

Análise térmica de escoamentos de Poiseuille plano: comparação de abordagem semi contínua com a abordagem computacional (DNS)

Felipe J. O. Ribeiro

27 de junho de 2023



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo físico
- 3 Modelo matemático diferencial
- 4 Modelo numérico
- 5 Resultados
- 6 Conclusão
- 7 Agradecimentos



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo físico
- 3 Modelo matemático diferencial
- 4 Modelo numérico
- 5 Resultados
- 6 Conclusão
- 7 Agradecimentos



Motivação

- A necessidade de se compreender o comportamento de escoamentos turbulentos é cada vez mais presente em um contexto de busca por eficiência energética.
- A turbulência é um fenômeno complexo e não linear, que envolve uma ampla faixa de escalas de comprimento e tempo. Sendo um tema muito rico do ponto de vista acadêmico.
- A turbulência é um fenômeno presente em muitas aplicações práticas, como por exemplo, em escoamentos de dutos, escoamentos em torno de corpos, escoamentos em turbinas, etc.



Figura 1: Avião em voo, movimentando o ar atmosférico.

Aspectos históricos

- Arquimedes que desenvolveu as leis da flutuação.
- Escola alexandrina onde se desenvolveram bombas hidráulicas sendo também estudadas diversas aplicações de escoamentos confinados.
- Estudiosos islâmicos que desenvolveram pesquisas no campo da hidro-estática.
- Benedetto Castelli, Evangelista Torricelli e Blaise Pascal formalizaram conceitos com seus estudos.
- Isaac Newton, onde ele descreve fluidos incompressíveis e as forças viscosas que afetam seu movimento a baixos números de Reynolds.
- Daniel Bernoulli. Ele estudou a transformação de energia da velocidade dos fluidos em pressão

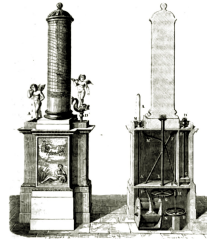


Figura 2: Relógio de água de Ctesibius, visualização criada pelo arquiteto francês Claude Perrault

Aspectos históricos

Tais estudos acadêmicos culminaram com os estudos de Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes, que desenvolveram as equações de Navier-Stokes:

$$\rho \vec{g} - \nabla \vec{p} + \eta \cdot \nabla^2 \vec{u} = \rho \cdot \left(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \quad (1)$$

Sem solução analítica geral, as equações de Navier-Stokes são resolvidas numericamente para casos específicos. É possível, também, a partir de simplificações e ajustes, desconsiderar alguns termos de forma a se conseguir soluções contínuas para casos suficientemente simples.

Um exemplo de sistema simplificado é o escoamento de Poiseuille. Descrito com a equação que segue:

$$u(y) = \frac{G}{2\mu} y(h - y). \quad (2)$$

Onde G é um gradiente de pressão constante no sentido da corrente ($G = -\frac{dp}{dx}$), e μ é o coeficiente de viscosidade. Para casos não laminares, ou seja, em que o fluido se movimenta não só na direção principal, essa equação já se distancia da realidade.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo físico**
- 3 Modelo matemático diferencial
- 4 Modelo numérico
- 5 Resultados
- 6 Conclusão
- 7 Agradecimentos



Escoamento de Poiseuille plano

- Um escoamento de canal, com somente uma dimensão finita no eixo y .
- Condições de contorno de duas placas planas infinitas em um regime de fluxo térmico constante.
- Gradiente de pressão constante no eixo x .
- Auto similaridade dinâmica e térmica no eixo z .
- Escoamento incompressível, composto por fluido Newtoniano e em regime turbulento.

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

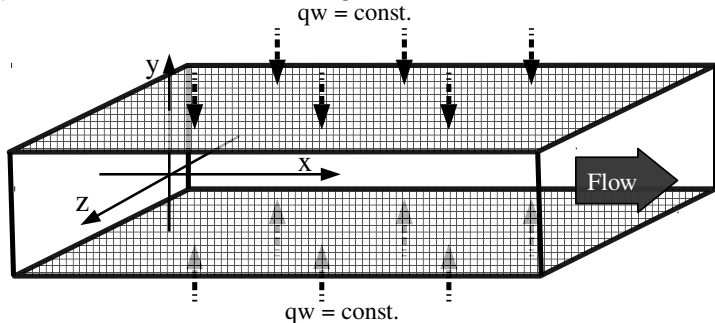


Figura 3: Definição geométrica e condições de contorno.

