



FACULTAD DE FÍSICA  
PONTIFICIA UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DE CHILE

# Dinámica (FIS1514)

## Lanzamiento de proyectil y coordenadas polares

---

**Felipe Isaule**

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 19 de Agosto de 2024

---

# Resumen clase anterior

- Comenzamos a estudiar cinemática en **dos dimensiones**.
- Revisamos el **lanzamiento de un proyectil**.

# Clase 5: Projectiles y coordenadas polares

- Lanzamiento de proyectil.
- Coordenadas polares

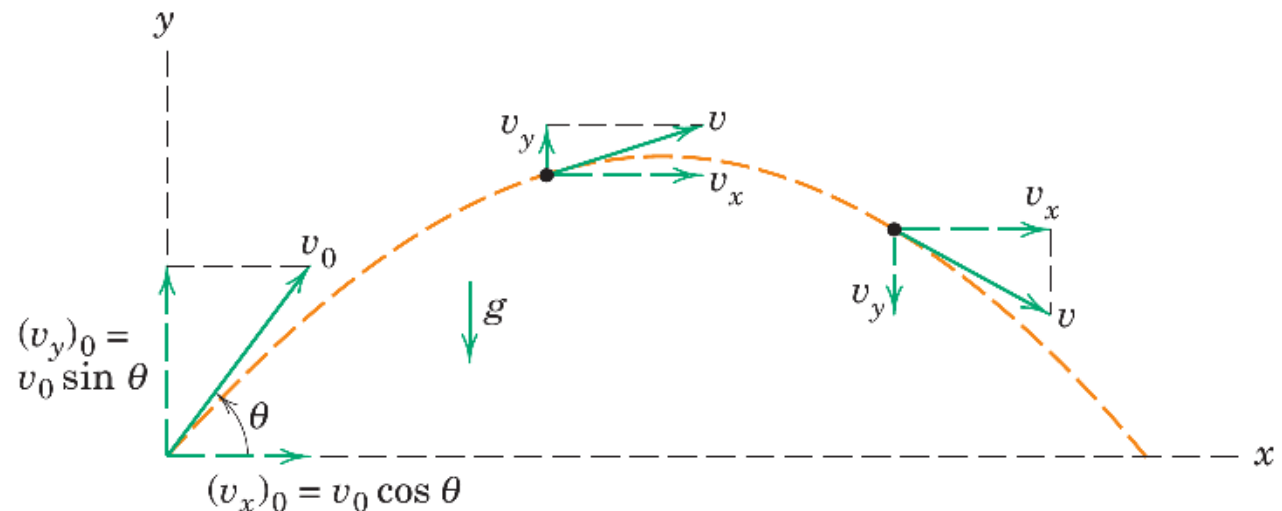
- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (2.4, 2.6).
  - Hibbeler (12.6, 12.8).

# Clase 5: proyectiles y coordenadas polares

- **Lanzamiento de proyectil.**
- Coordenadas polares

# Movimiento de un proyectil

- Una **partícula** es lanzada con un **ángulo**  $\theta$  respecto a la superficie con una **rapidez inicial**  $v_0$ . Si la partícula está sujeta a la gravedad,
  - ¿Cuál es su **trayectoria** y **velocidad**?
  - ¿A qué **altura** llega la partícula? Asuma que la partícula es lanzada desde la **superficie**.
  - ¿Qué **distancia horizontal** recorre la partícula al tocar nuevamente la superficie?



# Lanzamiento de un proyectil

- **Trayectoria y velocidad:**

La aceleración es nula en el eje  $x$ , y constante hacia la superficie en el eje  $y$ :

$$a_x = 0, \quad a_y = -g$$

La velocidad es un movimiento con aceleración constante en cada componente:

$$\longrightarrow v_x = v_{x,0}$$

$$\longrightarrow v_y = v_{y,0} - gt$$

En este ejemplo:

$$v_{x,0} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{y,0} = v_0 \sin \theta$$

