Tarea 1 Felipe de Jesús Cova Pacheco, Domingo 6 de septiembre de 2015

Problema 1. *Sean $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $\emptyset \neq B \subseteq A$. Recordemos que una cota inferior de B es un elemento $d \in A$ tal que $d \leq b$ para todo $b \in B$. El ínfimo de B es la mayor de las cotas inferiores de B, es decir, es una cota inferior d_0 de B tal que $d \leq d_0$ para toda cota inferior d de B. De manera complementaria se define el supremo de B como la menor de las cotas superiores de B. Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ es una retícula si para cualesquiera elementos $a, b \in A$ el conjunto $\{a, b\}$ tiene tanto ínfimo como supremo.*

Demuestre que:
i. Si $S \neq \emptyset$, entonces el conjunto potencia $\wp(S)$ junto con la inclusión de conjuntos es una retícula que, además tiene un único elemento máximo bajo la contención.
ii. De un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado que no sea una retícula.
iii. De un ejemplo de una retícula que no tenga elemento máximo bajo la relación de orden y un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado con dos elementos máximos.

Demostración. i) Claramente $\wp(s) \neq 0$ y la relación $\subseteq$ es reflexiva, transitiva y simétrica
Por lo tanto $(\wp(s), \subseteq)$ es un COPO
Además para todo x en $\wp(s)$ se tiene que $x \subseteq S$
Por lo tanto S es el único elemento máximo
Si A, B en $\wp(s)$, entonces $\{A, B\}$ tiene a $A \cup B$ como supremo y a $A \cap B$ como ínfimo
Por lo tanto $\wp(s)$ es una retícula.

ii) Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $\sim$ está definida para $a, b \in A$
como $a \sim b$ entonces $a \leq b$
entonces $(a, \sim)$ es COPO
pero $\{2, 3\}$ no tiene supremo, por lo que no es retícula.

iii) $-(\mathbb{N}, \leq)$ es una retícula sin elemento máximo
$-(\{1, 2, 3\}, a \mid b)$ es un COPO con dos elementos máximos.

$\square$

Problema 2. *Una retícula $(A, \leq)$ se dice que es completa si cualquier subconjunto no vacío de A tiene tanto ínfimo como supremo. Una función de conjuntos parcialmente ordenados $f : A \to B$ se dice que preserva el orden si siempre que $a \leq_A a'$ entonces $f(a) \leq_B f(b)$. Demuestre que una función f que preserva orden de una retícula completa A en sí misma tiene al menos un elemento que se queda fijo (es decir, existe $a \in A$ tal que $f(a) = a$).*

Demostración. Como $A \subseteq A$. y $A \neq \emptyset$
por ser $(A, \leq)$ completa, tenemos que A tiene ínfimo a
Sea $S = \{x \text{ en } A \mid x \leq f(x)\}$
claramente $a \subseteq f(a)$ (pues $f(a) \in A$)
entonces a en S y $S \neq \emptyset$
Por ser $(A, \leq)$ completa y $S \neq \emptyset$
Sabemos que S tiene supremo s
Entonces para todo x en $S, x \leq S$ como f presencia orden, se cumple que $x \leq f(x) \leq f(s)$
Entonces $f(s)$ es cota superior de S y entonces $s \leq f(s)$
Además $f(s) \leq f(f(s))$ entonces $f(s)$ en S

y como s es supremo de S
se cumple que $f(s) \leq S$
Por lo tanto $f(s) = S$

$\square$

Problema 3. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ con $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$. Defina el orden $\leq$ en S como: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 \leq y_2$.*
Demuestre que $(S, \leq)$ es un COPO y que S tiene infinidad de elementos máximos.

Demostración. Reflexividad:
Si (X_1, Y_1) en S entonces $X_1 = X_1$ y $Y_1 \leq Y_1$
Por lo tanto $(X_1, Y_1) \leq (X_1, Y_1)$
Transitividad:
Si $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ y $(X_2, Y_2) \leq (X_3, Y_3)$
entonces $X_1 = X_2 = X_3$ y $X_1 \leq X_2 \leq X_3$
Antisimetría:
si $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ y $(X_2, Y_2) \leq (X_1, Y_1)$ entonces $X_1 = X_2$, $Y_1 \leq Y_2$, $X_1 = X_2$ y $Y_2 \leq Y_1$
Por lo tanto $(X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$
Entonces $(S, \leq)$ es COPO y para cada x en $\mathbb{R}, (X, 0)$ es un elemento máximo de S

$\square$

Problema 4. *Un anillo R donde todo elemento $a \in R$ cumple que $a^2 = a$ es llamado anillo Booleano.*
Demuestre que:
a. Si R es anillo Booleano entonces R es conmutativo.
b. Si R es anillo Booleano entonces $a + a = 0$.
c. De un ejemplo de un anillo Booleano.