Perfil térmico e dinâmico esperado

- A velocidade média é constante em x e no tempo.
- A temperatura média aumenta com x e com o tempo.

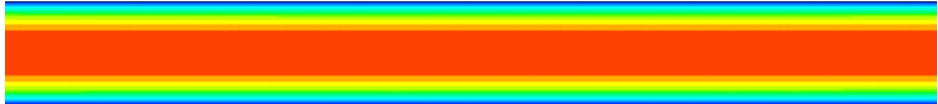


Figura 4: Campo de velocidade média no canal de Poiseuille. O perfil se mantém constante na direção do escoamento.

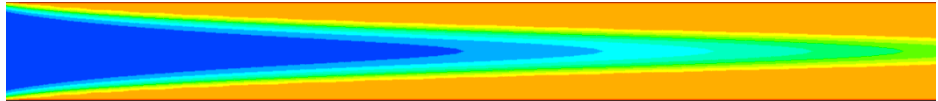


Figura 5: Campo de temperatura média no canal de Poiseuille. O perfil de temperatura no canal aumenta linearmente na direção do escoamento.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo físico
- 3 Modelo matemático diferencial**
- 4 Modelo numérico
- 5 Resultados
- 6 Conclusão
- 7 Agradecimentos



Equações do movimento

A equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes para a velocidade no eixo de interesse são importantes nesse estágio.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Uma vez que tem-se um contexto convectivo, o perfil de velocidade é necessário para a resolução das equações.

Equação do balanço da energia térmica

Foi utilizada a equação da energia térmica.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) + \frac{\partial}{\partial z}(wT) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (5)$$

Também foi realizado um balanço de energia térmica a título de adimensionalização:

$$q_{conv.} = \dot{m} C_p \Delta T_m. \quad (6)$$

Tratamento estatístico das equações

Para se prosseguir com as simplificações das equações diferenciais foi necessário se utilizar os conceitos de valores médios. Tal consideração implica no uso do modelo RANS. (Reynolds Averaged Navier Stokes)

$$\text{Simplificação} = \begin{cases} \bar{f}(x) = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} f(x, t) dt. \\ f(x, t) = \bar{f}(x) + f'(x, t). \\ \overline{f'(x, t)} = 0. \\ \overline{\overline{f(x)}} = \overline{f(x)}. \\ \overline{f'(x, t) f(x)} = 0. \\ \overline{f'(x, t) g'(x, t)} \neq 0. \\ \overline{g(x) f(x)} = \overline{g(x)} \overline{f(x)}. \end{cases}$$

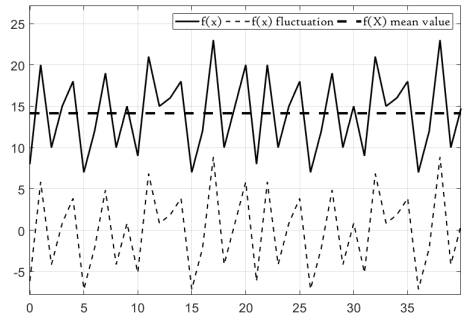


Figura 6: Representação gráfica do conceito.

Simplificando a velocidade para valores médios

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v} + u'\bar{v} + \bar{u}v' + u'v')}{\partial y} + \\ & \frac{\partial(\bar{u}\bar{w} + u'\bar{w} + \bar{u}w' + u'w')}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{u} + u')}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Simplificando a equação da continuidade para valores médios

Desenvolvendo a equação da Continuidade, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\overline{u'} + \overline{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v'} + \overline{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w'} + \overline{w})}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

Assim, como $\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}$ e $\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}$ são iguais a zero, por definição do comportamento médio dos escoamentos, necessariamente $\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}$ deve ser igual a zero também, o que demonstra como o sistema resultante é unidimensional.

