Tarea 3 Cova Pacheco Felipe de Jesús, Domingo 6 de septiembre de 2015

Problema 1. *Demuestra o da un contraejemplo.*
a. Si p es un primo, entonces p^2+1 es primo.
b. Si p es un primo, entonces $p+2$ es primo.
c. Si p es un primo tal que $p|ab$, entonces $p|a$ o $p|b$.
d. Hay primos de la forma $n!+1$.

Demostración. a) Falso, si $p=3$, entonces $p^2+1=10$ que no es primo

b) Falso, si $p=13$ entonces $p+2=15$ no es primo

c) Verdadero, si $a = P_1^{n_1}\cdots P_t^{n_i}$ y $b = P_1^{m_1}\cdots P_t^{m_t}$
entonces $ab = P_1^{n_1+m_1}\cdots P_t^{n_t+m_t}$ y como $P|ab$
entonces $P = P_i$ para alguna $i \in \{1,...,t\}$ y $n_i + m_i \geq 1$
lo que implica que $n_i \geq 1$ o $m_i \geq 1$ es decir $p|a$ o $p|b$.

d)Verdadero, $3!+1 = 6+1 = 7$ que es primo.

□

Problema 2. *Encuentra nueve números compuestos consecutivos.*

Demostración. Consideramos los números consecutivos $10!+2, 10!+3, 10!+4, 10!+5, 10!+6, 10!+7, 10!+8, 10!+9, 10!+10$.
Cada uno de ellos es compuesto, pues $i|10!+i$ para toda $i \in \{2,\cdots,10\}$.

□

Problema 3. *Cuántos primos hay menores o iguales a 131?*

Demostración. Hay 32 primos, a saber: $2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 87, 101, 103, 107, 109, 113, 127$ y 131.

□

Problema 4. *Determina cuáles de las siguientes ecuaciones diofantinas tienen solución. En el caso de tenerla, encuentra la solución general.*
a. $14x+16y=15$
b. $15x+21y=39$
c. $1776x+1976y=4152$
d. $1076x+2076y=1155$

Demostración. a) $14x+16y=15$ no tiene solución, pues $(14,16)=2$ y $2 \nmid 15$.

b) $15x+121y=39$ si tiene solución, pues $(15,121)=1$.
encontremos una solución particular.
$121 = 8*15+1$, por lo que $1 = 121-8*15$, multiplicando por 39 en ambos lados llegamos a $39 = 121*39 - 15(39*8)$
Entonces $X_0 = 39$ y $Y_0 = 39*8$ son soluciones particulares,

así $x = 39 + 121t$ y $y = 39 * 8 - 15t$, $t \in \mathbb{Z}$ son las soluciones generales.

c) $1776x + 1976y = 4152$
$1976 = 1 * 1776 + 200$
$1776 = 8 * 200 + 176$
$200 = 1 * 176 + 24$
$176 = 7 * 24 + 8$
$24 = 8 * 3 + 0$
Entonces $(1776, 1976) = (24, 8) = 8$ y $8|4152$
Por lo tanto La ecuación tiene solución
Encontremos una solución particular
$8 = 176 - 7 * 24 = 200 - 24 - 7 * 24 = 200 - 8 * 24 = 200 - 8(200 - 176)$
$= -7 * 200 + 8 * 176 = -7 * 200 + 8(1776 - 8 * 200) = -71 * 200 + 8 * 1776$
$= -71 * (1976 - 1776) + 8 * 1776 = -71 * 1976 + 79 * 1776$
Así $8 = -71(1976) + 79(1776)$, multiplicando por 519 de ambos lados tenemos que
$4152 = -36849(1976) + 41001(1776)$
Entonces $X_0 = -36849$ y $Y_0 = 41001$ son soluciones particulares y así:
$x = -36849 + \frac{1976}{8}(t)$ y $y = 41001 - \frac{1776}{8}(t), t \in \mathbb{Z}$
son las soluciones generales.

d) $1076x + 2076y = 1155$
$2076 = 1 * 1076 + 1000$
$1076 = 1 * 1000 + 76$
$1000 = 13 * 76 + 12$
$76 = 6 * 12 + 4$
$12 = 3 * 4 + 0$
Entonces
$(1076, 2076) = (12, 4) = 4.$ y $4 \nmid 1155$
Por lo tanto La ecuación no tiene solución.