$$x_0 = y_0 = 0$$

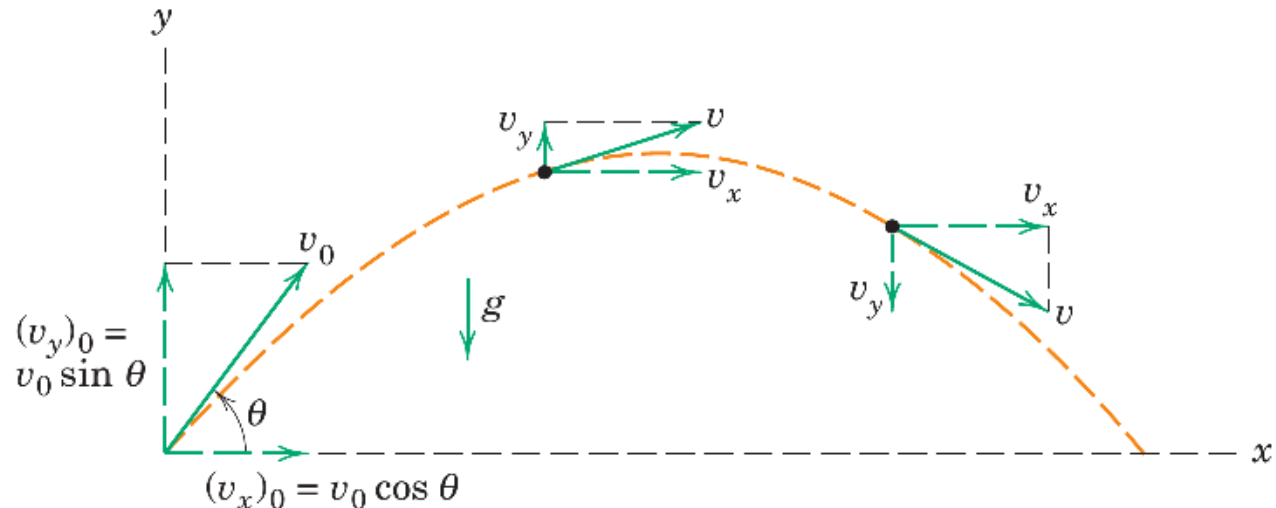
Mientras que la posición:

$$\longrightarrow x = x_0 + v_{x,0} t$$

$$\longrightarrow y = y_0 + v_{y,0} t - gt^2/2$$

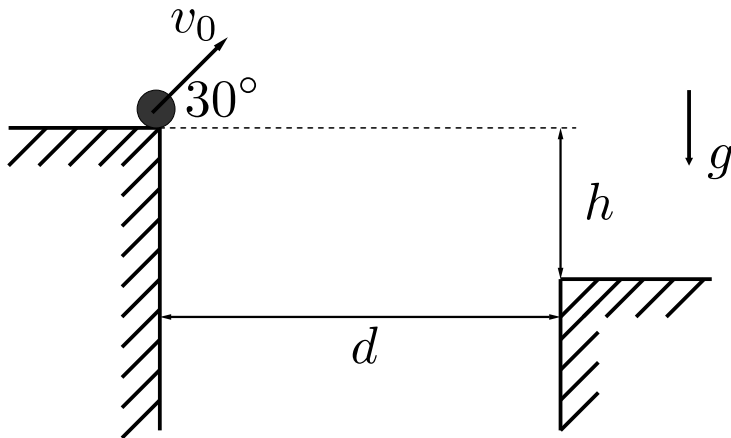
También podemos escribir:

$$\longrightarrow v_y^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$



# Ejemplo

- Una pelota es lanzada desde la superficie izquierda con una **rapidez**  $v_0$  y un **ángulo** de  $30^\circ$  con respecto a la horizontal como muestra la figura. Encuentre la **rapidez mínima** para que la pelota llegue a la superficie derecha.



# Ejemplo

- Una pelota es lanzada desde la superficie izquierda con una **rapidez**  $v_0$  y un **ángulo** de  $30^\circ$  con respecto a la horizontal como muestra la figura. Encuentre la **rapidez mínima** para que la pelota llegue a la superficie derecha.

Utilizamos las ecuaciones del lanzamiento de un proyectil:

Tenemos dos incógnitas,  $v_0$  y  $t$ . Primero despejamos el tiempo.