Simplificando a temperatura para valores médios

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{uT}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{vT}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right). \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{\bar{T} + T'})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{(\bar{u} + u')(\bar{T} + T')}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{(\bar{v} + v')(\bar{T} + T')}) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial(\overline{\bar{T} + T'})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial(\overline{\bar{T} + T'})}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{T'u'}) + \bar{u} \bar{T} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{T'v'}) + \bar{v} \bar{T} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right). \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{T'u'}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} \bar{T}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{T'v'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v} \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right). \quad (17)$$

Balanço de energia

Apesar de já estar em valores médios, a temperatura no domínio não reduz a um problema unidimensional:

$$q_{conv.} = \dot{m} C_p \Delta T_m. \quad (18)$$

$$2q_w b \Delta x = \dot{m} C_p \Delta T_m. \quad (19)$$

Sendo b a profundidade do canal e T_m a temperatura média em uma secção transversal. Então, substituindo $\dot{m} = u_m 2Rb\rho$, e considerando $\Delta T_m = \frac{\partial(\bar{T}_m)}{\partial x} \Delta x$:

$$2q_w b \Delta x = u_m 2Rb\rho C_p \frac{\partial(\bar{T}_m)}{\partial x} \Delta x. \quad (20)$$

$$q_w = u_m R\rho C_p \frac{\partial(\bar{T}_m)}{\partial x}. \quad (21)$$

$$\frac{\partial(\bar{T}_m)}{\partial x} = \frac{q_w}{u_m R\rho C_p}. \quad (22)$$

Análise da temperatura de parede

Para esta análise empregou-se um estudo do fluxo térmico convectivo, que pode ser expresso matematicamente por:

$$q_w = hA (T_w(x) - \bar{T}_m(x)) . \quad (23)$$

Nota-se que h é constante, pois tem-se um escoamento completamente desenvolvido. Assim é possível escrever:

$$T_w(x) - \bar{T}_m(x) = \frac{q_w}{hA} . \quad (24)$$

$$\frac{dT_w(x)}{dx} - \frac{d\bar{T}_m(x)}{dx} = \frac{d\frac{q_w}{hA}}{dx} . \quad (25)$$

$$\frac{dT_w(x)}{dx} = \frac{d\bar{T}_m(x)}{dx} = C_{tt} . \quad (26)$$

Diferença de temperatura

Tem-se um gradiente linear de temperatura nas paredes no sentido do eixo x . Para que se obtenha um fluxo térmico constante no canal.

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = ctt. \quad (27)$$

Dessa forma, para se ter um sistema unidimensional representativo, se parametrizou a variável em função da temperatura na parede, ou seja:

$$\bar{T}^*(y) = \bar{T}(x, y) - \bar{T}_w(x). \quad (28)$$

$$\bar{T}(x, y) = \bar{T}^*(y) + \bar{T}_w(x). \quad (29)$$

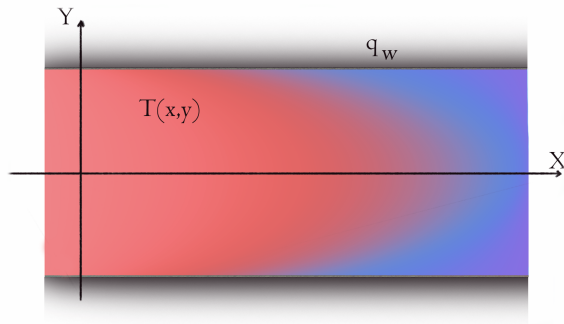


Figura 7: Representação gráfica do domínio térmico do sistema.

