FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Cinemática 2D y 3D

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 14 de Agosto de 2024

Resumen clase anterior

- Definimos las ecuaciones para movimiento con **aceleración constante**.

$$dv = a_0\, dt \quad \longrightarrow \quad v = v_0 + a_0\, t$$

$$v\, dv = a_0\, ds \quad \longrightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + a_0(s - s_0)$$

$$ds = v\, dt \quad \longrightarrow \quad s = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}a_0 t^2$$

- Revisamos en detalle la **integración** de ecuaciones en cinemática.

Clase 4: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática 2D
- Coordenadas rectangulares
- Lanzamiento de proyectil

- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (2.3, 2.4).
  - Hibbeler (12.4, 12.5, 12.6).

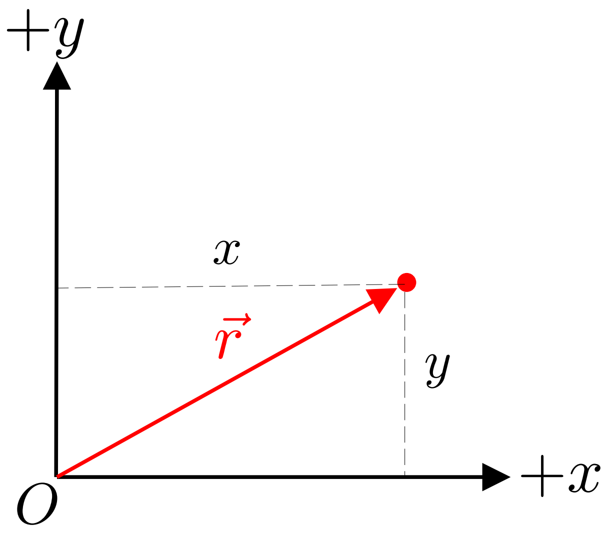
Clase 4: Cinemática 2D y 3D

- **Cinemática 2D**
- Coordenadas rectangulares
- Lanzamiento de proyectil

Cinemática 2D

- Nos referimos como **movimiento plano curvilíneo** a un movimiento confinado a un plano (**dos dimensiones**).

- En **coordenadas rectangulares**, el vector **posición** está dado por



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

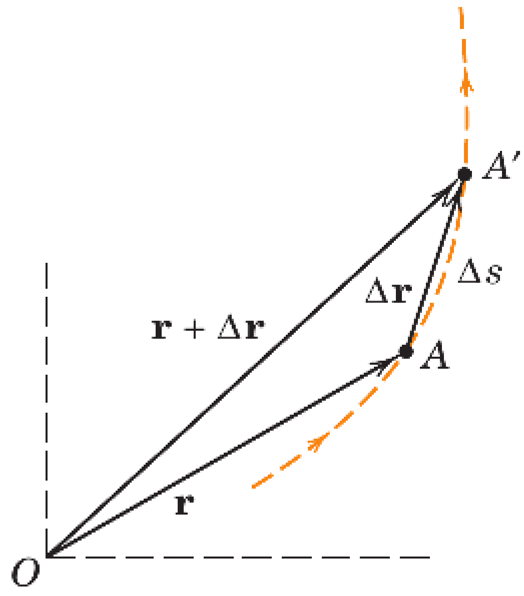
Cinemática 2D

- El **vector desplazamiento** $\Delta\vec{r}$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

- Si el <u>movimiento es rectilíneo</u>, la distancia recorrida:

