



FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Coordenadas cilíndricas

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Miércoles 21 de Agosto de 2024

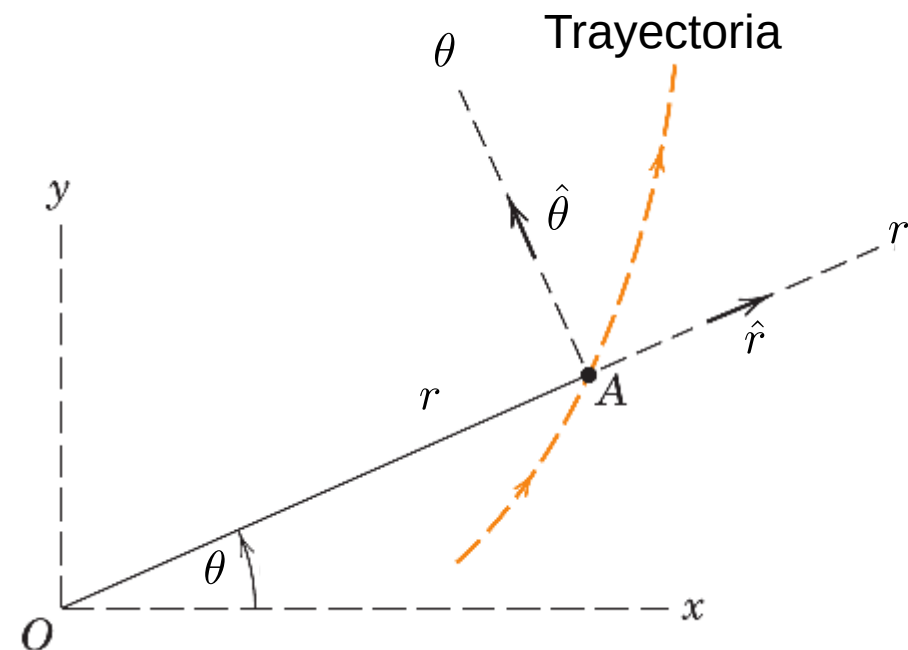
Resumen clase anterior

- Terminamos de revisar el **lanzamiento de un proyectil**.
- Introducimos las **coordenadas polares**.

