

---

**Análise térmica de canais de Poiseuille:  
Comparação de abordagem semi analítica com  
numérica (MFSim) e DNS**

---

**Felipe José Oliveira Ribeiro**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA

Uberlândia  
2022



**Felipe José Oliveira Ribeiro**

**Análise térmica de canais de Poiseuille:  
Comparação de abordagem semi analítica com  
numérica (MFSim) e DNS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de bacharel em engenharia aeronáutica.

Área de concentração: Engenharia Aeronáutica

Orientador: Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia  
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

A474m      Sobrenome, Nome do aluno, 1979-

2014              Título do Trabalho / Nome e Sobrenome do aluno. - 2014.  
81 f. : il.

Orientador: Nome do Orientador.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de  
Pós-Graduação em Ciência da Computação.  
Inclui bibliografia.

1.Computação - Teses. 2. Simulação (Computadores) - Teses. I. Sobrenome, Nome do  
orientador. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Ciência da  
Computação. III. Título.

CDU: 681.3

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Os abaixo assinados, por meio deste, certificam que leram e recomendam para a Faculdade de Computação a aceitação da dissertação intitulada "**Título do trabalho**" por **Nome do aluno** como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Ciência da Computação**.

Uberlândia, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Nome do orientador  
Universidade Federal de Uberlândia

Coorientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Nome do coorientador  
Universidade Federal de Uberlândia  
(quando houver)

Banca Examinadora:

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Membro da banca 1  
Instituição de Ensino Superior

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Membro da banca 2  
Instituição de Ensino Superior



---

# Agradecimentos

Agradeço, a cima de tudo, à minha família, por me apoiar por todos esses anos e nunca medir esforços ao ajudar minha trajetória acadêmica e profissional. Agradeço também aos grandes mestres que tive, em especial, ao professo Aristeu da Silveira Neto, por me guiar por muitos anos em um caminho de aprendizado e evolução. Também é oportuno agradecer a todas as instituições envolvidas nos trabalhos de pesquisa que pavimentaram o caminho até este trabalho. O laboratório de mecânica dos fluidos (MFLab) da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). PETROBRAS, CNPq, CAPES e FAPEMIG que contribuíram financeiramente com trabalhos acadêmicos de grande importância na minha trajetória. Finalmente agradeço aos meus colegas, ao amor da minha vida e à todas as pessoas queridas que sempre trazem alegria e conforto para os meus dias.





---

# Resumo

No presente trabalho o autor desenvolve uma abordagem semi-exata para análise térmica em escoamentos turbulentos de Poiseuille. Parametriza-se o modelo com base nos métodos descritos em (RIBEIRO; NETO, 2020), em seguida, compara-se os resultados com os de métodos numéricos advindos do MFSim e DNS. O modelo físico consistiu em um canal entre placas planas infinitas de fluxo térmico constante que variam linearmente de temperatura no sentido da corrente, resultando em um regime estatisticamente permanente para os perfis de temperatura e velocidade. A parametrização do número de Prandtl turbulento e da constante de Cebeci foram modificadas visando a obtenção de melhor acurácia quando comparada com a solução em DNS. Os resultados foram validados com simulações no MFSim e casos simulados via DNS, constatando-se forte concordância.

**Palavras-chave:** mecânica dos fluidos, CFD, ensino de engenharia, métodos numéricos, equações de Navier Stokes, turbulência.



---

# Abstract

In the present paper the author develops a semi-exact approach for thermal analysis in turbulent Poiseuille flows. The model is parameterized based on the methods described in (RIBEIRO; NETO, 2020), then the results are compared with the numerical methods derived from MFSim and DNS. The physical model consisted of a channel between two infinite flat plates of constant heat flux that vary linearly in temperature in the streamwise direction, resulting in a statistically steady regime for the temperature and velocity profiles. The parameterization of the turbulent Prandtl number and the Cebeci constant were modified in order to obtain better accuracy when compared to the DNS solution. The results were validated with simulations in MFSim and cases simulated via DNS, showing strong agreement.

**Keywords:** Turbulent Prandtl number, Cebeci's constant, Turbulent Poiseuille flow, Genetic algorithm, DNS..



---

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Relógio de água de Ctesibius, visualização criada pelo arquiteto francês Claude Perrault . . . . .	19
Figura 2 – Definição geométrica e condições de contorno. . . . .	21
Figura 3 – Representação geométrica da separação entre os valores médios e as flutuações. . . . .	23
Figura 4 – Campo de temperatura média no canal de Poiseuille. O perfil de temperatura no canal aumenta linearmente na direção do fluxo. . . . .	24
Figura 5 – Campo de velocidade média no canal de Poiseuille. O perfil se mantém constante na direção do fluxo. . . . .	24
Figura 6 – Norma L2 de simulação térmica comparado a dns até 400 células, com $Re_\tau = 1020$ . . . . .	28
Figura 7 – Distribuição de temperatura para $Pr_t = 0.71$ , $A = 26$ e $Pr = 0.71$ . . . .	29
Figura 8 – Número de Prandtl turbulento adquirido do DNS em função de $\tilde{y}/Re_\tau$ , a distância até a parede no canal. . . . .	30
Figura 9 – Iterações de algoritmo genético, com simulações para $Re_\tau = 1020$ . Convergência em $Pr_t = 0.9$ . . . . .	31
Figura 10 – Perfis de temperatura para simulações com $Pr_t = 0.9$ , $A = 26$ e $Pr = 0.71$ . . . . .	31
Figura 11 – Resultados de temperatura para $Pr_\tau(Re_\tau)$ , $A = 26$ e $Pr = 0.71$ . . . .	32
Figura 12 – Resultados de perfil de velocidade para $A = 26$ . . . . .	33
Figura 13 – Resultados em distribuição de velocidade para o modelo de A 38. . . .	34
Figura 14 – Resultados térmicos para $Pr_\tau(Re_\tau)$ , $A(Re_\tau)$ e $Pr = 0.71$ . . . . .	35
Figura 15 – Results of temperature simulations for $Pr_\tau(Re_\tau)$ , $A_d(Re_\tau)$ , $A_t(Re_\tau)$ and $Pr = 0.71$ , with multi-objective adjustment. . . . .	36



---

## Lista de tabelas

Tabela 1	–	Números de prandtl turbulentos ideais ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a constante de cebeci $A = 26$ . . . . .	32
Tabela 2	–	Constante de Cebeci ideal ajustada para cada número de Reynolds turbulento. . . . .	33
Tabela 3	–	Números de prandtl turbulentos ideais ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a função de Cebeci ajustada. . . . .	34
Tabela 4	–	Números de prandtl turbulentos ideais e função de cebeci térmica ( $A_t$ ) ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a abordagem multiobjetiva. . . . .	35





---

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.1</b>	<b>Motivação . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>1.2</b>	<b>Perspectiva histórica . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo físico . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Modelo matemático diferencial . . . . .</b>	<b>22</b>
2.2.1	O estudo dos comportamentos médios . . . . .	22
2.2.2	O regime permanente térmico . . . . .	23
2.2.3	A hipótese de Bousinesq . . . . .	26
2.2.4	O comprimento de mistura de Prandtl . . . . .	26
2.2.5	O comprimento de mistura . . . . .	27
<b>2.3</b>	<b>Modelo matemático numérico . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>AJUSTES PROPOSTOS . . . . .</b>	<b>29</b>
3.0.1	Resultados via método canônico . . . . .	29
3.0.2	O meta modelo adquirido via evolução Diferencial (DE) . . . . .	30
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES NO MFSIM . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>5.1</b>	<b>Principais Contribuições . . . . .</b>	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>41</b>



---

# Introdução

## 1.1 Motivação

A mecânica dos fluidos é um tópico muito estudado no meio acadêmico. O assunto permeia conceitos abstratos e de formulação matemática complexa (O.; HASAN, 2007). A natureza não linear desse tipo de fenômeno (SOMMERER; OTT; TÉL, 1997) dificulta uma solução matemática contínua. Consequentemente, na grande maioria dos casos, métodos numéricos tornam-se necessárias para o entendimento dos fenômenos. Quando Simulações Numéricas Diretas (DNS) não são uma opção, aproximações devem ser feitas para que se viabilize a solução das equações de Navier-Stokes, como modelos de fechamento da turbulência, ajustes e aproximações.

Não somente em trabalhos científicos, a fluido-dinâmica tem grande valor acadêmico para estudantes nos cursos de graduação em engenharia, dada a extensa lista de aplicações industriais (SERT; NAKIBOGLU, 2007). Exemplos são numerosos, como o estudo da combustão, aerodinâmica de veículos e aeronaves, climatologia, oceanografia, dentre outros. Mas, haja vista a complexidade do tema, não é uma tarefa simples a compreensão dos conceitos mais abstratos que envolvem geometrias complexas e turbulência. Apesar disso, estas são partes essenciais do assunto, uma vez que se aproximam de casos práticos na indústria.

