**Cova** Pacheco, Felipe de Jesús

**Problema 1** (Ejercício 6.3.1). *Probar que cada una de las siguientes fórmulas sostiene para todo* $n \in \mathbb{N}$
*(1)* $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.
*(2)* $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = (n(n + 1)(2n + 1))/6$.
*(3)* $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (n^2(n + 1)^2)/4$.
*(4)* $1^3 + 3^3 + ... + (2n - 1)^3 = (n^2(2n^2 - 1))$.
*(5)* $1 * 2 + 2 * 3 + ... + n(n + 1) = (n(n + 1)(n + 2))/3$.
*(6)* $(1/1 * 2) + (1/2 * 3) + ... + (1/n(n + 1)) = (n/n + 1)$.

*Demostración.* (A) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
Base: $n = 1 \Longrightarrow 1 = 1^2 = 1$
H.I.: $n = k \Longrightarrow 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$
P.D.: $n = k + 1$, $1 + 3 + ... + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$
$1 + 3 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2(k + 1) - 1)$
$k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$
(B) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = (n(n + 1)(2n + 1)) \div 6$
Base: $n = 1$, $1^2 = 1 = 1 \div 6 = (1(1 + 1)(2(1) + 1)) \div 6$
H.I.: $n = k$, $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = (k(k + 1)(2k + 1)) \div 6$
P.D.: $n = k + 1$, $1^2 + 2^2 + ... + (k + 1)^2 = ((n + 1)(n + 2)(2n + 3)) \div 6$
$\Longrightarrow ((n(n + 1)(2n + 1)) \div 6) + (n + 1)^2$
$= ((n(n + 1)(2n + 1)) + 6(n + 1)^2) \div 6$
$(n + 1)((n(2n + 1) + 6(n + 1)) \div 6)$
$((n + 1)(2n^2 + n + 6n + 6)) \div 6$
$((n + 1)(2n^2 + 7n + 6)) \div 6$
$((n + 1)(n + 2)(2n + 3)) \div 6$ $\square$

**Problema 2** (Ejercício 6.3.2). *Probar que* $1 + 2n \leq 3^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Base: $1 + 2(1) \leq 3'$
$3 \leq 3$
P.D.: $1 + 2(n + 1) \geq 3^{n+1}$
$1 + 2(n + 1) - 3^{n+1} = 1 + 2n + 2 - 3^n 3$
$= 2n + 1 - 3^n(2 + 1) + 2$
$= 2n + 1 - 3^n * 2 - 3^n + 2$
$= 2n + 1 - 3^n \leq 0 + 2(-3^n + 1) \leq 0$
$1 + 2(n + 1) - 3^{n+1} \leq 0$
$1 + 2(n + 1) \leq 3^{n+1}$ $\square$

**Problema 3** (Ejercício 6.3.3). *Sean* $a, b \in N$. *Probar que* $a^n - b^n$ *es divisible por* $a - b$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Base: $n = 1$
P.D.: $a - b \mid a - b$ ya que $(a - b) = 1(a - b)$
Sup. hasta $k$
H.I.: $(a - b) \mid a^k - b^k$
P.D.: $(a - b) \mid a^{k+1} - b^{k+1}$
$a^{k+1} - b^{k+1}$
$(a^k - b^k)(a + b) = a^{k+1} + a^k b - b^k a - b^{k+1}$

$= a^{k+1} - b^{k+1} + a^k b - ab^k$
$= a^{k+1} - b^{k+1} + ab(a^{k-1} - b^{k-1})$
$(a^k - b^k)(a+b) - ab(a^{k+1} - b^{k+1}) = a^{k+1} - b^{k+1}$
$(a-b) \mid a^k - b^k \Longrightarrow a^k - b^k = h(a-b)$
$a - b \mid a^{k-1} - b^{k-1} \Longrightarrow a^{k-1} - b^{k-1} = k(a-b)$
$h(a-b)(a+b) - abk(a-b) = a^{k+1} - bk + 1$
$(a-b)[h(a+b) - abk] = a^{k+1} - b^{k+1}$
$\Longrightarrow a - b \mid a^{k+1} - b^{k+1}$ $\square$

**Problema 4** (Ejercício 6.3.4)**.** *Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función. Suponemos que $f(n) < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $f(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Sea $k \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \Longrightarrow f(k) \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow f(k) \geq 0$, en particular $k = 0$
$f(0) \geq 0$ Base de inducción
Sup. $f(k) \geq k$ P.D.: $f(k+1) \geq k+1$
Por Hip. $f(n) < f(n+1)$
$\Longrightarrow k \leq f(k) < f(k+1) \Longrightarrow k < f(k+1)$
$\Longrightarrow k + 1 \leq f(k+1)$
$\square$

**Problema 5** (Ejercício 6.3.6)**.** *Para cada valor de $n \in \mathbb{N}$ se contiene la desigualdad $n^2 - 9n + 19 > 0$? Pruébalo por inducción.*

*Demostración.* $n^2 - 9n + 19 > 0$, $n = 0, 1, 2$
Base: $n = 6$
$6^2 - 9(6) + 19 = 36 - 54 + 19 > 0$
Sup. $k^2 - 9k + 19 > 0$
P.D.: $(k+1)^2 - 9(k+1) + 19 > 0$
$(k+1)^2 - 9(k+1) + 19 = k^2 + 2k + 1 - 9k - 9 + 19$
$= (k^2 - 9k + 19) + (2k + 1 - 9)$
$= (k^2 - 9k + 19) + (2k - 8)$
H.I. como $k \geq 6$
$> 0 + (2k - 8)$ $2k \geq 12$
$> 0 + 0 = 0$ $2k - 8 \geq 4 > 0$
Por lo tanto $k^2 - 9k + 19 > 0$ $\square$