Demostración. a) Sean x, y en $\mathbb{R}$
entonces $(x, y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$
y como R es booleano $(x, y)^2 = x + y$
entonces $x + xy + yx + y = x + y$
entonces $xy = -yx = yx$, $(-yx)^2 = -yx = yx$
Por lo tanto R es conmutativo

b) $(a + a)^2 = a + a$ por ser R booleano
y $(a + a)^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 = a + a + a + a$
de lo anterior se sigue que $a + a = 0$

c)$-\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 x \geq_2$
$-\forall S$ conjunto, $(\wp(s), \subseteq)$
$\mathbb{Z}_2 x \mathbb{Z}_2 \cong \wp(\{a, b\})$

$\square$

Problema 5. *Demuestre que un anillo finito con más de un elemento y sin divisores de cero es un anillo con división.*

Demostración. Sea A con más de un elemento y sea a en A, $a \neq 0$
definimos $f_G : A$ entonces A, es inyectiva pues si $xa = ya$,
como A no tiene divisores de cero y $a \neq 0$ concluímos que $x = y$.
Dado que A es finíto y f_G inyectiva, tenemos que f_a es biyectiva
entonces existe x en A tal que $a = az$.
ahora si y en A, $y \neq 0$. Entonces existe $x \in A$ tal que
$xa = y$ lo que implica que $y = xa = xaz = yz$
Por lo tanto A tiene elemento identidad por la derecha.
Analogamente A tiene identidad izquierda y por lo tanto identidad e.
Finalmente, para cada a en A, tenemos que f_a es biyectiva,
entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = xa = e$, es decir $x = a^{-1}$ □

Problema 6. *Sea R un anillo con más de un elemento tal que para todo elemento no cero $a \in R$ existe un único $b \in B$ tal que $aba = a$. Demuestre que:*
a. R no tiene divisores de cero.
b. $bab = b$.
c. R tiene identidad.
d. R es un anillo con división.

Demostración. □

Problema 7. *Un elemento de un anillo es nilpotente si $a^n = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que en un anillo conmutativo con $a, b \in R$ nilpotentes, $a + b$ es nilpotente.*

Demostración. Sean $a, b \in A$ nilpotentes
entonces $a^m = 0$ y $b^n = 0$ p.a. $m, n \in \mathbb{N}$
entonces $(a+b)^{n+m} = \sum\limits_{i=1}^{m+n} \binom{n+m}{i} a^i b^{m+n-i}$
si $i \leq m$ entonces $m + n - i \geq n$ entonces
$a^i b^{m+n-i} = 0$
si $i \geq m$ entonces $a^i b^{m+n-i} = 0$
Por lo tanto $(a+b)^{m+n} = 0$
elemento máximo de S

□

Problema 8. *Demuestre que son equivalentes para R un anillo:*
a. R no tiene elementos nilpotentes no cero.
b. Si $a \in R$ y $a^2 = 0$ entonces $a = 0$.

Demostración. a) implica b)
Sea $a \in R$ tal que $a^2 = 0$
entonces a es nilpotente por a)
tenemos que $a = 0$
b) implica a)
Sea a un elemento nilpotente de R
y sea n el mínimo entero tal que $a^n = 0$
Sup. que a $\neq 0$
- Si $n = 2k$, entonces $k \geq 1$ y $a^n = a^{2k} = (a^k)^2 = 0$
por b) tenemos que $a^k = 0$!

(pues $k < n$)
- Si $n = 2k+1$ entonces
$a^n + 1 = a^{2k+2} = (a^{k+1})^2 = 0$
por b) tenemos que $a^{k+1} = 0$!
(pues $k+1 < n$)
Por lo tanto $a = 0$

$\square$

Problema 9. *Demuestre que el conjunto:*
$\{k - \frac{1}{n} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$
Satisface el Principio de Buen Orden.

Demostración. Sea $S \subseteq \{k - \frac{1}{n} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$
entonces existen $N_1, N_2 \subseteq \mathbb{N}$
tales que $S \subseteq \{k - \frac{1}{n} \mid k \in N_1, n \in \mathbb{N}_2\}$
como $\mathbb{N}$ satistace el PBO
sabemos que N_1 y N_2 tienen
primer elemento n_1 y n_2 respectivamente
Concluímos que $n_1 - \frac{1}{n_2}$ es un elemento mínimo de S

$\square$

Problema 10. *Demuestre que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple:*

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$$

Demostración. Caso base $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = 1 * 1! = 1 = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$$

supongamos que se cumple para $n = k$
Sea n=k+1
entonces

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i!) = \sum_{i=1}^{k} i(i)! + (k+1)(k+1)!$$

$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(1+n+1) - 1$
$= (n+2)! - 1$ $\square$

Problema 11. *Una pelota es soltada a una altura de 4 metros y cada vez que toca el piso rebota a $\frac{3}{4}$ de la altura previa. £Cuál es la distancia total que la bola recorre (arriba y abajo) cuando llega a la altura máxima de su décimo rebote?*

Demostración. $4 + 2\frac{4}{3}(4) + 2(\frac{4}{3})^2(4) + \cdots + 2(\frac{4}{3})^9(4) + (\frac{4}{3})^{10}4$

$\square$

Problema 12. *Al principio de cada año, se depositan* 100 *pesos en una cuenta de ahorros. Al término de cada año, se paga el 5 % de interés del monto total existente en la cuenta al principio del año. Obtenga una fórmula para calcular el monto total del dinero acumulado al inicio del año n.*

Demostración. $X_0 = 100$
$X_1 = X_0 - X_0(0{,}05) + 100$ entonces $X_n = X_{n-1}(1 - 0{,}05) + 100$
$X_2 = X_1 - X_1(0{,}05) + 100$

$X_n = (X_{n-1}(1 - 0{,}05) + 100)(1 - 0{,}05) + 100$
$X_n = (X_{n-2}(0{,}95) + 100)(0{,}95 + 100)$
$\vdots$
$X_n = 100(0{,}95)^4 + 100(0{,}95)^{n-1} + \cdots + 100(0{,}95) + 100$
$=$

$$\sum_{i=0}^{n} (100)(0{,}95)^i$$

$\square$