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \hat{\theta}$$



Clase 6: Coordenadas cilíndricas

- Coordenadas cilíndricas

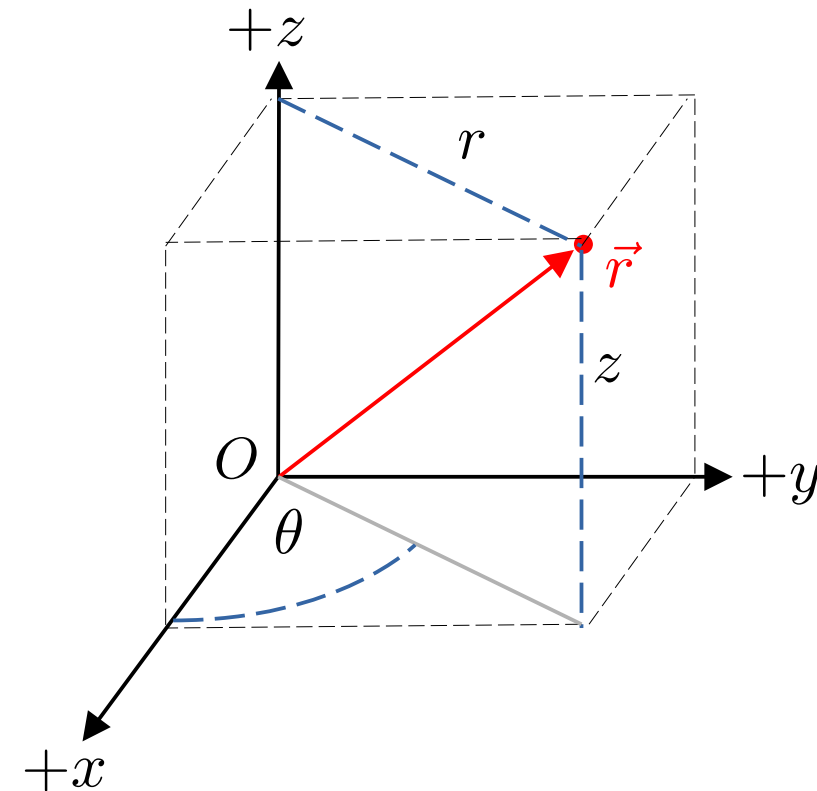
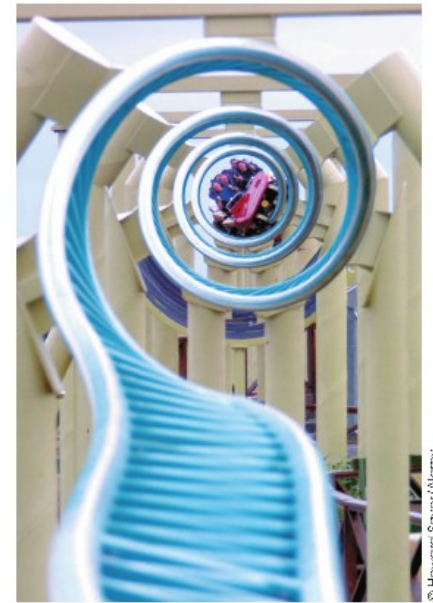
- Bibliografía recomendada:

- Meriam (2.7).
- Hibbeler (12.8).

Coordenadas cilíndricas

- Si un movimiento en **tres dimensiones** tiene una restricción a la **distancia radial desde un eje**, es conveniente utilizar **coordenadas cilíndricas**.
- Las **coordenadas cilíndricas** corresponden a:
 - r : Distancia desde el eje a la partícula.
 - θ : Ángulo desde un eje a elección.
 - z : “Altura”.
- La **posición** viene dada por

$$\vec{r} = r \hat{r} + z \hat{k}$$



Coordenadas cilíndricas: Velocidad

- El vector **velocidad** en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k}$$

- Donde sus **componentes**

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r \dot{\theta} \quad v_z = \dot{z}$$

- La **rapidez**

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$$

Coordenadas cilíndricas: Aceleración

- El vector **aceleración** en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

- Donde sus **componentes**

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad a_z = \ddot{z}$$

- Su **magnitud**

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$$

Coordenadas cilíndricas y cartesianas

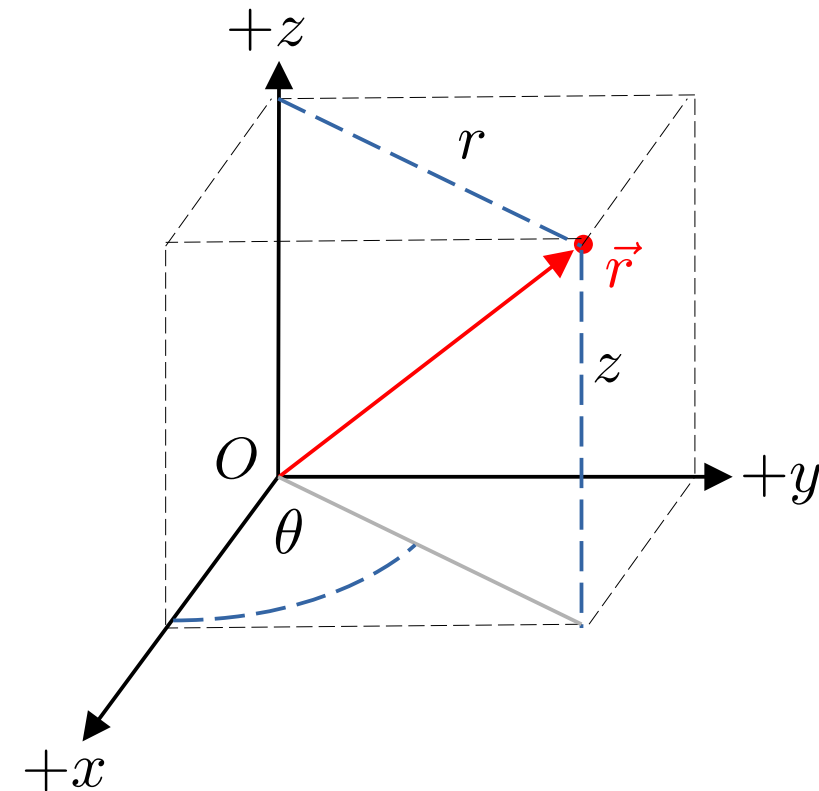
- Podemos facilmente convertir cantidades entre sistemas de coordenadas.

