1: Sea T un operador lineal en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con $T(A)=A^t$

a) Demuestre que ± 1 son los únicos eigenvalores de T.

Sabemos que $\beta' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

entonces la matriz $[T]_{\beta'}$ está determinada por los valores de $T[\beta']$

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$ 1.

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

5 $$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$ así sabemos que

3 $$[T]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ y los eigenvalores de T son los λ tal que

$$\det([T]_\beta - \lambda Id) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1-\lambda)\left[-\lambda(-\lambda(1-\lambda)) - 1(1-\lambda)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(\lambda^2-1)\right] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(\lambda^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^3(\lambda+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ó } \lambda = -1)$$ $\therefore$ Los únicos eigenvalores de T son ± 1

b) Describe los eigenvectores correspondientes a cada eigenvalor de T.

Sea $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$, es decir el subespacio generado por los vectores propios asociados al eigenvalor 1.

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow a = a,\ b = c,\ d = d$ Por lo tanto $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow b = c$

i.e $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

Analogamente $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = -1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$, es decir el subespacio generado por los vectores propios asociados al eigenvalor -1,

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow a = -a,\ c = -b,\ -d = d,\ \Leftrightarrow a = 0 = d$ y $c = -b$

polinomio característico.

$\cdot\ a_0$ ... si $a_0 \neq 0$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow a=0=d$ y $b=-c$, es decir,

$$E_{-1}=\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

c) Encuentre una base ordenada β para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal.

Sea $\beta=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ la base dada por la unión de las bases de E_1 y E_{-1}, veamos que β es base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Si $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2+a_4 \\ a_2-a_4 & a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1=0,\ a_2+a_4=0,\ a_2-a_4=0,\ a_3=0$

$\Rightarrow a_1=0,\ (a_2+a_4)+(a_2-a_4)=0,\ (a_2+a_4)-(a_2-a_4)=0,\ a_3=0$

$\Rightarrow a_1=0,\ 2a_2=0,\ 2a_4=0,\ a_3=0 \Rightarrow \underline{a_1=0,\ a_2=0,\ a_4=0,\ a_3=0}$

ya que $a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{R}$ $\therefore$ β es un conjunto linealmente independiente y $|\beta|=4$ y la dimensión de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es 4 por lo tanto <u>β es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$</u>, (otra forma de ver que es base es viendo que $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{b+c}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{b-c}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$ es decir

β genera a $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$)

Así además

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore [T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y β es una base ordenada para $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal.

una ... $n \cdot a_{n-1}$ ... A es ... obtenemos

d) Encuentre una base ordenada β para $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal con $n > 2$.

Sean las matrices A^{kl} dadas por $(A^{kl})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i=k \text{ y } j=l \\ 1, & \text{si } i=l \text{ y } j=k \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

con $k,l \in \{1,\dots,n\}$, de igual manera definamos las matrices

B^{kl} dadas por $(B^{kl})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i=k \text{ y } j=l \\ -1, & \text{si } i=l \text{ y } j=k \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$, con $k \neq l$

y $k,l \in \{1,\dots,n\}$.

Vemos que $A^{kl} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} l & k & \end{array} \\ \begin{array}{c} l \\ k \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ y $B^{kl} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} l & k & \end{array} \\ \begin{array}{c} l \\ k \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

es decir $T(A^{kl}) = A^{kl}$ para toda $k,l \in \{1,\dots,n\}$

y $T(B^{kl}) = -B^{kl}$ para toda $k,l \in \{1,\dots,n\}$ con $k \neq l$

Sea entonces $\beta_1 = \bigcup_{1 \le k \le l \le n} \{A^{kl}\}$ y $\beta_2 = \bigcup_{1 \le k < l \le n} \{B^{kl}\}$ y $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$

veamos que β es base: Sea $\bar{O} = \sum_{1 \le k \le l \le n} a_{kl} A^{kl} + \sum_{1 \le k < l \le n} b_{kl} B^{kl}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{kl} + b_{kl} = 0 \\ a_{kl} - b_{kl} = 0 \end{cases}$ para todos $1 \le k < l \le n$

y $a_{kk} = 0$ para toda $k \in \{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow$ $2a_{kl} = 0$ y $2b_{kl} = 0$ para todos $1 \le k < l \le n$ y $a_{kk} = 0$ para toda $1 \le k \le n$

