FACULTAD DE FÍSICA
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Dinámica (FIS1514)

Movimiento Relativo

Felipe Isaule

felipe.isaule@uc.cl

Lunes 26 de Agosto de 2024

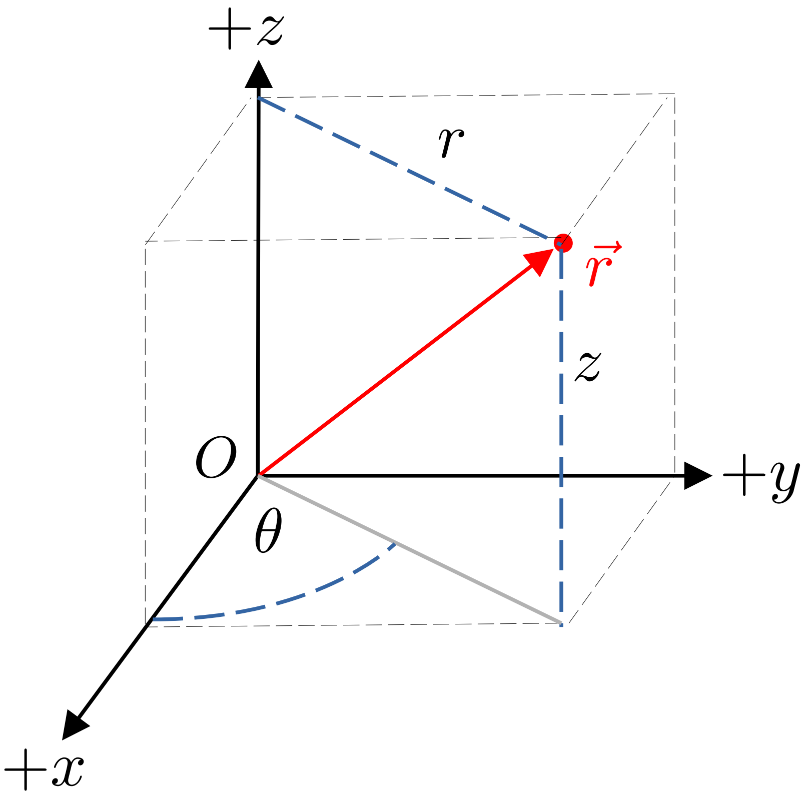
Resumen clase anterior

- Definimos las coordenadas **polares** y **cilíndricas**.

$$\vec{r} = r\,\hat{r} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$



Clase 7: Movimiento Relativo

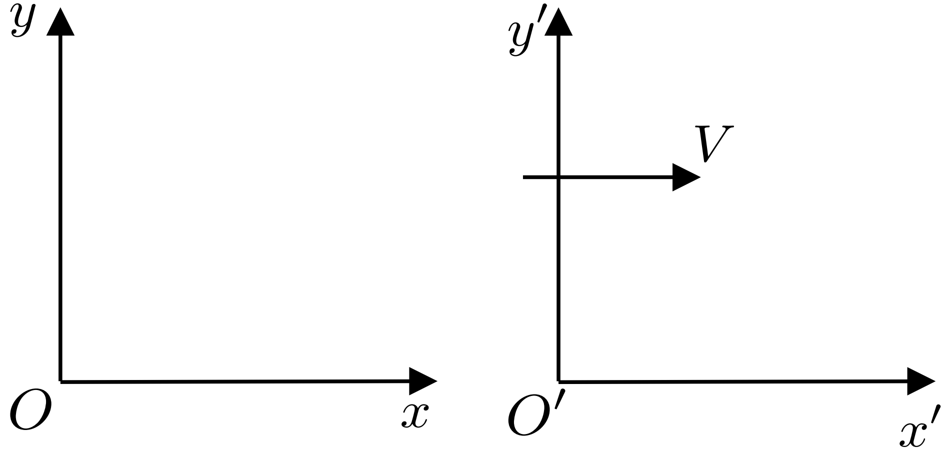
- Movimiento relativo.