O maior motivador de vasta gama de aplicações é que a mecânica dos fluidos permite o aumento na eficiência de processos mecânicos, como, por exemplo, no caso das máquinas térmicas. As transformações energéticas tem como subproduto energia térmica. Tirar essa energia do sistema de forma eficiente resulta em ganho energético e aumento da longevidade dos equipamentos. Dessa forma, depender somente da difusão não é uma opção, o estudo da mecânica dos fluidos torna-se essencial na retirada dessa energia via advecção. Por esse motivo e muitos outros, tem-se o estudo da mecânica dos fluidos como um dos grandes pilares da busca atual da indústria por eficiência energética e sustentabilidade.

Como a turbulência resulta em um sistema dinâmico não linear, é impossível determi-

nar uma solução algébrica para a maioria dos casos. Para estes, a abordagem numérica é empregada, discretizando-se o espaço e o tempo. Resolver tais sistemas lineares requer enorme poder computacional, uma vez que o número de elementos necessários para simular adequadamente o fenômeno é muito grande. RANS, URANS e LES são alternativas. Eles consistem em não resolver numericamente a equação de Navier-Stokes em todas as escalas necessárias, mas em vez disso substituir alguns tensores e outros termos não lineares por aproximações conceituais e experimentais.

Tais métodos são importantes porque oferecem uma solução de forma bem mais eficiente. A abordagem DNS (Simulação Numérica Direta) exige um alto trabalho computacional, pois considera todas as escalas de complexidade, nem mesmo sendo possível ou viável na maioria dos casos (KAWAMURA; ABE; SHINGAI, 2000), como explicado no trabalho de H. Kawamura, H. Abe e Yuichi Matsuo (H.; H.; M., 1999). Mas, por outro lado, esses métodos aproximados resultam em imprecisões matemáticas.

O MFSim é uma ferramenta desenvolvida no Laboratório de Mecânica dos Fluidos pelo programa de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Ele vem sendo desenvolvido de forma contínua a 12 anos e busca oferecer soluções computacionais a problemas de dinâmica dos fluidos de forma computacional, fazendo o uso dos métodos anteriormente citados. Neste trabalho, o software é utilizado em uma análise comparativa entre seus resultados com os obtidos de forma semi analítica com a metodologia aqui descrita.

Dessa forma, no presente trabalho, os autores, a partir de métodos ativos de ensino (RAY; BHASKARAN, 2013), desenvolvem um método semi-analítico para simular o escoamento em canais de Poiseuille (POISEUILLE, 1846) entre duas placas planas. Os resultados desse método são então comparados com resultados de ensaios em DNS e no programa de simulação fluidodinâmica MFSim.

## 1.2 Perspectiva histórica

O estudo da mecânica dos fluidos tem origem na relação do homem com a água, que foi sempre um recurso vital e determinante na sobrevivência dos povos. Começou formalmente com Archimedes que desenvolveu as leis da flutuação, que postulam que a força responsável por fazer um objeto flutuar é igual à massa do volume deslocada de dita substância (DIJKSTERHUIS, 2014). Em sequência tem-se a escola alexandrina onde se desenvolveram bombas hidráulicas sendo também estudadas diversas aplicações de escoamentos confinados, como o relógio de água de Ctesibius (Fig. 1).

Após isto, durante a idade média houveram os estudiosos islâmicos que desenvolveram pesquisas no campo da hidro-estática. Foi observada a diferença de peso entre água doce, salgada, quente e fria, calculando-se a massa específica das substâncias (HILL, 1984). Então houveram grandes mestres como Benedetto Castelli, Evangelista Torricelli

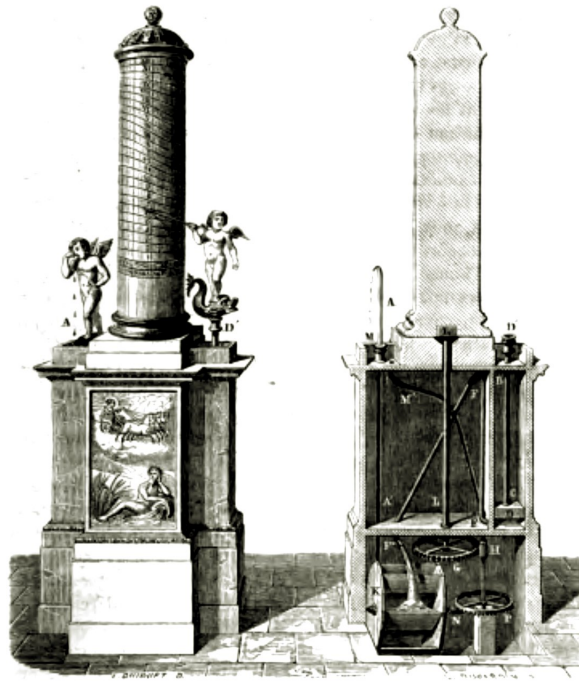


Figura 1 – Relógio de água de Ctesibius, visualização criada pelo arquiteto francês Claude Perrault

Fonte: ARAGO (2012, Fig. 16 et 17.)

e Blaise Pascal que desenvolveram seus estudos formais sobre o tema e avançaram de forma significativa a compreensão sobre o comportamento da pressão e o movimento dos fluidos em uma série de experimentos bem documentados.

Houveram, então, os estudos de Isaac Newton, onde ele descreve fluidos incompressíveis e as forças viscosas que governam seu movimento a baixos números de Reynolds (NETO, 2018). Em seus estudos ele descreve a relação que existe entre o esforço de cisalhamento e o gradiente de velocidade, definindo assim os chamados fluidos newtonianos:

$$\tau = \mu \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Além da viscosidade, Newton também estudou ondas e orifícios em reservatórios de água. Suas contribuições para o cálculo, conservação de energia e movimento também foram determinantes para os grandes pensadores que seguiram com o estudo do tema.

Outro grande pensador foi Daniel Bernoulli. Ele estudou a transformação de energia da velocidade dos fluidos em pressão (BERNOULLI, 1727), relacionando a energia interna às diferenças de velocidade e energia potencial gravitacional:

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + P + \rho * g * h = ctt. \quad (2)$$

Assim teve-se uma compreensão mais completa sobre o comportamento dos fluidos em escoamentos confinados.

Tais estudos acadêmicos culminaram com os estudos de Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes, que desenvolveram as equações de Navier-Stokes, que, baseadas na conservação de energia conseguem descrever o movimento dos fluidos newtonianos:

$$\rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \eta \cdot \nabla^2 \vec{u} = \rho \cdot \left( \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \quad (3)$$

As formulações de Navier-Stokes são equação diferenciais parciais, cuja solução exata nunca foi encontrada para casos gerais. É possível, a partir de simplificações e ajustes, desconsiderar alguns termos de forma a se conseguir soluções exatas para casos suficientemente simples (CENGEL; GHAJAR, 2006). Mas a simplicidade desses casos os tornam pouco aplicáveis em problemas reais de engenharia.

Um exemplo de sistema simplificado é o escoamento de Poiseuille (POISEUILLE, 1846). Nele, tem-se um escoamento Newtoniano e laminar entre duas placas planas infinitas de distância  $h$ . Para este caso, é possível se conseguir uma solução analítica para o perfil de velocidade que pode ser descrito pela equação que segue:

$$u(y) = \frac{G}{2\mu} y(h - y). \quad (4)$$

Onde  $G$  é um gradiente de pressão constante no sentido da corrente ( $G = -\frac{dp}{dx}$ ), e  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade.

Para casos turbulentos também é possível se checar em um resultado, mas não de forma analítica.

## Fundamentação Teórica

### 2.1 Modelo físico

Neste trabalho, procura-se analisar térmicamente um escoamento turbulento no canal de Poiseuille. Ele pode ser definido como um escoamento confinado, com apenas uma dimensão finita no eixo  $y$ . Duas placas infinitas são definidas, perpendiculares ao eixo  $y$ . Nelas, o escoamento atinge velocidade igual a zero (condição de não deslizamento) e estão em regime de fluxo térmico constante. O eixo  $z$  é definido como auto-similar tanto na velocidade quanto na temperatura, resultando em um domínio plano (Fig.2). O escoamento foi considerado incompressível e o fluido foi considerado newtoniano. Neste sistema físico, o fluido escoar, em média, somente na direção do eixo  $x$ . Os números de Reynolds ( $Re = \frac{2R\bar{U}}{\nu}$ ) variam de 4560 a 41441, resultando em um regime turbulento.