$$\Delta s = \|\Delta\vec{r}\|$$



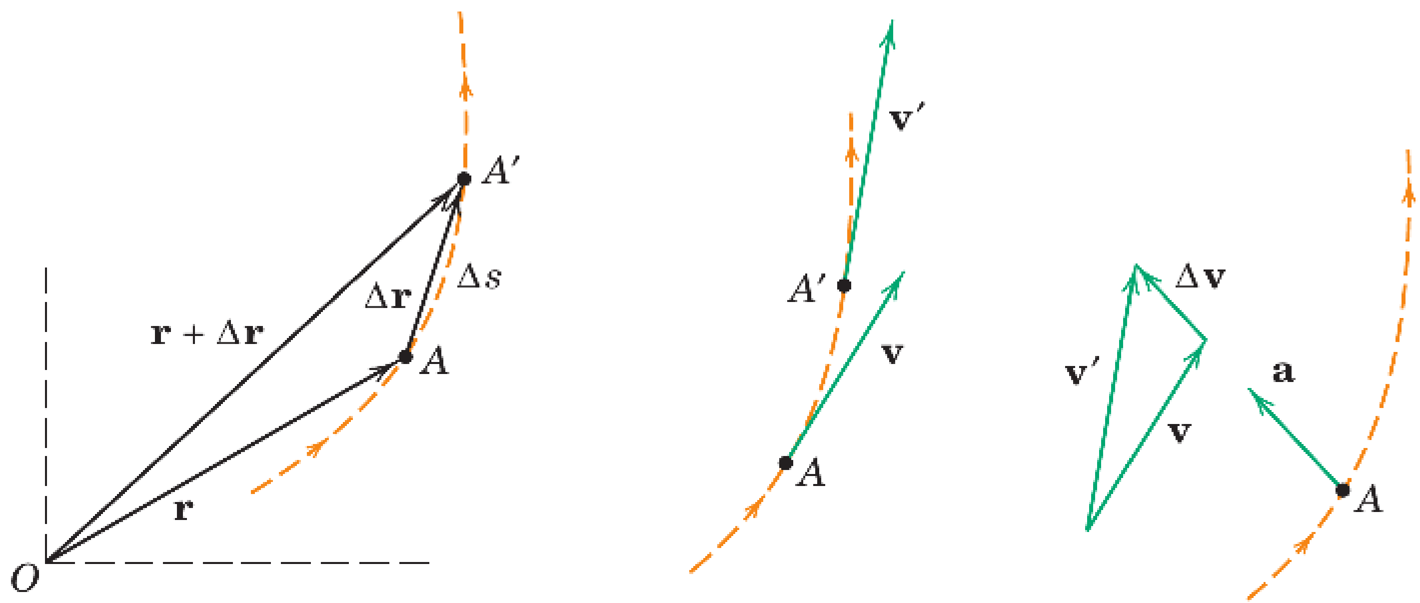
Cinemática 2D

- La **velocidad promedio** $\bar{\vec{v}}$, **velocidad** instantánea $\vec{v}$, y **rapidez** v ,

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad v = \|\vec{v}\| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

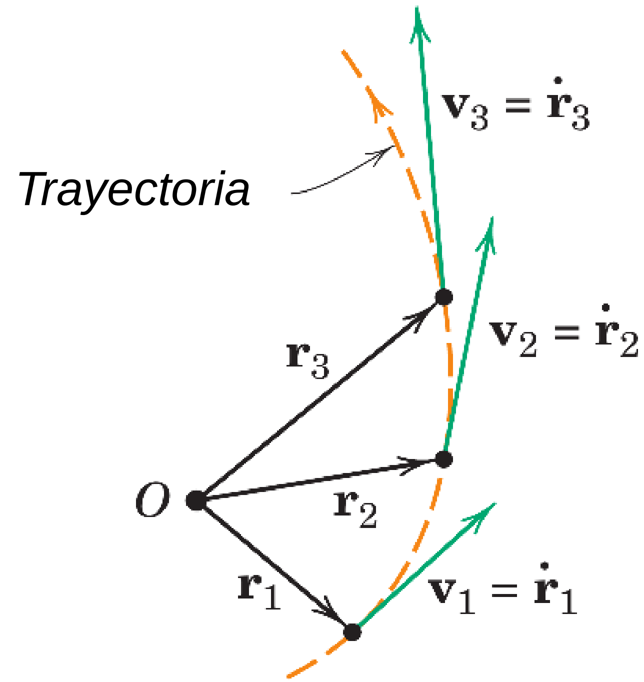
- La **aceleración promedio** $\bar{\vec{a}}$ y **aceleración** instantánea $\vec{a}$,

