Cova Pacheco, Felipe de Jesús

Problema 1 (Ejercício 7.4.2). *Es cada una de las siguientes relaciones antisimétrica, un orden parcial y/o un orden total?*
(1) Sea F un conjunto de personas en Francia, y sea M la relación definida por xMy si y solo si x come más queso anualmente que y, para todo $x, y \in F$.
(2) Sea W el conjunto de todas las personas que alguna vez vivieron y alguna vez vivirán, y sea A la relación en W definida por xAy si y solo si y es ancestro de x o si $y = x$, para todo $x, y \in W$.
(3) Sea T el conjunto de todos los triángulos en el plano, y sea L la relación en T definida por sLt si y solo si s tiene area menor o igual a t, para cualquier triángulo en $s, t \in T$.
(4) Sea U el conjunto de ciudadanos actuales en E.U.A., y sea Z la relación en U definida por xZy si y solo si el Número de Seguro Social de x es mayor que el Número de Seguro Social de y para toda $x, y \in U$.

Demostración. (1)
xMy si y solo si x come más queso al año que y
xMx x come más queso al año que x NO.
$\Longrightarrow$ No es Orden Parcial ni Orden Total (ref).

(2)xAy si y solo si x es ancestro de y ó $y = x$
xAy entonces $x = x \Longrightarrow$ es Reflexiva
xAy, yAz entonces $x = y \Longrightarrow$ Antisimétrica
xAy, yAz entonces $xAz \Longrightarrow$ Transitiva
(a) x es ancestro de y, y es ancestro de $z \Longrightarrow xAz$
(b) $x = z$
(c) x es ancestro de y, $y = z \Longrightarrow xAz$
(d) T
$\Longrightarrow$ OP (ref)
xAy ó yAx
No es OT

(3) sZt si y sólo si $As \leq At$
$sZs \Longrightarrow Reflexivo$
sZt, tZs ent. $As \leq At$, $At \leq As$
Pero no es Antisimétrico
$\Longrightarrow$ no es Orden Parcial ni Orden Total.

(4) xZy si y sólo si nssde $x >$ nssy
xZx nssx $>$ nssx
$\Longrightarrow$ no es Orden Parcial (ref) ni Orden Total.

$\square$

Problema 2 (Ejercício 7.4.3). *Sea $A \subset |N$ un subconjunto, y sea $\preceq$ la relación en A definida por $a \preceq b$ si y solo si $b = a^k$ para algúna $k \in |N$, para todo $a, b \in A$.Probar que $(A, \preceq)$ es un COPO. Es $(A, \preceq)$ un conjunto totalmente ordenado?.*

Demostración. Transitiva
$a \preceq b$, $b \preceq c$
$a^k = b$, $b^l = c$
$(a^k)^l = c \Longrightarrow a^(k * l) = c$
como k y $l \in N$
entonces $k * l \in N$
Por lo tanto $a \preceq c$

Antisimétrica
$a \preceq b$ y $b \preceq a$
$a^k = b$, $b^l = a$
$(a^k)^l = a \Longrightarrow (b^k)^l = b \Longrightarrow k * l = 1 \Longrightarrow k = 1$ y $l = 1$
Por lo tanto $a = b$.

Reflexiva
$a^1 = a$ y $1 \in N$
$\Longrightarrow a \preceq a$.

□

Problema 3 (Ejercício 7.4.5). *(1) Da un ejemplo de una relación en R que sea transitiva y antisimétrica pero no simĺetrica ni reflexiva.*
(2) Sea A un conjunto no vacío, y sea R una relación en A. Suponemos que R es tanto simétrica como antisimétrica. Probar que todo elemento de A está relacionado como mánimo a sí mismo.

Demostración. $A = \{1, 2\}$ $(R, \leq)$
$R\{(1, 2)\}$
aRb y bRa pero $a \neq b$
aRb y $bRc \Longrightarrow aRc$ □

Problema 4 (Ejercício 7.4.6). *(1) Probar si el COPO tiene un elemento más grande, entonces el elemento más grande es único, y si un COPO tiene un elemento más pequeño, entonces el elemento más pequeño es único.*
(2) Encuentra un ejemplo de un COPO que tiene tanto un elemento más pequeño como un elemento más grande, un ejemplo que tiene un elemento más pequeño, pero no uno más grande, un ejemplo que tiene un elemento más grande pero no un elemento más chico y un ejemplo que no tiene ninguno.

Demostración. (1) x es máximo en A
$x \geq y$, $\forall y \in A$
Sup $X1, X2$ ambos máximos en A
$X1 \geq X2$ y $X2 \geq X1$
$X1 = X2$.

