FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

# Dinámica (FIS1514)

## Movimiento armónico simple (cont.)

**Felipe Isaule**

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 14 de Octubre de 2024

# Resumen clase anterior

- Definimos la el **movimiento armónico simple** (M.A.S.)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

- Definimos la **frecuencia angular** de oscilación $\omega$ y el **período** $T = 2\pi/\omega$.

- Revisamos ejemplos típicos de M.A.S. con resortes.

# Clase de hoy

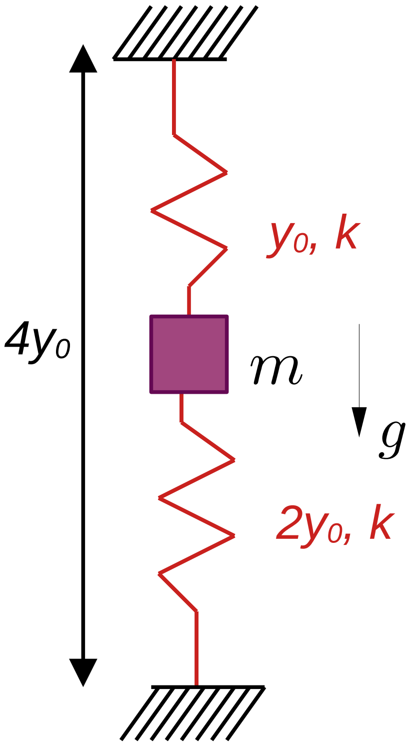
- Ejemplos y punto de equilibrio
- Péndulo simple y pequeñas oscilaciones

# Clase de hoy

- **Ejemplos y punto de equilibrio**
- Péndulo simple y pequeñas oscilaciones

# Ejemplo 1

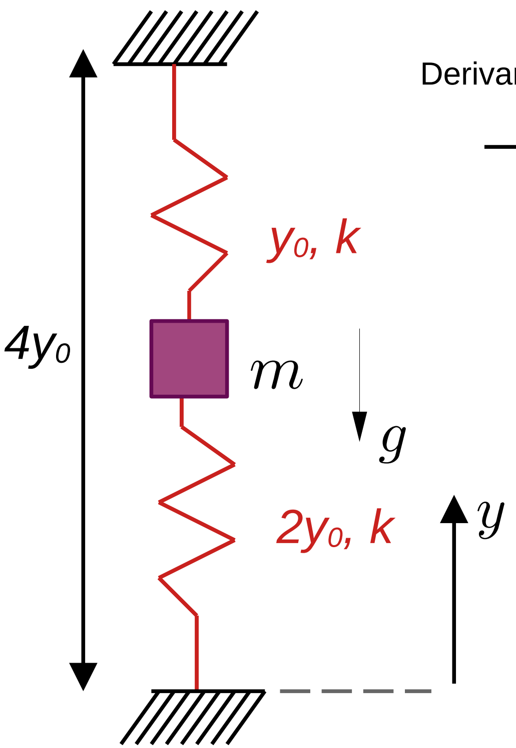
- Un cuerpo de **masa** $m$ está atado **verticalmente** a dos **resortes** con **constantes elásticas** $k$ y **largo natural** $y_0$ y $2y_0$ como muestra la figura. Considerando que los resortes se encuentras pegados a superficies separadas por una **distancia** de $4y_0$ . Encuentre:
  - **Ecuación de movimiento** y **frecuencia** natural de oscilación.
  - La **altura en función del tiempo** si en *t*=0 el cuerpo está en **reposo** y a una **altura** $y_0$ desde la superficie.



# Ejemplo 1

- Un cuerpo de **masa** $m$ está atado **verticalmente** a dos **resortes** con **constantes elásticas** $k$ y **largo natural** $y_0$ y $2y_0$ como muestra la figura. Considerando que los resortes se encuentras pegados a superficies separadas por una **distancia** de $4y_0$ . Encuentre:
  - **Ecuación de movimiento** y **frecuencia** natural de oscilación.

$$E = \frac{m}{2}\dot{y}^2 + mgy + \frac{k}{2}(y - 2y_0)^2 + \frac{k}{2}(4y_0 - y - y_0)^2$$