- Bibliografía recomendada:
  - Meriam (2.8).
  - Hibbeler (12.10).

Movimiento relativo

- Hasta ahora, hemos estudiado movimientos descritos desde **sistemas de referencias estáticos**.
- Sin embargo, en algunos problemas es conveniente describir movimientos desde **sistemas de referencia en movimiento**.
- Este tipo de problemas se conoce como **movimiento relativo**.
- Principio de relatividad (Galileo)*:

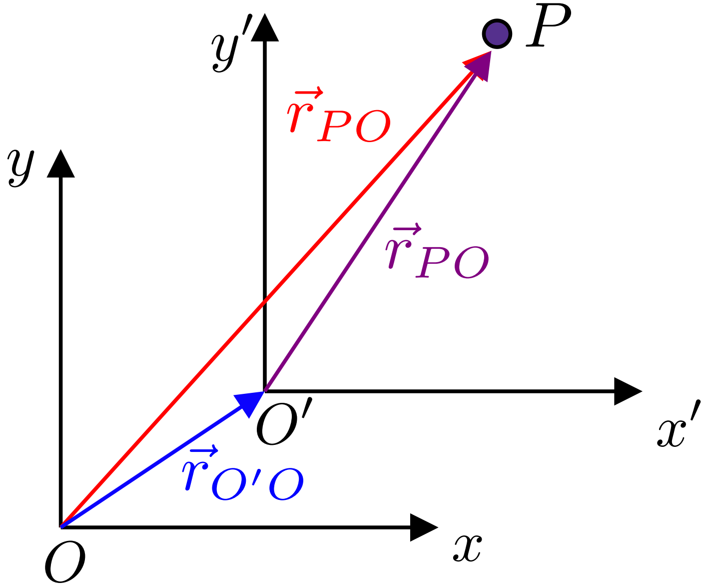
Las leyes de la física son las mismas en distintos *sistemas de referencia inerciales*.



* Se revisitará en la unidad de Dinámica.

Movimiento relativo

- Si un **sistema de referencia** O' se encuentra a una posición $\vec{R}$ con respecto a **otro sistema de referencia** O. Una partícula P es descrita por



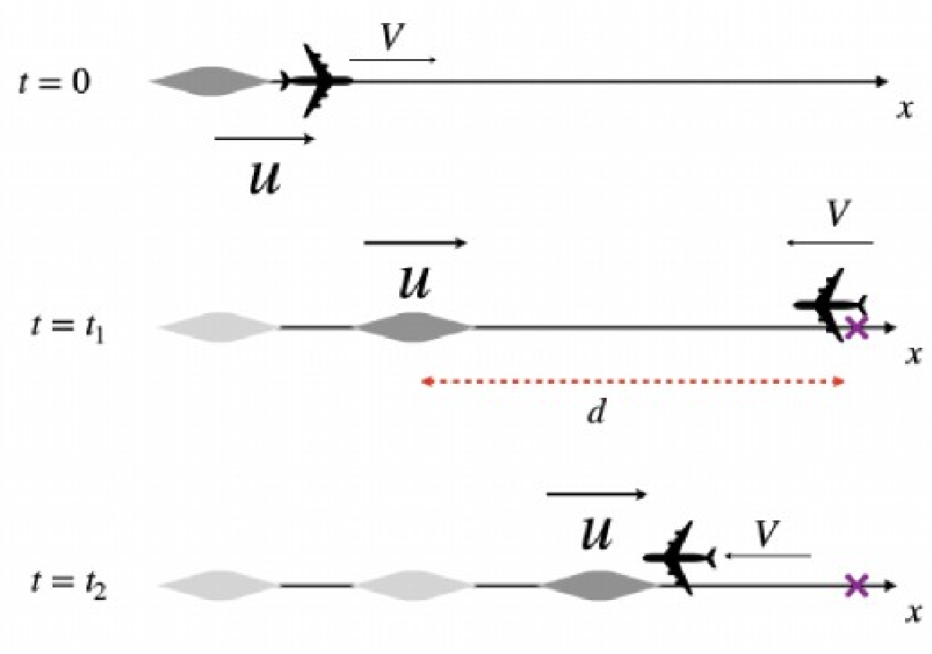
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}_{PO} &= \vec{r}_{O'O} + \vec{r}_{PO'} \\ \vec{v}_{PO} &= \vec{v}_{O'O} + \vec{v}_{PO'} \\ \vec{a}_{PO} &= \vec{a}_{O'O} + \vec{a}_{PO'} \end{aligned}}$$