(2) A=$(1, 2, 3, 4)$ $\leq$ B= N $\leq$
minimo = 1 minimo 0
maximo = 4 maximo no tiene

Z(negativo) $\leq$ Z(positivo) $\leq$
maximo = -1 maximo no tiene
minimo no tiene minimo 0

$\square$

Problema 5 (Ejercício 7.4.7)**.** *Probar que el elemento más grande de un COPO es un elemento máximo, y que un elemento más pequeño de un COPO es un elemento minimo.*

Demostración. $\square$

Problema 6 (Ejercício 7.4.13)**.** *Sea $(A, \preceq)$ un COPO, sea X un conjunto y sea $h : X \longrightarrow A$ una función. Sea $\preceq'$ la relación en X definida por $x \preceq' y$ si y solo si $h(x) \preceq h(y)$, para todo $x, y \in X$. Probar que $(X, \preceq')$ es un COPO.*

Demostración. $(A, R) COPO$
$h : X \longrightarrow A$
R' rel en X
$xR'y$ syss
$h(x)Rh(y)$
(x, R') COPO
(A, R) $\forall x, y, z \in A$
(1) xRx
(2) xRy, yRx ent. $x = y$
(3) xRy, yRz ent. xRz

$h(x) = d$, $x, y, z \in X$
$h(y) = e$, $d, e, k \in A$
$h(z) = k$
$xR'x \Leftrightarrow h(x)Rh(x) \Leftrightarrow dRd$ (Por (1))

$xR'y$, $yR'x$ ent. $x = y$
$h(x)Rh(y)$, $h(y)Rh(x)$
$\Leftrightarrow dRe$, eRd
ent. $e = d$ (Por (2))

$xR'y$, $yR'z$ ent $xR'z$
$h(x)Rh(y)$, $h(y)Rh(z)$
$\Leftrightarrow dRe$, eRk (Por (3))
$dRk \Leftrightarrow h(x)Rh(z)$
$\Leftrightarrow xR'z$
Por lo tanto (x, R') $\square$

Problema 7 (Ejercício 7.4.17)**.** *Sean $(A, \preceq)$ y $(B, \preceq)$ COPOs y sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de orden. Probar que si $\preceq$ es un orden total, entonces también es $\preceq'$.*

Demostración. $\square$

Problema 8 (Ejercício 4.2.1)**.** *Encuentra el rango de cada una de las siguientes funciones.*
(1) Sea $f : \Re \longrightarrow \Re$ *definida por* $f(x) = x^6 - 5$ *para toda* $x \in \Re$*.*
(2) Sea $g : \Re \longrightarrow \Re$ *definida por* $g(x) = x^3 - x^2$ *para toda* $x \in \Re$
(3) Sea $h : \Re \longrightarrow (0, \infty)$ *definida por* $h(x) = e^(x - 1) + 3$ *para toda* $x \in \Re$
(4) Sea $p : \Re \longrightarrow \Re$ *definida por* $p(x) = \sqrt{x^4 + 5}$ *para toda* $x \in \Re$
(5) Sea $q : \Re \longrightarrow [-10, 10]$ *definida por* $q(x) = \sin x + \cos x$ *para toda* $x \in \Re$

Demostración. $f : \Re \longrightarrow \Re$
(1) $y = x^6 - 5$
$y + 5 = x^6$, $x^6 - 5 < -5$
${}^6\sqrt{y + 5} = x$, $x^6 < 0$
$y + 5 \geq 0$
$y \geq -5$
$R = \{y \in \Re \mid y \geq -5\}$
$z \in [-5, \infty)$

(2) $f : \Re \longrightarrow \Re$
$y = x^3 - x^2$
$y = x^2(x - 1)$
$y \in \Re$

(3) $f : \Re \longrightarrow (0, \infty)$
$y = e(^x + 1) + 3$, $(3, \infty)$
$y - 3 = e(^x - 1)$
$ln(y - 3) = lne(^x - 1)$
$ln(y - 3) = x - 1$

(4) $f : \Re \longrightarrow \Re$
$y^2 = x^4 + 5$
$y^2 - 5 = x^4$
$\sqrt{y^2 - 5} = x$
$y^2 - 5 \geq 0$
$y^2 \geq 5$
$y^2 \geq \sqrt{5}$ $\square$

