

## Descrição do crescimento de clones híbridos de *Eucalyptus* através de modelos não lineares

Ariana Campos Frühauf <sup>1</sup>, Daniela Granato-Souza <sup>2</sup>,  
Edilson Marcelino Silva <sup>3</sup>, Joel Augusto Muniz <sup>4</sup>,  
Ana Carolina Maioli Campos Barbosa <sup>5</sup>

### Introdução

O Brasil se destaca mundialmente por sua ampla cobertura florestal, abrigando a maior extensão de florestas tropicais do planeta, o que, segundo o Serviço Florestal Brasileiro (2019), equivale a mais da metade de seu território (55%). Segundo o último relatório apresentado pela FAO (2015), a maior parte dessa cobertura é composta por florestas naturais, mas o país também se sobressai com o plantio de florestas homogêneas, principalmente de pinus e eucalipto.

A indústria brasileira de árvores plantadas é mundialmente reconhecida por sua alta produção florestal, a qual, segundo o último relatório da Indústria Brasileira de Árvores (2017), liderou o ranking global de produtividade florestal em 2016, o que mostra a grande importância desse setor para a economia do país, sendo também uma referência em sustentabilidade, competitividade e inovação. Estima-se que em 2016, o número total de postos de trabalho do setor florestal tenha sido da ordem de 3,7 milhões, gerando rendas em todas as regiões do país e sendo responsável por 6,2% do PIB Industrial.

O Brasil apresenta 7,84 milhões de hectares de árvores plantadas, configurando-se como um dos maiores produtores do mundo do gênero *Eucalyptus*, com 72% dessa área ocupada com o seu plantio (IBÁ, 2017). Segundo Lima Filho et al. (2012) esse gênero se destaca por sua facilidade de reprodução, rusticidade, qualidade da madeira, alto nível de melhoramento genético em produtividade e por sua elevada taxa de crescimento.

Em Ciências Florestais é de suma importância a utilização de modelos para entender o crescimento das árvores de um povoamento, pois assim é possível a escolha adequada dos métodos silviculturais e dos planos sustentáveis de manejos florestais a serem adotados, além da prognose da melhor época de corte e produtividade do plantio (LIMA FILHO et al., 2012).

Muitos fenômenos são bem ajustados por modelos lineares, mas outros, principalmente os fenômenos biológicos obtêm os melhores ajustes por meio da regressão não linear. Isso se deve ao fato do crescimento de um animal ou uma planta ser geralmente mais rápido em sua fase inicial, diminuindo sua velocidade ao longo do tempo e tendendo a uma estabilidade na fase adulta, o que pode ser bem representado por curvas de crescimento sigmoidais (MISCHAN; PINHO, 2014).

---

<sup>1</sup>Doutoranda, Departamento de Estatística, Universidade Federal de Lavras (UFLA). e-mail: [arianafruhauf@gmail.com](mailto:arianafruhauf@gmail.com)

<sup>2</sup>Pós-doutoranda, Departamento de Geociências, Universidade de Arkansas, EUA. e-mail: [danigsbio@gmail.com](mailto:danigsbio@gmail.com)

<sup>3</sup>Doutorando, Departamento de Estatística, Universidade Federal de Lavras (UFLA). e-mail: [edilsonmg3@hotmail.com](mailto:edilsonmg3@hotmail.com)

<sup>4</sup>Professor Titular do Departamento de Estatística, Universidade Federal de Lavras (UFLA). e-mail: [joamuniz@ufla.br](mailto:joamuniz@ufla.br)

<sup>5</sup>Professora Titular do Departamento de Ciências Florestais, Universidade Federal de Lavras (UFLA). e-mail: [anabarbosa@ufla.br](mailto:anabarbosa@ufla.br)

Considerando a grande importância dos modelos não lineares nos estudos florestais, este trabalho tem como objetivo descrever o crescimento de clones híbridos de *Eucalyptus*, implantados na Estação Experimental do Instituto Agrônomo de Pernambuco, através dos modelos Gompertz e Brody (Monomolecular).

## Material e Métodos

Os dados utilizados foram obtidos em um experimento descrito por Lima Filho et al. (2012), que utilizou 15 clones do gênero *Eucalyptus* numa área de 2,5 hectares o qual foi estabelecido em março de 2002 no Polo Gesseiro do Araripe na Estação Experimental do Instituto Agrônomo de Pernambuco na Chapada do Araripe - PE. Foram plantadas 100 árvores de um dos clones referente ao tratamento híbrido de *Eucalyptus urophylla* x *Eucalyptus tereticornis* x *Eucalyptus pellita*, sendo quatro repetições com 25 árvores em cada uma delas. As mudas dos clones de *Eucalyptus* foram provenientes da Comercial Agrícola Paineiras Ltda., localizada no município de Urbano Santos - MA.