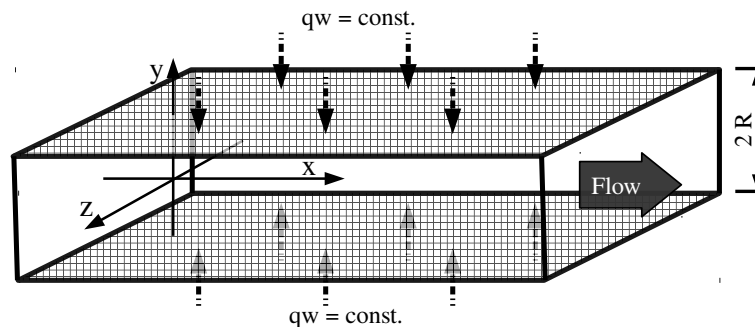


Figura 2 – Definição geométrica e condições de contorno.

Fonte: Autor.

Estas foram as suposições efetuadas para o problema proposto, que serão consideradas no modelo matemático diferencial adiante.

## 2.2 Modelo matemático diferencial

A formulação matemática do problema foi baseada nas equações de continuidade, de Navier-Stokes (CENGEL; GHAJAR, 2006), e na equação de transporte de energia térmica (INCROPERA FREANK, 2007):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) + \frac{\partial}{\partial z}(wT) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (7)$$

$$q_{conv.} = \dot{m} C_p \Delta T_m. \quad (8)$$

Eq.8 é baseada na lei de resfriamento de Newton (INCROPERA FREANK, 2007), onde  $\dot{m}$  é a vazão volumétrica,  $C_p$  é a capacidade calorífica específica,  $\Delta T_m$  é a diferença de temperatura entre a superfície e o fluido, e  $q_{conv.}$  é a taxa de transferência de calor por convecção.

### 2.2.1 O estudo dos comportamentos médios

Para simplificar o sistema, foi realizado um tratamento estatístico nas equações. Cada grandeza foi dividida entre valor médio e flutuações, sendo que a média torna-se independente do tempo:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} f(x, t) dt. \quad (9)$$

$$f(x, t) = \bar{f}(x) + f'(x, t), \quad (10)$$

também é possível realizar as seguintes operações com as flutuações:

$$\begin{cases} \overline{f'(x, t)} = 0, \\ \overline{f(x)} = \overline{f(x)}, \\ \overline{f'(x, t) \overline{f(x)}} = 0, \\ \overline{f'(x, t) g'(x, t)} \neq 0, \\ \overline{g(x) f(x)} = \overline{g(x)} \overline{f(x)}, \end{cases} \quad (11)$$

A partir destas operações foi possível simplificar o sistema de equações. É possível se representar geometricamente também essa separação entre a média e flutuação na Figura 3:



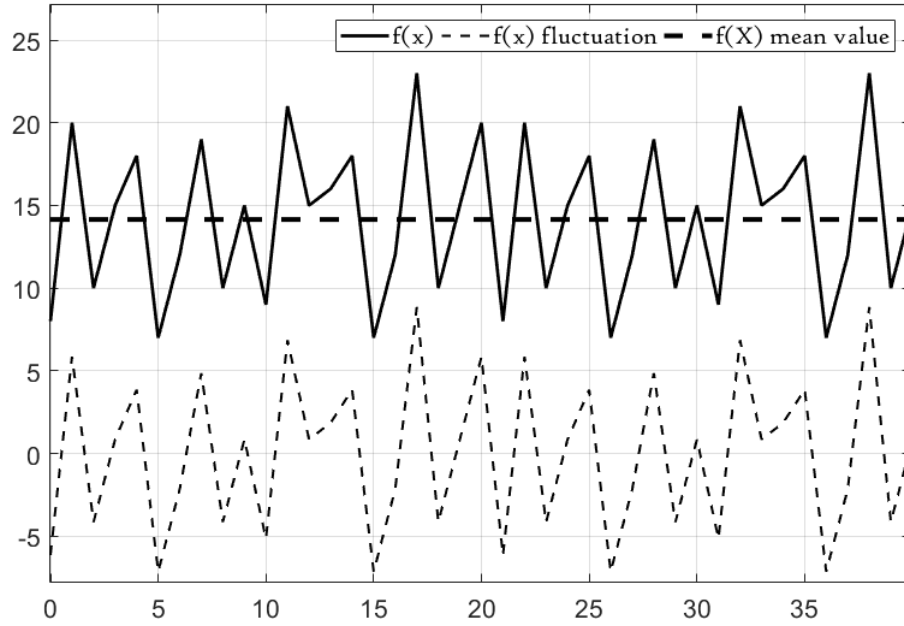


Figura 3 – Representação geométrica da separação entre os valores médios e as flutuações.

Fonte: Autor.

Dessa forma, aplicando as simplificações, obtêm-se as equações médias da continuidade (Eq.12), de Navier-Stokes (Eq.13) e de balanço de energia (Eq.14):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{T'u'}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{T}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T'v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}\bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right). \quad (14)$$

Sendo  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  as velocidades médias e  $u'$  e  $v'$  as flutuações na velocidade nos eixos  $x$  e  $y$ ,  $\rho$  a massa específica,  $\bar{p}$  a pressão média,  $\nu$  a viscosidade cinemática,  $\bar{T}$  a temperatura média,  $T'$  a flutuação na temperatura e  $\alpha$  a difusividade térmica.

O método, independente da variável do tempo e baseado em comportamentos médios, é caracterizado como um exemplo de metodologia RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes).

### 2.2.2 O regime permanente térmico

O campo de velocidade média atinge regime estatisticamente permanente no canal (Fig. 5), mas o mesmo não ocorre para o campo de temperatura, pois um fluxo térmico

constante é imposto sobre as paredes. A temperatura continua aumentando no domínio, nunca se estabilizando. Outra diferença entre os dois domínios é o fato de que o perfil de velocidade mantém-se constante no sentido do fluxo. Isso possibilita que o sistema seja representado unidimensionalmente, simplificando drasticamente as formulações matemáticas. O mesmo não pode ser dito para o campo de temperatura média, as temperaturas aumentam linearmente no sentido do fluxo (Fig. 4):

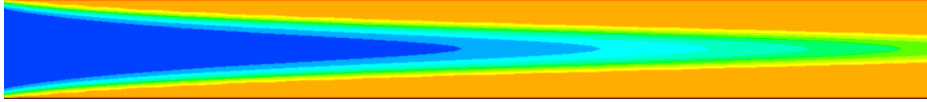


Figura 4 – Campo de temperatura média no canal de Poiseuille. O perfil de temperatura no canal aumenta linearmente na direção do fluxo.

Fonte: Autor, em simulação realizada no Mfsim.

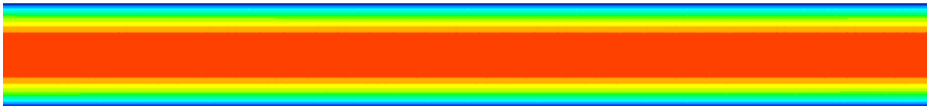


Figura 5 – Campo de velocidade média no canal de Poiseuille. O perfil se mantém constante na direção do fluxo.

Fonte: Autor, em simulação realizada em código próprio.

Para simplificar o equacionamento do campo de temperatura médio, um balanço de energia térmica foi estudado (Eq. 15):

$$q_{conv.} = \dot{m}C_p\Delta T_m, \quad (15)$$

A partir da equação de balanço de energia térmica, pode-se obter a temperatura média no domínio:

$$2q_w b \Delta x = \dot{m}C_p\Delta T_m, \quad (16)$$

$$\Delta T_m = \frac{2q_w b \Delta x}{\dot{m}C_p}, \quad (17)$$

Onde  $q_w$  é o fluxo de calor nas paredes,  $b$  é a largura do canal e  $\Delta x$  é a distância entre as paredes.

Então, substituindo  $\dot{m} = u_m 2Rb\rho$  onde  $u_m$  é a velocidade média no domínio,  $R$  é o raio do canal e  $\rho$  é a massa específica, e se assumindo que  $\Delta T_m = \frac{\partial(\bar{T}_m)}{\partial x} \Delta x$ :

$$\frac{\partial(\bar{T}_m)}{\partial x} = \frac{q_w}{u_m R \rho C_p}. \quad (18)$$

Como todos os termos à direita da equação são constantes, a temperatura média varia linearmente no sentido da corrente.