Derivamos con respecto al tiempo

$$0 = m\dot{y}\ddot{y} + mg\dot{y} + k(y - 2y_0)\dot{y} - k(3y_0 - y)\dot{y}$$

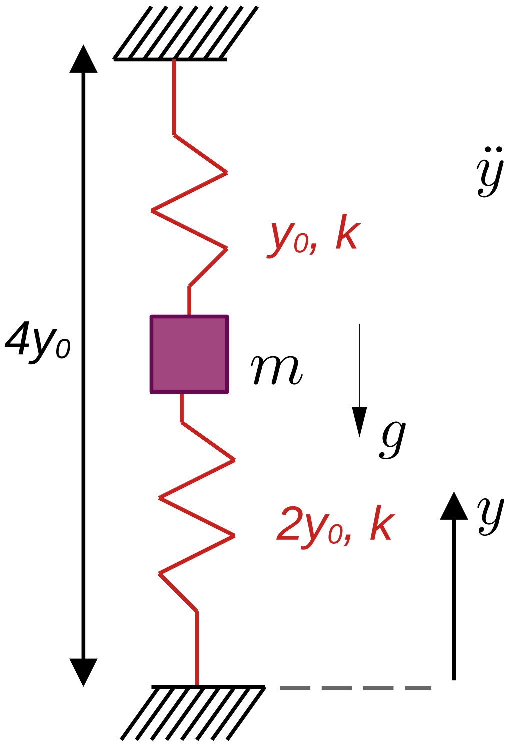
$$\boxed{\ddot{y} + g + \frac{k}{m}(2y - 5y_0) = 0}$$

La frecuencia angular:

$$\boxed{\omega = \sqrt{2k/m}}$$

# Ejemplo 1

- Un cuerpo de **masa** $m$ está atado **verticalmente** a dos **resortes** con **constantes elásticas** $k$ y **largo natural** $y_0$ y $2y_0$ como muestra la figura. Considerando que los resortes se encuentras pegados a superficies separadas por una **distancia** de $4y_0$ . Encuentre:
  - La **altura en función del tiempo** si en *t*=0 el cuerpo está en **reposo** y a una **altura** $y_0$ desde la superficie.




Definimos:

$$\tilde{y} = y - \frac{5y_0}{2} + \frac{mg}{2k}$$

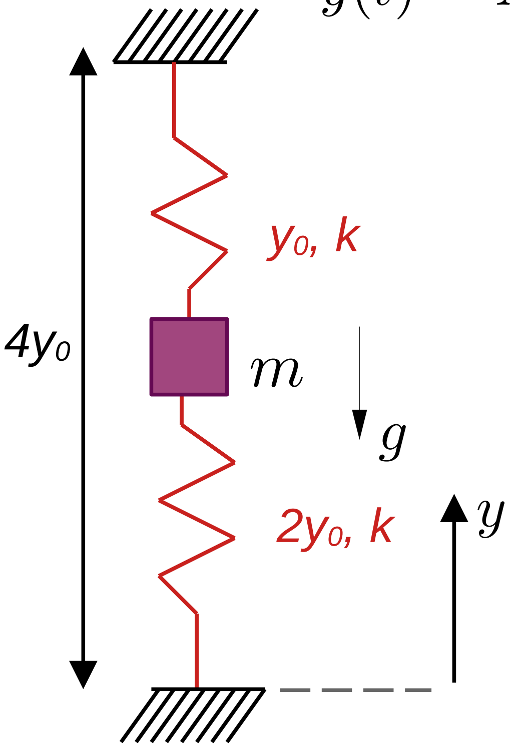
$$\ddot{y} + g + \frac{k}{m}(2y - 5y_0) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \ddot{\tilde{y}} + \omega^2 \tilde{y} = 0$$

$$\longrightarrow \qquad \tilde{y} = A\cos(\omega t + \delta)$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{y(t) = A\cos(\omega t + \delta) + \frac{5y_0}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

# Ejemplo 1

- Un cuerpo de **masa** $m$ está atado **verticalmente** a dos **resortes** con **constantes elásticas** $k$ y **largo natural** $y_0$ y $2y_0$ como muestra la figura. Considerando que los resortes se encuentras pegados a superficies separadas por una **distancia** de $4y_0$ . Encuentre:
  - La **altura en función del tiempo** si en *t*=0 el cuerpo está en **reposo** y a una **altura** $y_0$ desde la superficie.




$$y(t) = A\cos(\omega t + \delta) + \frac{5y_0}{2} - \frac{mg}{2k} \quad \longrightarrow \quad \dot{y}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \delta)$$

En *t*=0:

$$\dot{y}(t=0) = 0 = -A\omega\sin(\delta) \quad \longrightarrow \quad \delta = n\pi\,, \quad n = 0, 1$$

