FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

# Dinámica (FIS1514)

## Movimiento Rectilíneo


**Felipe Isaule**

felipe.isaule@uc.cl


Lunes 12 de Agosto de 2024

# Resumen clase anterior

- Comenzamos la unidad de **Cinemática**.
- Definimos la **posición**, **velocidad**, y **aceleración**.
- Introducimos la cinemática en **una dimensión**.

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \quad a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

$$a\, ds = v\, dv, \quad \ddot{s} ds = \dot{s} d\dot{s}$$

# Clase 3: Cinemática 1D

- Movimiento uniformemente acelerado
- Integración

- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (2.2).
  - Hibbeler (12.2, 12.3).

# Clase 3: Cinemática 1D y 2D

- **Movimiento uniformemente acelerado**
- Integración

# Movimiento uniformemente acelerado

- Si la **aceleración es constante**, $a(t)=a_0$ , y escogemos que a tiempo cero ($t=0$), la posición y velocidad están dadas por

$$s(t=0)=s_0 \qquad v(t=0)=v_0$$

- Obtenemos las ecuaciones:

$$dv = a_0\,dt \quad \longrightarrow \quad v = v_0 + a_0\,t$$

$$v\,dv = a_0\,ds \quad \longrightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + a_0(s-s_0)$$

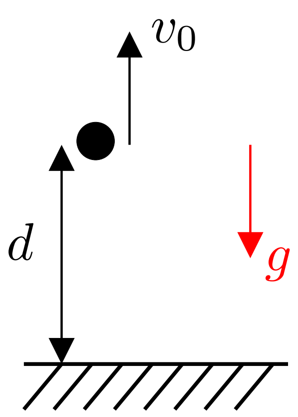
$$ds = v\,dt \quad \longrightarrow \quad s = s_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}a_0 t^2$$

- ✗ Recordar que estas ecuaciones son válidas sólo para problemas con aceleración constante en el tiempo.

# Ejemplo 1

Una pelota es lanzada **verticalmente hacia arriba** con una **rapidez inicial** $v_0$ desde una **altura inicial** $d$ con respecto a la superficie. Considerando que debido a la **gravedad** la pelota posee una **aceleración constante** $g$ en dirección a la superficie, encuentre:

- La **altura máxima** que alcanza la pelota.
- El **tiempo** que le toma a la pelota en alcanzar la **altura máxima**, y el tiempo que luego le toma en **tocar la superficie**.



# Ejemplo 1

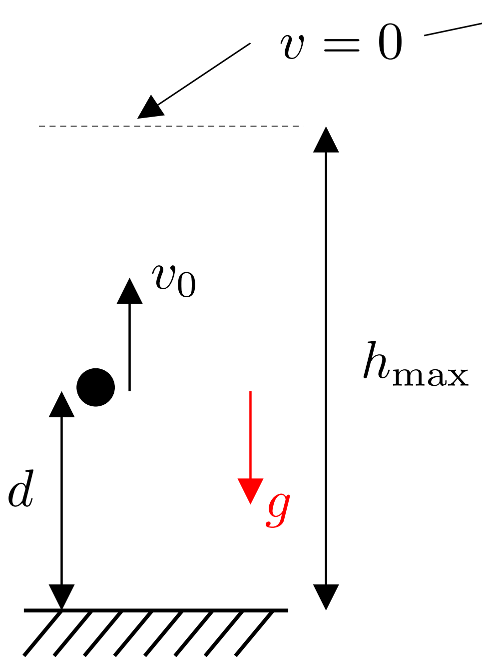
Una pelota es lanzada **verticalmente hacia arriba** con una **rapidez inicial** $v_0$ desde una **altura inicial** $d$ con respecto a la superficie. Considerando que debido a la **gravedad** la pelota posee una **aceleración constante** $g$ en dirección a la superficie, encuentre:

- La **altura máxima** que alcanza la pelota.

La altura máxima se alcanza cuando $v\!=\!0$.

Dado que la aceleración es constante:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \underbrace{a_0}_{-g}(\underbrace{s}_{h_{\max}} - \underbrace{s_0}_{d})$$



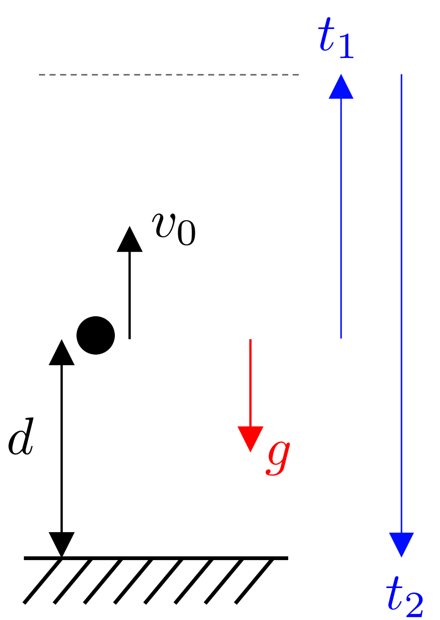

$$\longrightarrow \quad \boxed{h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} + d}$$

# Ejemplo 1

Una pelota es lanzada **verticalmente hacia arriba** con una **rapidez inicial** $v_0$ desde una **altura inicial** $d$ con respecto a la superficie. Considerando que debido a la **gravedad** la pelota posee una **aceleración constante** $g$ en dirección a la superficie, encuentre:

- El **tiempo** que le toma a la pelota en alcanzar la **altura máxima**, y el tiempo que luego le toma en **tocar la superficie**.

Debemos calcular el tiempo para subir $(t_1)$ y bajar $(t_2)$.




