Cova Pacheco, Felipe de Jesús

Problema 1 (Ejercício 7.4.2). *Es cada una de las siguientes relaciones antisimétrica, un orden parcial y/o un orden total?*
$C = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n = k\}$;
$E = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n = 2k\}$;
$P = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ es un número primo}\}$;
$N = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n = k\}$;
$S = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n = 6k\}$;
$D = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n = k - 5\}$;
$B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ es no negativo}\}$;

Demostración. □

Problema 2 (Ejercício 3.2.9). *Encuentra conjuntos A y B tal que $A \in B$ y $A \subseteq B$.*

Demostración. Sea $A = \{\emptyset\}$ y $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
A es un conjunto que contiene al conjunto vacío
B tiene dos elementos, el conjunto vacío y el conjunto que contiene al conjunto vacío así que como todos los elementos de A están en B, se cumple que $A \subset B$ y como B contiene al conjunto que contiene al conjunto vacío, se concluye que $A \in B$

□

Problema 3 (Ejercício 3.2.10). *Sean A, B y C conjuntos. Suponemos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Probar que $A = B = C$.*

Demostración. Por definición de subconjunto:
$A \subseteq B$ para toda $x \in A, x \in B$ (1)
$B \subseteq C$ para toda $x \in B, x \in C$ (2)
De 1 y 2 tenemos que para toda $x \in A, x \in C$ (3) es decir $A \subseteq C$
Como $C \subseteq A$ Para toda $x \in C, x \in A$ (4)
de 3 y 4 tenemos que $A = C$
Como $A = C$ 2 puede reescribirse como
$B \subseteq A$ Para toda $x \in B, x \in A$ (5)
entonces de 1 y 5 tenemos que $A = B$ Por lo tanto $A = B = C$

□

Problema 4 (Ejercício 3.2.11). *Sean A y B conjuntos. Probar que no es posible que $A \subsetneq B$ y $B \subseteq A$ ambas sean correctas.*

Demostración. Por definición si $A \subsetneq$??B Para toda $a \in A, a \in B$ pero existe al menos una $b \in B, b \notin A$ si $B \subseteq A$ para toda $b \in B, b \in A$ lo cual es una contradicción con nuestro enunciado anterior, ya que solo sucede que $b \notin A$ o $b \in A$ pero no ambas a la vez.

□

Problema 5 (Ejercício 3.2.12). *Sean AyB cualesquiera dos conjuntos. Es correcto que uno de $A \subseteq B$ o $A = B$ o $A \supseteq B$ deben ser verdad?. Da una prueba o un contraejemplo.*

Demostración. Falso
Contra Ejemplo: Sea $A = \{3, 4, 5\}$ y $B = \{8, 4, 1\}$ $A \nsubseteq B$ ya que no todos los elementos de A están en B
Si no se dio la contención, mucho menos la igualdad, $A \neq B$
$A \nsubseteq B$ ya que no todos los elementos de B están en A

□

Problema 6 (Ejercício 3.2.13). *Sea $A = \{x, y, z, w\}$. Enlista todos los elementos en $\wp(A)$.*

Demostración. $A = \{x, y, z, w\}$ ent.
$\wp(A) = \{\emptyset, \{x, y, z, w\}, \{x, y, z\}, \{y, z, w\}, \{z, w, x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{x, w\},$
$\{y, z\}, \{y, w\}, \{z, w\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{w\}\}.$

□

Problema 7 (Ejercício 3.2.14). *Sean A y B conjuntos. Suponemos que $A \subseteq B$. Probar que $\wp(A) \subseteq \wp(B)$*

Demostración. Por definición $x \in \wp(A)$ si y solo si $x \subseteq A$
Si $A \subseteq B$ se cumple que todos los elementos de A están en B
y como $\wp(B)$ contiene todos los subconjuntos de B quien a su vez contiene todos los elementos de A se cumple que $\wp(A) \subseteq \wp(B)$.

□

Problema 8 (Ejercício 3.2.16). *??????????????????Cuáles de los siguientes son verdaderos y cuáles falsos*

Demostración. (1) $\{\emptyset\} \subseteq G$ para todos conjunto en G.
FALSO. Porque el conjunto G no necesariamente tiene al conjunto vacío.
(2)$\emptyset \subseteq G$ para todo conjunto G.
VERDADERO. Dem: si $\emptyset \subseteq G$ $\exists x \in \emptyset$ tal que $x \notin G$

□

Problema 9 (Ejercício 3.3.5). *Dados dos conjuntos A y B los conjuntos $A - B$ y $B - A$ necesariamente disjuntos? Da una prueba o un contraejemplo*

Demostración. Para que los conjuntos $A - B$ y $B - A$ sean disjuntos, no deben tener ningún elemento en común.
Al no tener elementos en común, la intersección de ambos conjuntos es el vacío
$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
$x \in (A - B)$ y las $x \in (B - A)$ por definición de intersección
$x \in A$, $x \notin B$ y las $x \in B$, $\notin A$.
no hay ninguna x que cumpla estar y no estar en A, lo mismo cumple para B por lo que concluimos que $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
por lo que $A - B$ y $B - A$ son necesariamente disjuntos.