Para melhor entender a temperatura nas paredes, uma formulação de convecção termal foi estudada:

$$q_w = hA (T_w(x) - \bar{T}_m(x)). \quad (19)$$

Como se tem um fluxo completamente desenvolvido, pode-se afirmar que o valor de  $h$  é constante. Assim, usando-se a Eq. 18, é possível se concluir que:

$$\frac{dT_w(x)}{dx} = \frac{d\bar{T}_m(x)}{dx} = Cte. \quad (20)$$

Dessa forma, considerando que a temperatura nas paredes varia linearmente, assim como a temperatura média, é possível se estender esse gradiente no domínio completo ao se considerar as condições de contorno e a simetria do sistema. Assim, nas paredes é imposto um gradiente de temperatura constante, criando-se um regime de condição de contorno de fluxo térmico constante. Consequentemente, todo o campo de temperatura varia linearmente na direção da corrente e com o tempo. O valor de temperatura foi então decomposto no seguinte modo:

$$T^*(y) = T(x, y) - T_w(x), \quad (21)$$

Onde  $T^*(y)$  é a temperatura relativa,  $T(x, y)$  é a temperatura absoluta e  $T_w(x)$  é a temperatura na parede.

Assim, analisando-se  $T^*(Y)$ , vemos auto-similaridade no sentido da corrente, resultando em um equacionamento unidimensional representativo com solução em  $T^*(y)$ .

Finalmente Eq. 14:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} ((T^* + T_w)'u') + \frac{\partial}{\partial x} ((T^* + T_w)\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} ((T^* + T_w)'v') + \frac{\partial}{\partial y} ((T^* + T_w)\bar{v}) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial(T^* + T_w)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial(T^* + T_w)}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Então a expressão pode ser desenvolvida ainda mais algebricamente considerando todas as velocidades médias nas direções  $y$  e  $z$  nulas:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial y} - (\bar{T}^* v') \right) = \bar{u} \frac{\partial \bar{T}_w}{\partial x}. \quad (23)$$

### 2.2.3 A hipótese de Bousinesq

A hipótese de Bousinesq é uma aproximação que permite a análise de sistemas de convecção térmica em regime permanente. No caso do presente trabalho a hipótese foi empregada no termo  $\overline{T'^*v'}$ , que pode, então, ser modelado como segue:

$$-\left(\overline{T'^*v'}\right) = \alpha_t \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial y}. \quad (24)$$

Onde  $\alpha_t$  é a difusividade térmica turbulenta do fluido. Assim, substituindo-se Eq. 24 na Eq. 23:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial y} \right] = \bar{u} \frac{\partial \overline{T_w}}{\partial x}. \quad (25)$$

### 2.2.4 O comprimento de mistura de Prandtl

O termo da difusão térmica turbulenta,  $\alpha_t$ , precisa ser modelado. Para modelá-lo, usou-se o conceito clássico do número de prandtl turbulento que é:

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t}. \quad (26)$$

A viscosidade cinemática turbulenta  $\nu_t$  precisa ser modelada. O valor do número de prandtl turbulento pode ser definido como  $Pr_t = 0.71$ , como consta na literatura.

Com o modelo de comprimento de mistura de Prandtl, é definido:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (27)$$

$$\alpha_t = \frac{l_m^2}{Pr_t} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (28)$$

Onde  $l_m$  é o comprimento de mistura. Então substituindo-se Eq. 28 na Eq. 25:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \alpha + \frac{l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|}{Pr_t} \right) \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T_w}). \quad (29)$$

É possível notar, quando se analisa a dinâmica do fluido, que para valores positivos de  $y$ , a derivada da velocidade é sempre negativa, com uma velocidade que decresce com  $y$ . Resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \alpha - \frac{l_m^2}{Pr_t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T_w}). \quad (30)$$

### 2.2.5 O comprimento de mistura

O comprimento de mistura  $l_m$  precisa ser modelado. Os estudos experimentais de nikuradse foram usados para modelar esse parâmetro para escoamentos de canal, como segue:

$$L \left( \frac{y}{R} \right) = \frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left( \frac{y}{R} \right)^2 - 0.06 \left( \frac{y}{R} \right)^4. \quad (31)$$

Para maior completude do modelo, cebeci e bradshaw adicionaram a função de amortecimento de Van Driest:

$$L \left( \frac{y}{R} \right) = \frac{l_m}{R} = \left\{ 0.14 - 0.08 \left( \frac{y}{R} \right)^2 - 0.06 \left( \frac{y}{R} \right)^4 \right\} \left\{ 1 - e^{[(\frac{y}{R}-1)\frac{Re_\tau}{A}]} \right\}, \quad (32)$$

Com  $A = 26$  como a constante de Cebeci. Assim, tem-se o comprimento de mistura definido como:

$$l_m = LR, \quad (33)$$

Sendo  $L$  uma função no eixo  $y$ , dado pela equação 32. Então a equação 29 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \alpha - \frac{L^2 R^2}{Pr_t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial (\bar{T}_w)}{\partial x}. \quad (34)$$

Usando-se coordenadas de parede, a equação foi adimensionalizada, para que pudesse ser comparada com a literatura. As considerações adotadas foram:  $\tilde{y} = \frac{y \cdot Re_\tau}{R}$ ,  $\tilde{u} = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$ ,  $\tilde{T} = \frac{\bar{T}}{T_\tau}$ ,  $\tilde{T}^* = \frac{\bar{T}^*}{T_\tau}$ ,  $Re_\tau = \frac{u_\tau R}{\nu}$ ,  $Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha}$ ,  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ ,  $T_\tau = \frac{q_w}{\rho C_p u_\tau}$ ,  $\frac{\partial (T_m)}{\partial x} = \frac{q_w}{u_m R \rho C_p}$  e  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{u_\tau^2 \rho}{R}$ . Que, ao se substituir em (34) resultou em (35):

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( \left( \frac{Re_\tau}{Pr} - \frac{L^2 Re_\tau^3}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_m}. \quad (35)$$

É importante observar que existe a velocidade na equação (35), ou seja, para o desenvolvimento do problema térmico é necessário o desenvolvimento do perfil dinâmico do canal. Para isso, foi utilizada uma metodologia rans previamente estabelecida (A.; N., 2015), conforme segue:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = - \frac{2\tilde{y} \frac{1}{Re_\tau}}{1 + \sqrt{1 + 4L^2 Re_\tau^2 \tilde{y}}}. \quad (36)$$

Assim, tem-se a primeira derivada da velocidade determinada algebricamente.

## 2.3 Modelo matemático numérico

Para discretizar a equação diferencial, um domínio euleriano foi declarado. Para a velocidade foi aplicado um método runge-kutta de quarta ordem, enquanto a temperatura foi arranjada em um esquema de diferenças centradas que teve que ser resolvido implicitamente. O modelo dinâmico é resolvido primeiro, e seu resultado é usado na solução do perfil térmico. O centro da célula foi usado de forma que a parede fosse colocada no centro da célula e um ponto entre as células fosse colocado no ponto central do canal. A convergência dos resultados numéricos é mostrada na figura 6:

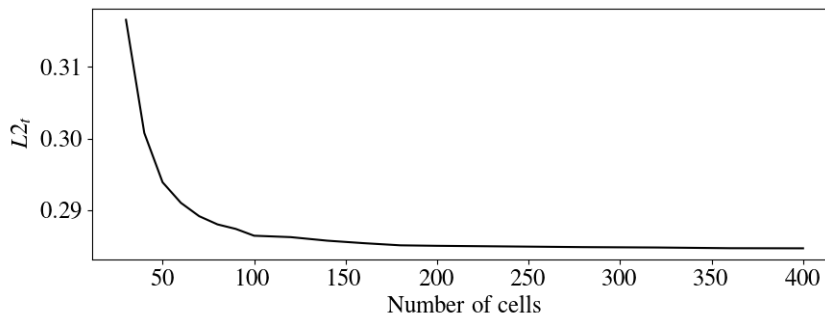


Figura 6 – Norma L2 de simulação térmica comparado a dns até 400 células, com  $Re_\tau = 1020$ .

Quanto maior o número de elementos na malha, maior a acurácia do resultado até atingida a convergência quando comparado aos resultados em DNS. A partir disso, os erros observados deixam de ser devido ao método numérico e têm significância quanto aos ajustes aplicados, como, por exemplo, a hipótese de bousinesq.

Dessa forma, para cada resultado, deu-se um número suficiente de elementos para que houvesse a convergência do erro numérico.

## Ajustes propostos

### 3.0.1 Resultados via método canônico

Inicialmente o número de prandtl turbulento,  $Pr_t = 0,71$ , foi usado como na literatura. Os resultados obtidos apresentados na figura 7 são comparados com os dns de (H., 2007) e (H. et al., 1992), com a norma l2.