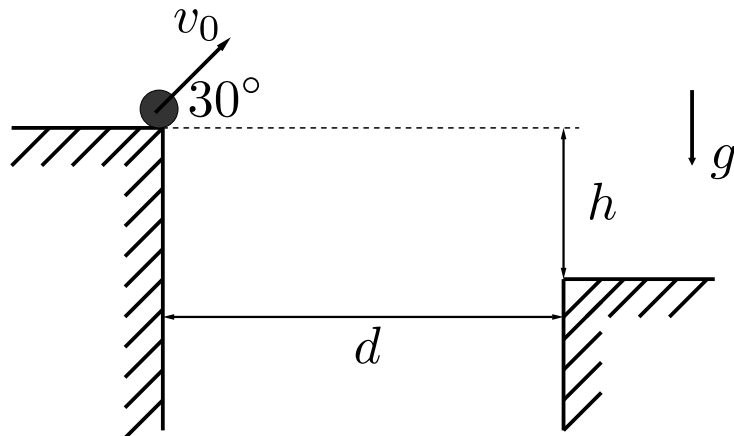
$$x = \cancel{x_0^0} + v_{x,0} t^* \quad \rightarrow \quad v_0 \cos 30^\circ = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t^* = \frac{2d}{v_0 \sqrt{3}}$$

$$y = \cancel{y_0^0} + v_{y,0} t^* - gt^{*2}/2 \quad \rightarrow \quad v_0 \sin 30^\circ = \frac{v_0}{2}$$

Ahora remplazamos  $t$  en la ecuación para  $y$ , y obtenemos la rapidez mínima:

$$v_0 = d \sqrt{\frac{2g}{3(h + d/\sqrt{3})}}$$





# Clase 5: proyectiles y coordenadas polares

- Lanzamiento de proyectil.
- **Coordenadas polares**

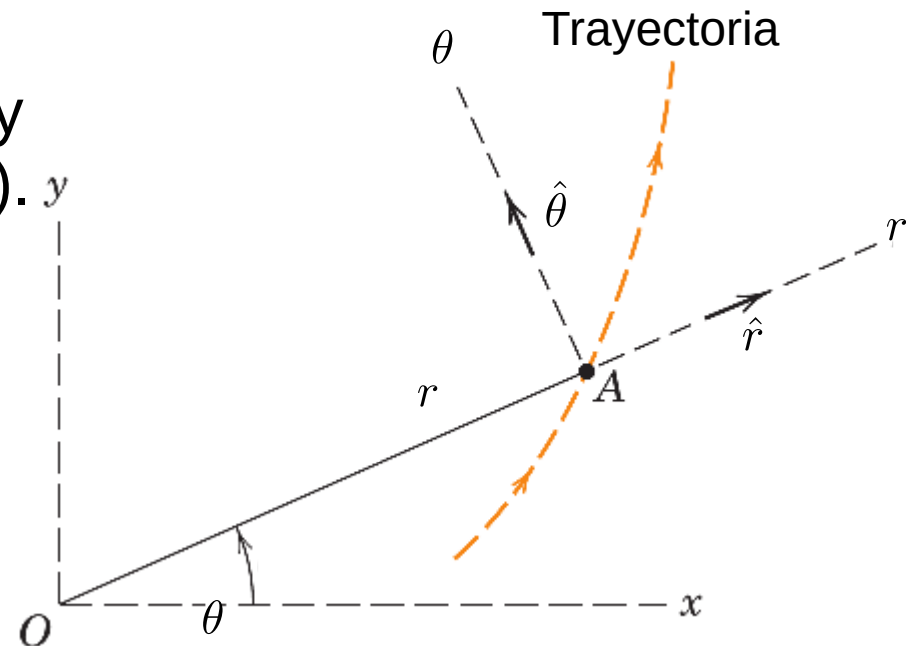
# Coordenadas polares

- Si un movimiento en **dos dimensiones** tiene una restricción a la **distancia radial**, es conveniente utilizar **coordenadas polares**.
- Las **coordenadas polares** corresponden a:
  - $r$  : Distancia del origen a la partícula.
  - $\theta$  : Ángulo desde un eje a elección.