$$\vec{v}_{PO} = \dot{\vec{r}}_{PO} \quad \vec{v}_{O'O} = \dot{\vec{r}}_{O'O}\,, \quad \vec{v}_{PO'} = \dot{\vec{r}}_{PO'}$$

$$\vec{a}_{PO} = \dot{\vec{v}}_{PO} \quad \vec{a}_{O'O} = \dot{\vec{v}}_{O'O}\,, \quad \vec{a}_{PO'} = \dot{\vec{v}}_{PO'}$$

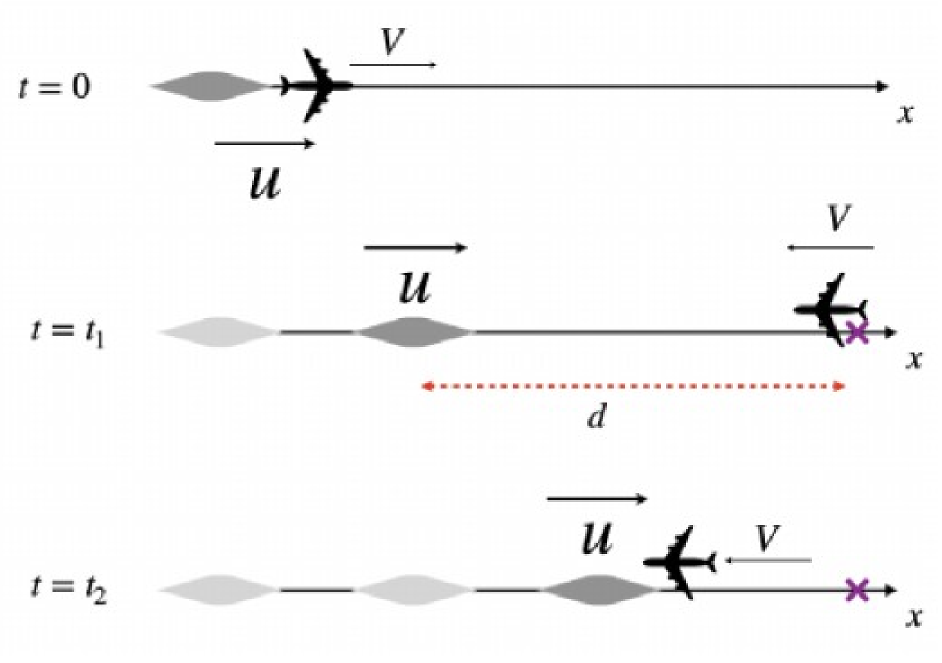
Ejemplo 1

- Un portaviones se mueve en una **recta** con una **rapidez** u con **respecto al mar**. Inicialmente, un avión despega con una **rapidez** V con **respecto al mar** en la **misma dirección del portaviones**.
  - Encuentre el **tiempo** t_1 que le toma al avión alejarse una **distancia** d **del portaviones**.
  - Si luego de alcanzar esa distancia el avión **regresa** con la misma **rapidez** V, encuentre el **tiempo** t_2 **total** que le toma al avión **volver al portaviones**.