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x),$$

$$z = z$$



Ejemplo 1

- Una partícula presenta un movimiento descrito en **coordenadas cilíndricas** dado por

$$r(t) = R_0, \quad \theta(t) = \omega_0 t, \quad z(t) = A t,$$

donde R_0 , ω_0 , A y son **constantes** conocidas. Encuentre la **velocidad y aceleración**.

Ejemplo 1

- Una partícula presenta un movimiento descrito en **coordenadas cilíndricas** dado por

$$r(t) = R_0, \quad \theta(t) = \omega_0 t, \quad z(t) = A t,$$

donde R_0 , ω_0 , A y son **constantes** conocidas. Encuentre la **velocidad y aceleración**.

Primero calculamos todas las derivadas necesarias:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = \omega_0, \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{z} = A, \quad \ddot{z} = 0$$

Entonces la velocidad:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = R_0 \omega_0 \hat{\theta} + A \hat{k}}$$

La aceleración:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{k}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -R_0 \omega_0^2 \hat{r}}$$

Ejemplo 1

- Una partícula presenta un movimiento descrito en **coordenadas cilíndricas** dado por

$$r(t) = R_0, \quad \theta(t) = \omega_0 t, \quad z(t) = A t,$$

donde R_0 , ω_0 , A y son **constantes** conocidas. Encuentre la **velocidad y aceleración**.

Primero calculamos todas las derivadas necesarias:

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = \omega_0, \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{z} = A, \quad \ddot{z} = 0$$

Entonces la velocidad:

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = R_0 \omega_0 \hat{\theta} + A \hat{k}}$$

La aceleración:

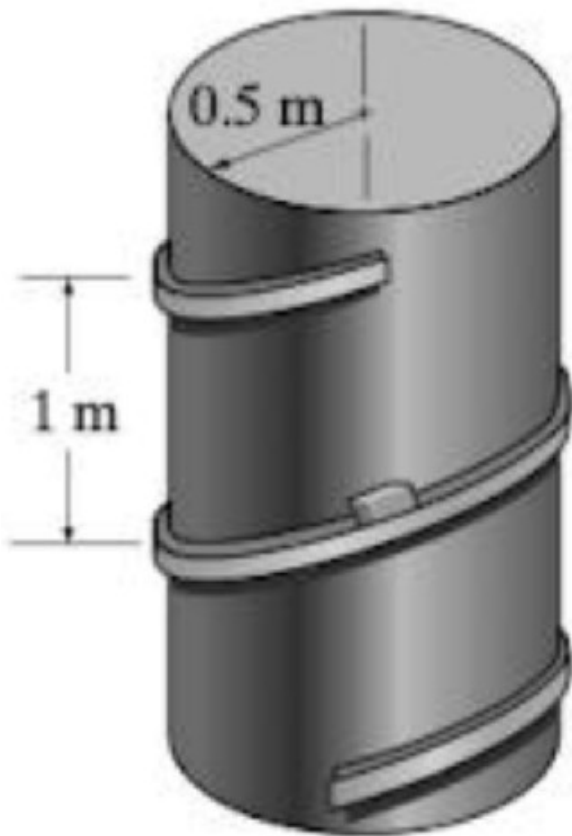
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \left(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{k}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -R_0 \omega_0^2 \hat{r}}$$

- Tarea:** Encontrar el vector desplazamiento en un intervalo de tiempo $\Delta t = 2\pi / \omega_0$.