(Usualmente medido en radianes)

- Los **vectores unitarios** asociados  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  se mueven con el vector (partícula).
- La **posición** viene dada por

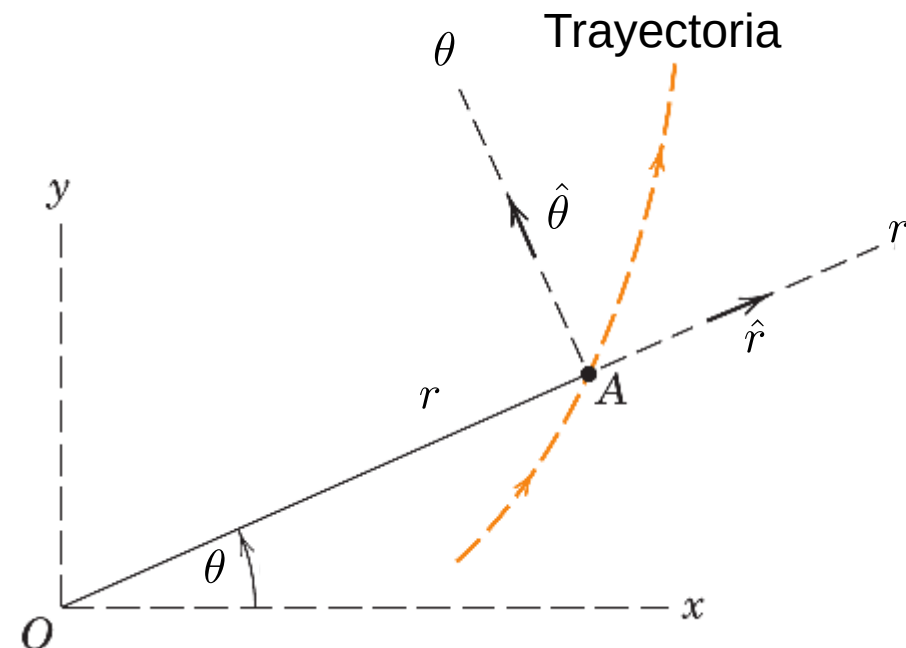
$$\vec{r} = r \hat{r}$$



# Coordenadas polares y rectangulares

- Podemos facilmente convertir cantidades entre sistemas de coordenadas.

$$\vec{r} = r\hat{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta. \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \arctan(y/x), \end{aligned}$$



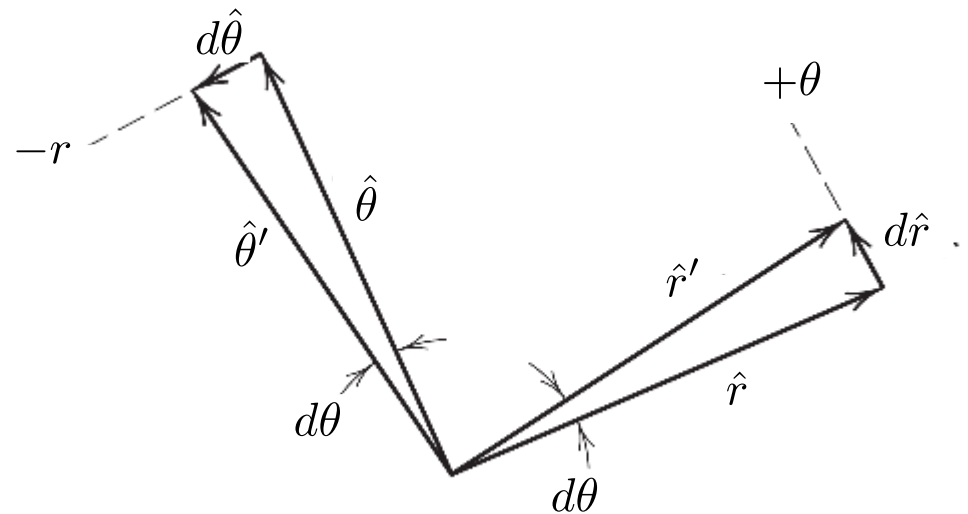
# Coordenadas polares: Vector unitarios

- Las derivadas de los vectores unitarios con respecto a  $\theta$  :