$\Rightarrow$ $a_{kl} = 0$ para todos $1 \le k \le l \le n$ y $b_{kl} = 0$ para todos $1 \le k < l \le n$

$\Rightarrow$ β es un conjunto linealmente independiente y además

si $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ $M = \sum_{1 \le k \le l \le n} \left(\frac{(M)_{kl} + (M)_{lk}}{2}\right) A^{kl} + \sum_{1 \le k < l \le n} \left(\frac{(M)_{kl} - (M)_{lk}}{2}\right) B^{kl}$

$\therefore$ β genera y además como $|\beta_1| = n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$

y $|\beta_2| = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{(n-1)(n)}{2}$ y $|\beta| = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}[(n+1)+(n-1)] = n^2$

$\Rightarrow$ $[T]_\beta$ es la matriz dada por $([T]_\beta)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \le i=j \le \frac{n(n+1)}{2} \\ -1, & \text{si } n^2 - \frac{n(n-1)}{2} \le i=j \le n^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Entonces $[T]_\beta$ es la matriz con $\frac{n(n+1)}{2}$ unos y $\frac{n(n-1)}{2}$ menos unos en la diagonal.

2- Sea $A_{n\times n}$ una matriz con polinomio característico:

$$f(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

Pruebe que $f(0) = a_0 = \det(A)$. Concluya que A es invertible si y sólo si $a_0 \neq 0$

Demostración:

sabemos que $f(t) = \det(A - t\,Id)$ entonces obtenemos que

$$f(0) = \det(A - 0\,Id) = \det(A) \Rightarrow f(0) = \det(A)$$

y además $f(0) = (-1)^n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \dots + a_1 0 + a_0 = a_0$

$$\therefore f(0) = a_0 = \det(A)$$

Sabemos que A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Por lo tanto A es invertible si y sólo si $a_0 \neq 0$ (ya que $\det(A) = a_0$) $\square$

3- a) Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V sobre el campo F, y sea $g(t)$ un polinomio con coeficientes de F. Pruebe que si x es un eigenvector de T con su ~~...~~ correspondiente eigenvalor λ, entonces $g(T)(x) = g(\lambda)x$. Esto es que x es un eigenvector de $g(T)$ con el correspondiente eigenvalor $g(\lambda)$.

Demostración: Sea T un operador lineal en V un espacio vectorial sobre el campo F y sea $g(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, con $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subseteq F$, sea además $x \in V$ un eigenvector de T con correspondiente eigenvalor λ, es decir $T(x) = \lambda x$, entonces $g(T)(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^n(x)$

Ahora como $T(x) = \lambda x \Rightarrow T^n(x) = T^{n-1}(T(x)) = T^{n-1}(\lambda x) = \lambda T^{n-1}(x) = \dots = \lambda^n x$

$$\Rightarrow g(T)(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^n x = x \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^n = x\, g(\lambda) = g(\lambda)x$$

$\therefore$ x es un eigenvector de $g(T)$ con correspondiente eigenvalor $g(\lambda)$. $\square$

b) Formule y pruebe un teorema análogo para matrices.

si $A \in M_{n\times n}(F)$ con F un campo entonces si x es un vector propio de la matriz A con correspondiente eigenvalor λ, entonces $g(A)x = g(\lambda)x$ esto es, que x es un eigenvector de $g(A)$ con correspondiente eigenvalor $g(\lambda)$

Demostración: Veamos que AV es un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, ya que $A(\alpha v_1 + v_2) = A\alpha v_1 + Av_2 = \alpha Av_1 + Av_2$ para cualesquier $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

$\therefore$ de la demostración anterior $g(A)x = g(\lambda)x$ y x es un eigenvector de la matriz $g(A)$ ...

4: Para cada una de las siguientes matrices $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, ~~demuestre~~ diagnostique si A es diagonalizable, y si A es diagonalizable, encuentre la matriz Q y la matriz diagonal D tal que $Q^{-1}AQ = D$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A$. Primero calculamos su polinomio característico $p(t) =$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - tId\right) = \begin{vmatrix} 1-t & 4 \\ 3 & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t) - 12 = t^2 - 3t + 2 - 12$$

$= t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2) \Rightarrow$ los valores propios son los t_0 tales que $p(t_0) = 0 \Rightarrow t_1 = 5$ y $t_2 = -2$ son los valores propios