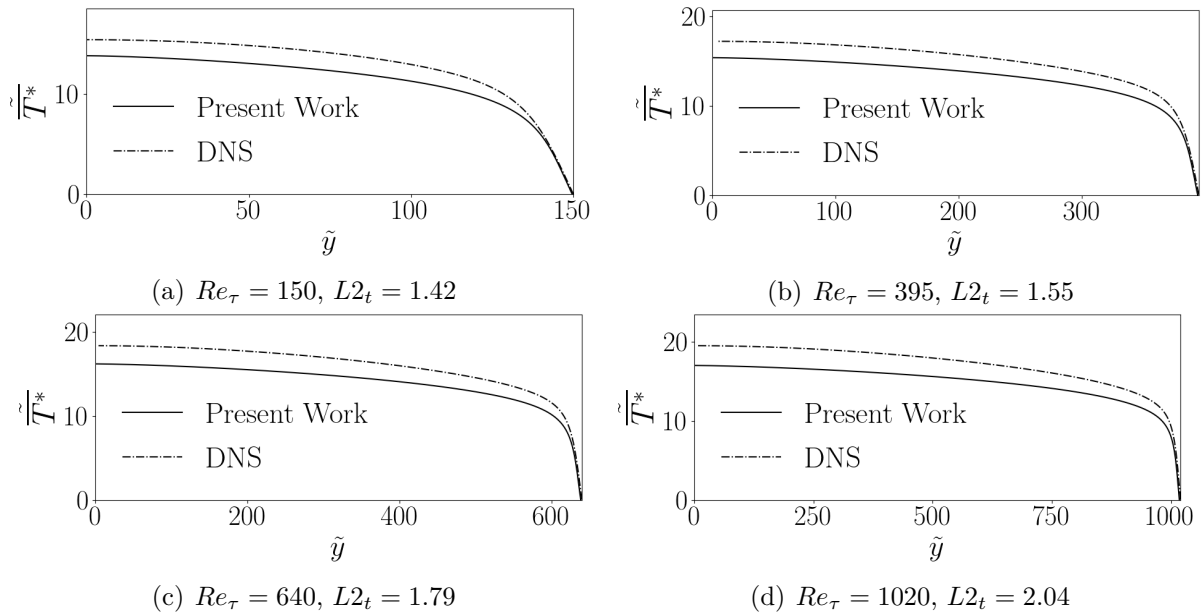


Figura 7 – Distribuição de temperatura para  $Pr_t = 0.71$ ,  $A = 26$  e  $Pr = 0.71$ .

Os primeiros resultados mostram um forte efeito negativo das aproximações empregadas. Percebeu-se que o número de prandtl turbulento teve grande influência no resultado. A grandeza podia ser encontrada no banco de dados do DNS, e observou-se que ela variava em função da distância da parede ((H., 2007) e (H. et al., 1992)) (figure 8). O valor então foi extraído do banco de dados e usado como parâmetro durante uma simulação do método descrito no presente trabalho, obtendo-se uma norma L2 de 0,19 para  $Re_t = 640$ .

Assim foi validado que o problema estava na parametrização do número de prandtl turbulento.

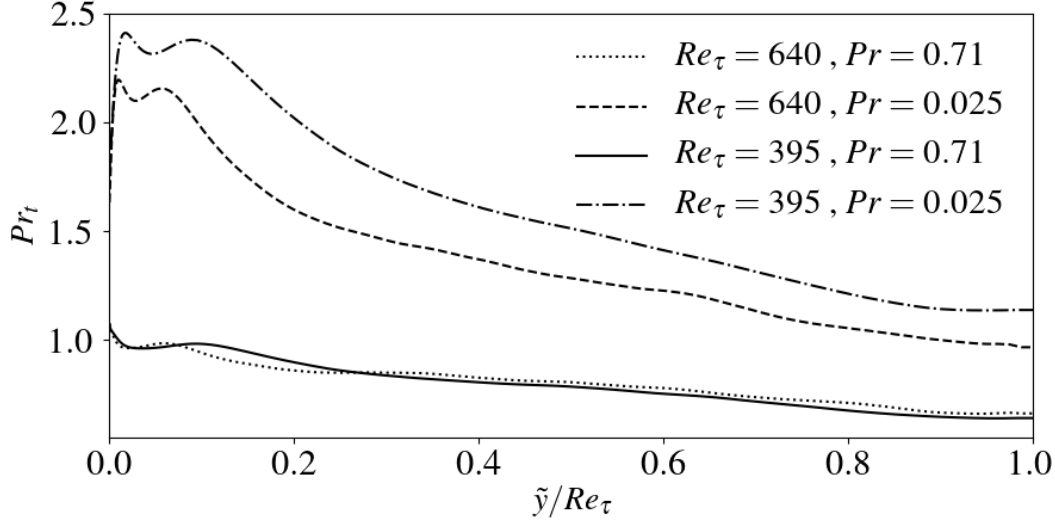


Figura 8 – Número de Prandtl turbulento adquirido do DNS em função de  $\tilde{y}/Re_\tau$ , a distância até a parede no canal.

Assim, iniciou-se o esforço de propor uma parametrização ajustada para o número de prandtl turbulento. Neste sentido tentou-se ajustar um valor para que o erro fosse mínimo, quando comparado com o DNS. Neste sentido, aplicou-se a metodologia de algoritmos baseados em evolução diferencial (PRICE, 2013).

### 3.0.2 O meta modelo adquirido via evolução Diferencial (DE)

Foi utilizado um algoritmo de evolução diferencial (V.; R.; J., 2005) na procura da melhor parametrização possível do Prandtl turbulento. Neste algoritmo, arbitra-se um valor editável pelo algoritmo e uma função objetiva cujo programa tentará minimizar ajustando valores na variável editável. Durante as iterações de simulações, os resultados direcionam o algoritmo, cujas tentativas concentram-se mais e mais ao redor do mínimo encontrado pela função objetiva.

Considerou-se o número de prandtl turbulento como variável livre e a norma L2 como função objetiva. O erro foi calculado comparando a temperatura resultante com os dados DNS ((H., 2007) e (H. et al., 1992)). Obteve-se um número prandtl turbulento de 0.9, para o número de Reynolds  $Re_\tau = 1020$ .

É importante ressaltar que o número de prandtl turbulento foi encontrado como uma constante. Apesar de, nos dados do DNS ele ser apresentado como um vetor de valores em função da distância da parede, optou-se por buscar uma constante representativa, de forma a se simplificar a abordagem.



Pode-se ver adiante a forma como o algoritmo genético evoluiu para encontrar o valor de  $Pr_t$  ideal, ou seja, o valor que resultada no menor erro.

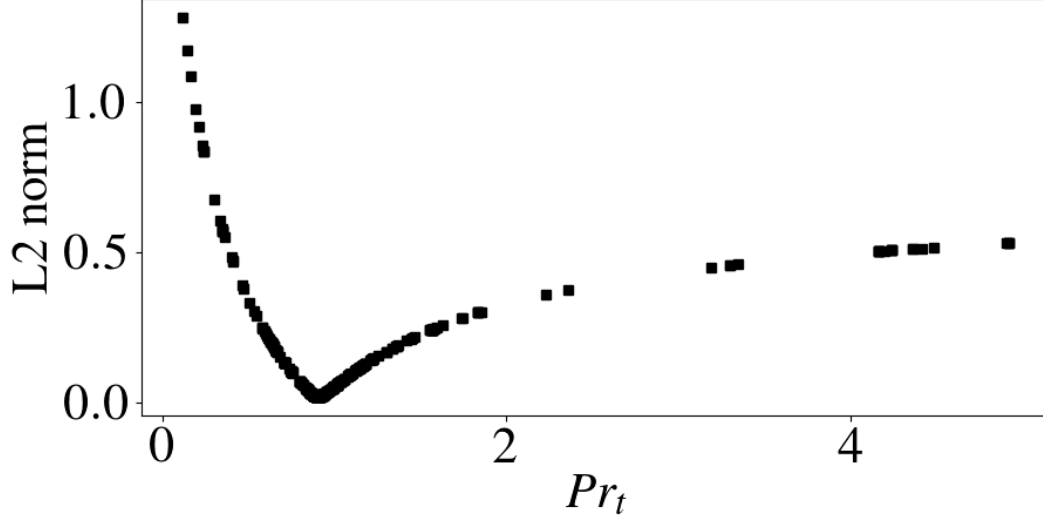


Figura 9 – Iterações de algoritmo genético, com simulações para  $Re_\tau = 1020$ . Convergência em  $Pr_t = 0.9$ .

O número de prandtl turbulento obtido,  $Pr_t = 0.9$  que minimiza o erro no campo da temperatura, foi considerado aos demais números de Reynolds, resultando na figura 10.

