FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Movimiento armónico simple

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 16 de Octubre de 2023

Resumen clase anterior

- Definimos la **potencia**.
- Presentamos el concepto de **eficiencia**.

Clase de hoy

- Movimiento armónico simple.
- Oscilación de un resorte.

*Revisar Hibbeler, inicio del Capítulo de Vibraciones (Cap. 22.1)

Clase de hoy

- **Movimiento armónico simple.**
- Oscilación de un resorte.

*Revisar Hibbeler, inicio del Capítulo de Vibraciones (Cap. 22.1)

Oscilaciones

- Las **oscilaciones** (o vibraciones) corresponden a movimientos **periódicos** en el tiempo.
- Describen una serie de fénomenos fundamentales en las ciencias físicas y la ingenieria.
- Entre los tipos de oscilaciones más fundamentales:
  - ➔ Oscilación libre: **Movimiento armónico simple** (M.A.S.).
  - ➔ Oscilación amortiguada.
  - ➔ Oscilación forzada.

Movimiento armónico simple

- Un movimiento armónico simple es aquel descrito por una **ecuación de movimiento** del tipo

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

donde ω es la **frecuencia de oscilación** (frecuencia natural).

- El período se define como:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

- En el SI el período es medido en segundos, y la frecuencia en **Hertz**:

$$\mathrm{Hz} = \frac{\mathrm{ciclo}}{\mathrm{s}} = \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

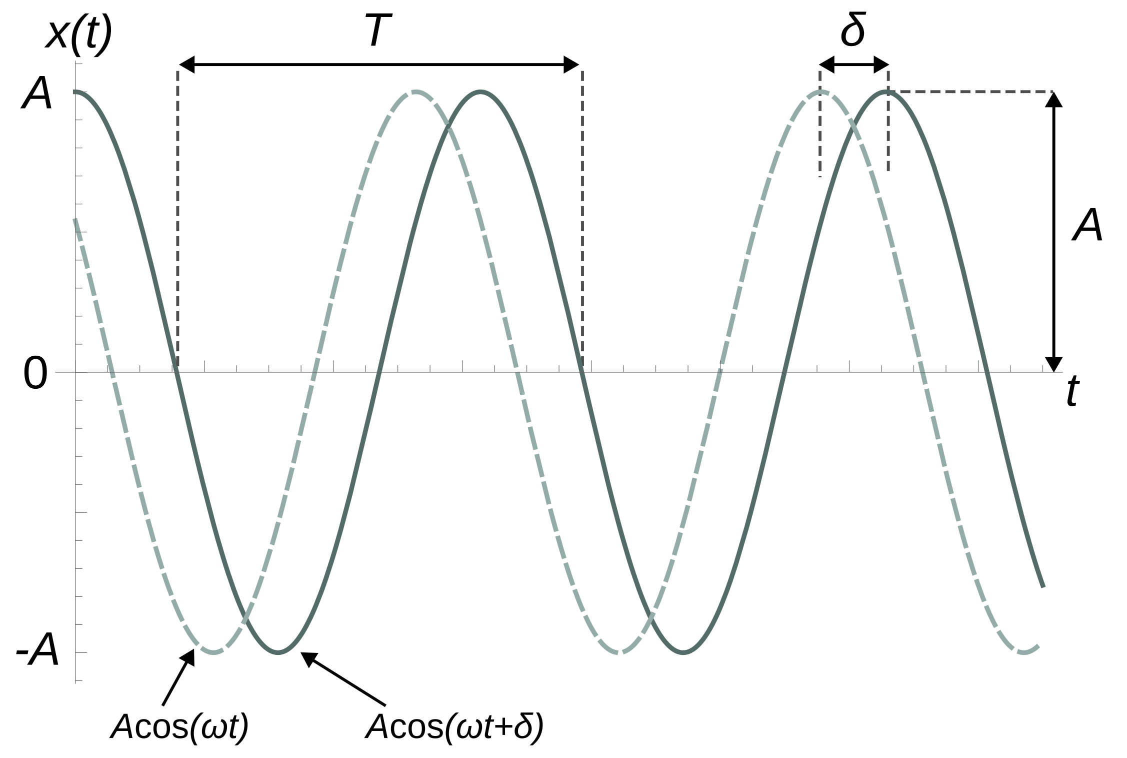
Movimiento armónico simple

- La solución es:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega\, t + \delta)}$$

donde A es la **amplitud** y δ es la **fase**.

