Computação Gráfica

Rasterização de Circunferências

Professor: Luciano Ferreira Silva, Dr.

Aula 7

Rasterização de Circunferência

- **Cálculo de pontos ao longo da curva**

  $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$ ou $y = y_c \pm\sqrt{r^2 - (x-xc)^2}$

- **Aritmética de pontos flutuantes;**
  - ✓ Consome bastante tempo;
  - ✓ Provoca falhas na curva;

- **Cálculos na forma paramétrica evita falhas;**

  $x = x_c + r \,.\, \cos(t)$

  $y = y_c + r \,.\, \text{sen}(t)$

- **Computação ainda em pontos flutuantes;**

Circunferências: Eq. Paramétrica

- **Algoritmo:**

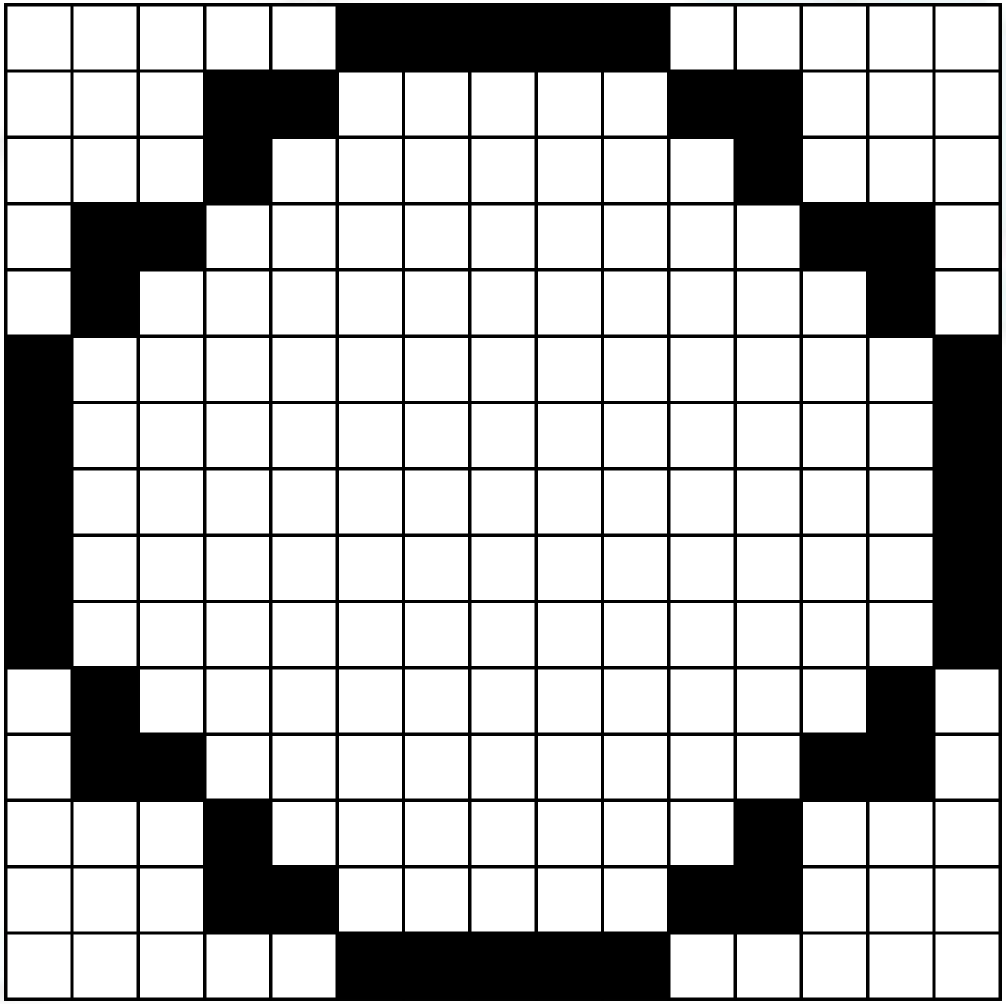
$x = x_c + r. \cos (t)$

$y = y_c + r. \text{sen} (t)$

$x = x_c$ + raio **$y = y_c$**
para t de 1 até 360 com passo "t"
pixel (x , y , cor)
$x = x_c + r \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{180}\right)$
$y = y_c + r \cdot sen\left(\frac{\pi \cdot t}{180}\right)$