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

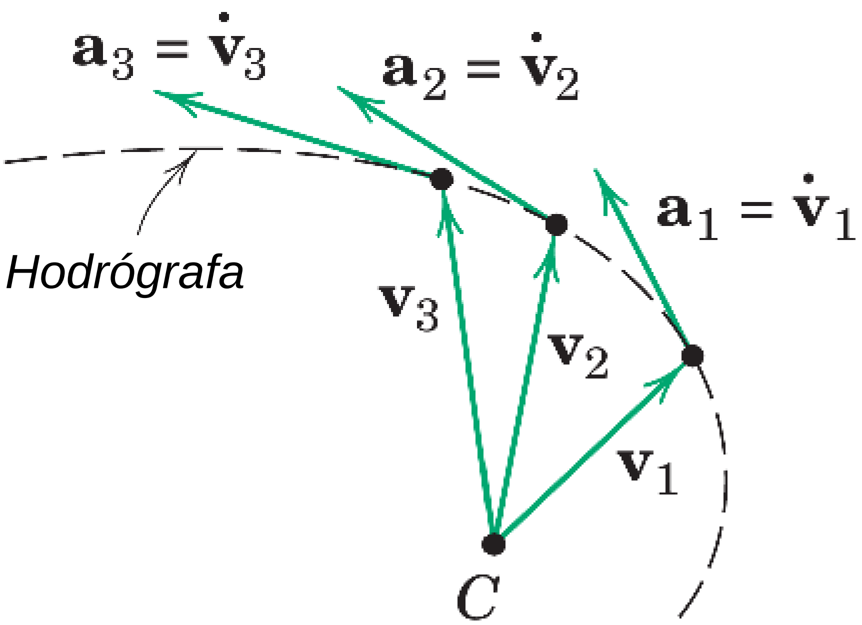


Visualización del movimiento

- La velocidad es **tangente** a la posición



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



- La aceleración es **tangente** a la velocidad

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Clase 4: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática 2D
- **Coordenadas rectangulares**
- Lanzamiento de proyectil

Coordenadas rectangulares

- De manera general, la posición de una partícula en tres dimensiones

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

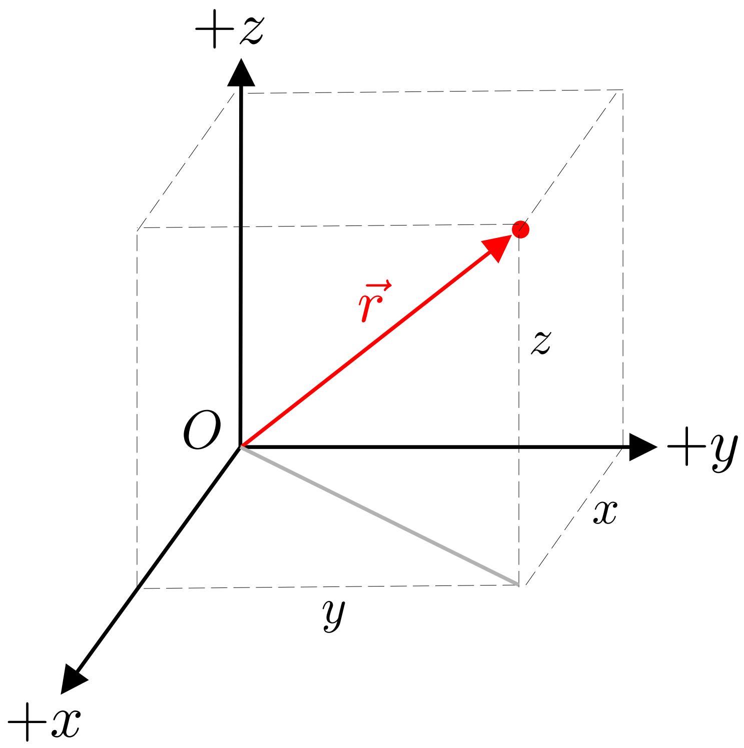
- Entonces, la velocidad y aceleración:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} + \dot{z}\hat{k}\,,$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}\,.$$

- Si el movimiento está confinado en un plano (dos dimensiones):