Como tiene dos valores propios distintos y $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión dos entonces como cada valor propio tiene asociado un vector propio entonces $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable, sea $E_5 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E_5 \Leftrightarrow \begin{matrix} u + 4v = 5u \\ \text{y} \\ 3u + 2v = 5v \end{matrix} \Leftrightarrow u + 4v = 5u$ y $-5u = 5u - 10v$

$\Leftrightarrow u + 4v = 5u$ y $u = v \Leftrightarrow u = v \therefore E_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

y $E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\}$ entonces $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E_{-2}$

$\Leftrightarrow u + 4v = -2u$ y $3u + 2v = -2v \Leftrightarrow 4v = -3u \therefore E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Entonces $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$ y $Q^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$

Así: $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = D$

c) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} = A$, sea $p(t) = \det(A - tId) = \det\begin{pmatrix} 7-t & -4 & 0 \\ 8 & -5-t & 0 \\ 6 & -6 & 3-t \end{pmatrix}$

$= (3-t)\begin{vmatrix} 7-t & -4 \\ 8 & -5-t \end{vmatrix} = (3-t)[(7-t)(-5-t) + 32] = (3-t)(t^2 - 2t - 35 + 32)$

$= (3-t)(t^2 - 2t - 3) = (3-t)(t-3)(t+1) = (3-t)^2(-1-t)$

Por lo tanto los valores propios son $t_1 = 3$ y $t_2 = -1$

Sea $E_3 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\bar{x} = 3\bar{x} \}$ y $E_{-1} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\bar{x} = -\bar{x} \}$

entonces $\bar{x} \in E_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4y + 0z = 3x \\ 8x - 5y + 0z = 3y \\ 6x - 6y + 3z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4y \\ 8x = 8y \\ 2x - 2y + z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = y \\ x = y \\ z = z \end{matrix}$$

$$\therefore E_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } z \in \mathbb{R} \right\}$$

y $\bar{x} \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4y + 0z = -x \\ 8x - 5y + 0z = -y \\ 6x - 6y + 3z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 4y \\ 6x - 6y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 6x - 6y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 4z = 6(2x) - 6x = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ z = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$\therefore E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

como $\dim(E_{-1}) = 1$ y $\dim(E_3) = 2$ $\Rightarrow$ A es diagonalizable ya que coinciden con las multiplicidades de los ceros de -1 y 3 en $p(t) = 0$

Así: $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

y $Q^{-1}AQ = Q^{-1}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$

5- Para cada uno de los siguientes operadores lineales T en el espacio vectorial V, verifique si T es diagonalizable, y si lo es, encuentre una base β para V tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal.

a) $V = \mathbb{R}^3$, T dada como: $T(a_1, a_2, a_3) = (a_2, -a_1, 2a_3)$

$$T(a_1, a_2, a_3) = (a_2, -a_1, 2a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Entonces si $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces $[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

y $p(t) = \det([T]_\gamma - t\,Id) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 \\ -1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)(t^2+1) = (2-t)(1+t^2)$

pero $p(t) = 0 \iff (2-t) = 0$ ó $(1+t^2) = 0$ y los ceros del polinomi $(2-t)(1+t^2)$ son $t_1 = 2$, $t_2 = i$ y $t_3 = -i$ para $V = \mathbb{R}^3$ entonces $\underline{T \text{ no es diagonalizable}}$ ya que p se anula en los complejos ya que $E_i = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$!

B) $V = \mathbb{C}^2$ y T dada como $T(z,w) = (z+iw, iz+w)$

Entonces, $T(z,w) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ así $[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ con

$\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces $p(t) = \det([T]_\gamma - t\,Id)$

así $p(t) = (1-t)(1-t) - i^2 = (1-t)^2 + 1 = [(1-t)+i][(1-t)-i]$

$\Rightarrow p(t) = ((1+i)-t)((1-i)-t)$ así los valores propios son $t_1 = 1+i$, $t_2 = 1-i$

y $E_{t_1} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\}$ entonces $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in E_{t_1} \iff$

$\left\{ \begin{array}{l} z + iw = z + iz \\ iz + w = w + iw \end{array} \right\} \iff z = w$ así $E_{t_1} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

y $E_{t_2} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = (1-i) \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\}$ entonces $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in E_{t_2}$

$\iff \left\{ \begin{array}{l} z + iw = z - iz \\ iz + w = w - iw \end{array} \right\} \iff z = -w$ así $E_{t_2} = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$,

Entonces $\underline{\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base de } \mathbb{C}^2 \text{ tal que}}$

$\underline{[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}}$ ya que $T(1,1) = (1+i)(1,1)$ y $T(-1,1) = (1-i)(-1,1)$

Es base porque $|\beta| = 2$ y son linealmente independientes y $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \left(\frac{w+z}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{w-z}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es decir β es $\underline{\text{base}}$.