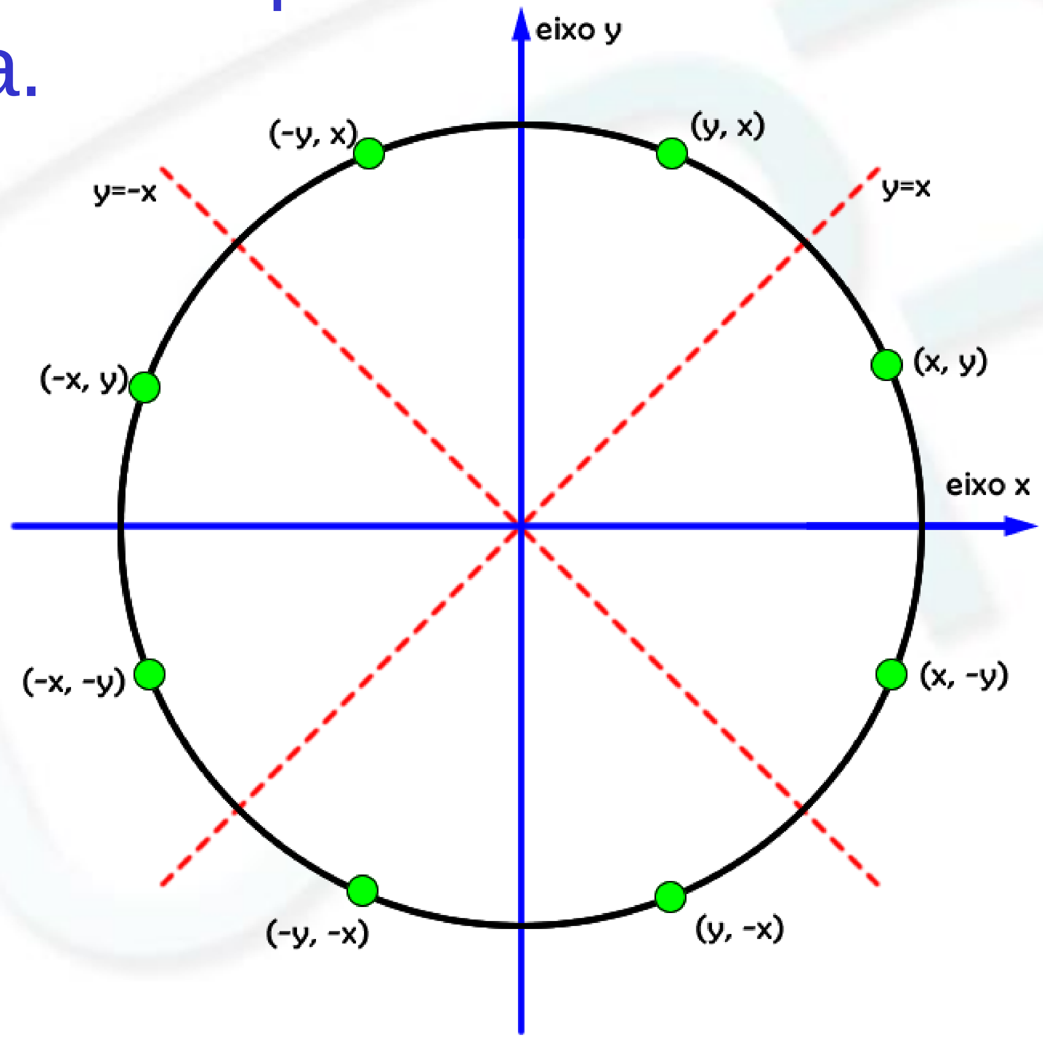
Circunferências: Eq. Paramétrica

- Exemplo:



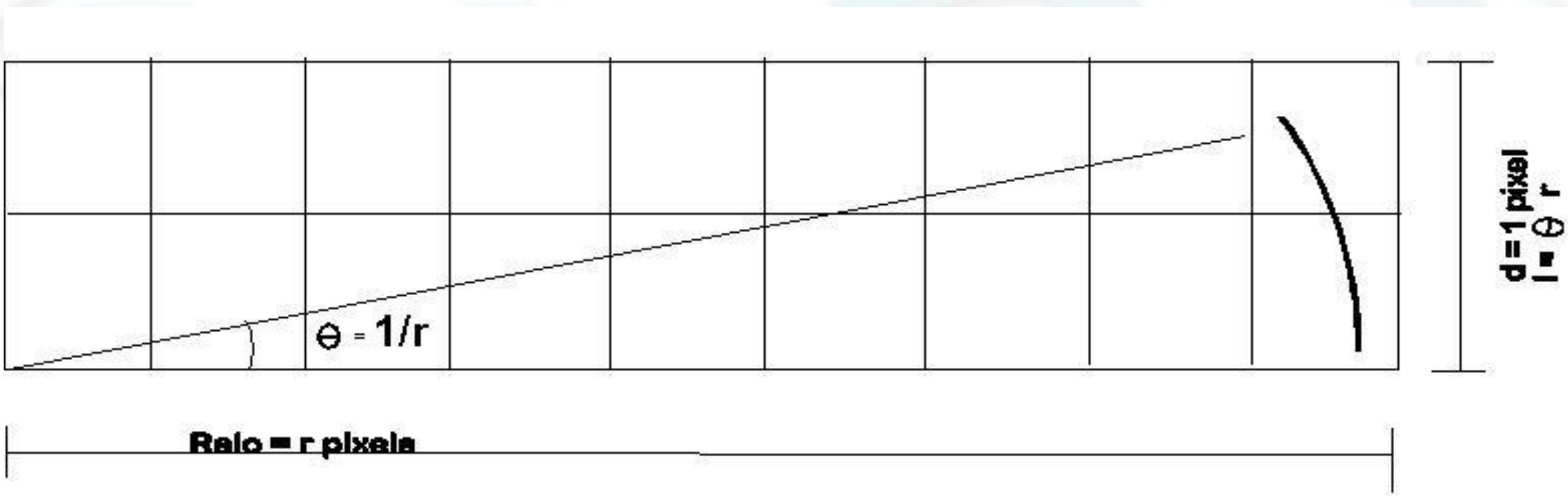
Alg. Incremental com Simetria

- Propriedade importante: a circunferência é simétrica.



Alg. Incremental com Simetria

- **Fundamento: deslocamento angular com incremento de uma unidade de pixel;**
  - ✓Deslocamento em radianos = 1/r (r = raio);
  - ✓Calcular as coordenadas de 1/8 da circunferência;
  - ✓Obter os demais pontos por simetria;



Alg. Incremental com Simetria

- <u>Solução proposta:</u> algoritmo incremental com deslocamento angular constante e pequeno, com a rotação a partir de um ponto inicial

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos\theta - y_n \sin\theta \\ y_{n+1} = y_n \cos\theta + x_n \sin\theta \end{cases}$$

- Perceba *cos θ* e *sen θ* são valores fixo;
- <u>Problemas:</u>
  - ✓ Erros acumulativos, em função do uso de x_n e y_n nas iterações seguintes;
  - ✓ Uso de números reais - necessidade do arredondamento, para cada pixel;