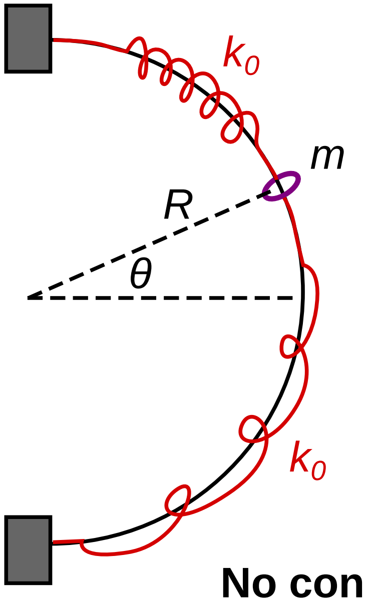
$$y(t=0) = y_0 = A\cos(n\pi) + \frac{5y_0}{2} - \frac{mg}{2k}$$

$$\longrightarrow \quad A\cos(n\pi) = -\frac{3y_0}{2} + \frac{mg}{2k}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{A = -\frac{3y_0}{2} + \frac{mg}{2k}, \quad n = 0}$$

# Ejemplo 2

- Se tiene un anillo de **masa** $m$ atado a **dos resortes** de **constante elástica** $k$ y **largo natural** $\pi R/2$ en un semi-círculo de radio *R* como muestra la figura. Asumiendo que la amplitud de oscilación es menor que el largo natural, encuentre la **ecuación de movimiento.**




**No considere gravedad.**

# Ejemplo 2

- Se tiene un anillo de **masa** $m$ atado a **dos resortes** de **constante elástica** $k$ y **largo natural** $\pi R/2$ en un semi-círculo de radio *R* como muestra la figura. Asumiendo que la amplitud de oscilación es menor que el largo natural, encuentre la **ecuación de movimiento.**

$$E = T + U_{e,1} + U_{e,2}$$

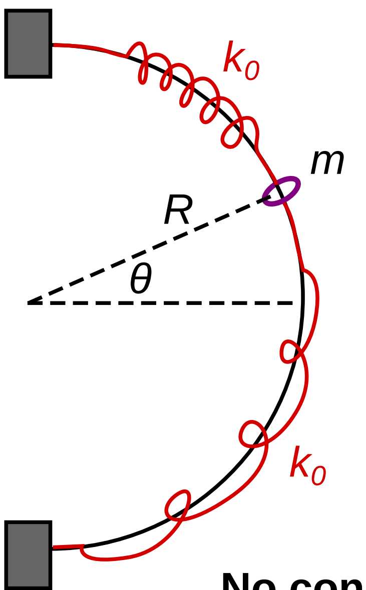
La energía es constante: $dE/dt = 0$

Derivamos con respecto al tiempo

$$E = \frac{m}{2}(R\dot{\theta})^2 + 2 \times \frac{k}{2}(R\theta)^2 \longrightarrow 0 = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2kR^2\theta\dot{\theta}$$

$v = R\dot{\theta}$ $\quad$ $\Delta s = R\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2k}{m}\theta = 0}$$




$$\longrightarrow \quad \omega = \sqrt{2k/m}$$

**No considere gravedad.**

# Punto de equilibrio

- En un problema de oscilaciones, el **punto de equilibrio** es la posición donde se quedaría la partícula si no hubiera oscilación $(A=0)$.

- Alternativamente, podemos pensar que la **posición central** de una oscilación armónica simple.

- Podemos obtenerla del punto donde:
  - La aceleración es cero: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x_{eq} = 0$

    $$\ddot{x} + \omega^2 x - C = 0 \quad \longrightarrow \quad x_{eq} = C/\omega^2$$

  - Utilizando leyes de Newton, cuando las fuerzas se cancelan.

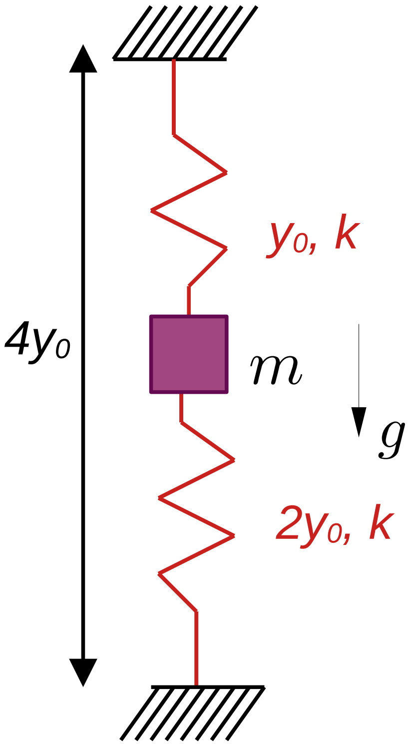
# Ejemplo

- En el ejemplo inicial:

$$\ddot{y} + g + \frac{k}{m}(2y - 5y_0) = 0$$

$$\ddot{y} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad g + \frac{k}{m}(2y_{eq} - 5y_0) = 0$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{y_{eq} = -\frac{mg}{2k} + \frac{5y_0}{2}}$$