Desenvolvendo a diferença de temperatura na equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\overline{T^* + T_w})' u' \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left((\overline{T^* + T_w}) \bar{u} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left((\overline{T^* + T_w})' v' \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\overline{T^* + T_w}) \bar{v} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T_w' u'}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T^{*'} u'}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \overline{T^*}) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \overline{T_w}) + \\ \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T^{*'} v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T_w' v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \overline{T^*}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v} \overline{T_w}) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Equação dinâmica simplificada

Para a velocidade, devem ser feitas as considerações de que é um sistema em regime permanente e unidimensional. Assim, na equação da velocidade, teremos as seguintes simplificações:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} \right) \quad (32)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \quad (33)$$

Equação térmica simplificada

Para a temperatura, foi considerado um regime permanente, derivadas nulas quanto à temperatura e diferença de temperatura, além de que considerou-se a temperatura de parede estável, ou seja, sem flutuações.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T'_w u'}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T'^* u'}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u T^*}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u T_w}) + \\ \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T'^* v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{T'_w v'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v T^*}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v T_w}) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial(\overline{T^* + T_w})}{\partial y} \right). \end{aligned}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial y} - (\overline{T'^* v'}) \right) = \overline{u} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T_w}). \quad (34)$$

Hipótese de Boussinesq

O fluxo turbulento ($\overline{T^{*'}v'}$) pode ser desenvolvido segundo a hipótese de Boussinesq, que postula:

$$-\overline{(u'v')} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \implies -\overline{(T^{*'}v')} = \alpha_t \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial y}. \quad (35)$$

Assim, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial y} + \alpha_t \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{T}_w). \quad (36)$$

Comprimento de mistura de Prandtl

Para modelar a difusidade térmica turbulenta (α_t) uma nova variável deve ser introduzida, o número de Prandtl turbulento, como segue:

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t}. \quad (37)$$

O valor do número de Prandtl turbulento de $Pr_t = 0.71$ tem sido utilizado na literatura, como visto em *Turbulence in Fluids* (M. Lesieur). Para modelar ν_τ tem-se o modelo do comprimento de mistura de Prandtl:

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (38)$$

Substituindo o comprimento de mistura na equação principal

O comprimento de mistura introduz um módulo no modelo diferencial e o parâmetro do número de Prandtl turbulento.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\alpha + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T_w}) . \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\alpha + \frac{l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|}{Pr_t} \right) \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T_w}) . \quad (40)$$

Para valores positivos de y , a primeira derivada da velocidade sempre será negativa, visto que pelos princípios de Dirichlet e Neumann, tem-se uma velocidade que diminui com o aumento de y . Assim, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\alpha - \frac{l_m^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}{Pr_t} \right) \frac{\partial \overline{T^*}}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{T_w}) . \quad (41)$$

Um modelo para o comprimento de mistura de Prandtl

Um modelo para l_m deve ser estabelecido. Para tal, se observou os estudos experimentais de Nikuradse, com o qual modelou-se esse parâmetro como segue.

$$L\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left(\frac{y}{R}\right)^2 - 0.06 \left(\frac{y}{R}\right)^4. \quad (42)$$

Para enriquecer ainda mais o modelo, Cebeci e Bradshaw acrescentaram a função de amortecimento de Van Driest:

$$L\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{l_m}{R} = \left(\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left(\frac{y}{R}\right)^2 - 0.06 \left(\frac{y}{R}\right)^4 \right) \left\{ 1 - e^{[(\tilde{y}-1)\frac{Re_\tau}{26}]} \right\}. \quad (43)$$

Assim, tem-se o comprimento de mistura definido por:

$$l_m = LR. \quad (44)$$

Sendo L uma função em y . É importante notar que neste momento foi introduzida a constante de Cebeci, que é o número 26 que divide o Re_τ .

Substituindo o comprimento de mistura nas equações

A função $L(\frac{y}{R})$ já está Adimensionalizada. Mas ela pode ser introduzida na equação da temperatura como segue:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\alpha - \frac{L^2 R^2}{Pr_t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial (\bar{T}_w)}{\partial x}. \quad (45)$$

Desenvolvendo a equação dinâmica

$$\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dy = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - L^2 R^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right) dy \quad (46)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \int 1 dy = \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - L^2 R^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right) dy \quad (47)$$

$$y \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - L^2 R^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (48)$$

$$L^2 R^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + y \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \quad (49)$$