Alg. Incremental com Simetria

- **Demonstração:**

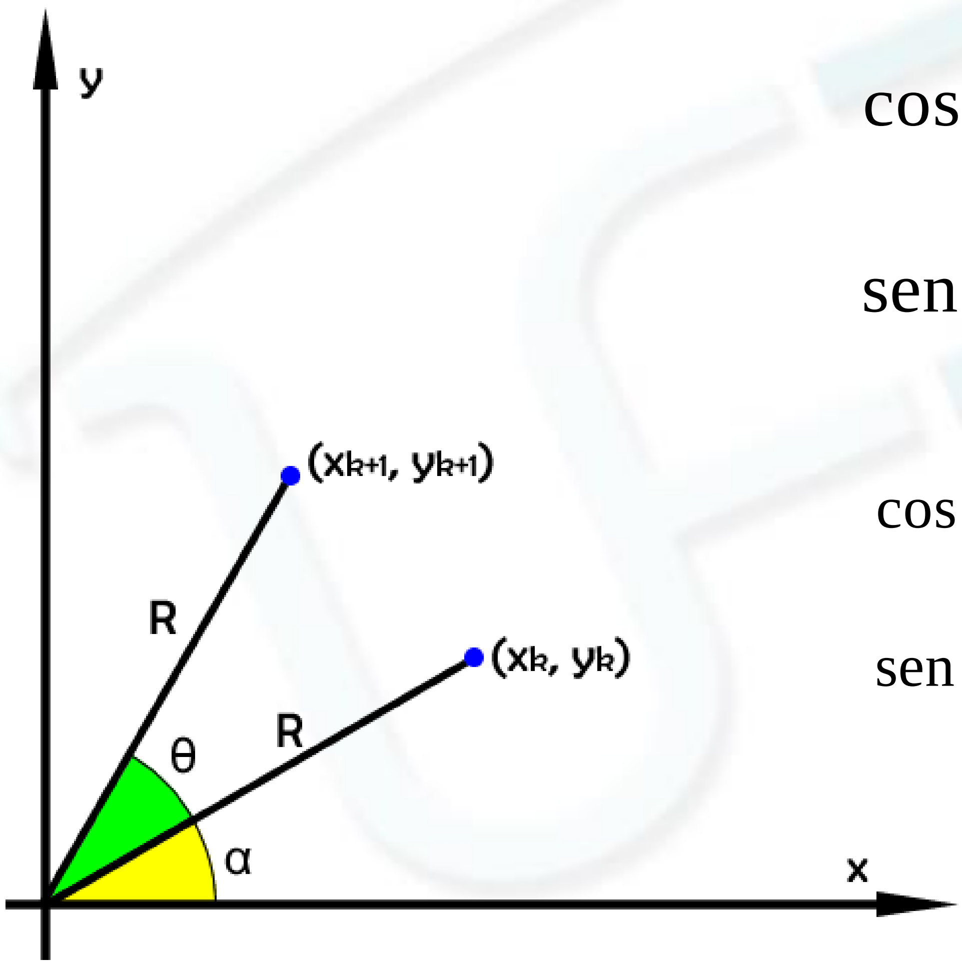
$$R = raio;$$

$$\cos\alpha = \frac{x_k}{R} \Rightarrow R.\cos\alpha = x_k\ ;$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{y_k}{R} \Rightarrow R.\text{sen}\ \alpha = y_k\ ;$$

$$\cos(\theta + \alpha) = \frac{\mathrm{x}_{k+1}}{\mathrm{R}}$$

$$\text{sen}\ (\theta + \alpha) = \frac{\mathrm{y}_{k+1}}{\mathrm{R}}$$



Alg. Incremental com Simetria

- **Temos**

Como: $$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b \\ \text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{x_{k+1}}{R} = \cos\theta \cdot \cos\alpha - sen\,\theta \cdot sen\,\alpha \Rightarrow x_{k+1} = R.\cos\alpha \cdot \cos\theta - R.sen\,\alpha \cdot sen\,\theta \\ \dfrac{y_{k+1}}{R} = sen\,\theta \cdot \cos\alpha + sen\,\alpha \cdot \cos\theta \Rightarrow y_{k+1} = R.\cos\alpha \cdot sen\,\theta + R.sen\,\alpha \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Como: $R.\cos\alpha = x_k$; $R.\text{sen}\,\alpha = y_k$;

Daí:

$$x_{k+1} = x_k \cdot \cos\theta - y_k \cdot sen\,\theta$$
$$y_{k+1} = y_k \cdot \cos\theta + x_k \cdot sen\,\theta$$

Circunferência Alg. de Bresenham

- **Também utiliza a simetria da circunferência;**
  - ✓ Gera o primeiro quadrante e os demais por simetria;
- **Evita utilizar raízes, potências e funções trigonométricas;**
- **Pode-se começar: no ponto (0, R) → construção horária; ou no ponto (R, 0) → construção anti-horária;**
- **A escolha recai sobre três pixels, na tentativa de selecionar o que está mais próximo da curva ideal;**
- **O critério de seleção entre tais pontos leva em conta a distância relativa entre os mesmos e a circunferência ideal;**