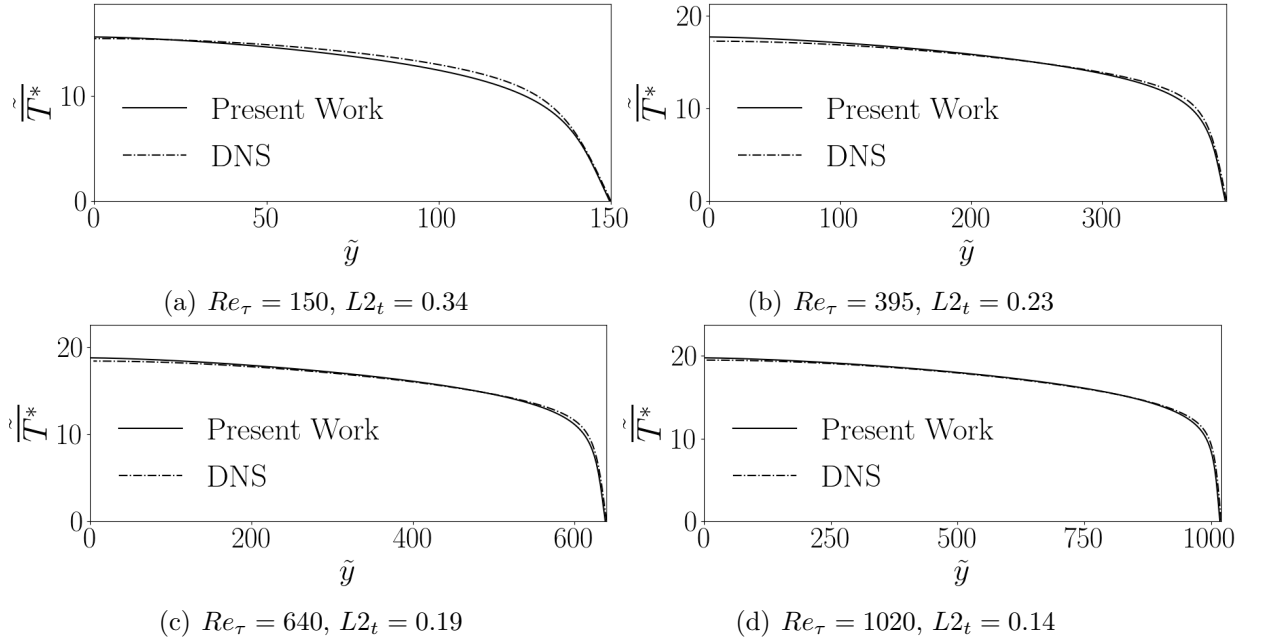


Figura 10 – Perfis de temperatura para simulações com  $Pr_t = 0.9$ ,  $A = 26$  e  $Pr = 0.71$

Apesar de os resultados serem melhores, se comparados aos da figura 7, ainda havia mais espaço para melhoras. O número de Prandtl turbulento varia com o número de Reynolds turbulento, como pode ser visto em fig.8, então um modelo que leve em conta

a grandeza estaria mais próximo do correto. Para se obter a curva de  $Pr_t$  em função do  $Re_\tau$ , o mesmo algoritmo foi usado, obtendo-se um valor de número de Prandtl turbulento ideal para cada número de Reynolds turbulento disponível resultados de DNS ((H., 2007) and (H. et al., 1992)).

Os valores obtidos podem ser conferidos na tabela 1:

Tabela 1 – Números de prandtl turbulentos ideais ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a constante de cebeci  $A = 26$ .

$Re_\tau$	$Pr_t$
150	0.94531
395	0.89531
640	0.89531
1020	0.90000

Realizando um ajuste de curva polinomial, um modelo ajustado para o número de prandtl turbulento em função do número de reynolds foi desenvolvido:

$$Pr_t = -4.5604 * 10^{-10} Re_\tau^3 + 9.5690 * 10^{-7} Re_\tau^2 - 6.1715 * 10^{-4} Re_\tau + 1.0178. \quad (37)$$

Os resultados das simulações foram muito acurados, ainda mais do que as simulações com os números turbulentos de prandtl definidos como valores médios dos dados dns (fig.8). Estes resultados podem ser observados na figura 11:

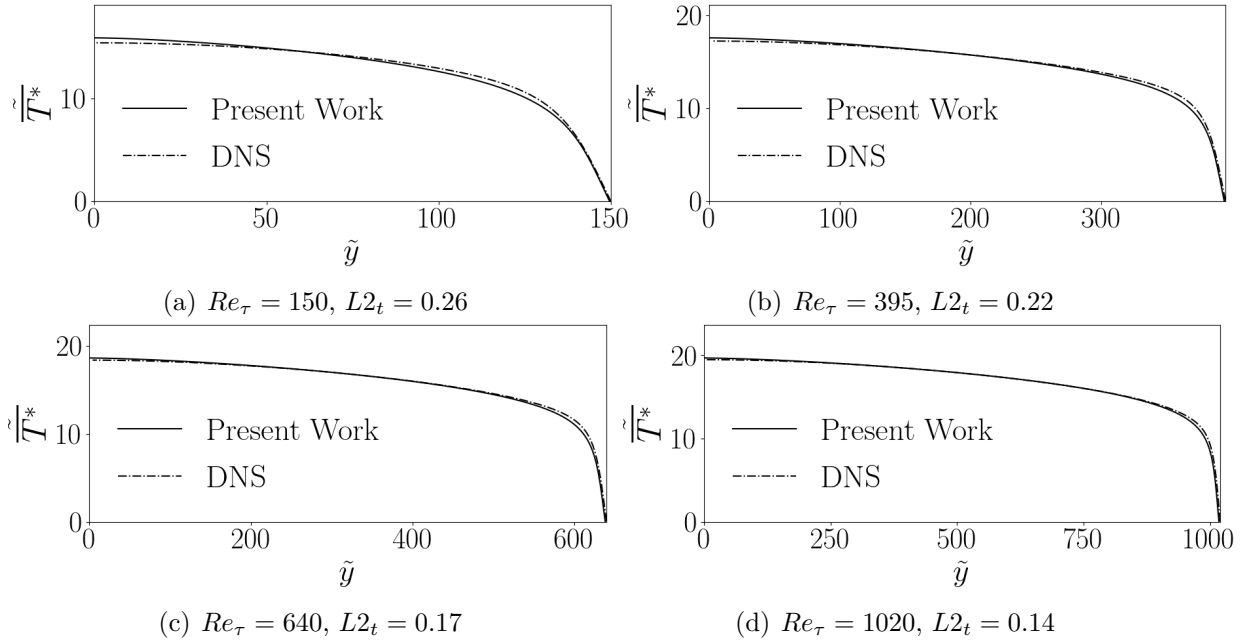


Figura 11 – Resultados de temperatura para  $Pr_\tau(Re_\tau)$ ,  $A = 26$  e  $Pr = 0.71$ .

Outras formas de diminuir os erros foram buscadas. O perfil de velocidade era uma possibilidade, pois desempenha um papel importante no erro do método. Foram realizadas

simulações desenvolvendo apenas esta propriedade física, e também houve erro associado (fig.12).

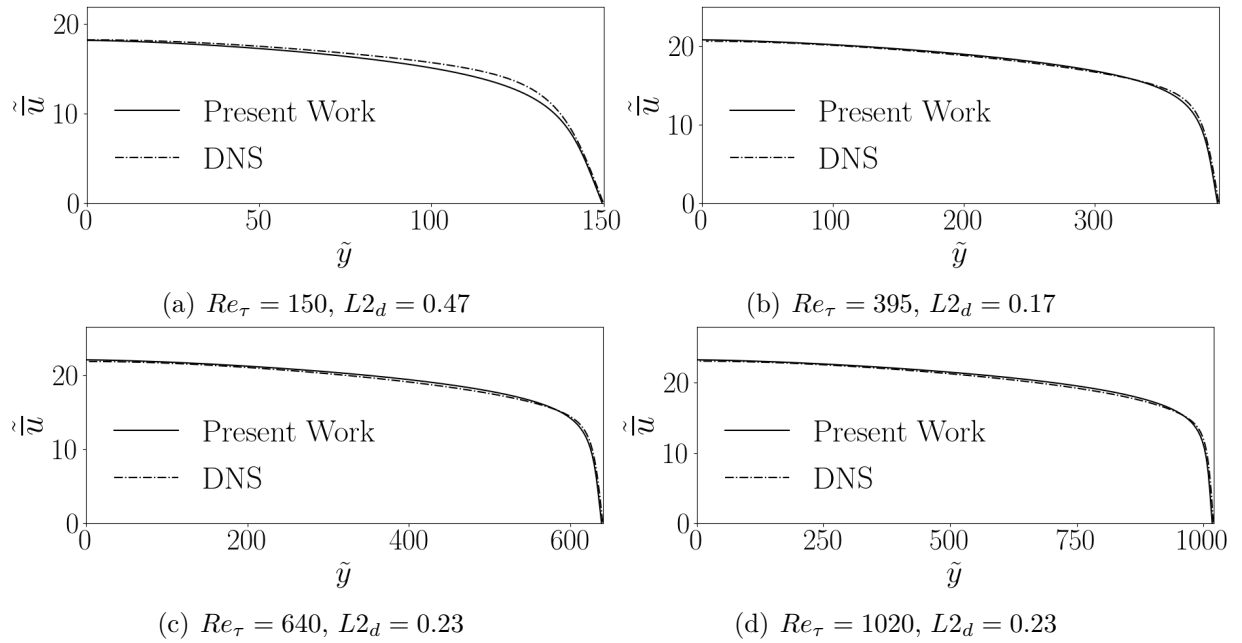


Figura 12 – Resultados de perfil de velocidade para  $A = 26$ .