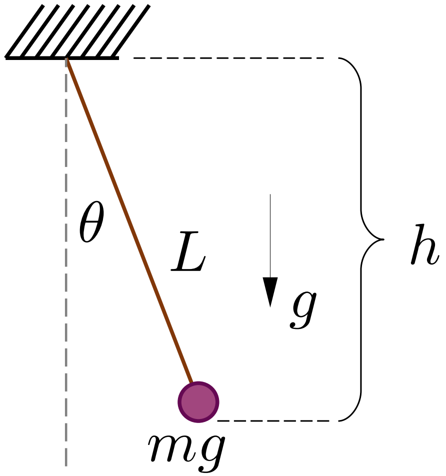
# Clase de hoy

- Ejemplo y punto de equilibrio
- **Péndulo simple y pequeñas oscilaciones**

# Oscilación de un péndulo

- El **péndulo simple** consiste de una partícula de masa $m$ atada a una **cuerda ideal** de **largo** $L$ y que se deja **oscilar** por efecto de la **gravedad**.
- La **ecuación de movimiento** utilizando el método de energía:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}v^2 + mgh \\ &= \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta \end{aligned}$$




Derivamos con respecto al tiempo $\longrightarrow$

$$0 = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

*__Tarea:__ Obtener ecuaciones de movimiento utilizando DCL y leyes de Newton

# Aproximación de pequeñas oscilaciones

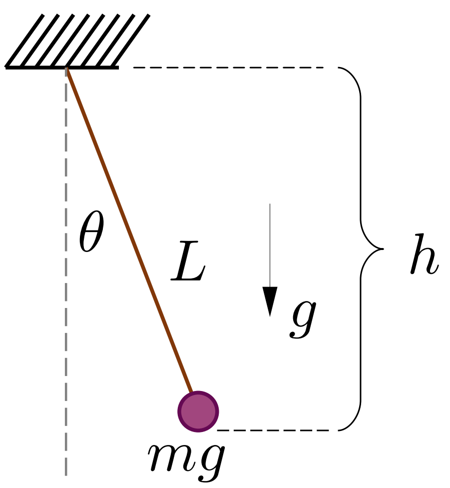
- La oscilación de un péndulo no es posible de resolver facilmente de manera analítica.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

- Sin embargo, cuando los **ángulos son pequeños**:

$$\sin\theta \approx \theta \longrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$$

Ángulos menores que ~15°




- Que corresponde a un **oscilación armónico simple** (M.A.S.) con frecuencia

$$\boxed{\omega = \sqrt{g/L}}$$

- Esto se conoce como la aproximación de **pequeñas oscilaciones**.

# Ejemplo:

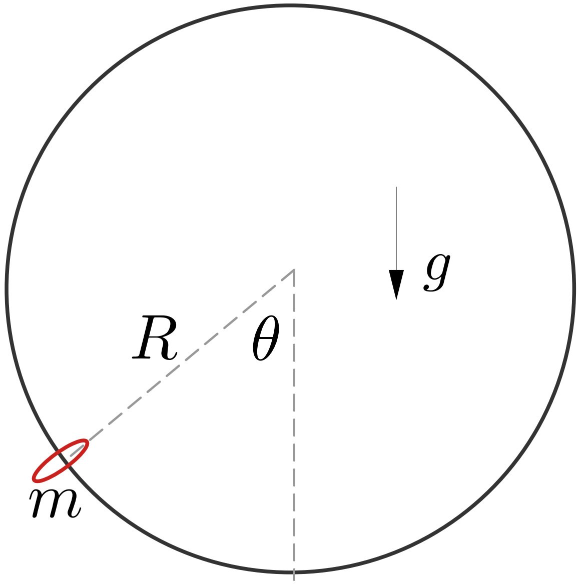
- Un anillo de **masa** $m$ puede moverse **sin roce** por un alambre circular de **radio** $R$ . Encuentre la **ecuación de movimiento** para **pequeñas oscilaciones** y el **período** de oscilación.

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{m}{2}v^2 + mgh \\
&= \frac{m}{2}L^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta
\end{aligned}
$$

Derivamos con respecto al tiempo

$$0 = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$




En la aproximación de **ángulos pequeños**:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0} \qquad \omega = \sqrt{g/R}$$

El período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \boxed{= 2\pi\sqrt{R/g}}$$

# Resumen

- Revisamos el ejemplo del **péndulo simple**.
- Definimos la aproximación de **pequeñas oscilaciones**.
- Próxima clase:
  - ➔ Momentum e impulso.