Para o ajuste dos modelos, foi utilizada a média da variável altura mensurada ao longo do tempo nas 83 árvores sobreviventes, durante seis anos e meio. A primeira medição foi realizada aos dois meses, idade na qual as mudas foram plantadas no campo, da segunda medição em diante foi realizado um espaçamento de seis meses.

As estimativas dos parâmetros das curvas de crescimento do clone híbrido de *Eucalyptus* foram encontradas considerando os modelos de regressão não linear Gompertz e Brody, também conhecido como modelo Monomolecular, cujas equações estão descritas abaixo:

$$y_i = a \cdot e^{-e^{k(b-t_i)}} + u_i \text{ (Gompertz)}$$

$$y_i = a [1 - b \cdot e^{(-k \cdot t_i)}] + u_i \text{ (Brody)}$$

em que,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $n$  o número de tempos em que foram realizadas as medições de crescimento;  $y_i$  representa a altura média, em metros, observada na época da medição  $t_i$ , em meses;  $a$  é o valor assintótico, ou seja, o valor esperado para a altura máxima das árvores em estudo;  $b$  é a abscissa do ponto de inflexão para o modelo Gompertz, ou seja, a partir dele o crescimento é desacelerado e não possui interpretação prática para o modelo Brody devido às características de sua curva;  $k$  é um índice de maturidade ou precocidade, está associado ao crescimento;  $u_i$  é o resíduo do ajuste no  $i$ -ésimo tempo.

Devido à dependência residual, foi necessário considerar os modelos autorregressivos de primeira ordem, em que os erros  $u_i$  são parcelados em  $u_i = \phi_1 u_{i-1} + \varepsilon_i$ , sendo  $\phi_1$  o parâmetro autorregressivo de ordem 1;  $u_{i-1}$  o resíduo do ajuste do tempo imediatamente anterior à  $i$ -ésima medida e  $\varepsilon_i$  o chamado ruído branco, com distribuição normal  $N(0, \sigma^2)$ .

Para verificar as pressuposições de homocedasticidade, normalidade e independência residuais foram utilizados, respectivamente, os testes de Breusch-Pagan, Shapiro-Wilk e Durbin-Watson. Para estimação dos parâmetros dos modelos foi utilizado como método iterativo o algoritmo de convergência de Gauss-Newton, e então foi aplicado o método dos mínimos quadrados. A seleção do modelo que melhor se ajustou aos dados foi feita com base no Coeficiente de Determinação ( $R^2$ ), Critério de Informação de Akaike Corrigido ( $AIC_C$ ) e Critério de Informação Bayesiano ( $BIC$ ). A estimação dos parâmetros dos modelos, seus gráficos, análise de resíduos, intervalos de confiança e a verificação da qualidade do ajuste para seleção do modelo foram feitos através do software estatístico R, de acesso livre, com a utilização dos pacotes *nlme*, *car*, *lmtest*, *qpcR* (R CORE TEAM, 2018).

## Resultados e Discussão

Na Tabela 1 são apresentados os resultados obtidos para os testes Breusch-Pagan, Durbin-Watson e Shapiro-Wilk utilizados para verificação dos pressupostos de homocedasticidade, independência e normalidade residuais, respectivamente. O teste de Durbin-Watson apresentou valores significativos para os resíduos nos dois modelos ajustados, o que era de se esperar devido ao fato dos dados serem obtidos na mesma árvore ao longo do tempo, o que corrobora com Cassiano e Sáfiadi (2015), os quais afirmam que observações ordenadas ao longo do tempo e realizadas no mesmo indivíduo são geralmente autocorrelacionadas.

Tabela 1: Valor-p para os testes Breusch-Pagan, Shapiro-Wilk e Durbin-Watson aplicados aos resíduos dos modelos ajustados

Modelo	Breusch-Pagan	Durbin-Watson	Shapiro-Wilk
Gompertz com AR(1)	0,2906	0,0000*	0,1401
Brody com AR(1)	0,3851	0,0000*	0,2608

\* significativo ao nível de 1% de probabilidade

Diante dessa dependência residual, o ajuste foi feito incorporando ao modelo o parâmetro autorregressivo de primeira ordem, pois segundo Ribeiro et al. (2018), na presença de erros autocorrelacionados, é importante modelar essa autocorrelação e incorporá-la ao modelo para garantir maior precisão nas estimativas e melhor qualidade no ajuste. Observa-se na Tabela 2 que, após a incorporação do parâmetro autorregressivo de primeira ordem aos modelos, todos os pressupostos associados aos erros dos modelos ajustados foram validados, ao nível de 1% de significância. Resultados semelhantes foram encontrados por Pereira et al. (2016), Prado, Savian e Muniz (2013), Carneiro et al. (2014) e Muniz, Nascimento e Fernandes (2017), que observaram erros autocorrelacionados no ajuste de modelos não lineares aplicados a dados de crescimento em altura do cafeeiro, de frutos de coqueiro anão verde, de bovinos da raça tabapuã e de frutos de cacaueiro, respectivamente.