Observando-se a conformação em forma de polinômio de segundo grau, retirou-se as raízes, onde só uma delas teve consistência física.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{2y \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}{\nu + \sqrt{\nu^2 + 4y \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} L^2 R^2}} \quad (50)$$

Adimensionalização

Para se comparar mais facilmente os modelos à literatura, adimensionalizou-se as equações segundo coordenadas de parede. Foi considerado: $\tilde{y} = \frac{y \cdot Re_\tau}{R}$, $\tilde{u} = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$, $\tilde{T} = \frac{\bar{T}}{T_\tau}$, $Re_\tau = \frac{u_\tau R}{\nu}$, $Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t}$, $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ e $T_\tau = \frac{q_w}{\rho C_p u_\tau}$, $\frac{\partial(T_m)}{\partial x} = \frac{q_w}{u_m R \rho C_p}$, $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -\frac{u_\tau^2 \rho}{R}$.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\left(\frac{Re_\tau}{Pr} - \frac{L^2 Re_\tau^3}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_m}. \quad (51)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{2\tilde{y} \frac{1}{Re_\tau}}{1 + \sqrt{1 + 4L^2 Re_\tau^2 \tilde{y}}}. \quad (52)$$

Dessa forma, tem-se a primeira derivada da velocidade de forma exata.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo físico
- 3 Modelo matemático diferencial
- 4 Modelo numérico**
- 5 Resultados
- 6 Conclusão
- 7 Agradecimentos



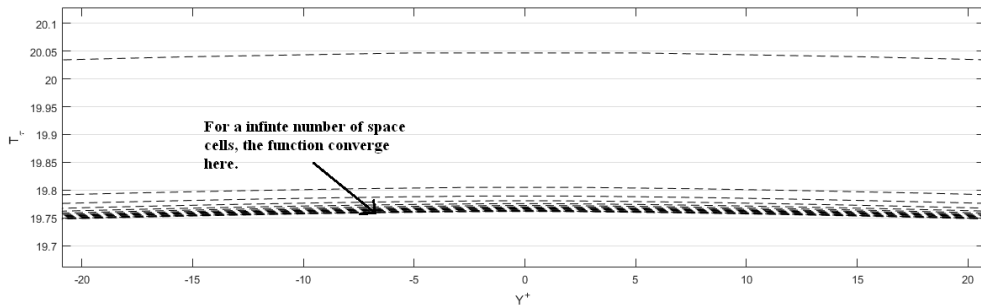


Figura 9: Convergência e independência de malha.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo físico
- 3 Modelo matemático diferencial
- 4 Modelo numérico
- 5 Resultados**
- 6 Conclusão
- 7 Agradecimentos



Resultados para: $Pr_t = 0.71$, $A = 26$

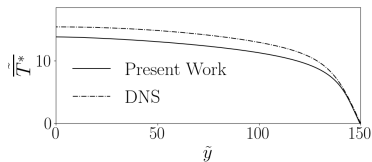


Figura 10: $Re_\tau = 150$, $L2_t = 1.42$

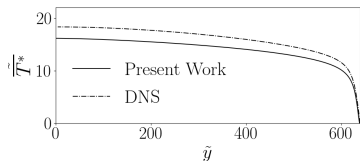


Figura 12: $Re_\tau = 640$, $L2_t = 1.79$

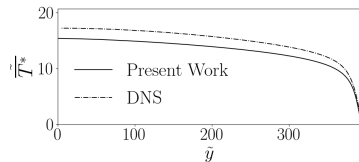


Figura 11: $Re_\tau = 395$, $L2_t = 1.55$

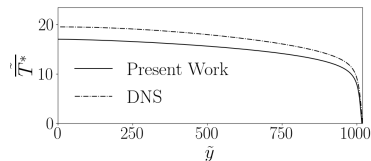


Figura 13: $Re_\tau = 1020$, $L2_t = 2.04$

Figura 14: Distribuição de temperatura para $Pr_t = 0.71$ e $A = 26$.