- La amplitud tiene unidades de distancia.
- La fase es medida en radianes (ángulos).



Movimiento armónico simple

- Alternativamente podemos escribir:

$$\boxed{x(t) = A_1 \cos(\omega\, t) + A_2 \sin(\omega\, t)}$$

donde

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\,, \qquad \delta = \arctan(A_1/A_2)\,.$$

- Las constantes son definidas a partir de las **condiciones iniciales**.

Movimiento armónico simple

- La **velocidad** es:

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \delta) \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)}$$

- Mientras que la **aceleración**:

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta) \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta)}$$

- Es fácil comprobar que la ecuación de movimiento se satisface:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Movimiento armónico simple

- De todos modos vamos a derivar la solución $x(t)$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -\omega^2 x$$

$$\int v\, dv = -\int \omega^2 x\, dx$$

$$\frac{v^2}{2} = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\longrightarrow \qquad v = \sqrt{2C_1 - \omega^2 x^2}$$

Movimiento armónico simple

- De todos modos vamos a derivar la solución $x(t)$:

$$\longrightarrow \qquad v = \sqrt{2C_1 - \omega^2 x^2}$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2C_1 - \omega^2 x^2}} = \int dt$$

$$\frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{2C_1}}\right) = t + C_2$$

$$x = \frac{\sqrt{2C_1}}{\omega} \sin(\omega(t + C_2))$$

$$x = \frac{\sqrt{2C_1}}{\omega} \cos(\omega(t + C_2) + \pi/2)$$

Movimiento armónico simple

- Obtenemos que:

$$x = \frac{\sqrt{2C_1}}{\omega}\cos(\omega(t + C_2) + \pi/2)$$

renombrando

$$A = \frac{\sqrt{2C_1}}{\omega}\,, \quad \delta = \omega\, C_2 + \frac{\pi}{2}$$

- Se obtiene

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \delta)}$$

Clase de hoy

- Movimiento armónico simple.
- **Oscilación de un resorte.**

*Revisar Hibbeler, inicio del Capítulo de Vibraciones (Cap. 22.1)

Oscilación de un resorte

- Si tenemos un bloque de **masa** m, atado a un resorte de **constante elástica** k y **largo natural** x_0 , por **conservación de la energía**:

$$E = T + U$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2$$

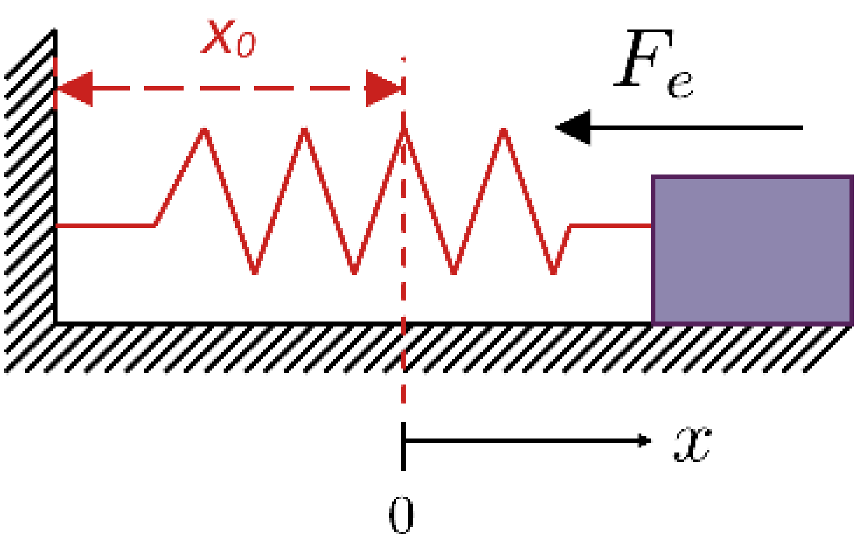
$v = \dot{x}$

Derivamos con respecto al tiempo $\longrightarrow$

La energía es constante: $dE/dt=0$

$$0 = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$



Que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia:

$$\boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$$

Oscilación de un resorte

- Si tenemos un bloque de **masa** m, atado a un resorte de **constante elástica** k y **largo natural** x_0 , por **conservación de la energía**:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