= Encuentre la solución general al siguiente sistema de ecuaciones diferenciables.

$$x_1' = x_1 + x_3$$
$$x_2' = x_2 + x_3$$
$$x_3' = 2x_3$$

(7)

Sea $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')$ entonces $T(\bar{x}) = Df(\bar{x})$

entonces $Df\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, primero tenemos que

diagonalizar $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $p(t) = \det(A - tId) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix}$

Como la anterior es una matriz triangular superior entonces su determinante es el producto de los elementos en la diagonal, es decir $p(t) = (1-t)^2(2-t)$

Así los valores propios son $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$, entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + z = x \\ 0x + y + z = y \\ 0x + 0y + z = z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $z = 0$ para todo x, y $\Leftrightarrow$ $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + z = 2x \\ 0x + y + z = 2y \\ 0x + 0y + z = 2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $z = x = y$ entonces $E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ y considerando $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se tiene que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

Ahora sea $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Q^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Q^{-1}\bar{x}$ $\Rightarrow$ $Q\bar{y} = \bar{x}$ y $Q\bar{y}' = \bar{x}'$

(donde $\bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$ y $\bar{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ así como $\bar{x}' = A\bar{x}$

entonces $Q\bar{y}' = AQ\bar{y}$ $\Rightarrow$ $\bar{y}' = Q^{-1}AQ\bar{y}$ $\Rightarrow$ $\bar{y}' = D\bar{y}$

8

y como $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{matrix}$

$\Rightarrow \quad y_1(t) = k_1 e^t$
$y_2(t) = k_2 e^t$ y como $\bar{x} = Q\bar{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$
$y_3(t) = k_3 e^{2t}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^t \\ k_2 e^t \\ k_3 e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1(t) = k_1 e^t + k_3 e^{2t} \\ x_2(t) = k_2 e^t + k_3 e^{2t} \\ x_3(t) = k_3 e^{2t} \end{matrix}}$$

es la solución al sistema de ecuaciones diferenciales.

7.- a) Supongamos que T y U son operadores lineales en un espacio vectorial V de dimensión finita, tal que son simultáneamente diagonalizables. Entonces existe β una base de V tal que $[T]_\beta = D_1$ y $[U]_\beta = D_2$ son matrices diagonales, sea $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (suponiendo que $\dim(V) = n$) entonces $P = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots v_n)$ donde $v_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \\ v_{ni} \end{pmatrix}$ (son vectores verticales) entonces $[Id]_\gamma^\beta = P$, donde $\gamma = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, es decir la matriz de cambio de base de la estandar a la base β, observamos que P es una matriz invertible pues su rango es n, al ser β una base. Analogamente si $\beta' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base cualquiera entonces $R = (u_1 \ u_2 \ u_3 \dots u_n)$ donde $u_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix}$ (son vectores columna)

entonces $[Id]_\gamma^{\beta'} = R$, es decir R es la matriz de cambio de base de la estandar en la base β' y además por ser β' base, la matriz R tiene n columnas linealmente independientes, por tanto R es invertible

...

Así $R^{-1} = [Id]_{\beta'}^{\gamma}$ y además $PR^{-1} = [Id]_{\gamma}^{\beta}[Id]_{\beta'}^{\gamma}$

Así $PR^{-1} = [Id]_{\beta'}^{\beta}$ es decir PR^{-1} es la matriz de cambio de base de β' a β, y además como P y R^{-1} son invertibles entonces $(PR^{-1})^{-1} = RP^{-1} = [Id]_{\beta}^{\beta'}$

Entonces dada cualquier base β' se sigue que si tomamos como $Q = [Id]_{\beta}^{\beta'}$ entonces $Q^{-1}[T]_{\beta'}Q = [Id]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta'}[Id]_{\beta}^{\beta'}$

$\Rightarrow Q^{-1}[T]_{\beta'}Q = [Id]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta'}^{\beta'}[Id]_{\beta}^{\beta'} = [Id \circ T \circ Id]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\beta} = D_1$

y $Q^{-1}[U]_{\beta'}Q = [Id]_{\beta'}^{\beta}[U]_{\beta'}^{\beta'}[Id]_{\beta}^{\beta'} = [Id \circ U \circ Id]_{\beta}^{\beta} = [U]_{\beta} = D_2$

$\therefore$ $[T]_{\beta'}$ y $[U]_{\beta'}$ son diagonalizables para cualquier base β'.