Resultados para: $Pr_t = 0.9$, $A = 26$

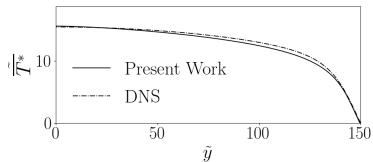


Figura 17: $Re_\tau = 150$, $L2_t = 0.34$

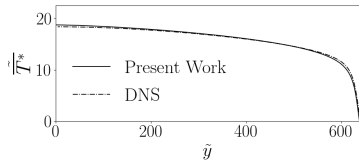


Figura 19: $Re_\tau = 640$, $L2_t = 0.19$

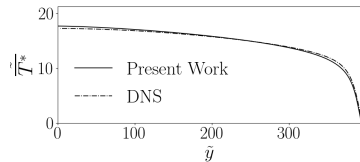


Figura 18: $Re_\tau = 395$, $L2_t = 0.23$

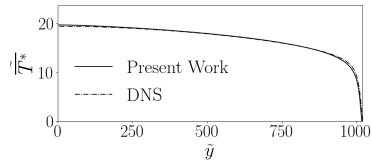


Figura 20: $Re_\tau = 1020$, $L2_t = 0.14$

Figura 21: Perfis de temperatura para simulações com $Pr_t = 0.9$ e $A = 26$.

Algoritmo de otimização

Foi observado que o número de Prandtl turbulento varia com o número de Reynolds, logo, o mesmo processo foi feito para cada valor de Reynolds.

Os valores obtidos podem ser conferidos na tabela 1:

Tabela 1: Números de prandtl turbulentos ideais ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a constante de cebeci $A = 26$.

Re_τ	Pr_t
150	0.94531
395	0.89531
640	0.89531
1020	0.90000

Ajuste dos valores obtidos

- Executando um ajuste de curva polinomial, obteve-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} Pr_t = & -4.5604 * 10^{-10} Re_\tau^3 + 9.5690 * 10^{-7} Re_\tau^2 \\ & -6.1715 * 10^{-4} Re_\tau + 1.0178. \end{aligned} \quad (53)$$

Assim, desenvolveu-se um modelo ajustado para o número de Prandtl turbulento em função do número de Reynolds turbulento.

Resultados para: $Pr_t(Re_\tau)$, $A = 26$

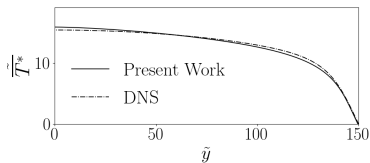


Figura 22: $Re_\tau = 150$, $L2_t = 0.26$

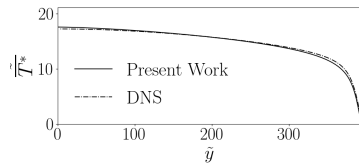


Figura 23: $Re_\tau = 395$, $L2_t = 0.22$

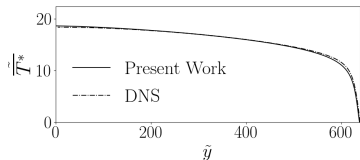


Figura 24: $Re_\tau = 640$, $L2_t = 0.17$

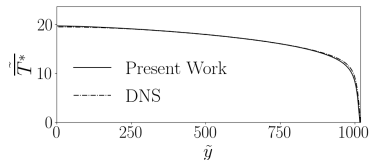


Figura 25: $Re_\tau = 1020$, $L2_t = 0.14$

Figura 26: Resultados de temperatura para $Pr_t(Re_\tau)$, $A = 26$ e $Pr = 0.71$.

Análise sobre o perfil dinâmico

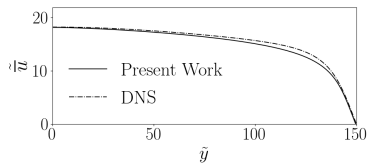


Figura 27: $Re_\tau = 150$, $L2_d = 0.47$

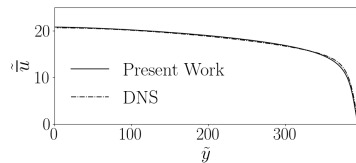


Figura 28: $Re_\tau = 395$, $L2_d = 0.17$

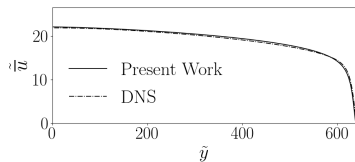


Figura 29: $Re_\tau = 640$, $L2_d = 0.23$

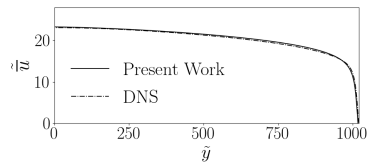


Figura 30: $Re_\tau = 1020$, $L2_d = 0.23$

Figura 31: Resultados de perfil de velocidade para $A = 26$.