Um modelo ajustado foi proposto no presente trabalho para a constante de cebeci,  $A$ , com o objetivo de redução no erro. O mesmo algoritmo usado para se achar o número de prandtl turbulento ideal foi utilizado para se encontrar a constante de Cebeci ideal. A velocidade do DNS foi utilizada para o cálculo do erro (norma L2).

Os resultados para a constante de Cebeci ideal são apresentados na tabela 2:

Tabela 2 – Constante de Cebeci ideal ajustada para cada número de Reynolds turbulento.

$Re_\tau$	$A$
150	28.616180
395	25.673782
640	25.001266
1020	25.002136

Foi possível observar que para altos valores de Reynolds, a constante se aproximou no valor canônico encontrado na literatura, enquanto para baixos valores de número de Reynolds turbulento houve grande divergência.

Dessa forma, com os pontos encontrados e listados na tabela, foi possível realizar um encaixe de curva para se encontrar a função que fornece o número de Cebeci ideal a partir do número de Reynolds turbulento.

A partir destes resultados foi possível a criação de um modelo para a constante de Cebeci, que pode ser visto na equação que segue:

$$A(Re_\tau) = \frac{Re_\tau^{0.0451 \cdot \ln(Re_\tau)} * e^{5.2753}}{Re_\tau^{0.6094}}. \quad (38)$$

Assim, a partir destes novos valores de Cebeci ajustados, foi possível o desenvolvimento de simulações de velocidade mais acuradas como se pode ver nos resultados que seguem:

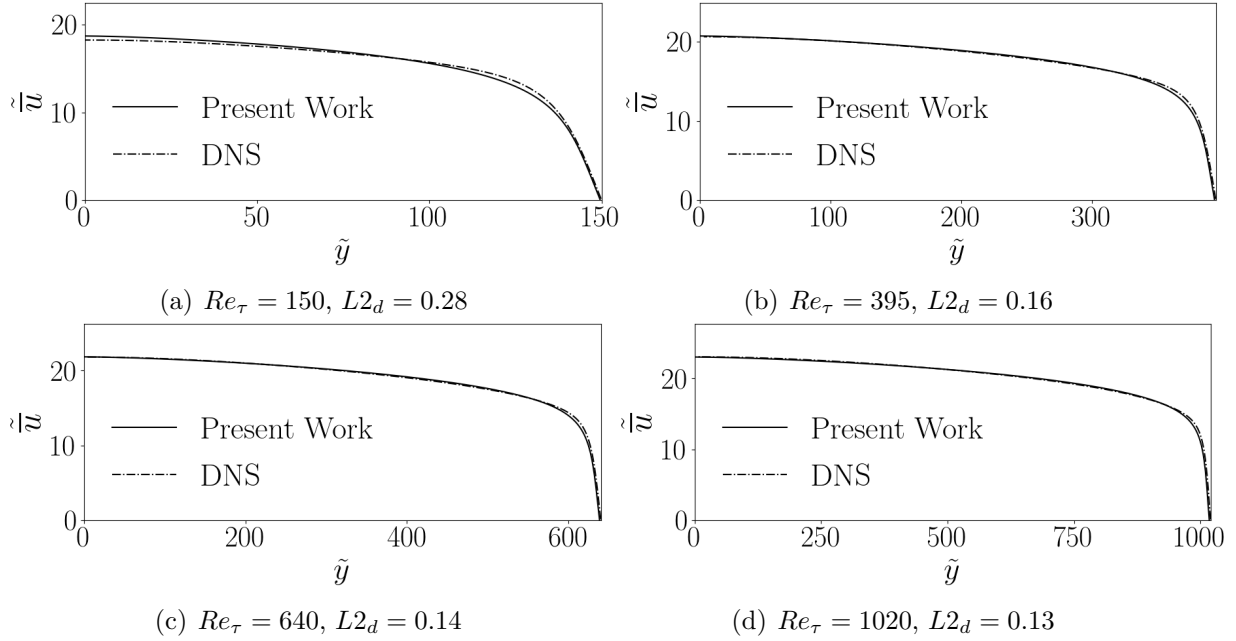


Figura 13 – Resultados em distribuição de velocidade para o modelo de A 38.

Com a função de Cebeci ajustada, um novo grupo de otimizações foi feito, com a mesma metodologia de evolução diferencial, levando em consideração esta nova formulação para a constante de cebeci. Tal estudo resultou em um novo conjunto de número de prandtl turbulento ótimo para cada número de Reynolds turbulento, como segue:

Tabela 3 – Números de prandtl turbulentos ideais ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a função de Cebeci ajustada.

$Re_\tau$	$Pr_t$
150	0.88594
395	0.90156
640	0.91094
1020	0.91406

Assim um novo modelo pode ser proposto para o número de Prandtl turbulento:

$$Pr_t = 4.5290 * 10^{-12} Re_\tau^3 - 5.7395 * 10^{-8} Re_\tau^2 + 9.397 * 10^{-5} Re_\tau + 0.8731. \quad (39)$$

Esse novo modelo pode ser considerado mais acurado, uma vez que ele foi desenvolvido minimizando-se os erros advindos da simulação térmica.

Com esta nova parametrização, uma nova série de simulações foram desenvolvidas para se obter a temperatura no canal:

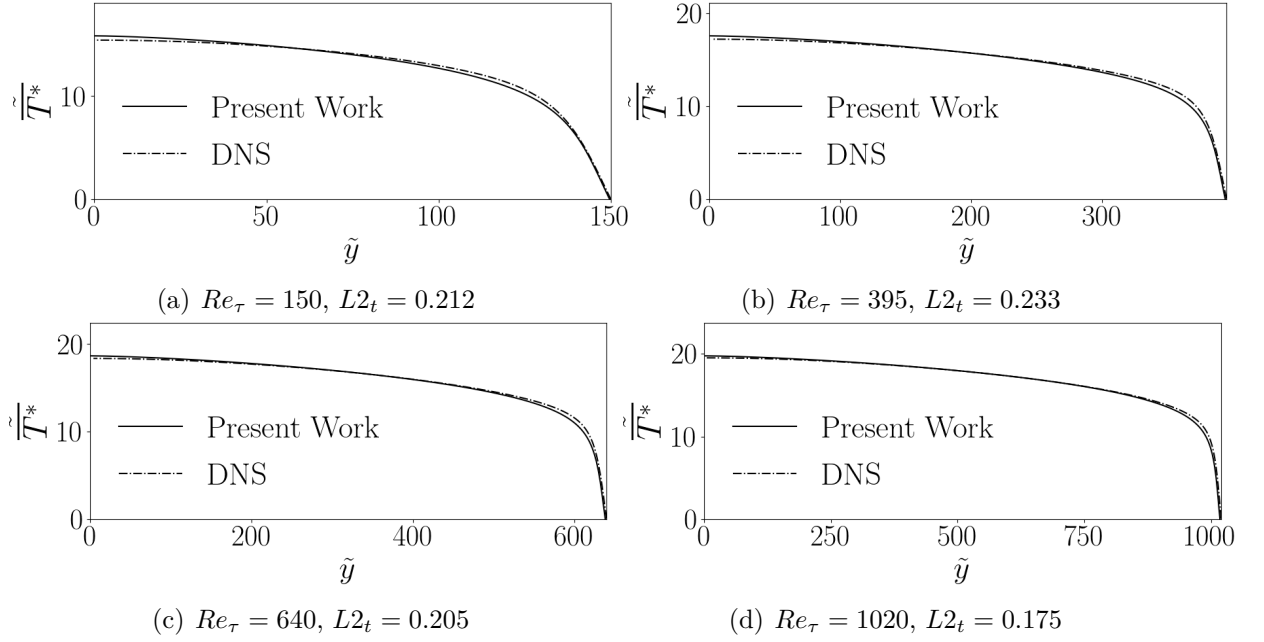


Figura 14 – Resultados térmicos para  $Pr_\tau(Re\tau)$ ,  $A(Re\tau)$  e  $Pr = 0.71$

Os valores de Cebeci que resularam em um erro menor para a velocidade não tiveram o mesmo efeito na temperatura. Do ponto de vista algébrico, a constante de Cebeci aparece duas vezes: sob um contexto térmico e sob um contexto dinâmico (35 e 36).