---

b) Sean A y B matrices simultaneamente diagonalizables, entonces existe una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ = D_1$ y $Q^{-1}BQ = D_2$ son D_1 y D_2 matrices diagonales. Por lo tanto tenemos lo siguiente $AQ = QD_1$ y $BQ = QD_2$

Si consideramos $\gamma = \{e_1, \dots, e_n\}$ (suponiendo que $A, B \in M_{n\times n}(F)$)

y si tomamos $\beta = \{Qe_1, \dots, Qe_n\}$, así $Q = (Qe_1 \ Qe_2 \dots Qe_n)$

y como D_1 y D_2 son diagonales entonces $D_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$

y $D_2 = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$ para $d_i, h_i \in F \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Además como $AQ = QD_1 \Rightarrow AQe_i = QD_1e_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

y $D_1e_i = d_ie_i \Rightarrow AQe_i = Qd_ie_i \Rightarrow A(Qe_i) = d_i(Qe_i)$

Así d_i es valor propio de A con vector propio Qe_i correspondiente.

Análogamente $B(Qe_i) = h_i(Qe_i)$ $\therefore$ $[L_A]_{\beta} = D_1$ y $[L_B]_{\beta} = D_2$

Así L_A y L_B son operadores simultaneamente diagonalizables. $\square$

3: a) Sean T y U operadores simultaneamente diagonalizables entonces existe β una base de V tal que $[T]_\beta = D_1$ y $[U]_\beta = D_2$ son matrices diagonales. Supongamos que $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Ahora sea $v \in V$ un vector cualquiera y como β es base

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad , \text{ para unos únicos } \{a_i\}_{i=1}^{n} \subseteq F.$$

Supongamos que $D_1 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$, y $D_2 = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$

es decir $(D_1)_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ y $(D_2)_{ij} = \begin{cases} h_i, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

Así sabemos que $T(v_i) = d_i v_i$ y $U(v_i) = h_i v_i$, es decir los vectores v_i de β son vectores propios de T y U simultaneamente así

$$U \circ T(v) = U \circ T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) \underset{\text{Por ser lineal } T}{=} U\left(\sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i)\right) = U\left(\sum_{i=1}^{n} a_i d_i v_i\right) \underset{\text{Por ser lineal } U}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i d_i U(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i d_i h_i v_i$$

y $$T \circ U(v) = T \circ U\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i U(v_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i d_i v_i$$

y como $a_i h_i d_i = a_i d_i h_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces $T \circ U(v) = U \circ T(v)$ para cualquier $v \in V$ $\therefore$ $TU = UT$ (es decir conmutan U y T) $\square$

b) Sean A y B matrices simultaneamente diagonalizables, i.e existe una matriz Q tal que $Q^{-1} A Q = D_1$ y $Q^{-1} B Q = D_2$ con D_1 y D_2 diagonales

como D_1 y D_2 diagonales entonces $D_1 D_2 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} d_1 h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n d_n \end{pmatrix} = D_2 D_1$$

$\Rightarrow (Q^{-1} A Q)(Q^{-1} B Q) = (Q^{-1} B Q)(Q^{-1} A Q) \Rightarrow Q^{-1} A B Q = Q^{-1} B A Q$

$\therefore AB = BA$ $\square$

9 = Determine si $\lim_{m\to\infty} A^m$ existe para cada una de las siguientes matrices A, y calcule el límite en caso de existir.

a) $A = \begin{pmatrix} -1.8 & 4.8 \\ -0.8 & 2.2 \end{pmatrix}$, calculemos $p(t) = \det(A - tId) = \det\begin{pmatrix} -1.8-t & 4.8 \\ -0.8 & 2.2-t \end{pmatrix}$

$= (-1.8-t)(2.2-t) - (-0.8)(4.8) = t^2 - 0.4t - 3.96 + 3.84$

$= t^2 - 0.4t - 0.12 = (t-0.6)(t+0.2)$.

