle$$

Exercícios: Realize as operações nos vetores abaixo:

- Multiplique o vetor $v = < 2, 4 >$ pelo escalar 3;
- Multiplique o vetor $v = < 1, 7, 5 >$ pelo escalar -5;
- Normalize o vetor $v = < 12, 3 >$;
- Normalize o vetor $v = < -3, 4, -5 >$

Propriedades aritméticas de vetores

TABELA 2.1 **Propriedades da aritmética de vetores**	
Comutativa	$v + w = w + v$
Distributiva	$a * (v + w) = a * v + a * w$ $(a + b) * v = a * v + b * v$
Associativa	$u\ (v + w) = (v + u) + w$
Identidade Aditiva	$v + 0 = 0 + v = v$
Identidade Multiplicativa	$1 + v = v * 1 = v$
Inverso Aditivo	$v + (- v) = 0$

Produto interno (produto escalar)

O produto interno é usado para verificar se dois vetores são ortogonais.

$$v.w =< x_v, y_v, z_v > . < x_w, y_w, z_w >= x_v * x_w + y_v * y_w + z_v * z_w =\mid v \mid * \mid w \mid * cos(\theta)$$

Um vetor unitário é um vetor com norma 1. Logo, podemos transformar um vetor em vetor unitário da seguinte forma:

$$u = \frac{v}{\mid v \mid} = \left\langle \frac{x_v}{\mid v \mid}, \frac{y_v}{\mid v \mid}, \frac{z_v}{\mid v \mid} \right\rangle$$

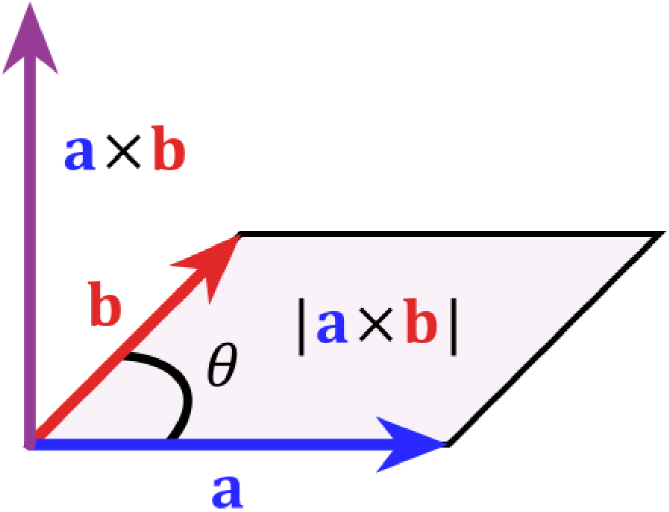
Exercícios: Realize as operações nos vetores abaixo:

- Calcule o produto escalar entre os vetores $a =< 2, -4 >$ e $b =< 5, 3 >$;
- Calcule o produto interno entre os vetores $a =< 1, 7, 5 >$ e $b =< 2, 4, 5 >$;
- Transforme o vetor $v =< 12, 3 >$ em vetor unitário;
- Transforme o vetor $v =< -3, 4, -5 >$ em vetor unitário

Propriedades do produto escalar

TABELA 2.2 **Propriedades do produto escalar**	
Produto nulo	$v \cdot 0 = 0$ para um vetor qualquer se $v \cdot v = 0$ então $v = 0$
Comutativa	$v \cdot w = w \cdot v$
Distributiva	$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ $(v + w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u$
Associativa	$a * (v \cdot w) = (a * v) \cdot w = v.\ (a * w)$
Produto escalar quadrado	$v \cdot v = \|v\|^2$

Produto vetorial



Produto vetorial

O produto vetorial de dois vetores ($\times$) gera um terceiro vetor ortogonal aos dois primeiros. Obs.: Usamos para verificar se dois vetores são paralelos.

$$u = v \times w =< y_v * z_w - z_v * y_w, z_v * x_w - x_v * z_w, x_v * y_w - y_v * x_w >=< x_u, y_u, z_u >$$

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}$$

O comprimento do vetor resultante é dado por:

$$| v \times w |=| v | * | w | * sen(\theta)$$

Exercícios: Realize as operações nos vetores abaixo:

- Calcule o produto vetorial entre os vetores $a =< 2, -4 >$ e $b =< 5, 3 >$;
- Calcule o produto vetorial entre os vetores $a =< 1, 7, 5 >$ e $b =< 2, 4, 5 >$;

Propriedades do produto vetorial

TABELA 2.3 **Propriedades do produto vetorial**	
Produto vetorial inverso	$v \times w = -w \times v$
Múltiplo de escalar por produto vetorial	$a * (v \times w) = (a * v) \times w = v \times (a * w)$
Distributiva à direita	$u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
Distributiva à esquerda	$(v + w) \times u = v \times u + w \times u$

Transformações Geométricas - Parte 1

Petrúcio Ricardo Tavares de Medeiros

Universidade Federal Rural do Semi-Árido

petrucior@gmail.com