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

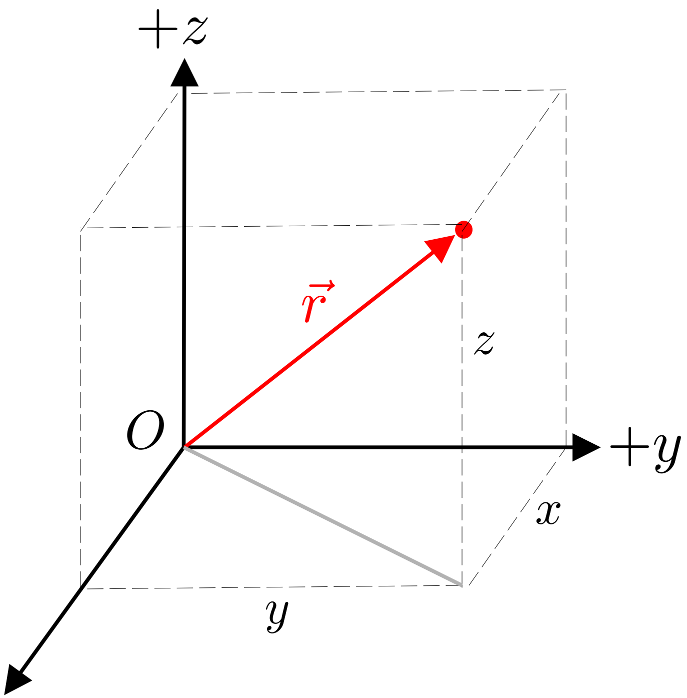


Coordenadas rectangulares

- Los **componentes** de la velocidad y aceleración

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z}$$



- Las magnitudes de la velocidad (**rapidez**) y aceleración

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,, \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_y^2}\,.$$

Ejemplo 1

La **posición** de una partícula en un plano está dada por

$$\vec{r} = At^2\hat{i} + Bt^{3/2}\hat{j} + C\hat{j}$$

donde *A*, *B*, y *C* son constantes conocidas. Encuentre la **rapidez** de la partícula en función del **tiempo** t .

Ejemplo 1

La **posición** de una partícula en un plano está dada por

$$\vec{r} = At^2\hat{i} + Bt^{3/2}\hat{j} + C\hat{j}$$

donde *A*, *B*, y *C* son constantes conocidas. Encuentre la **rapidez** de la partícula en función del **tiempo** t .

La velocidad: $$\vec{v} = \underbrace{2At\,\hat{i}}_{v_x} + \underbrace{\frac{3}{2}Bt^{1/2}\,\hat{j}}_{v_y}$$

La rapidez: $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{4A^2t^2 + \frac{9B^2t}{4}}}$$

Ejemplo 2

- Una partícula se mueve en un **plano** con una **aceleración**:

  $$\vec{a} = 12t^2\hat{i} - 4t^3\hat{j}\,,$$

  donde el tiempo está en segundos. Si la partícula tiene una **velocidad inicial** $\vec{v}_0 = 2\hat{i}$ en m/s, encuentre la **velocidad** y **rapidez** en función del **tiempo**.

Ejemplo 2

- Una partícula se mueve en un **plano** con una **aceleración**:

$$\vec{a} = 12t^2\hat{i} - 4t^3\hat{j}\ ,$$

- donde el tiempo está en segundos. Si la partícula tiene una **velocidad inicial** $\vec{v}_0 = 2\hat{i}$ en m/s, encuentre la **velocidad** y **rapidez** en función del **tiempo**.

Simplemente separamos la aceleración en sus dos componentes:

$$a_x = 12t^2 \qquad a_y = -4t^3$$

La velocidad en *x*:

$$v_x = v_{x,0} + \int_0^t a_x dt = 2 + 4t^3$$

La velocidad en *y*:

$$v_x = v_{y,0} + \int_0^t a_y dt = -t^4$$

Entonces la velocidad:

$$\boxed{\vec{v} = (2 + 4t^3)\hat{i} - t^4\hat{j}}$$

La rapidez:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2 + 4t^3)^2 + t^8}$$

$$\boxed{v = \sqrt{4 + 8t^3 + 16t^6 + t^8}}$$

Ejemplo 2

- Una partícula se mueve en un **plano** con una **aceleración**:

$$\vec{a} = 12t^2\hat{i} - 4t^3\hat{j}\ ,$$

- donde el tiempo está en segundos. Si la partícula tiene una **velocidad inicial** $\vec{v}_0 = 2\hat{i}$ en m/s, encuentre la **velocidad** y **rapidez** en función del **tiempo**.