Ejemplo 2

- Una caja se desliza por una **rampa helicoidal** que está definida por: $r=0.5$ m, $\theta=0.5t^3$ rad y $z=2-0.2t^2$ m, donde t se mide en segundos. Determine la **aceleración** de la caja en el instante en que $t = 2$ s.



Ejemplo 2

- Una caja se desliza por una **rampa helicoidal** que está definida por: $r=0.5$ m, $\theta=0.5t^3$ rad y $z=2-0.2t^2$ m, donde t se mide en segundos. Determine la **aceleración** de la caja en el instante en que $t = 2$ s.

Del enunciado:

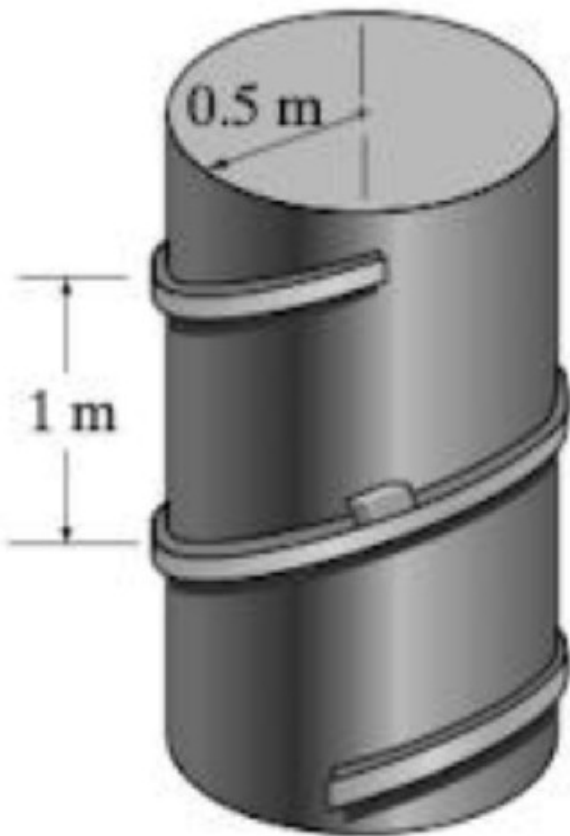
$$r = 0.5 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\theta = 0.5t^3 \text{ rad} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta} = 1.5t^2 \text{ rad/s}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\theta} = 3t \text{ rad/s}^2$$

$$r = (2 - 0.2t^2) \text{ m} \quad \rightarrow \quad \dot{z} = -0.4t \text{ m/s}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{z} = -0.4 \text{ m/s}^2$$



Ejemplo 2

- Una caja se desliza por una **rampa helicoidal** que está definida por: $r=0.5$ m, $\theta=0.5t^3$ rad y $z=2-0.2t^2$ m, donde t se mide en segundos. Determine la **aceleración** de la caja en el instante en que $t = 2$ s.