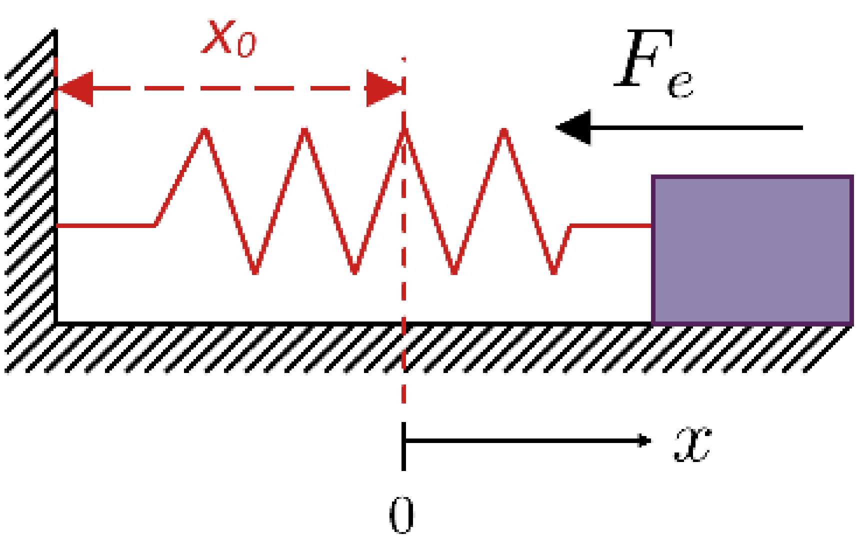
Ejemplo 1: Si en *t*=0 el resorte es soltado desde el reposo a una distancia *D* del punto de equilibrio:

$$v(t=0) = -A\omega\sin(\delta) = 0$$

$$\rightarrow \quad \delta = 0$$

$$x(t=0) = A\cos(0) = D$$

$$\rightarrow \quad A = D$$



$$\longrightarrow \qquad \boxed{x(t) = D\cos(\omega t)}$$

Oscilación de un resorte

- Si tenemos un bloque de **masa** m, atado a un resorte de **constante elástica** k y **largo natural** x_0 , por **conservación de la energía**:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

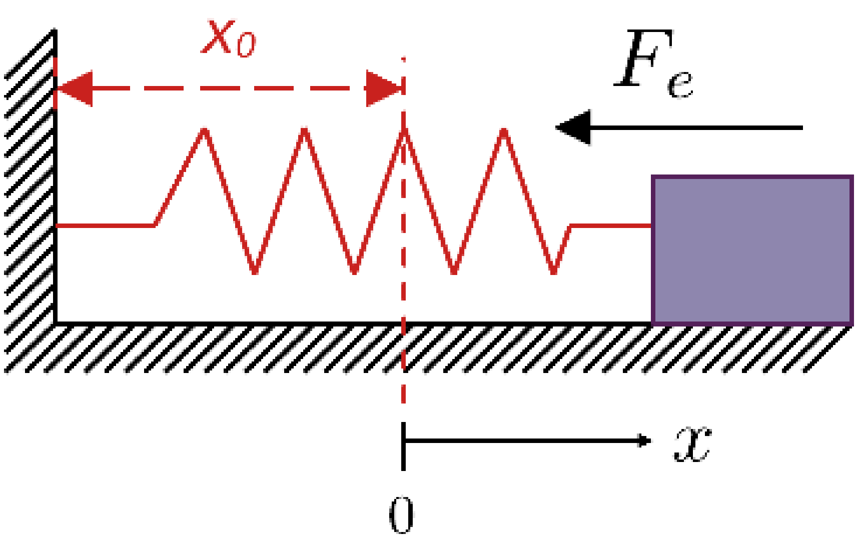
Ejemplo 2: Si en *t*=0 el resorte pasa por el punto de equilibrio con una rapidez v_0 hacia +*x*:

$$x(t=0) = A\cos(\delta) = 0$$

$$\rightarrow \quad \delta = n\pi/2, \quad n = \pm 1$$

$$v(t=0) = -A\omega\sin(n\pi/2) = v_0$$

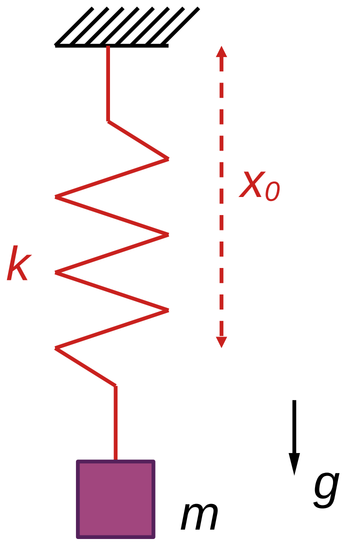
$$\rightarrow \quad n = -1, \quad A = v_0/\omega$$



$$\longrightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t - \pi/2)}$$

Ejemplo 1

- Se tiene un cuerpo de **masa** m atado a un **resorte** de **constante elástica** k y **largo natural** x_0. Si el cuerpo está colgado como muestra la figura y es afectado por la **gravedad**, encuentre la **ecuación de movimiento** y la **frecuencia** de oscilación.



Ejemplo 1

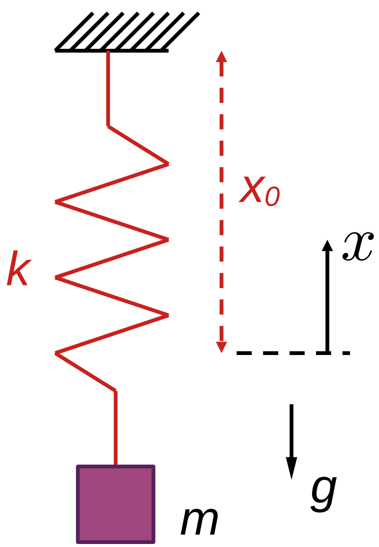
- Se tiene un cuerpo de **masa** m atado a un **resorte** de **constante elástica** k y **largo natural** x_0. Si el cuerpo está colgado como muestra la figura y es afectado por la **gravedad**, encuentre la **ecuación de movimiento** y la **frecuencia** de oscilación.

$$E = T + U_e + U_g$$

La energía es constante: $dE/dt = 0$

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + mgx \xrightarrow{\text{Derivamos con respecto al tiempo}} 0 = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} + mg\dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x + g = 0}$$



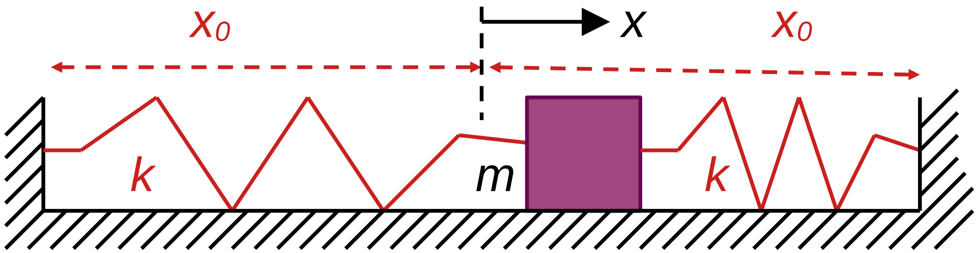
Definimos:

$$\tilde{x} = x + \frac{mg}{k} \xrightarrow{x = \tilde{x} - \frac{mg}{k}} \ddot{\tilde{x}} + \frac{k}{m}\tilde{x} = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \delta) - \frac{mg}{k}\,, \qquad \omega = \sqrt{k/m}}$$

Ejemplo 2

- Se tiene un cuerpo de **masa** m atado a **dos resortes** de **constante elástica** k y **largo natural** x_0 como muestra la figura. Asumiendo que la amplitud de oscilación es menor que el largo natural, encuentre la **ecuación de movimiento** y **período** de oscilación.