Problema 9 (Ejercício 4.2.3)**.**

Demostración. $\square$

Problema 10 (Ejercício 4.2.5)**.** *Sean* X *y* Y *conjuntos, sean* $A \subseteq C$ *y* $B \subseteq Y$ *subconjuntos y sean* $\Pi : X \times Y \longrightarrow X$ *y* $\Pi : X \times Y \longrightarrow Y$ *mapas proyectados como los definidos en la sección 4.1.*
(1) Probar que $(\Pi 1)^-1(A) = A \times Y$ *y* $(\Pi 2)^-1(B) = X \times B$
(2) Probar que $(\Pi 1)^-1(A) \cap (\Pi 2)^-1(B) = A \times B$
(3) Sea $P \subseteq X \times Y$*. Es* $\Pi 1(P) \times \Pi 2(P) = P$*? Da una prueba o un contraejemplo.*

Demostración. $\square$

Problema 11 (Ejercício 4.2.10). *(1) Encuentra un ejemplo de una función $f : A \longrightarrow B$ y subconjuntos $P, Q \subseteq A$ tal que $P \subseteq\neq Q$, pero que $f(P) = f(Q)$.*
(2) Encuentra un ejemplo de una función $g : C \longrightarrow D$ y subconjuntos $S, T \subseteq D$ tal que $S \subseteq\neq T$, pero que $g^-1(S) = g^-1(T)$.

Demostración. (2) $C, D = \mathbb{R}$, $g^{-1}(S) = g^{-1}(T)f(x) = x^2$
$S : \mathbb{N}$
$\mathbb{N}, \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$
$T = Z$
$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{R}$
$g^{-1}(S) = g^{-1}(T)$
$x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = y$, y $\in \mathbb{N}$
$x = dy$ para algúna $y \in \mathbb{N}$
$x^2 = Z$ $x = \sqrt{z}$
$(-\infty, 0) = \emptyset$

□

Problema 12 (Ejercício 4.2.11). *Sean A y B conjuntos, sean $P, Q \subseteq A$ subconjuntos y sea $f : A \longrightarrow B$ una función.*
(1) Probar que $f(P) - f(Q) \subseteq f(P - Q)$.
(2) Es necesariamente el caso que $f(P - Q) \subseteq f(P) - f(Q)$? Da una prueba o un contraejemplo.

Demostración. 1) Sea $y \in f(P) - f(Q)$
$y = \{f(x) : x \in P\} - \{f(x) : x \in Q\}$
$y = f(x)$ tal que $x \in P$ y $x \notin Q$
$y = f(x)$ para algún $x \in P - Q$
$\rightarrow y \in \{f(x) : x \in P - Q\} = f(P - Q)$
Por lo tanto $y \in f(P - Q) \rightarrow f(P) - f(Q) \subseteq f(P - Q)$

2) $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{-1, -2, -3\}$
$f(x) = x^{\{}2\}$
$f(P - Q) = \{-3, -2, -3, 1, 2, 3\}$
$f(P) - f(Q) = \{1, 2, 3\}$
Por lo tanto $f(P - Q) \subset f(P) - f(Q)$ □

Problema 13 (Ejercício 4.2.12). *Sean A y B conjuntos, sean $C, D \subseteq B$ subconjuntos y sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Probar que $f^-1(D - C) = f^-1(D) - f^-1(C)$.*

Demostración. $f : A \longrightarrow B$
$C, D \subseteq B$
PD $f(^-1)(D - C) = f(^-1)(D) - f(^-1)(C)$

$(\subseteq)$
Sea $a \in f(^-1)(D - C) \Longrightarrow f(a) \in (D - C)$
$\Longrightarrow f(a) \in D$ y $f(a) \notin C$
$\Longrightarrow a \in f(^-1)(D) - f(^-1)(C)$

$(\supseteq)$
Sea $a \in f(^-1)(D) - f(^-1)(C)$

$\Longrightarrow a \in f(^{-}1)(D)$ y $a \notin f(^{-}1)(C)$
$\Longrightarrow f(a) \in D$ y $f(a) \notin C$
$\Longrightarrow f(a) \in D - C$
$\Longrightarrow a \in f(^{-}1)(D - C)$. □

Problema 14 (Ejercício 4.3.3)**.** *Sea $f, g : \Re \longrightarrow \Re$ definida por*
$f(x) = (1 - 2x, six \geq 0), f(x)(|x|, six < 0)$
$g(x) = (3x, six \geq 0)g(x)(x - 1, six < 0)$
Encuentra fog y gof

Demostración. Cuando $x \geq 0$
$f(x) = 1 - 2x$
$g(x) = 3x$
$fog = f(g(x)) = 1 - 2(3x)$
$gof = g(f(x)) = 3(1 - 2x)$

Cuando $x < 0$
$fog = f(g(x)) = |x - 1|$
$gof = g(f(x)) = |x| - 1$
$fog = (1 - 6x \mid x \geq 0, |x - 1|x < 0)$
$gof = (3 - 6x \mid x \geq 0, |x| - 1x < 0)$.