Simplemente separamos la aceleración en sus dos componentes:

$$a_x = 12t^2 \qquad a_y = -4t^3$$

La velocidad en *x*:

$$v_x = v_{x,0} + \int_0^t a_x dt = 2 + 4t^3$$

La velocidad en *y*:

$$v_x = v_{y,0} + \int_0^t a_y dt = -t^4$$

Entonces la velocidad:

$$\boxed{\vec{v} = (2 + 4t^3)\hat{i} - t^4\hat{j}}$$

La rapidez:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2 + 4t^3)^2 + t^8}$$

$$\boxed{v = \sqrt{4 + 8t^3 + 16t^6 + t^8}}$$

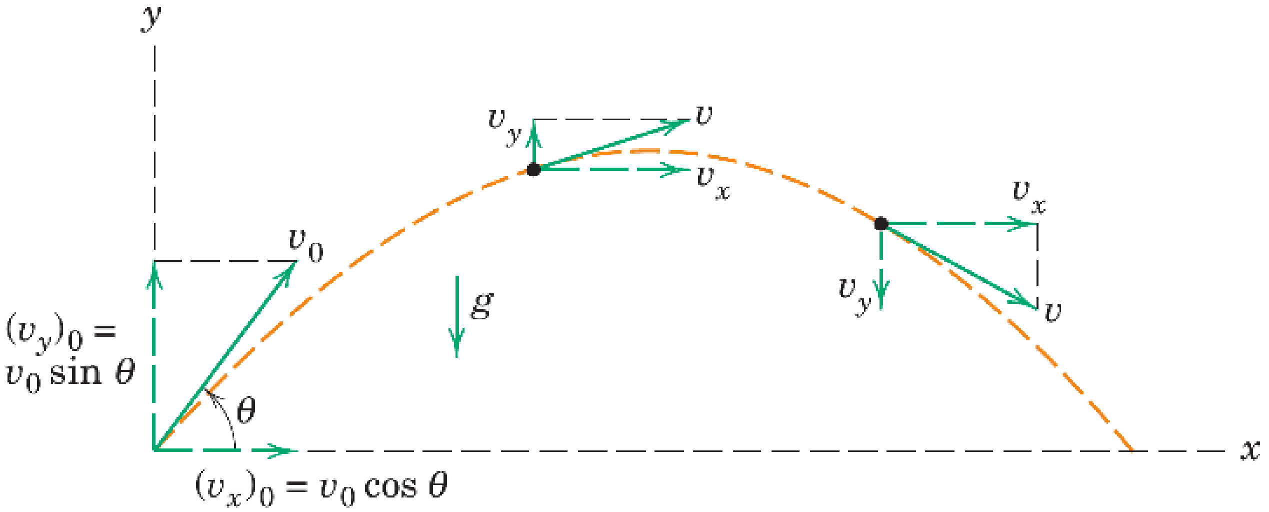
¿Qué unidades tiene cada número en las respuestas?

Clase 4: Cinemática 2D y 3D

- Cinemática 2D
- Coordenadas rectangulares
- **Lanzamiento de proyectil**

Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?
  - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde la **superficie**.
  - ¿Qué **distancia horizontal** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?



Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?

La aceleración es nula en el eje *x*, y constante hacia la superficie en el eje *y*:

$$a_x = 0\,, \quad a_y = -g$$

La velocidad es un movimiento con aceleración constante en cada componente:

$$\longrightarrow \quad \boxed{v_x = v_{x,0}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v_y = v_{y,0} - gt}$$

Mientras que la posición:

$$\longrightarrow \quad \boxed{x = x_0 + v_{x,0}\, t}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{y = y_0 + v_{y,0}\, t - gt^2/2}$$

También podemos escribir:

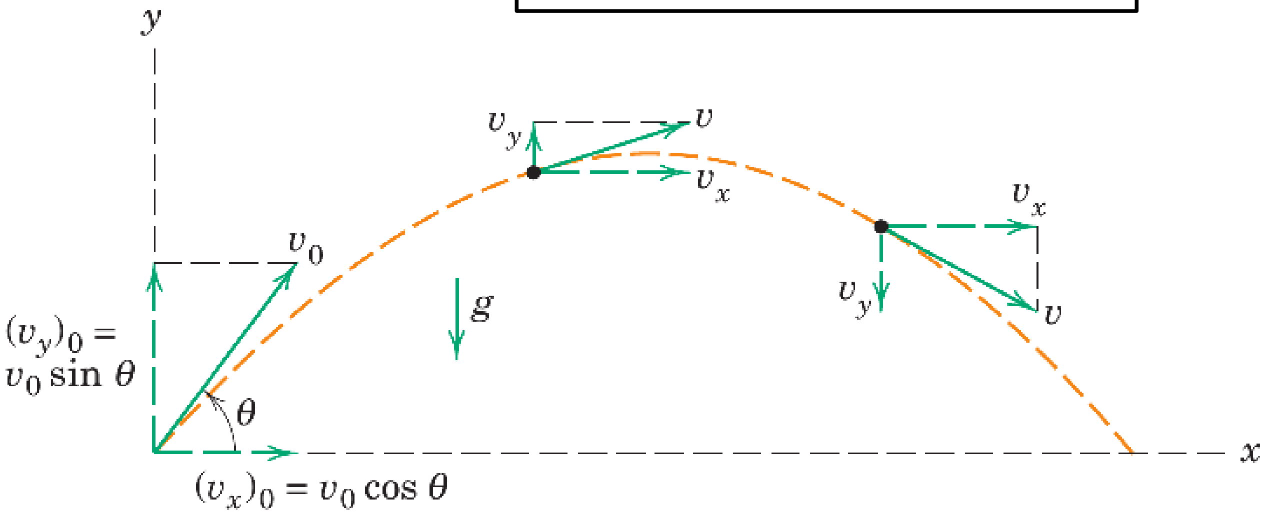
$$\longrightarrow \quad \boxed{v_y^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)}$$

En este ejemplo:

$$v_{x,0} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{y,0} = v_0 \sin\theta$$

$$x_0 = y_0 = 0$$



Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde la **superficie**.

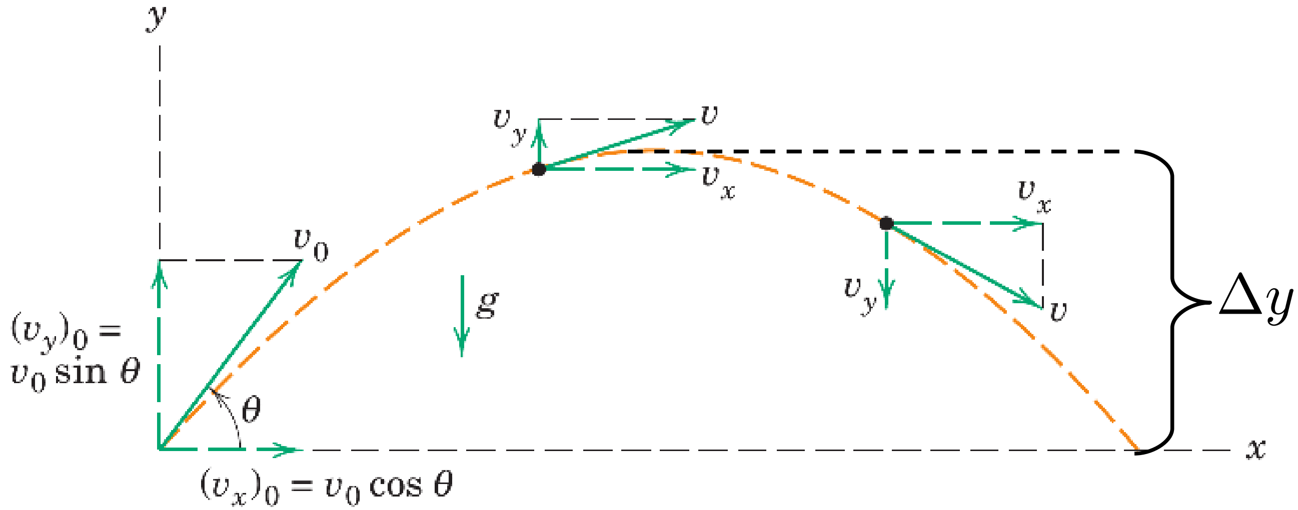
La **cima** se alcanza cuando la **velocidad vertical** es cero. La aceleración vertical sigue siendo -*g*.