Ajuste do valor de Cebeci

O valor da constante de Cebeci foi ajustada da mesma forma como foi feito com o Prandtl turbulento. A partir dos pontos resultantes do algoritmo de otimização, se desenvolveu o modelo ajustado para o valor de Cebeci. Como segue:

$$A = \frac{Re_{\tau}^{0.0451 * \ln(Re_{\tau})} * e^{5.2753}}{Re_{\tau}^{0.6094}} \quad (54)$$

Tabela 2: Constante de Cebeci ideal ajustada para cada número de Reynolds turbulento.

Re_{τ}	A
150	28.616180
395	25.673782
640	25.001266
1020	25.002136

Resultados para: $A(Re_\tau)$

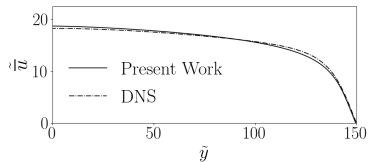


Figura 32: $Re_\tau = 150$, $L2_d = 0.28$

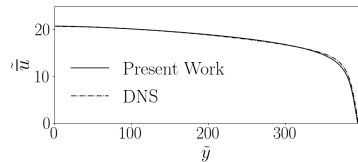


Figura 33: $Re_\tau = 395$, $L2_d = 0.16$

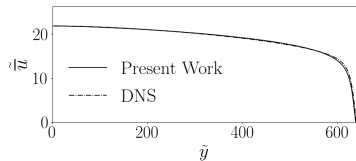


Figura 34: $Re_\tau = 640$, $L2_d = 0.14$

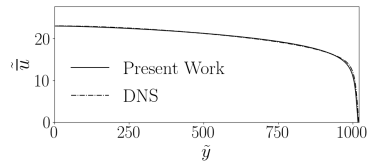


Figura 35: $Re_\tau = 1020$, $L2_d = 0.13$

Figura 36: Resultados em distribuição de velocidade para o modelo de A.

Análise sobre o perfil dinâmico

- Com o modelo de Cebeci ajustado novos valores de Prandtl turbulento foram calculados com o algoritmo genético.
- A partir dos novos valores numéricos, um novo modelo foi desenvolvido:

$$Pr_t = 4.5290 * 10^{-12} Re_\tau^3 - 5.7395 * 10^{-8} Re_\tau^2 + 9.397 * 10^{-5} Re_\tau + 0.8731. \quad (55)$$

Tabela 3: Números de prandtl turbulentos ideais ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a função de Cebeci ajustada.

Re_τ	Pr_t
150	0.88594
395	0.90156
640	0.91094
1020	0.91406

Resultados para: $Pr_\tau(Re_\tau)$, $A(Re_\tau)$

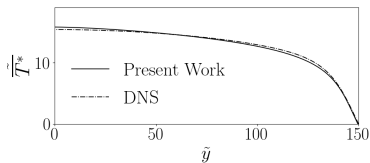


Figura 37: $Re_\tau = 150$, $L2_t = 0.212$

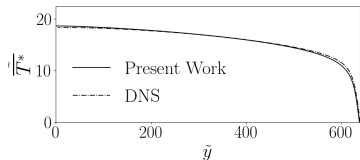


Figura 39: $Re_\tau = 640$, $L2_t = 0.205$

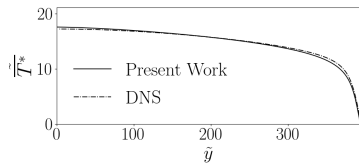


Figura 38: $Re_\tau = 395$, $L2_t = 0.233$

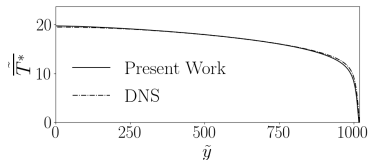


Figura 40: $Re_\tau = 1020$, $L2_t = 0.175$

Figura 41: Resultados térmicos para $Pr_\tau(Re_\tau)$, $A(Re_\tau)$ e $Pr = 0.71$