Tabela 2: Valor-p para os testes Breusch-Pagan, Shapiro-Wilk e Durbin-Watson aplicados aos resíduos dos modelos ajustados com o acréscimo do parâmetro autorregressivo de primeira ordem

Modelo	Breusch-Pagan	Durbin-Watson	Shapiro-Wilk
Gompertz com AR(1)	0,2941	0,7340	0,0411
Brody com AR(1)	0,5124	0,0720	0,5270

Na Tabela 3 são apresentadas as estimativas para os parâmetros e os seus respectivos intervalos de confiança de 95% de probabilidade com base no ajuste dos modelos Gompertz e Brody para as médias das alturas (m) de clones híbridos de *Eucalyptus* considerando a estrutura de erros autoregressivos de primeira ordem.

Tabela 3: Estimativas para os parâmetros dos modelos Gompertz e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem ajustados à média das alturas (m) de clones híbridos de *Eucalyptus* e seus respectivos intervalos de confiança de 95%

	Gompertz			Brody		
	LI	estimativa	LS	LI	estimativa	LS
$a$	12,1781	14,2321	16,2861	14,6217	16,8099	18,9980
$b$	9,4739	13,6715	17,8691	0,9673	1,0210	1,0748
$k$	0,0546	0,0760	0,0975	0,0187	0,0265	0,0342
$\phi_1$		0,9085			0,5227	

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 3 tem-se que as estimativas do parâmetro  $a$  foram próximas para ambos os modelos ajustados obtendo intervalos de confiança com amplitudes semelhantes. As diferenças observadas no valor do parâmetro  $b$  estão associadas ao formato das curvas ajustadas, sendo que para o modelo Gompertz é possível encontrar o ponto de inflexão, o qual segundo Freitas (2005) tem ordenada dada por  $\hat{y} = \frac{\hat{a}}{e}$ . Logo, o ponto de inflexão para esse modelo ocorre a  $\hat{y} = \frac{14,2321}{2,7183} \approx 5,24$  metros de altura  $a$ , aproximadamente, 14 meses da idade da árvore ( $\hat{x} = \hat{b} = 13,6715 \approx 14$ ).

A Tabela 4 traz os resultados dos avaliadores da qualidade do ajuste, sugerindo ser o modelo Brody o que melhor descreve os dados, pois este modelo apresentou maior valor para  $R^2$  e menores valores para o  $AIC_C$  e o  $BIC$ .

Tabela 4: Avaliadores da qualidade de ajuste dos modelos Gompertz e Brody com estrutura de erros autocorrelacionados de primeira ordem

Modelo	$R^2$	$AIC_C$	$BIC$
<b>Gompertz</b>	0,9567	28,5171	29,8755
<b>Brody</b>	0,9916	24,1898	27,7301

Na Figura 1 estão ilustrados os gráficos do ajuste dos modelos Gompertz e Brody com estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem aos dados médios da altura (m) ao longo do tempo (meses). A análise visual dos gráficos indica que o modelo Brody obteve maior aderência aos valores observados, corroborando com os resultados dos avaliadores da qualidade do ajuste apresentados na Tabela 4. Pode-se também observar com base na Figura 1 e na Tabela 3 que o modelo Gompertz superestimou os dados iniciais e subestimou o valor assintótico em aproximadamente 5%, não se mostrando adequado para descrever esse conjunto de dados.

Já o modelo Brody, de acordo com a Tabela 3, obteve a estimativa de, aproximadamente, 16,81 metros para altura média máxima do clone híbrido de *Eucalyptus* com 72 meses, o que é condizente com os resultados obtidos por Ferreira et al. (2017) que encontraram um valor médio aproximado de 19,7 m e 16,7 m para a altura dos clones de *Eucalyptus urophylla* e *Eucalyptus pellita*, respectivamente, num período de 80 meses, ratificando o uso desse modelo como o mais adequado para descrever o conjunto de dados em estudo.