Então, como última tentativa de melhorar o modelo, foi feita uma nova otimização, dessa vez, considerando a constante de Cebeci de forma separada no contexto da temperatura ( $A_t$ ) e no contexto da velocidade ( $A_d$ ).

Outro método de ajuste a partir de evolução diferencial é o ajuste multiobjetivo. Tal abordagem foi utilizada para considerar mais de uma variável para edição simultaneamente durante a otimização. Este método foi usado para ajustar a função térmica de cebeci e o número de Prandtl turbulento para o menor erro (norma L2) no campo de temperatura resultante para cada amostra DNS. A função cebeci para velocidade foi considerada no desenvolvimento anterior. Novos valores ideais foram encontrados para o número de Prandtl turbulento e a constante de cebeci térmica:

Tabela 4 – Números de prandtl turbulentos ideais e função de cebeci térmica ( $A_t$ ) ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a abordagem multiobjetiva.

$Re_\tau$	$Pr_t$	$A_t$	$A_d$
150	0.72530	37.25510	28.616180
395	0.76821	34.24176	25.673782
640	0.81896	31.27627	25.001266
1020	0.86179	28.73726	25.002136

Com tais dados numéricos, novos modelos foram propostos para o número de prandtl turbulento e a função de cebeci termal:

$$A_t = \frac{Re_\tau^{0.0395 \ln(Re_\tau)^2 - 0.7588 \ln(Re_\tau) + 4.6637}}{e^{5.6703}}, \quad (40)$$

$$Pr_t = -2.4892 * 10^{-10} Re_\tau^3 + 3.6036 * 10^{-7} Re_\tau^2 + 3.7921 * 10^{-5} Re_\tau + 0.7123. \quad (41)$$

Novas simulações foram feitas usando os novos modelos propostos:

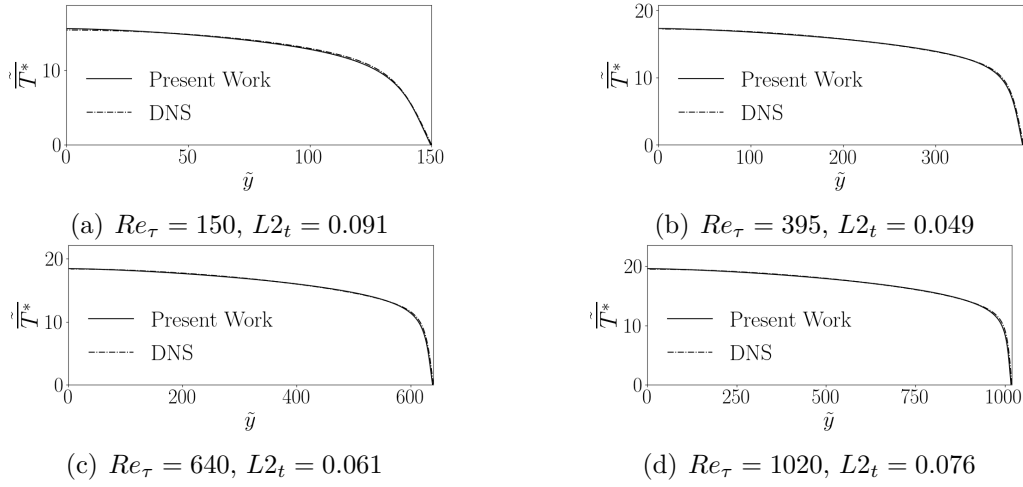


Figura 15 – Results of temperature simulations for  $Pr_\tau(Re_\tau)$ ,  $A_d(Re_\tau)$ ,  $A_t(Re_\tau)$  and  $Pr = 0.71$ , with multi-objective adjustment.

Estes foram os melhores resultados obtidos.

---

## Simulações no MFsim

Tendo-se estes novo modelos sido propostos, novas simulações foram feitas no MFsim, com o objetivo de validar se estes modelos tem utilidade em softwares comerciais de simulação fluidodinâmica.





---

## Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido um manual para guiar os alunos dos cursos de graduação no aprendizado de mecânica dos fluidos. A prática e o ensino ativo é estimulado com casos canônicos que introduzem o aluno aos temas centrais da matéria. O software utilizado foi o MFGui, que é a interface gráfica do MFSim, programa de computação fluido-dinâmica desenvolvido nos últimos 10 anos na Universidade Federal de Uberlândia. Espera-se que, com este guia, o ensino de mecânica dos fluidos torne-se mais acessível e instrutivo.

### 5.1 Principais Contribuições

A linguagem tem como objetivo ser convidativa e simples, com capítulos em formato de receita, concebido em passos claros e objetivos, com explicações teóricas para justificar cada instrução.



---

## Referências

A., A. L.; N., S. A. Theoretical study of fully develop turbulent flow in a flat channel, using prandtl's mixing length model. 2015.

ARAGO, F. Astronomie populaire. 2012.

BERNOULLI, D. Theoria nova de motu aquarum per canales quoscunque fluentium. **Commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 2, p. 111–125, 1727. Disponível em: <<https://cir.nii.ac.jp/crid/1570009750104671360>>.

CENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. First edition. [S.l.]: McGraw-Hill series in mechanical engineering, 2006.

DIJKSTERHUIS, E. **Archimedes**. Princeton University Press, 2014. (Princeton Legacy Library). ISBN 9781400858613. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=Vvj\\\_AwAAQBAJ](https://books.google.com.br/books?id=Vvj\_AwAAQBAJ)>.

H., K. Direct numerical simulation data base for turbulent channel flow with heat transfer. <<http://www.rs.tus.ac.jp/t2lab/db/index.html>>, Laboratory of Thermo-fluid dynamics, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, Noda-shi, Chiba-ken, Japan, 2007.

H., K.; H., A.; M., Y. Dns of turbulent heat transfer in channel flow with respect to reynolds and prandtl number effects. **Elsevier**, Tokio, Japan, 1999.

H., K. et al. Establishment of the direct numerical simulation data bases of turbulent transport phenomena. <[http://thtlab.jp/DNS/dns\\_database.html](http://thtlab.jp/DNS/dns_database.html)>, Co-operative Research No. 02302043, Bunkyo-ku, Tokyo 113, 1992.

HILL, D. **A History of Engineering in Classical and Medieval Times**. Routledge, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.4324/9781315800110>>.

INCROPERA FREANK, P. D. D. P. 3rd edition. ed. [S.l.: s.n.], 2007.

KAWAMURA, H.; ABE, H.; SHINGAI, k. Dns of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions. **Turbulence, Heat and Mass Transfer 3, (Proc. of the 3rd International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer)**, 2000.

- NETO, A. da S. **Turbulência nos fluidos, textbook of the post graduate mechanical engineering course of federal university of Uberlândia**. [S.l.]: Uberlândia, Brazil, 2018.
- O., B.; HASAN. Turbulent prandtl number and its use in prediction of heat transfer coefficient for liquids. **Nahrain University, College of engineering Journal (NUCEJ) Vol.10, No.1**, 2007.
- POISEUILLE, J. L. M. **Recherches experimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de tres-petits diametres**. 1846. Memoires presentes par divers savants a l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France.
- PRICE, K. V. Differential evolution. In: \_\_\_\_\_. **Handbook of Optimization: From Classical to Modern Approach**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. p. 187–214. ISBN 978-3-642-30504-7. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-642-30504-7\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-30504-7_8)>.
- RAY, B.; BHASKARAN, R. **Integrating Simulation into the Engineering Curriculum: A Case Study**. 2013. International Journal of Mechanical Engineering Education, 41(3):269-280.
- RIBEIRO, F. J. O.; NETO, A. da S. Thermal analysis of turbulent poiseuille flows. **INTERNATIONAL JOURNAL OF EMERGING TECHNOLOGY AND ADVANCED ENGINEERING**, v. 10, 2020. ISSN 22502459. Disponível em: <[https://ijetae.com/files/Volume10Issue3/IJETAE\\_1003\\_01.pdf](https://ijetae.com/files/Volume10Issue3/IJETAE_1003_01.pdf)>.
- SERT, C.; NAKIBOGLU, G. **Use Of Computational Fluid Dynamics (Cfd) In Teaching Fluid Mechanics Paper presented**. 2007. Annual Conference & Exposition, Honolulu, Hawaii. 10.18260/1-2-2351.
- SOMMERER, J.; OTT, E.; Tél, T. **Modeling Two-Dimensional Fluid Flows with Chaos Theory**. 1997. Johns Hopkins APL Technical Digest, volume 18, number 2.
- V., P. K.; R., S. M.; J., L. A. Differential evolution, a practical approach to global optimization. 2005.