lista_4

Resolução da quarta lista

Aluno: Felipe J. O. Ribeiro

Questão 7

7. Defina os termos potencial de velocidade, circulação e vorticidade, e mostre como estão relacionados. A distribuição de velocidade na camada-limite laminar sobre uma placa plana é dada por:

$$u = u_0\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$$

Onde u_0 é a velocidade no ponto $y=\delta$, sendo δ a espessura da camada-limite. Calcule a vorticidade na superfície da placa.

- Potencial de velocidade: É uma escalar potencial usada na teoria do escoamento potencial. Matematicamente pode ser descrita como:

$$u = \nabla\Phi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{k}$$

- Circulação: É definido como a integral de linha no sentido antihorário ao redor de uma curva C multiplicado pela velocidade tangente à curva. Também, pelo teorema de Stokes, pode ser definido como o fluxo de vorticidade pela estremidade da curva. Matematicamente pode ser descrito como:

$$\Gamma = \oint_{\partial s} V.dl = \int\int_S \nabla x V.dS = \int\int_S w.dS$$

- Vorticidade: Descreve a movimentação giratória local.

$$w = curlV = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

O escoamento sobre a placa só possui velocidade em uma direção x e ele só varia na direção y. Dessa forma, podemos definir a vorticidade como segue:

$$Curl\vec{V} = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\vec{k}$$

$CurlV\vec{} = \frac{\partial u}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{k}$

$CurlV\vec{} = -\frac{\partial u}{\partial y}\vec{k}$

Assim, podemos definir a vorticidade para esse caso como $\frac{\partial u}{\partial y}$. Assim, usando da expressão fornecida na questão para definir a velocidade em função de y, temos:

$u = u_0[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}(\frac{y}{\partial})^3]$

Assim, aplicando a expressão da vorticidade:

$curlV = \frac{\partial}{\partial y}(u_0[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}(\frac{y}{\partial})^3])$

$curlV = \frac{3u_0}{2\delta} - \frac{3u_0y^2}{2\partial^3}$

Que na parede temos $y = 0$ o que nos leva a um valor de vorticidade de:

$curlV|_{y=0} = \frac{3u_0}{2\delta}$