La aceleración:

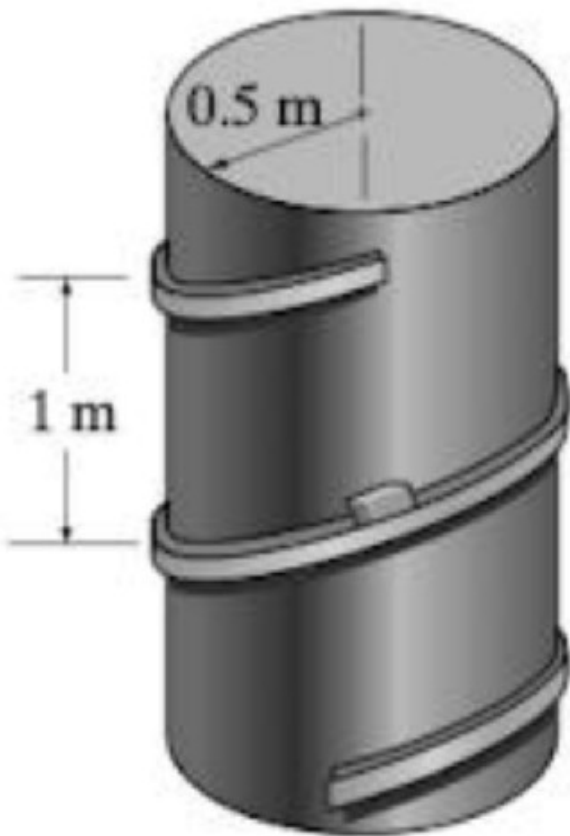
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{k}$$

Remplazando:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & -0.5 \text{ m} \times (1.5t^2)^2 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \hat{r} \\ & + 0.5 \text{ m} \times 3t \text{ rad/s}^2 \hat{\theta} - 0.4 \text{ m/s}^2 \hat{k} \end{aligned}$$

Evaluando en $t=2$ s:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & -0.5 \times (1.5 \times 4)^2 \text{ m/s}^2 \hat{r} \\ & + 1.5 \times 2 \text{ m/s}^2 \hat{\theta} - 0.4 \text{ m/s}^2 \hat{k} \end{aligned}$$



Ejemplo 2

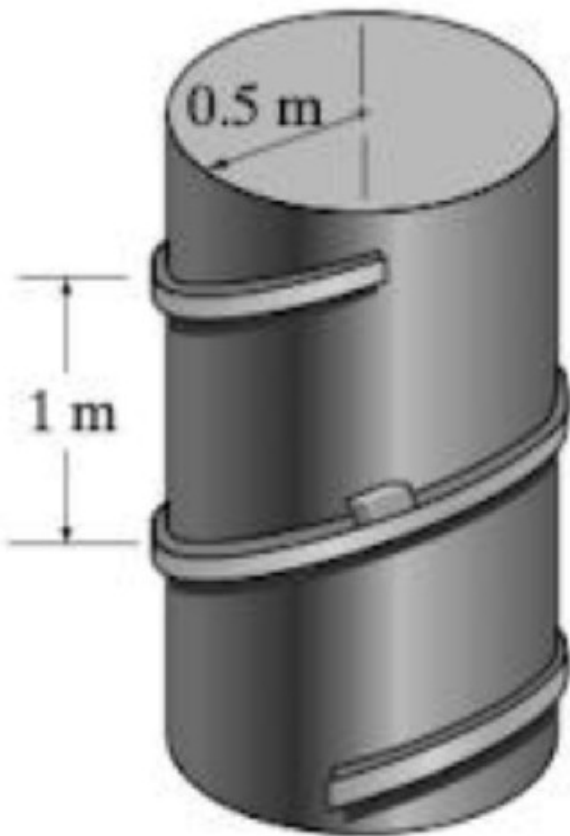
- Una caja se desliza por una **rampa helicoidal** que está definida por: $r=0.5$ m, $\theta=0.5t^3$ rad y $z=2-0.2t^2$ m, donde t se mide en segundos. Determine la **aceleración** de la caja en el instante en que $t = 2$ s.