Ejemplo 2

- Se tiene un cuerpo de **masa** m atado a **dos resortes** de **constante elástica** k y **largo natural** x_0 como muestra la figura. Asumiendo que la amplitud de oscilación es menor que el largo natural, encuentre la **ecuación de movimiento** y **período** de oscilación.

$$E = T + U_{e,1} + U_{e,2}$$

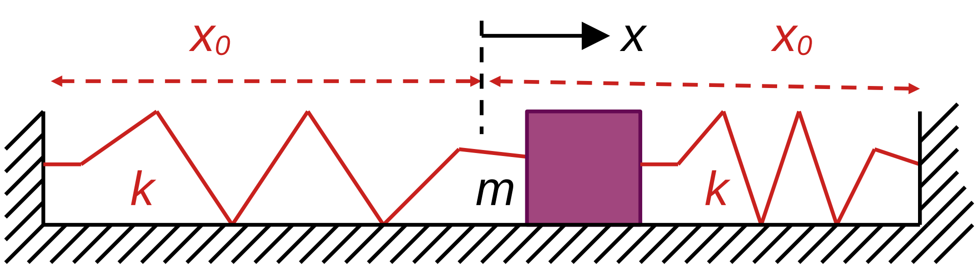
$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{2}x^2$$

Derivamos con respecto al tiempo

La energía es constante: $dE/dt=0$

$$0 = m\dot{x}\ddot{x} + 2kx\dot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0}$$



La frecuencia de oscilación:

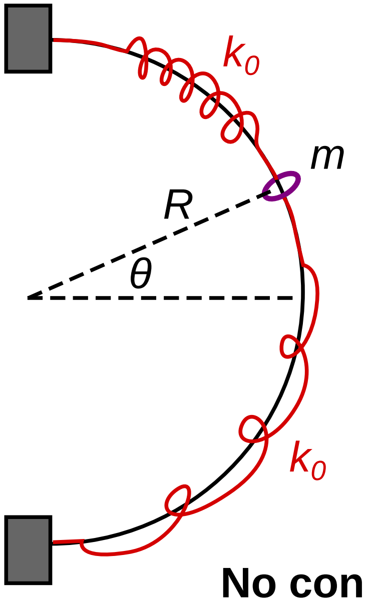
$$\omega = \sqrt{2k/m}$$

El período:

$$\boxed{T = 2\pi/\sqrt{2k/m}}$$

Ejemplo 3

- Se tiene un anillo de **masa** m atado a **dos resortes** de **constante elástica** k y **largo natural** $\pi r/2$ en un semi-círculo de radio r como muestra la figura. Asumiendo que la amplitud de oscilación es menor que el largo natural, encuentre la **ecuación de movimiento** y **frecuencia** de oscilación.



No considere gravedad.

Ejemplo 3

- Se tiene un anillo de **masa** m atado a **dos resortes** de **constante elástica** k y **largo natural** $\pi R/2$ en un semi-círculo de radio *R* como muestra la figura. Asumiendo que la amplitud de oscilación es menor que el largo natural, encuentre la **ecuación de movimiento**

$$E = T + U_{e,1} + U_{e,2}$$

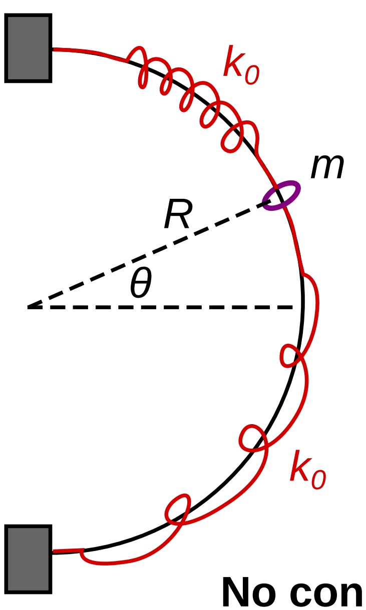
La energía es constante: $dE/dt=0$

Derivamos con respecto al tiempo

$$E = \frac{m}{2}(R\dot{\theta})^2 + 2 \times \frac{k}{2}(R\theta)^2 \longrightarrow 0 = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2kR^2\theta\dot{\theta}$$

$v = R\dot{\theta}$ $\quad \Delta s = R\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2k}{m}\theta = 0}$$



$$\longrightarrow \omega = \sqrt{2k/m}$$

No considere gravedad.

Resumen

- Presentamos el concepto de oscilaciones y examinamos el problema del **oscilador armónico simple**.
- Definimos la **frecuencia** y **período de oscilación**.
- Estudiamos el oscilador armónico en ejemplos simples con **resortes**.
- Próxima clase:
    - ➔ Más ejemplos.
    - ➔ Péndulos y pequeñas oscilaciones.