Por lo tanto los valores propios son $t_1 = 0.6$ y $t_2 = -0.2$

Así si $v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ es el vector propio asociado al valor propio t_1

y $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ el vector propio asociado al valor propio t_2

entonces, $Q = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & u_2 \end{pmatrix}$ es tal que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix} = D$

y además $(Q^{-1}AQ)^n = \underbrace{(Q^{-1}A\overbrace{Q)(Q^{-1}}^{Id}A\overbrace{Q)\cdots(Q^{-1}}^{Id}AQ)}_{n \text{ veces}} = Q^{-1}A^nQ$

$\Rightarrow Q^{-1}A^nQ = D^n$ y $D^n = \begin{pmatrix} (0.6)^n & 0 \\ 0 & (-0.2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{6}{10}\right)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n\left(\frac{2}{10}\right)^n \end{pmatrix}$

Por lo tanto $A^n = QD^nQ^{-1}$ y $\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} QD^nQ^{-1}$

y como $0 < \left(\frac{6}{10}\right) < 1$ y $0 < \left|\frac{-2}{10}\right| < 1 \Rightarrow \left(\frac{6}{10}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y $(-1)^n\left(\frac{2}{10}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} D^n = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{10}\right)^n & 0 \\ 0 & \lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{10}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \boxed{\lim_{n\to\infty} A^n = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

b) $A = \begin{pmatrix} -0.5-2i & 4i & 0.5+5i \\ 1+2i & -3i & -1-4i \\ -1-2i & 4i & 1+5i \end{pmatrix}$

Calculemos $p(t) = \det(A - tId) = \det\begin{pmatrix} -0.5-2i-t & 4i & 0.5+5i \\ 1+2i & -3i-t & -1-4i \\ -1-2i & 4i & 1+5i-t \end{pmatrix}$

haciendo todas las cuentas se llega a que $p(t) = -t^3 + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$

así $p(t) = (t - \frac{1}{2})(-t^2 - 1) = -(t - \frac{1}{2})(t^2 + 1) = -(t - \frac{1}{2})(t - i)(t + i)$

Así si tenemos que $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ son los vectores propios asociados a los valores propios $\frac{1}{2}$, i y $-i$ respectivamente entonces $Q = \begin{pmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{pmatrix}$ es tal que

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = D \quad \text{así} \quad A = QDQ^{-1} \quad \text{y} \quad A^n = QD^nQ^{-1}$$

y $\lim_{n \to \infty} A^n = \lim_{n \to \infty} QD^nQ^{-1} = Q\left(\lim_{n \to \infty} D^n\right)Q^{-1}$

pero $\lim_{n \to \infty} D^n = \lim \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & i^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^n \end{pmatrix}$ y si bien $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

tambien tenemos que $\lim_{n \to \infty} i^n$ no existe al igual que $\lim_{n \to \infty} (-i)^n$ por lo tanto $\lim_{n \to \infty} D^n$ no existe y de igual forma $\lim_{n \to \infty} A^n$ no existe.

10= Sean los estados los siguientes
- a = Sanos (Recuperados)
- b = En reposo
- c = En meditación
- d = Muertos

Entonces la matriz de cambios de estados está dada de la siguiente manera:

$$A = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 3/10 & 7/10 & 0 \\ b & 6/10 & 2/10 & 2/10 & 0 \\ c & 1/10 & 2/10 & 5/10 & 2/10 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Si en determinado momento hay
x_1 personas sanas o recuperadas
x_2 personas en reposo
x_3 personas en medicación
x_4 personas muertas

Si tomamos $\bar{X}_0 = (X_1, X_2, X_3, X_4)$

Entonces luego de un mes tendremos que habrán

$$\bar{X}_0 A = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 0 & 3/10 & 7/10 & 0 \\ 6/10 & 2/10 & 2/10 & 0 \\ 1/10 & 2/10 & 5/10 & 2/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\left(6x_2 + x_3,\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 7x_1, 2x_2, 5x_3,\ 2x_3 + x_4\right)$$

$$= \left((60\%)x_2 + (10\%)x_3, (30\%)x_1 + (20\%)x_2 + (20\%)x_3, (70\%)x_1 + (20\%)x_2 + (50\%)x_3, (20\%)x_3 + (10\%)x_4\right)$$