Evaluando en $t=2$ s:

$$\vec{a} = -0.5 \times (1.5 \times 4)^2 \text{ m/s}^2 \hat{r} \\ + 1.5 \times 2 \text{ m/s}^2 \hat{\theta} - 0.4 \text{ m/s}^2 \hat{k}$$

Desarrollando:

$$\vec{a} = \left(-18\hat{r} + 3\hat{\theta} - 0.4\hat{k} \right) \text{ m/s}^2$$



Ejemplo 3

- La **trayectoria** de una partícula en **coordenadas cilíndricas** está dada por:

$$r(\theta) = Ae^{k\theta}, \quad z = h r,$$

donde A , k , y h son constantes conocidas. Si la partícula se mueve con rapidez constante v_0 .

- Encuentre la **velocidad** en **función de θ** .
- Encuentre la **aceleración** en **función de θ** .
- Encuentre $\theta(t)$ utilizando que $\theta(t=0)=0$.

Ejemplo 3

- La **trayectoria** de una partícula en **coordenadas cilíndricas** está dada por:

$$r(\theta) = Ae^{k\theta}, \quad z = hr,$$

donde A , k , y h son constantes conocidas. Si la partícula se mueve con rapidez constante v_0 .

- Encuentre la **velocidad** en **función de θ** .

Cada componente de la velocidad:

$$v_r = \dot{r} = Ak\dot{\theta}e^{k\theta}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = A\dot{\theta}e^{k\theta}$$

$$v_z = \dot{z} = hAk\dot{\theta}e^{k\theta}$$

La rapidez:

$$\longrightarrow v_0^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 = A^2\dot{\theta}^2(k^2(1+h^2) + 1)e^{2k\theta}$$

$$\longrightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2) + 1}}e^{-k\theta}$$

Se obtiene:

$$\longrightarrow \vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{k^2(1+h^2) + 1}}(k\hat{r} + \hat{\theta} + kh\hat{z})$$

Ejemplo 3

- La **trayectoria** de una partícula en **coordenadas cilíndricas** está dada por:

$$r(\theta) = A e^{k\theta}, \quad z = h r,$$

donde A , k , y h son constantes conocidas. Si la partícula se mueve con rapidez constante v_0 .

- Encuentre la **aceleración** en **función de θ** .

Seguimos derivando:

$$\begin{aligned} \dot{r} = v_r &= \frac{k v_0}{\sqrt{k^2(h^2 + 1) + 1}} \quad \longrightarrow \quad \ddot{r} = \ddot{z} = 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{v_0}{A \sqrt{k^2(h^2 + 1) + 1}} e^{-k\theta} \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{A^2(k^2(h^2 + 1) + 1)} e^{-2k\theta} \\ &\quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{-k v_0^2}{A^2(k^2(h^2 + 1) + 1)} e^{-2k\theta} \end{aligned}$$

Entonces la aceleración:

$$\longrightarrow \quad \vec{a} = \frac{v_0^2}{A(k^2(h^2 + 1) + 1)} e^{-k\theta} (-\hat{r} + k\hat{\theta})$$

Ejemplo 3

- La **trayectoria** de una partícula en **coordenadas cilíndricas** está dada por:

$$r(\theta) = Ae^{k\theta}, \quad z = hr,$$

donde A , k , y h son constantes conocidas. Si la partícula se mueve con rapidez constante v_0 .

- Encuentre $\theta(t)$ utilizando que $\theta(t=0)=0$.

Tenemos que:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}} e^{-k\theta}$$

Integramos:

$$\int_0^\theta e^{k\theta} d\theta = \int_0^t \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}} dt$$

$$\frac{e^{k\theta}}{k} - \frac{1}{k} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}} t \quad \longrightarrow$$

$$\theta(t) = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{kv_0}{A\sqrt{k^2(1+h^2)+1}} t + 1 \right)$$

Resumen

- Hemos definido el sistema de **coordenadas polares** para movimientos en un plano.
- Generalizamos las coordenadas polares a movimientos tridimensionales, definiendo las **coordenadas cilíndricas**.
- Próxima clase:
 - Movimiento relativo.