□

Problema 15 (Ejercício 4.3.5)**.** *Sean A y B conjuntos, sea $U \subseteq A$ y $V \subseteq C$ subconjuntos, y sea $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. Probar que:*
$(gof)(U) = g(f(U))$ y $(gof)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$.

Demostración. P.D. $(gof)(u) = g(f(u))$
P.D $y \in (gof)(u) \leftrightarrow y \in g(f(u))$

Sea $y \in (gof)(u)$
$y \in (gof)(u) \leftrightarrow y \in (gof)(u) : u \in U$

$y = (gof)(u)$ para algúna $u \in U$
$\leftrightarrow y = g(F(u))$ para alguna $u \in U$
$\leftrightarrow y = g(z) conz = f(u)$ para alguna $u \in U$łł $\leftrightarrow y = g(z)$ para alguna $z \in f(u)$
$\leftrightarrow y \in g(f(u))$
Por lo tanto $(gof)(u) = g(f(u))$.

$V \subseteq C$
$(gof) - 1(V) = f - 1(g - 1(V))$
Sea $y \in (gof)(V) = (x \in A : (gof)(x) \in V)$
$(gof)(y) \in V \leftrightarrow g(f(y)) \in V \leftrightarrow f(x) \in g - 1(v)$
$f - 1(g - 1(u)) = (x \in A : f(x) \in g - 1(v))$
$\leftrightarrow y \in f - 1(g - 1(v))$

□

Problema 16 (Ejercício 4.3.6)**.** *Sean A, B y C conjuntos, y sean y sea $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. Suponer que f y g tienen inversas. Probar que gof tienen inversa, y que $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$*

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \to C$ funciones invertibles
Como f y g tienen inversa
entonces llamemos $f^{-1} : B \to Ag^{-1} : C \to B$ inversa.
PD gof tiene inversa
Sea $h = f^{-1}og^{-1}, h : C \to A$
PD h es inversa de gof
PD $h(gof) = (gof)oh = Id$ con $c \in C$
$[ho(gof)](c) = [(f - 1og - 1)o(gof)](c)$
$\longrightarrow [f^{-1}o(g^{-1}o(gof))](c)$
$\longrightarrow [f^{-1}o(g^{-1}og)of)](c)$
$\longrightarrow (f^{-1}o(Iof))(c)$
$\longrightarrow (f^{-1}of)(c) = I(c) = c$
Por lo tanto h es inversa (goh)
$(goh)^{-1} = h$
$\Leftrightarrow (goh)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$. □

Problema 17 (Ejercício 4.3.7)**.**

Demostración. (1) $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $hog = Id_{[0,\infty)}$
$g_1(x) = -x$
$x \in [0, \infty)$
$h(g_1(x)) = h(-x) = -(-x) = x$
$g_2(x) = x$
$h(g_2(x)) = h(x) = x$

(2) $f : \mathbb{R} \to [1, \infty)$
$f(x) = e^{x2}$
$g_1, g_2 : [1, \infty) \to \mathbb{R}$
$fog_1 = Id_{(1,\infty)}$
$fog_2 = Id[1, \infty)$
$g(x) = log(x^2)$
$g(x) = \sqrt{log(x)}$
$fog(x) = e^{log(x)} = x$.

□

Problema 18 (Ejercício 4.3.8)**.**

Demostración. (1) $f(x) = x^3 + 4$
Encontrar a g tal que $gof(x) = I$
$y = x^3 + 4 \to \sqrt[3]{x - 4} = x$
$g(x) = \sqrt[3]{x - 4}$
$gof(x) = g(x^3 + 4) = \sqrt[3]{(x^3 + 4) - 4} = x = I$

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = e^x \forall x \in \mathbb{R}$
$h(x) = logx\ hog = loge^x = x$

□

Problema 19 (Ejercício 4.4.7)**.**

Demostración. P.D. $f(X) = f(Y) \to x = y$

$x \neq y \to f(x) \neq f(y)$

$Sup. f(x) = f(y) \to A - X = A - Y$

$Si a \in A - X \leftrightarrow a \in A - Y$

$a \in A$ y $a \notin X \leftrightarrow a \in A$ y $a \notin Y$

$a \in A, a \in X^c \leftrightarrow a \in A, a \in Y^c$

como $X^c \subseteq A$, $Y^c \subseteq A$

$a \in A \cap X^c \leftrightarrow a \in A \cap Y^c$

$a \in X^c \leftrightarrow a \in Y^c$

$a \notin X \leftrightarrow a \notin Y$

$\neg(a \in X) \leftrightarrow \neg(a \notin Y) \to a \in X \leftrightarrow a \in Y$

entonces $x = y$

$\implies$ es inyectiva

$\square$