Si empezamos el analisis suponiendo que al inicio sólo llegan x pacientes entonces inmediatamente $X_2 = \frac{3}{10}X$ y $X_3 = \frac{7}{10}X$

así las condiciones iniciales son $X_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{10}x$; $x_3 = \frac{7}{10}x$, $x_4 = 0$

luego del primer mes el vector de estados quedaria de la siguiente forma.

$$\left(\frac{6}{10}\left(\frac{3}{10}\right)x + \frac{1}{10}\left(\frac{7}{10}\right)x,\ \frac{3}{10}(0) + \frac{2}{10}\left(\frac{3}{10}\right)x + \frac{2}{10}\left(\frac{7}{10}\right)x,\ \frac{7}{10}(0) + \frac{2}{10}\left(\frac{3}{10}\right)x + \frac{5}{10}\left(\frac{7}{10}\right)x,\ \frac{2}{10}\left(\frac{7}{10}\right)x\right)$$

$$= \left(\frac{18}{100}x + \frac{7}{100}x,\ \frac{6}{100}x + \frac{14}{100}x,\ \frac{6}{100}x + \frac{35}{100}x,\ \frac{14}{100}x\right)$$

$$= \left(\frac{25}{100}x,\ \frac{20}{100}x,\ \frac{41}{100}x,\ \frac{14}{100}x\right) = \left((25\%)x, (20\%)x, (41\%)x, (14\%)x\right)$$

Es decir 25 % estaran recuperados, 20% estarán en reposo, 41 % en medicación y 14 % muertos.

Tambien para conocer la medida invariante o el porcentaje que habrá eventualmente de cada tipo de paciente debe cumplir que si

$\Pi_0 = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ entonces $\Pi_0 A = \Pi_0$ es decir que

$A^t \Pi_0^t = \Pi_0^t$, i.e. Π_0^t es un vector propio con valor propio asociado igual a 1 es obvio que existirá pues $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

así 1 es valor propio de A y por tanto como $\det(B) = \det(B^t)$

$\Rightarrow \det(A^t - \lambda Id) = \det((A^t - \lambda Id)^t) = \det(A - \lambda Id) \Rightarrow 1$ es valor propio de A^t solo falta saber cual es dicho vector. Lo anterior ya que si $\lim_{n\to\infty} A^n$ existe entonces $\Pi_0 \lim_{n\to\infty} A^n = \Pi_0 \Rightarrow \boxed{\Pi_0 A = \Pi_0}$

Entonces solo hay que encontrar que vector $\Pi_0^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ es tal

que $A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6/10 & 1/10 & 0 \\ 3/10 & 2/10 & 2/10 & 0 \\ 7/10 & 2/10 & 5/10 & 0 \\ 0 & 0 & 2/10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 6/10 & 1/10 & 0 \\ 3/10 & -8/10 & 2/10 & 0 \\ 7/10 & 2/10 & -5/10 & 0 \\ 0 & 0 & 2/10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} -x_1 + \tfrac{6}{10}x_2 + \tfrac{1}{10}x_3 &= 0 \\ \tfrac{3}{10}x_1 - \tfrac{8}{10}x_2 + \tfrac{2}{10}x_3 &= 0 \\ 7/10\, x_1 + \tfrac{2}{10}x_2 - \tfrac{5}{10}x_3 &= 0 \\ \tfrac{2}{10}x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + \frac{6}{10}x_2 = 0 \\ \frac{3}{10}x_1 - \frac{8}{10}x_2 = 0 \\ \frac{7}{10}x_1 + \frac{2}{10}x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{6}{10}x_2, \quad \frac{3}{10}x_1 = \frac{8}{10}x_2 \text{ y } x_3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{10}\left(\frac{6}{10}\right)x_2 = \frac{8}{10}x_2 \text{ y } x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \left(\frac{80-18}{100}\right)x_2, \quad x_3 = 0 \text{ y } x_1 = \frac{6}{10}x_2 \Rightarrow x_2 = 0, x_3 = 0 \text{ y } x_1 = 0$$

y como además $\Pi_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es una distribución de porcentajes