$\square$

Problema 5. *Una alcancía contiene monedas de* $5, 10$ *y* 25 *centavos. En total contiene* 4 *dólares y hay el doble de monedas de* 25 *centavos que monedas de* 10 *centavos. Encuentra el número de combinaciones posibles si hay más monedas de* 25 *centavos que de* 5 *centavos.*

Demostración. Sean x, y y z la cantidad de monedas de $5, 10$ y 25 centavos respectivamente.
Entonces $400 = 5x + 10y + 25z$ además
sabemos que $x = 2y$ por lo que
$400 = 5x + 10y + 50y = 5x + 60y$
como $(5, 60) = 5$ y $5|900$, la ecuación tiene solución
para encontrar una solución particular expresamos $(5, 60)$ como combinación lineal de 5 y 60, es decir:
$5 = -11 * 5 + 60$
Multiplicamos por 80, entonces
$400 = -880 * 5 + 80 * 60$
Entonces $X_0 = -880$ y $Y_0 = 80$ son una solución particular de la ecuación $400 = 5x + 60y$.
Pero sólo las soluciones positivas nos darán combinaciones que resuelvan el problema

Las soluciones generales de la ecuación están dadas por:
$x = -880 + \frac{60}{5}(t) = -880 + 12t$ y $y = 80 - \frac{5}{3}(t) = 80 - t$
Entonces para que $x \geq 0$ necesitamos que $t \geq 74$ y para que $y \geq 0$ necesitamos que $t \geq 80$. Entonces las posibles combinaciones están dadas por:
$x = -880 + 12t$ y $y = 80 - t$, $t \in \{74, 75, \cdots, 80\}$

$\square$

Problema 6. *Encuentra el residuo de* 4^{117} *cuando es dividido por* 15.

Demostración. Tenemos que $4 \equiv 11 \pmod{15}$, entonces
$4^{117} \equiv 11^{117} \pmod{15}$
y como $11^2 = 121 \equiv 1 \pmod{15}$ podemos escribir
$11^{117} = 11^{2*58+1} = (11^2)^{58+1} = (11^2)^{58} * 11$
Así $4^{117} \equiv 11^{117} \equiv (11^2)^{58} * 11 \equiv (1)^{58} * 11 \equiv 11 \pmod{15}$

$\square$

Problema 7. *Si hoy es viernes, qué día será en 1976 días?*

Demostración. Supongamos que hoy es el día x, como viernes es el 5to día de la semana, tenemos que
$x \equiv 5 \pmod 7$
por otro lado $1976 \equiv 2 \pmod 7$ entonces $x + 1976 \equiv 0 \pmod 7$
Por lo que el dá $x + 1976$ es el séptimo de la semana,
es decir si hoy es viernes, en 1976 días es domingo.

$\square$

Problema 8. *Encuentra el residuo de* $1! + 2! + 3! + ... + 1000!$ *al ser dividido por:*
a. 12
b. 11

Demostración. a) Notamos que cuando $k \geq 4$, se tiene que $12|k!$
y así $k! \equiv 0 \pmod{12}$
entonces $1! + 2! + \cdots + 1000! \equiv 1! + 2! + 3! \pmod{12} \equiv 1 + 2 + 6 \pmod{12} \equiv 9 \pmod{12}$
Por lo tanto cuando $1! + 2! + \cdots + 1000!$ es dividido por 12, el residuo es 9.

b) Notamos que cuando $k \geq 11$ tenemos que $k! \geq 0 \pmod{11}$
así $1! + \cdots + 1000! \equiv 1! + 2! + \cdots + frm[o]--0! \pmod{11}$
$\equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 740 + 5040 + 40320 + 362880 + 3628800 \pmod{11}$
$\equiv 1 + 2 + 6 + 2 + 10 + 3 + 2 + 5 + 1 + 10 \pmod{11}$
$\equiv 9 \pmod{11}$.

$\square$

Problema 9. *Encuentra el mínimo residuo de* $(p-1)!$ *módulo* p *para* $p = 3, 5, 7$.

Demostración. Para $P = 3$
$(P-1)! = 2! = 2$ y $3 \equiv 2 \pmod 3$

Para $P = 5$
$(P-1)! = 4! = 24$ y $24 \equiv 4 \pmod 5$

Para $P = 7$
$(P-1)! = 6! = 720$ y $720 \equiv 6 \pmod 7$ $\square$

Problema 10. *Demuestra que si* $2a \equiv 0$ *(mod p) y p es un primo impar, entonces* $a \equiv 0$ *(mod p).*

Demostración. Suponemos que $2a \equiv 0$ (mod P) y P es impar.
Por lo anterior $P|2a$ y como P es impar
tenemos que $p \geq 3$, por lo que P no puede dividir a 2
entonces $P|a$ y así $a \equiv 0$ (mod p) $\square$