Tarea 2 Cova Pacheco Felipe de Jesús, Domingo 6 de septiembre de 2015

Problema 1. *Encuentra los enteros positivos menores o iguales a* 3076 *que son divisibles por* 23.

Demostración. Aplicando el algoritmo de la división para 3076 y 23 obtenemos que $3076 = 23 * 133 + 17$

Por lo tanto $23 * i$ es un entero positivo menor a 3076 divisible por 23, para cada $i \in 20, ..., 133\}$

□

Problema 2. *Encuentra los enteros positivos que están entre* 1976 *y* 3776 *y que son divisibles entre* 13 *y* 15.

Demostración. Para que un número sea divisible entre 13 y 15, debe ser divisible por su producto $13 * 15 = 195$.

aplicando el algoritmo de la división para 3776 y 195 obtenemos que $3776 = 195 * 19 + 71$

El mínimo múltiplo de 195 mayor que 1976 es: $195 * 11$

Por lo tanto Los números entre 1976 y 3776 divisibles por 13 y 15 son $195 * i$ con $i \in \{11, ..., 19\}$

□

Problema 3. *Considera que a, b y c son enteros. Demuestra o da un contraejemplo:*

a. Si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$.

b. Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = b$.

c. Si $a|bc$ entonces $a|b$ y $a|c$.

Demostración. a) Falso, sea $a = -3$ y $b = 3$

entonces $(-3)^2 = (9) = (3)^2$, pero $-3 \neq 3$.

b) Falso, $3| - 3$ y $-3|3$ pero $-3 \neq 3$

c) Falso, $6|6 * 3$ pero $6 \nmid 3$.

□

Problema 4. *Prueba que cualesquiera dos enteros consecutivos son primos relativos.*

Demostración. Consideramos $(x, x + 1) = d$ y suponemos que $d \geq 2$.

entonces $d|x$ y $d|x + 1$, es decir, existen

$m, n \in \mathbb{N}$ tales que $x = dm$ y $x + 1 = dn$.

Como $x + 1 > x$, entonces $n \geq m + 1$, lo que

implica que $nd \geq md + d$, así $x + 1 \geq x + d!$, $d \geq 2$

Entonces debe ocurrir que $d = 1$.

□

Problema 5. *Usando un razonamiento recursivo encuentra* $[24, 28, 36, 40, 48]$.

Demostración. $[24, 28, 36, 40, 48] = [24, [28, 36, 40, 48]] = [24, [28, [36, 40, 48]]]$

$= [24, [28, [36, [40, 48]]]] = [24, [28, [36, 240]]] = [24, [28, 720]] = [24, 5040] = 5040$

□

Problema 6. *Encuentra $[a, b]$, en los casos en que $a|b$, $b|a$, $a = 1$ y $a = b$.*

Demostración. • Si $a|b$, entonces $[a,b]=b$.
• Si $b|a$, entonces $[a,b]=a$.
• Si $a=1$, entonces $[a,b]=b$.
• Si $a=b$, entonces $[a,b]=a=b$.

□

Problema 7. *Sean a,b y c número enteros. Demuestra las siguientes propiedades:*
b. $(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]$
c. $[a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$

Demostración. b) Sean
$a=P_1^{a_1}\cdots P_t^{a_t}$
$b=P_1^{b_1}\cdots P_t^{b_t}$
$c=P_1^{c_1}\cdots P_t^{c_t}$
entonces $(a,[b,c])=$

$$\prod_{i=1}^{t} P_i^{min\{a_i,max\{b_i,c_i\}\}}$$

y $[(a,b),(a,c)]=$

$$\prod_{i=1}^{t} P_i^{max\{min\{a_i,b_i\},min\{a_i,c_i\}\}}$$

y como $min\{a_i,max\{b_i,c_i\}\}=max\{min\{a_i,b_i\},min\{a_i,c_i\}\}$
para cualquier eleccioón de a_i,b_i,c_i, concluímos
que $(a,[b,c])=[(a,b),(a,c)]$.

c) De manera análoga al inciso anterior, utilizando
que $max\{a,min\{b,c\}\}=min\{max\{a,b\},max\{a,c\}\}$

□

Problema 8. *Utilizando el algoritmo de Euclides expresa como combinación lineal el MCD de las siguientes parejas de enteros.*
a. 1776 *y* 3076
b. 4076 *y* 2076

Demostración. $3076=1*1776+1300$
$1776=1*1300+476$
$1300=2*476+398$
$476=1*348+128$
$348=2*128+92$
$128=1*92+36$
$92=2*36+20$
$36=1*20+16$
$20=1*16+4$
Por lo tanto $(3076,1776)=(16,4)=4$.

□

Problema 9. *Encuentra el número de ceros que se encuentran al final de* 378!.

Demostración. Sea α_2 y α_5 las potencias más altas de 2 y 5 que dividen a 378! respectivamente. Claramente $\alpha_2 \geq \alpha_5$.
Encontremos α_5
$378 = 5 * 75 + 3$
$378 = 5^2 * 15 + 3$
$378 = 5^3 * 3 + 3$
Por lo tanto La potencia más alta de 5 que divide a 378 es 93.
Como $\alpha_2 \geq \alpha_5$ tenemos que $\alpha_{10} = 93$, que es el número de ceros al final de 378!

□

Problema 10. *Encuentra la potencia mas alta de* 7 *que divide a* 1001!.

Demostración. Sea α_7 la potencia más alta de 7 que divide a 1001!
Notamos que:
$1001 = 7 * 143 + 0$
$1001 = 7^2 * 20 + 21$
$1001 = 7^3 * 2 + 315$
Por lo tanto $\alpha_7 = 143 + 20 + 2 = 165$.

□

Problema 11. *Decímos que un número n es poderoso si siempre que p es un factor primo de n, p^2 también lo es.*
a. Encuentra los primeros 3 *números poderosos.*
b. Muestra que cualquier número poderoso puede ser expresado de la forma a^2b^3, donde a y b son enteros positivos.

Demostración. Sea n un número poderoso. Considerando la descomposición en primos de n, podemos escribir.
$n = P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r} * P_{r+1}^{n_{r+1}} \cdots P_t^{n_t}$
de tal forma que $2|n_i$ para $i \in \{1, ..., r\}$ y $2 \nmid n_i$ entonces $n_i = 2m_i + 1$ y como n es poderoso sabemos que $n_i \geq 2$ para toda i.
entonces $m_i \geq 1$ y así podemos poner a n_i de la forma $n_i = 2(m_i - 1) + 3$.
definimos $a = P_1^{n_1/2} \cdots P_r^{n_r/2} * P_{r+1}^{(n_{r+1}-3)/2} \cdots P_t^{(n_i-3)/2}$ y $b = P_{r+1} \cdots P_t$
De esta forma $a^2b^3 = (P_1^{n_1/2} \cdots P_r^{n_r/2} * P_{r+1}^{(n_{r+1}-3)/2} \cdots P_{r+1}^{(n_t-3)/2})^2(P_{r+1} \cdots P_t)^3$
$= P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r} * P_{r+1}^{n_{r+1}-3} \cdots P_t - 3 * P_{r+1}^3 \cdots P_t^3$
$= P_1^{n_1} \cdots P_t^{n_t} = n.$ □