Ejemplo 1

- Un portaviones se mueve en una **recta** con una **rapidez** u con **respecto al mar**. Inicialmente, un avión despega con una **rapidez** V con **respecto al mar** en la **misma dirección del portaviones**.
  - Encuentre el **tiempo** t_1 que le toma al avión alejarse una **distancia** d **del portaviones**.



Desde el punto de vista del portaviones, el avión se **aleja** con una rapidez:

$$V' = V - u$$

Como es un movimiento a velocidad constante:

$$X' = X'_0 + V't \quad \longrightarrow \quad d = V't_1$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{t_1 = \frac{d}{V - u}}$$

Ejemplo 1

- Un portaviones se mueve en una **recta** con una **rapidez** u con **respecto al mar**. Inicialmente, un avión despega con una **rapidez** V con **respecto al mar** en la **misma dirección del portaviones**.
  - Si luego de alcanzar esa distancia el avión **regresa** con la misma **rapidez** V, encuentre el **tiempo** t_2 **total** que le toma al avión **volver al portaviones**.

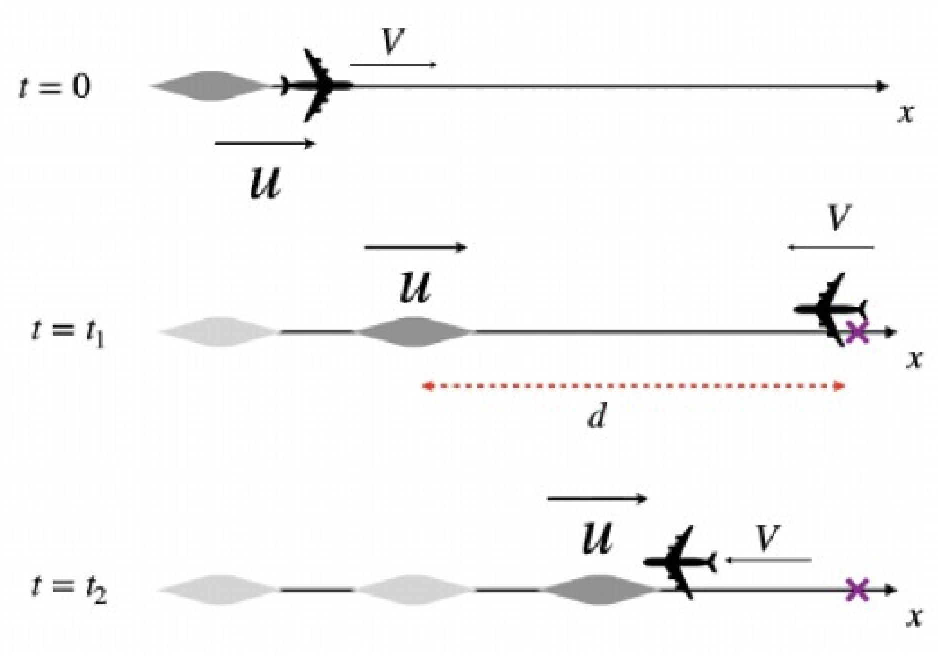
Desde el punto de vista del portaviones, el avión se **acerca** con una rapidez:

$$V'' = -(V + u)$$

Como también tenemos un movimiento con rapidez constante para la vuelta:

$$X'' = X_0'' + V''t \quad \longrightarrow \quad 0 = d + V''t_{\text{vuelta}}$$

$$\longrightarrow \quad t_{\text{vuelta}} = \frac{d}{V + u}$$



Ejemplo 1

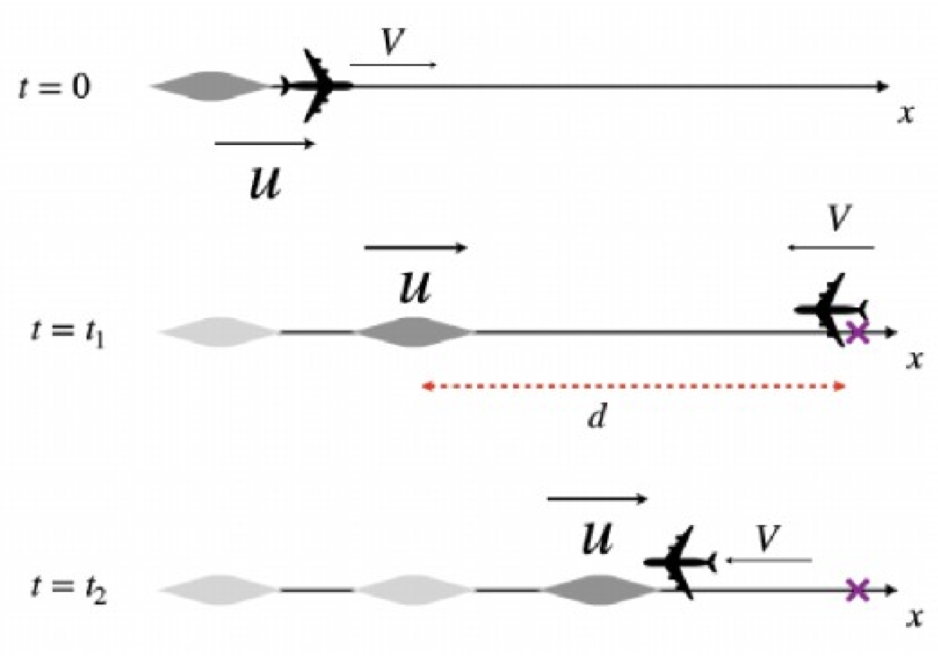
- Un portaviones se mueve en una **recta** con una **rapidez** u con **respecto al mar**. Inicialmente, un avión despega con una **rapidez** V con **respecto al mar** en la **misma dirección del portaviones**.
  - Si luego de alcanzar esa distancia el avión **regresa** con la misma **rapidez** V, encuentre el **tiempo** t_2 **total** que le toma al avión **volver al portaviones**.

El tiempo total:

$$t_2 = t_1 + t_{\text{vuelta}}$$

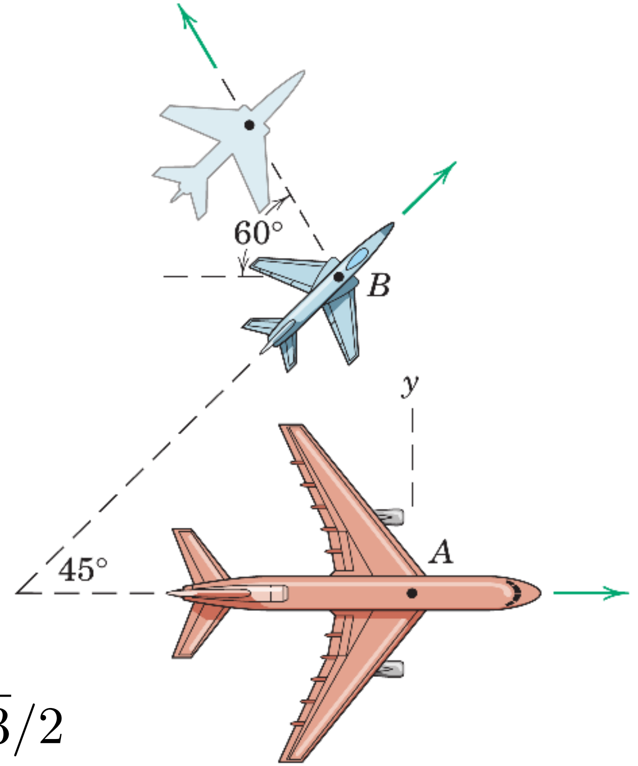
$$= \frac{d}{V-u} + \frac{d}{V+u}$$

$$\longrightarrow \boxed{t_2 = \frac{2Vd}{V^2 - u^2}}$$



Ejemplo 2

- Un avión *A* viaja hacia el **este** con una **rapidez** v_A = 800 km/h con respecto a un **sistema de referencia fijo**. Otro avión B viaja con una **rapidez desconocida** con un ángulo de **45° respecto al eje fijo**. Si, **desde el avión *A***, el avión *B* parece alejarse con un **ángulo de 60°**, encuentre la **rapidez del avión *B*** con respecto al punto de referencia fijo.



$$\cos(45°) = \sin(45°) = 1/\sqrt{2} \quad \cos(60°) = 1/2\,, \sin(60°) = \sqrt{3}/2$$

Ejemplo 2

- Un avión *A* viaja hacia el **este** con una **rapidez** v_A = 800 km/h con respecto a un **sistema de referencia fijo**. Otro avión B viaja con una **rapidez desconocida** con un ángulo de **45° respecto al eje fijo**. Si, **desde el avión *A***, el avión *B* parece alejarse con un **ángulo de 60°**, encuentre la **rapidez del avión *B*** con respecto al punto de referencia fijo.

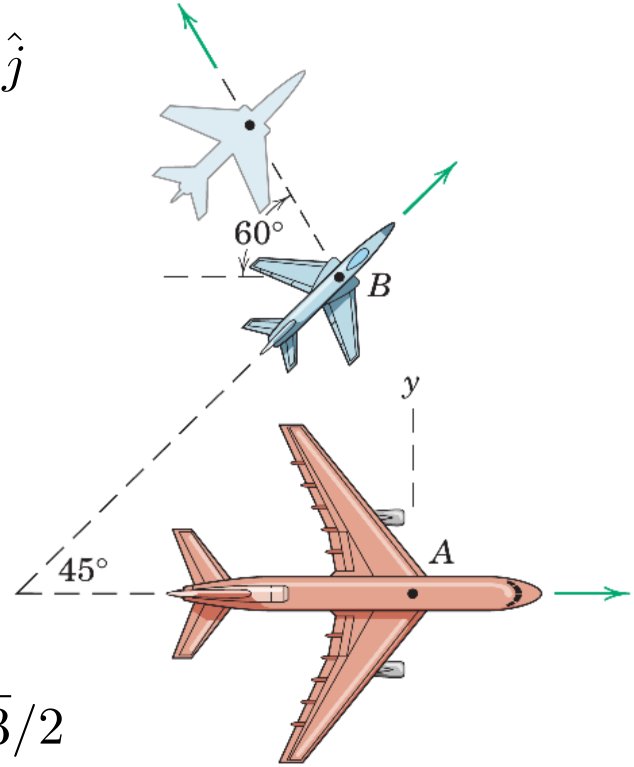
<u>Con respecto al sistema fijo:</u> $\vec{v}_A = v_A \hat{i}$

$$\vec{v}_B = v_B \cos(45°)\hat{i} + v_B \sin(45°)\hat{j} = \frac{v_B}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{v_B}{\sqrt{2}}\hat{j}$$

<u>Con respecto al avión *A*:</u>

$$\vec{v}'_B = -v'_B \cos(60°)\hat{i} + v'_B \sin(60°)\hat{j}$$

$$= -\frac{v'_B}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}v'_B\hat{j}$$