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}.$$

- Por tanto, sus derivadas temporales:

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad \dot{\hat{\theta}} = \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta} \hat{r}.$$



# Coordenadas polares: Velocidad

- El vector **velocidad** en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (r\hat{r}) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

- Donde sus **componentes**

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

- La **rapidez**

$$\boxed{v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}}$$

# Coordenadas polares: Aceleración

- El vector **aceleración** en coordenadas polares:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} \left( \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \right) \longrightarrow \vec{a} = \left( \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \hat{r} + \left( r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \hat{\theta}$$

- Donde sus **componentes**

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

- Su **magnitud**

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

- También podemos escribir

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \dot{\theta} \right)$$

# Movimiento circular

- Un movimiento es circular cuando  $r$  es **constante**.
- La velocidad y aceleración se simplifican

$$\dot{r} = 0$$

→

$$\begin{aligned} v_r &= 0, & v_\theta &= r\dot{\theta}. \\ a_r &= -r\dot{\theta}^2, & a_\theta &= r\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

- La **velocidad angular** corresponde a

$$\omega = \dot{\theta}$$

- También llamamos  $a_r$  la **aceleración centrípeta** y  $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$  la **aceleración angular**.
- El **camino recorrido**:

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

# Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante**  $v_0$  a lo **largo de una espiral**  $r(\theta) = Ae^{k\theta}$ , donde  $A$  y  $k$  son constantes. Encuentre:
  - Vector **velocidad** en función de  $\theta$ .
  - Vector **aceleración** en función de  $\theta$ .



# Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante**  $v_0$  a lo **largo de una espiral**  $r(\theta) = Ae^{k\theta}$ , donde  $A$  y  $k$  son constantes. Encuentre:
- Vector **velocidad** en función de  $\theta$ .

$$v_r = \dot{r} = Ak\dot{\theta}e^{k\theta} \quad \longrightarrow \quad v_0^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = A^2\dot{\theta}^2(k^2 + 1)e^{2k\theta}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = A\dot{\theta}e^{k\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2 + 1}}e^{-k\theta}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{v_r = \frac{k v_0}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad v_\theta = \frac{v_0}{\sqrt{k^2 + 1}}}$$

\*La velocidad no depende de  $\theta$ .

# Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante**  $v_0$  a lo **largo de una espiral**  $r(\theta) = Ae^{k\theta}$ , donde  $A$  y  $k$  son constantes. Encuentre:
- Vector **aceleración** en función de  $\theta$ .

$$\dot{r} = v_r = \frac{k v_0}{\sqrt{k^2 + 1}} \quad \longrightarrow \quad \ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{A\sqrt{k^2 + 1}} e^{-k\theta} \quad \longrightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{A^2(k^2 + 1)} e^{-2k\theta}, \quad \ddot{\theta} = \frac{-k v_0^2}{A^2(k^2 + 1)} e^{-2k\theta}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \longrightarrow \quad a_r = -\frac{v_0^2}{A(k^2 + 1)} e^{-k\theta}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad \longrightarrow \quad a_\theta = \frac{k v_0^2}{A(k^2 + 1)} e^{-k\theta}$$

# Ejemplo

- Una partícula se mueve con **rapidez constante**  $v_0$  a lo **largo de una espiral**  $r(\theta) = Ae^{k\theta}$ , donde  $A$  y  $k$  son constantes. Encuentre:
  - Vector **velocidad** en función de  $\theta$ .
  - Vector **aceleración** en función de  $\theta$ .
  - Tarea: La **velocidad** y **aceleración** en función del **tiempo**. Asuma que  $\theta(t=0)=0$ .

# Resumen

- Hemos revisado en mayor detalle el sistema de **coordenadas rectangulares**.
- Estudiamos el **lanzamiento de un proyectil**.
- Próxima clase:
  - Coordenadas polares y cilíndricas.

# Resumen

- Revisamos ejemplos de **lanzamiento de un proyectil**.
- Hemos definido el sistema de **coordenadas polares** para movimientos en un plano.
- Próxima clase:
  - Coordenadas cilíndricas.