Para el primer trayecto:

$$\cancelto{0}{v} = v_0 + \underbrace{a_0}_{-g} t_1 \longrightarrow \boxed{t_1 = v_0/g}$$

Para el segundo trayecto:

$$\cancelto{0}{s} = \underbrace{s_0}_{h_{\max}} + \cancelto{0}{v_0} t_2 + \frac{1}{2}\underbrace{a_0}_{-g} t_2^2 \longrightarrow t_2^2 = 2h_{\max}/g$$

$$\longrightarrow \boxed{t_2 = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2d}{g}}}$$

# Clase 3: Cinemática 1D y 2D

- Movimiento uniformemente acelerado
- **Integración**

# 1. Integrar *a*(*t*)

- Si tenemos una expresión para la **aceleración como función del tiempo** $a(t)$ , la velocidad y posición se obtienen de

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow \quad v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')\, dt' \qquad v(t=0) = v_0$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \longrightarrow \quad s(t) = s_0 + \int_0^t v(t')\, dt' \qquad s(t=0) = s_0$$

- Para **aceleración constante** $a(t){=}a_0$ :

$$\longrightarrow \quad \boxed{v = v_0 + a_0\, t}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{s = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a_0 t^2}$$

# 2. Integrar *a*(*s*)

- Si tenemos una expresión para la **aceleración como función de la posición** $a(s)$, la velocidad $v(s)$ se obtiene de

$$a\,ds = v\,dv, \quad \longrightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \int_{s_0}^{s} a(s')ds' \quad \longrightarrow \quad v(s)$$

- Para **aceleración constante** $a(s)=a_0$ :

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + a_0(s - s_0)}$$

# 2. Integrar *a*(*s*)

- Si tenemos una expresión para la **aceleración como función de la posición** $a(s)$, la velocidad $v(s)$ se obtiene de

$$a\,ds = v\,dv, \quad \longrightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \int_{s_0}^{s} a(s')ds' \quad \longrightarrow \quad v(s)$$

- En otros casos, $s(t)$ se obtiene de

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \longrightarrow \quad t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds'}{v(s')} \quad \longrightarrow \quad s(t)$$

- Finalmente $v(t)$ y $a(t)$ se obtienen de

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

# 3. Integrar *a*(*v*)

- Si tenemos una expresión para la **aceleración como función de la velocidad** $a(v)$, la velocidad $v(t)$ y $a(t)$ se obtienen de

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow \quad t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{a(v')} \quad \longrightarrow \quad v(t) \quad \longrightarrow \quad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

- Mientras que la posición $s(t)$ se puede obtener de

$$a\,ds = v\,dv \quad \longrightarrow$$

$$s - s_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v'}{a(v')} dv' \quad \longrightarrow \quad s(v) \quad \longrightarrow \quad s(t)$$

# Ejemplo 2

La **aceleración** de una partícula está dada por

$$a = k\sqrt{s}\,,$$

donde $k$ es una constante positiva y $s$ es la distancia a un punto de referencia. La **velocidad** y **posición** son **nulos para *t*=0**. Determine la **aceleración**, **velocidad**, y **posición** para un **tiempo cualquiera**.

# Ejemplo 2

La **aceleración** de una partícula está dada por

$$a = k\sqrt{s}\,,$$

donde $k$ es una constante positiva y $s$ es la distancia a un punto de referencia. La **velocidad** y **posición** son **nulos para *t*=0**. Determine la **aceleración**, **velocidad**, y **posición** para un **tiempo cualquiera**.

$$v\,dv = a\,ds \quad\longrightarrow\quad v\,dv = k\sqrt{s}\,ds$$

$$\longrightarrow\quad \frac{v^2}{2} = \frac{2k}{3}s^{3/2} \quad\longrightarrow\quad v = 2\sqrt{\frac{k}{3}}s^{3/4}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad\longrightarrow\quad t = \int_0^s \frac{ds}{v(s)} = \int_0^s \frac{ds}{2\sqrt{k/3}s^{3/4}}$$

$$\longrightarrow\quad \boxed{s = \frac{k^2}{144}t^4} \rightarrow \boxed{v = \frac{ds}{dt} = \frac{k^2}{36}t^3}$$

$$\rightarrow \boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{k^2}{12}t^2}$$

# Ejemplo 2

La **aceleración** de una partícula está dada por

$$a = k\sqrt{s}\,,$$

donde $k$ es una constante positiva y $s$ es la distancia a un punto de referencia. La **velocidad** y **posición** son **nulos para *t*=0**. Determine la **aceleración**, **velocidad**, y **posición** para un **tiempo cualquiera**.

$$v\,dv = a\,ds \longrightarrow v\,dv = k\sqrt{s}\,ds$$

$$\longrightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{2k}{3}s^{3/2} \longrightarrow v = 2\sqrt{\frac{k}{3}}s^{3/4}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \longrightarrow t = \int_0^s \frac{ds}{v(s)} = \int_0^s \frac{ds}{2\sqrt{k/3}s^{3/4}}$$

$$\longrightarrow \boxed{s = \frac{k^2}{144}t^4} \rightarrow \boxed{v = \frac{ds}{dt} = \frac{k^2}{36}t^3}$$

$$\rightarrow \boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{k^2}{12}t^2}$$

¿Cuales son las dimensiones de *k*?

# Resumen

- Estudiamos el caso partícular de movimiento con **aceleración constante**.
- Hemos revisado en detalle la **integración** en problemas de movimiento rectilíneo.
- Próxima clase:
  - ➔ Cinemática 2D.