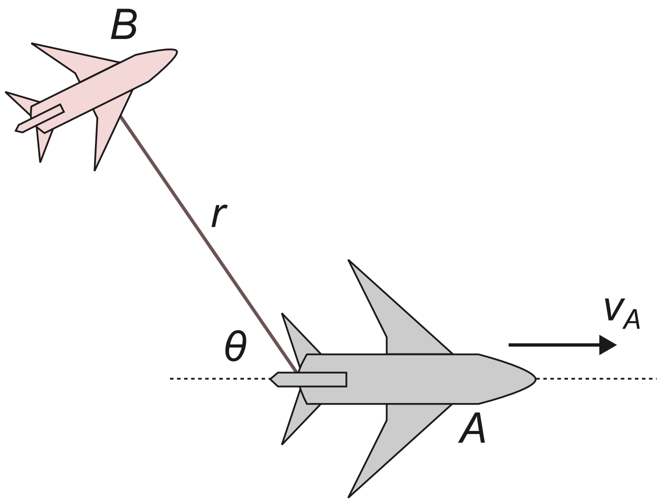
<u>Movimiento relativo:</u> $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}'_B$

$$\longrightarrow v'_B = \frac{2}{\sqrt{6}}v_B \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{v_B = \frac{v_A}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}} \approx 717\mathrm{km/hr}}$$

$$\cos(45°) = \sin(45°) = 1/\sqrt{2} \qquad \cos(60°) = 1/2\,,\ \sin(60°) = \sqrt{3}/2$$

Ejemplo 3

- Un avión *A* vuela con una **rapidez constante** v_0 y acarrea un planeador *B* con un cable de **largo constante** r como muestra la figura. Si el ángulo θ **incrementa** de **manera constante** ω_0, encuentre la **rapidez** y **aceleración** del planeador B en **función de** $\boldsymbol{\theta}$ con respecto a un sistema estático.



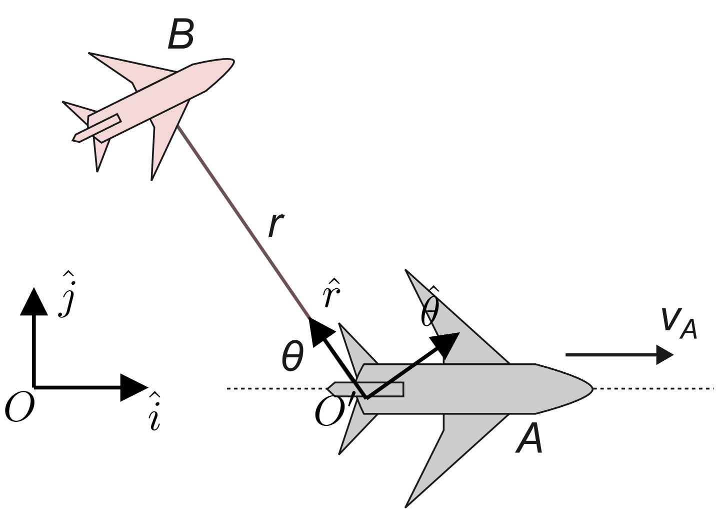
Ejemplo 3

- Un avión *A* vuela con una **rapidez constante** v_0 y acarrea un planeador *B* con un cable de **largo constante** r como muestra la figura. Si el ángulo θ **incrementa** de **manera constante** ω_0, encuentre la **rapidez** y **aceleración** del planeador B en **función de** $\boldsymbol{\theta}$ con respecto a un sistema estático.

Fijamos un sistema con coordenadas polares
Sobre el avión *A* y que describe el planeador *B*.

La velocidad de B respecto al sistema estático:

$$\vec{v}_B = \vec{V} + \vec{v}'_B$$



Tenemos que:

$$\vec{V} = \vec{v}_A = v_A\hat{i}$$

$$\vec{v}'_B = r\dot{\theta}\hat{\theta} = r\omega_0\hat{\theta}$$

Debemos relacionar los vectores unitarios en polares con los en rectangulares:

$$\hat{r} = -\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = \sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