□

Problema 10 (Ejercício 3.3.9). *Sean A y B conjuntos. Prueba que $(A \cup B) - A = B - (A \cap B)$*

Demostración. $(A \cup B) - A$ son todas las x que están en A o en B que no están en A
Por lo que solo nos quedan las x que están en B que no están en A, $B - A$
Las x que están tanto en A como en B son las $x \in A$ y $x \in B$ Como $B - A$ son las x que no estén en A, quitamos de B las x que estén en A y en B
$x \in B$, $x \notin (x \in A$ y $x \in B)$
Por definición de intersección
$x \in B, x \notin (A \cap B)$
Por definición de Diferencia
$B - (A \cap B)$
Por lo tanto $(A \cup B) - A = B - (A \cap B)$

□

Problema 11 (Ejercício 3.3.10). *Sean A y B y C conjuntos. Suponemos que $C \subset A \cup B$, y que $C \cap A = \emptyset$. Probar que $C \subseteq B$*

Demostración. Si $x \in C$ y $C \subset A \cup B$
$x \in AoB$ por definición de subconjunto y de unión
Si ademas $C \cap A = \emptyset$ no existe $x \in C$ y $x \in A$
Como para toda $x \in C, x \notin A$
tenemos que $\forall x \in C, x \notin A, x \in A$ o $x \in B$
Como no existen x que estén y no estén simultáneamente en A nos queda $\forall x \in C, x \in B$ que por definición de subconjunto es $C \subseteq B$

□

Problema 12 (Ejercício 3.3.11). *Sea X un conjunto, y sea $A, B, C \subseteq X$ son subconjuntos. Supongamos que $A \cap B = A \cap C$, y que $(X - A) \cap B = (X - A) \cap C$. Probar que $B = C$.*

Demostración. Tenemos $(X - A) \cap B = (X - A) \cap C$
como $B \subseteq X, (X - A) \cap B = B - A$
como $C \subseteq X, (X - A) \cap C = C - A$
$B - A = C - A$
$(B - A) \cup (A \cap B) = B$ y $(C - A) \cup (A \cap C) = C$
Como $A \cap B = A \cap C y B - A = C - A$
$(B - A) \cup (A \cap B) = (C - A) \cup (A \cap C)$
Por lo tanto $B = C$.

□

Problema 13 (Ejercício 3.3.12). *Sean A, B y C conjuntos. Provar que $(A-B) \cap C = (A \cap C) - B = (A \cap C) - (B \cap C)$.*

Demostración. Sea $x \in (A - B) \cap C$
$x \in A - B \rightarrow x \in A$ y $x \notin B$ y $x \in C$
como $x \in A$ y $x \in C$
$x \in A \cap C$
y como $x \notin B$ Por lo tanto $x \in (A \cap C) - B$

$x \in (A \cap C) - B$
$x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin B$
$x \in A - B$ y $x \in C$
Por lo tanto $x \in (A - B) \cap C$

$x \in (A \cap C) - (B \cap C)$
$x \in (A \cap C)$ y $x \notin (B \cap C)$
$x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin B$ o $x \notin C$
$x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin B$
Por lo tanto $x \in (A \cap B) - B$

$x \in (A \cap C) - B$
$x \in A \cap C$ y $x \notin B$
$x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin B \cap C$
Por lo tanto $x \in (A \cap C) - (B \cap C)$.

□

Problema 14 (Ejercício 3.3.16)**.** *Prueba o encuentra un contraejemplo de la siguiente declaración. Sean A, B, C conjuntos. Entonces $(A \cup C) - B = (A - B) \cup (C - B)$.*

Demostración. Sea $x?((A?C)?B)$
son las $x \in A$ o las $x \in C$ tal que $x \notin B$
las $x \in A$ tal que $x \notin B$, son las $x \in (A - B)$
y las $x \in C$ y que $x \notin B$, son las $x \in (C - B)$
por lo que las x que están en $(A - B)$ o en $(C?B)$
son las $x \in (A - B) \cup (C - B)$ por definición de unión □

Problema 15 (Ejercício 3.3.5)**.** *Enlista todos los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos. (1) $\wp(\wp(\emptyset))$. (2) $\wp(\wp(\emptyset))$.*

Demostración. (1) □

Problema 16 (Ejercício 3.2.16)**.**

Demostración. Escriba aquí su segunda demostración. □

Problema 17 (Ejercício)**.**

Demostración. Escriba aquí su segunda demostración. □