La altura alcanzada es:

$$\underbrace{v_y^2}_{v_y=0} = v_{y,0}^2 - 2g(y - \underbrace{y_0}_{y_0=0}) \longrightarrow \boxed{\Delta y = \frac{v_{y,0}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$$

$v_y=0$ en el punto de **altura máxima**

- Si $\theta=0$, entonces $\Delta y=0$. La partícula se mantiene en el suelo.
- Por otro lado, la altura es máxima para $\theta=90°$.



Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo** θ respecto a la superficie con una **rapidez inicial** v_0. Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿Qué **distancia horizontal** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?

Primero obtenemos el tiempo que toma volver a tocar el suelo:

$$y = y_0 + v_{y,0}\, t - gt^2/2$$

$$y_0 = 0$$

$y=0$ cuando vuelve a tocar el suelo

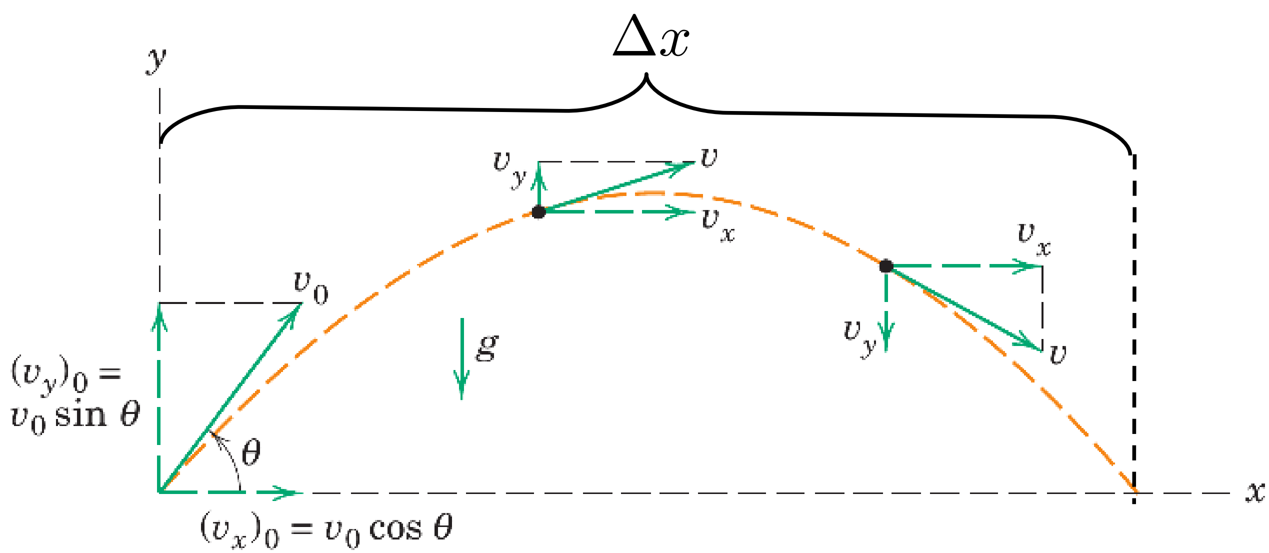
$$\longrightarrow \quad \Delta t = \frac{2v_{y,0}}{g} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

- Si $\theta=90^\circ$, entonces $\Delta x=0$. La partícula es lanzada verticalmente.

Ahora utlizamos la trayectoria horizontal:

$$x = x_0 + v_{x,0}\, t$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Delta x = v_{x,0}\, \Delta t = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}}$$



Resumen

- Introducimos la cinemática en dos dimensions (**movimiento plano curvilíneo**).
- Hemos revisado el problema del **lanzamiento de un proyectil**.
- Próxima clase:
  - Lanzamiento de proyectil (continuación)
  - Coordenadas polares