Ajuste multiobjetivo

- Um novo modelo foi criado considerando o Prandtl turbulento, e a constante de cebeci para os casos térmico e dinâmico como variáveis editáveis.

$$A_t = \frac{Re_\tau^{0.0395 \ln(Re_\tau)^2 - 0.7588 \ln(Re_\tau) + 4.6637}}{e^{5.6703}}, \quad (56)$$

$$Pr_t = -2.4892 * 10^{-10} Re_\tau^3 + 3.6036 * 10^{-7} Re_\tau^2 + 3.7921 * 10^{-5} Re_\tau + 0.7123. \quad (57)$$

Tabela 4: Números de prandtl turbulentos ideais e função de cebeci térmica (A_t) ajustados para cada número de Reynolds turbulento, com a abordagem multiobjetiva.

Re_τ	Pr_t	A_t	A_d
150	0.72530	37.25510	28.616180
395	0.76821	34.24176	25.673782
640	0.81896	31.27627	25.001266
1020	0.86179	28.73726	25.002136

Resultados para: $Pr_\tau(Re_\tau)$, $A_t(Re_\tau)$, $A_d(Re_\tau)$

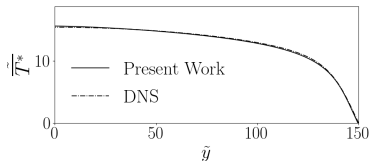


Figura 42: $Re_\tau = 150$, $L2_t = 0.091$

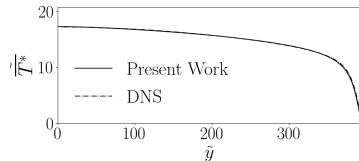


Figura 43: $Re_\tau = 395$, $L2_t = 0.049$

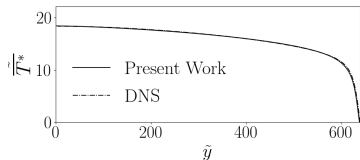


Figura 44: $Re_\tau = 640$, $L2_t = 0.061$

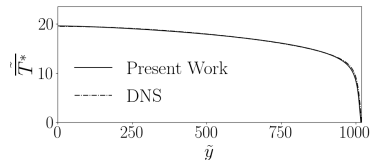


Figura 45: $Re_\tau = 1020$, $L2_t = 0.076$

Figura 46: Resultados de simulação térmica para $Pr_\tau(Re_\tau)$, $A_d(Re_\tau)$, $A_t(Re_\tau)$ e $Pr = 0.71$, com ajuste multiobjetivo.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo físico
- 3 Modelo matemático diferencial
- 4 Modelo numérico
- 5 Resultados
- 6 Conclusão**
- 7 Agradecimentos



Conclusão

- O método semi analítico para o campo de temperatura foi implementado com sucesso e validado com os dados de DNS. Os resultados foram satisfatórios.
- A investigação sobre o número de Prandtl turbulento e a constante de Cebeci se mostrou muito instrutiva ao descrever como estas constantes ajustadas podem influenciar no resultado do método semi-analítico.
- Ajustando-se o valor do número de Prandtl turbulento e da constante de Cebeci com algoritmos genéticos resultou em erros cada vez menores, mas com sobre encaixe, o que torna tais valores úteis somente para o modelo físico explorado no presente trabalho.
- Apesar disso, encontrou-se valores muito melhores que os inicialmente usados, com resultados muito mais acurados.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Modelo físico
- 3 Modelo matemático diferencial
- 4 Modelo numérico
- 5 Resultados
- 6 Conclusão
- 7 Agradecimentos**



Agradecimentos



Obrigado.
Perguntas?