entonces $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ y $x_4 = 1$

Así: $\Pi_0 = (0, 0, 0, 1)$ es tal que $\Pi_0 A = \Pi_0$

Por lo tanto la medida invariante ó proporción eventual es

$x_1 = 0$, es decir 0% saludables ó recuperados

$x_2 = 0$, i.e 0% en reposo

$x_3 = 0$, i.e 0% en medicación

$x_4 = 1$, i.e 100% muertos

II= sea $P=(0.3,0.3,0.4)^t$ el vector inicial

15

a) $A=\begin{pmatrix}0.6 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.9 & 0.2\\ 0.3 & 0 & 0.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6/10 & 1/10 & 1/10\\ 1/10 & 9/10 & 2/10\\ 3/10 & 0 & 7/10\end{pmatrix}$

y $P=\begin{pmatrix}3/10\\ 3/10\\ 4/10\end{pmatrix}$

Las proporciones de los objetos despues de dos etapas está dada por

$$A^2P=\begin{pmatrix}6/10 & 1/10 & 1/10\\ 1/10 & 9/10 & 2/10\\ 3/10 & 0 & 7/10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6/10 & 1/10 & 1/10\\ 1/10 & 9/10 & 2/10\\ 3/10 & 0 & 7/10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/10\\ 3/10\\ 4/10\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}6/10 & 1/10 & 1/10\\ 1/10 & 9/10 & 2/10\\ 3/10 & 0 & 7/10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25/100\\ 38/100\\ 37/100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{150+38+37}{1000}\\ \frac{25+9(38)+2(37)}{1000}\\ \frac{75+7(37)}{1000}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{225}{1000}\\ \frac{441}{1000}\\ \frac{334}{100}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.225\\ 0.441\\ 0.334\end{pmatrix}$$ y la proporción eventual está dada por $A\Pi_0=\Pi_0$

con $\Pi_0=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ y además $x_1+x_2+x_3=1$

es decir $A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{10}x_1+\frac{1}{10}x_2+\frac{1}{10}x_3\\ \frac{1}{10}x_1+\frac{9}{10}x_2+\frac{2}{10}x_3\\ \frac{3}{10}x_1+0+\frac{7}{10}x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{4}{10}x_1+\frac{1}{10}x_2+\frac{1}{10}x_3\\ \frac{1}{10}x_1-\frac{1}{10}x_2+\frac{2}{10}x_3\\ \frac{3}{10}x_1+0-\frac{3}{10}x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-4x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\\ 3x_1=3x_3\end{cases}$$

$\Rightarrow x_1=x_3$ y $x_2=x_1+2x_3=3x_1$ y como $x_1+x_2+x_3=1$

$\Rightarrow x_1+(3x_1)+x_1=1\Rightarrow 5x_1=1\Rightarrow x_1=\frac{1}{5}$, $x_3=\frac{1}{5}$ y $x_2=\frac{3}{5}$

así: $\Pi=\begin{pmatrix}1/5\\ 3/5\\ 1/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.20\\ 0.60\\ 0.20\end{pmatrix}$ es la proporción eventual de los objetos en cada estado.

16

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/10 & 1/10 & 2/10 \\ 1/10 & 8/10 & 2/10 \\ 1/10 & 1/10 & 6/10 \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 3/10 \\ 4/10 \end{pmatrix}$$

las proporciones de objetos despues de cada estado esta dada por

$$A^2 P = A \begin{pmatrix} 8/10 & 1/10 & 2/10 \\ 1/10 & 8/10 & 2/10 \\ 1/10 & 1/10 & 6/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/10 \\ 3/10 \\ 4/10 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{24+3+8}{100} \\ \frac{3+24+8}{100} \\ \frac{3+3+24}{100} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 35/100 \\ 35/100 \\ 30/100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{35(8)+35+60}{1000} \\ \frac{35+35(8)+60}{1000} \\ \frac{35+35+180}{1000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 375/1000 \\ 375/1000 \\ 250/1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.375 \\ 0.250 \end{pmatrix}$$

y la proporcion eventual $\Pi_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ es tal que $A\Pi_0 = \Pi_0$

y además $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

es decir $(A - Id)\Pi_0 = \bar{0}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} -2/10 & 1/10 & 2/10 \\ 1/10 & -2/10 & 2/10 \\ 1/10 & 1/10 & -4/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{restando estas dos}} \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_3 = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_1 \end{matrix}$$

asi como $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $\Rightarrow$ $x_1 + x_1 + \left(\frac{1}{2}x_1\right) = 1$ $\Rightarrow x_1 = \frac{2}{5}$

asi $\Pi_0 = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/10 \\ 4/10 \\ 2/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ es la proporcion eventual

de los objetos en cada estado.