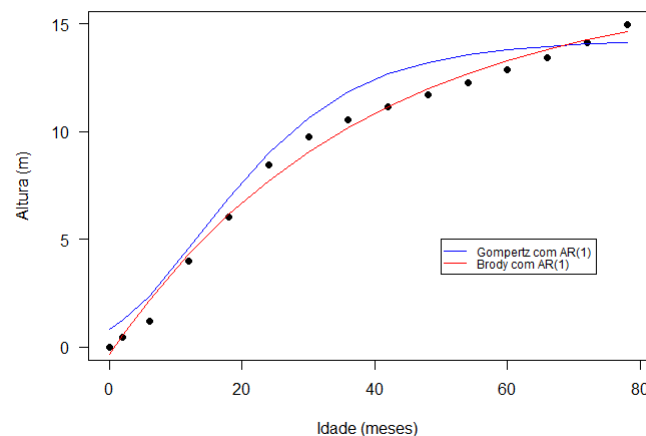


Figura 1: Ajuste dos modelos Gompertz e Brody considerando a estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem para a média das alturas de clone híbrido de *Eucalyptus*  
Fonte: Da Autora (2019)

## Considerações Finais

Como as medidas da altura média dos clones híbridos de *Eucalyptus* foram provenientes das mesmas árvores e ao longo tempo fez-se necessária a incorporação do parâmetro autorregressivo de primeira ordem aos modelos ajustados, o que forneceu estimativas mais confiáveis dos parâmetros e melhor qualidade nos ajustes.

O crescimento de clones híbridos de *Eucalyptus* nas condições ambientais em que os dados foram obtidos pode ser descrito por modelos não lineares, sendo o modelo Brody com a estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem o mais adequado para esse conjunto de dados, sugerindo que o padrão de crescimento desse gênero em estudo não é sigmoidal.

## Agradecimento

Ao CNPq, CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro e ao grupo de estudos em regressão não linear aplicada do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Lavras (DES-UFLA).

## Referencias Bibliográficas

BRASIL. Inventário Florestal Nacional. *Ministério da Agricultura*, Brasília, 2019. URL <http://www.florestal.gov.br/inventario-florestal-nacional>. Acesso em 14 mar. 2019.

CARNEIRO, A. P. S. et al. Identidade de modelos não lineares para comparar curvas de crescimento de bovinos da raça tabapuã. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Brasília,

v.49, n.1, p.57-62, 2014.

CASSIANO, F. R.; SÁFADI, T. Modelos de crescimento animal para tempos irregulares. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Brasília, v.50, n.11, p.1114-1119, 2015.

FAO. Global Forest Resources Assessment. *Food and Agriculture Organization of the United Nations*. 2015. URL <http://www.fao.org/news/story/en/item/326911/icode/>. Acesso em 14 mar. 2019.

FERREIRA, D. H. A. A. et al. Crescimento e produção de eucalipto na região do Médio Paraíba do Sul, RJ. *Floresta e Ambiente*, Seropédica, e00131315, p.01-09, 2017.

FREITAS, A. R. de. Curvas de crescimento na produção animal. *Revista Brasileira de Zootecnia*, Viçosa, v.34, n.3, p.786-795, 2005.

IBÁ. Relatório 2017. *Indústria Brasileira de Árvores*. 2017. URL [https://iba.org/images/shared/Biblioteca/IBA\\_RelatorioAnual2017.pdf](https://iba.org/images/shared/Biblioteca/IBA_RelatorioAnual2017.pdf). Acesso em 14 mar. 2019.

LIMA FILHO, L. M. A. et al. Modelagem do crescimento de clones de *Eucalyptus* usando o modelo de Chapman-Richards com diferentes distribuições simétricas dos erros. *Ciência Florestal*, Santa Maria, v.22, n.4, p.777-785, 2012.

MISCHAN, M. M.; PINHO, S. Z. de. *Modelos não lineares [recurso eletrônico]: funções assintóticas de crescimento*. São Paulo: Cultura Acadêmica. 2014. 184p.

MUNIZ, J. A.; NASCIMENTO, M. d. S.; FERNANDES, T. J. Nonlinear models for description of cacao fruit growth assumption violations. *Revista Caatinga*, Mossoró, v.30, n.1, p.250-257, 2017.

PRADO, T. K. L. do; SAVIAN, T V.; MUNIZ, J. A. Ajuste dos modelos gompertz e logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. *Ciência Rural*, Santa Maria, v.43, n.5, p.803-809, 2013.

PEREIRA, A. A. et al. Modelagem não linear do crescimento em altura do cafeeiro irrigado e não irrigado em diferentes densidades. *Irriga*, Botucatu, v.1, n.1, p.140-149, 2016.

R CORE TEAM. *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2018. URL <https://www.R-project.org/>. Acesso em 20 mar. 2019.

RIBEIRO, T. D. et al. The use of the nonlinear models in the growth of pears of ‘Shinseiki’ cultivar. *Ciência Rural*, Santa Maria, v.48, n.1, p.01-07, 2018.