Notar que

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

Obtenemos:

$$\vec{v}'_B = r\omega_0(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$$

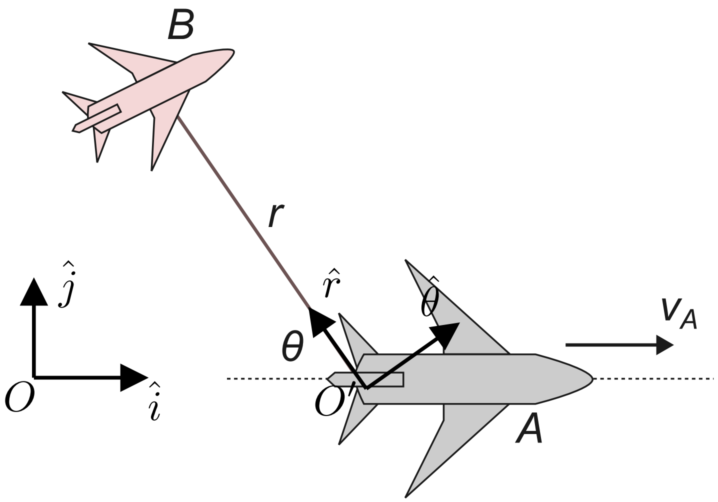
Ejemplo 3

- Un avión *A* vuela con una **rapidez constante** v_0 y acarrea un planeador *B* con un cable de **largo constante** r como muestra la figura. Si el ángulo θ **incrementa** de **manera constante** ω_0, encuentre la **rapidez** y **aceleración** del planeador B en **función de $\boldsymbol{\theta}$** con respecto a un sistema estático.

Remplazando obtenemos:

$$\vec{v}_B = \vec{V} + \vec{v}'_B$$

$$\vec{v}_B = v_A\hat{i} + r\omega_0(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$$



La rapidez:

$$v_B = \sqrt{(v_A + r\omega_0\sin\theta)^2 + r^2\omega_0^2\cos^2\theta}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 + 2v_A r\omega_0\sin\theta + r^2\omega_0^2}}$$

Ejemplo 3

- Un avión *A* vuela con una **rapidez constante** v_0 y acarrea un planeador *B* con un cable de **largo constante** r como muestra la figura. Si el ángulo θ **incrementa** de **manera constante** ω_0, encuentre la **rapidez** y **aceleración** del planeador B en **función de** $\boldsymbol{\theta}$ con respecto a un sistema estático.

La aceleración de B respecto al sistema estático:

$$\vec{a}_B = \vec{A} + \vec{a}'_B$$

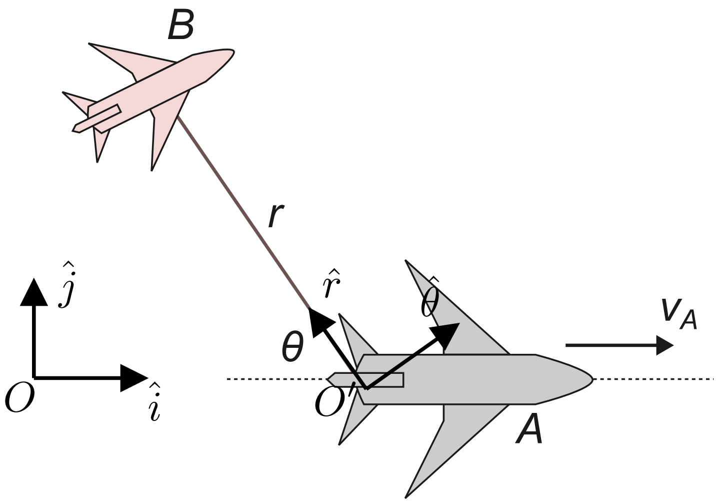
Tenemos que:

$$\vec{A} = \vec{a}_A = 0$$

$$\vec{a}'_B = -r\dot{\theta}^2\hat{r} = -r\omega_0^2\hat{r}$$

Entonces:

$$\boxed{\vec{a}_B = r\omega_0^2(\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j})}$$



Resumen

- Introducimos problemas de **movimiento relativo**.
- Terminamos con la unidad de Cinemática