Questão 1

Considere um fluxo incompreensível $(\nabla \cdot V = 0)$ e irrotacional $(\nabla x V = 0)$, temos que a função corrente para um fluxo uniforme é dada por:

$$\psi = V_\infty r sin\theta$$

Por fórmulas explícitas, temos que a função de corrente para um dipolo é dada por,

$$\psi = \frac{-k}{2\pi} \frac{sin\theta}{r}$$

A adição de um fluxo uniforme tem velocidade V_∞ e um dipolo de força k. A direção do dipolo é voltada para o fluxo uniforme. A partir das equações 1 e 2, temos

$$\psi = V_\infty r sin\theta \left(1 - \frac{k}{2\pi V_\infty r^2}\right)$$

Com o intuito de garantir a impermeabilidade do cilindro

$$R^2 \equiv \frac{k}{2\pi V_\infty}$$

Logo, a função corrente para um cilindro sem rotação é dada por:

$$\psi = (V_\infty r sin\theta)\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Função corrente:

Temos que:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$V_\theta = \frac{-\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

As expressões para os componentes de velocidade radial e azimutal é obtido derivando a função corrente. Daí,

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r}(V_\infty r cos\theta)\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$V_r=(V_\infty cos\theta)\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=(V_\infty cos\theta)\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$V_\theta=\frac{-\partial\psi}{\partial\theta}=-\left[(V_\infty rsin\theta)\frac{2R^2}{r^3}+\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)(V_\infty sin\theta)\right]$$

$$V_\theta=-(V_\infty sin\theta)\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$V_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=-(V_\infty sin\theta)\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=-(V_\infty sin\theta)r\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)$$

Integrado uma equação:

$$\partial\phi=\left((V_\infty cos\theta)\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\right)\partial r$$

$$\int\partial\phi=\int\left((V_\infty cos\theta)\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\right)\partial r$$

$$\phi=-(V_\infty cos\theta)\left(r-\frac{R^2}{(-1)r^1}\right)+g(\theta)$$

$$\phi=-(V_\infty cos\theta)\left(r+\frac{R^2}{r}\right)+g(\theta)$$

Derivando ϕ e comparando com $\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=\left(-2(V_\infty cos\theta)\left(r+\frac{R^2}{r}\right)+g(\theta)\right)\partial\theta$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=-2(V_\infty s\in\theta)\left(r+\frac{R^2}{r}\right)+g'(\theta)$$

Comparando com a velocidade encontrada por meio da função corrente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -(V_{\infty} sin\theta) r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Portanto $g^{'}(\theta) = C , como\ pelas\ condições inicias\ C = 0.$

Logo a função potencial será:

$$\phi = -(V_{\infty} cos\theta)\left(r + \frac{R^2}{r}\right)$$