Circunferência Alg. de Bresenham

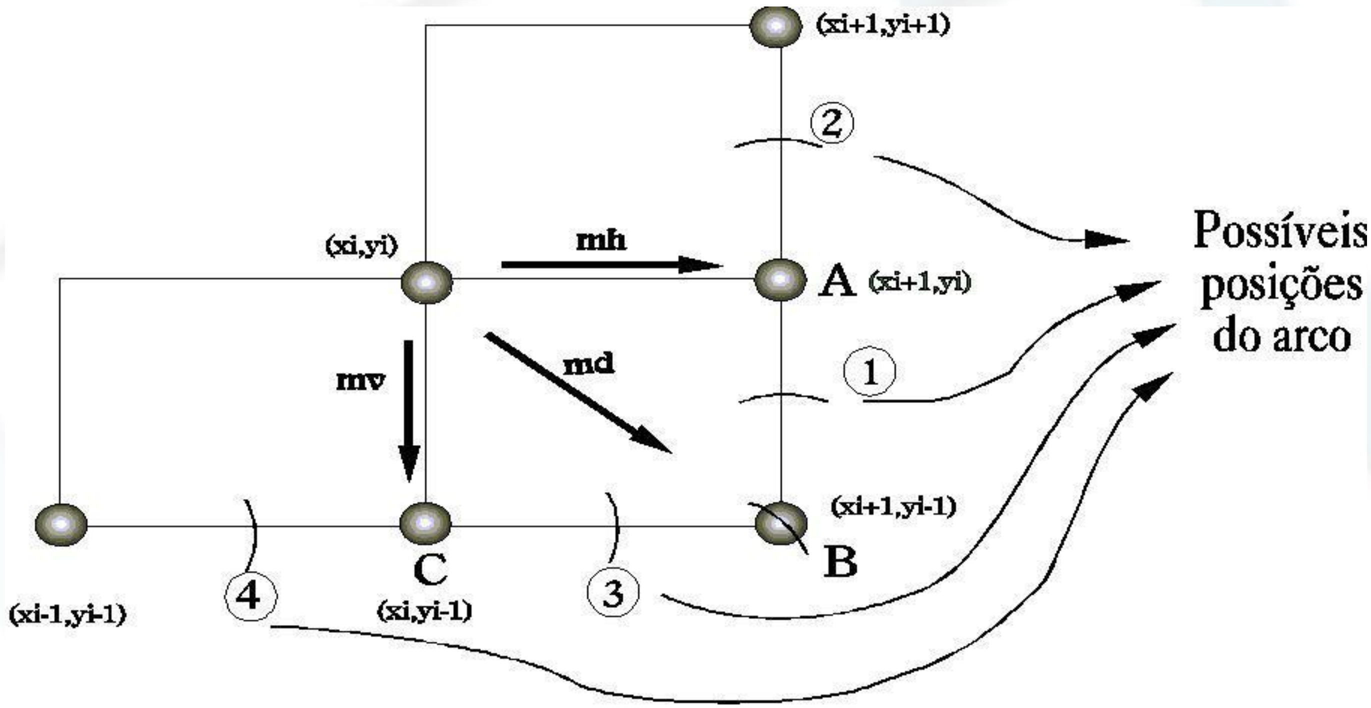
- **Utiliza-se a função de circunferência:**

$$f_{circle}(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$$

- ***$f_{circle}(x,y) = 0 \rightarrow (x,y)$ está no limite do circunferência.***
- ***$f_{circle}(x,y) < 0 \rightarrow (x,y)$ está no interior da circunferência.***
- ***$f_{circle}(x,y) > 0 \rightarrow (x,y)$ está fora da circunferência.***

Circunferência Alg. de Bresenham

- Começando no ponto (0, R) → construção horária;



$$
\begin{cases}
mh = \left| (x_i + 1)^2 + (y_i)^2 - R^2 \right| \\
md = \left| (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2 \right| \\
mv = \left| (x_i)^2 + (y_i - 1)^2 - R^2 \right|
\end{cases}
$$

Circunferência Alg. de Bresenham

- **O algoritmo escolhe o pixel que minimize o quadrado da distância entre um destes 3 pixels e o círculo verdadeiro.**
- **O critério de seleção entre os pontos será dado pela distância relativa entre eles:**
  - ✓ Horizontalmente para direita [$mh = |(x_i+1)^2 + (y_i)^2 - R^2|$];
  - ✓ Diagonalmente para baixo à direita [$md = |(x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2|$];
  - ✓ Verticalmente para baixo [$mv = |(x_i)^2 + (y_i-1)^2 - R^2|$];

Circunferência Alg. de Bresenham

- **Analisando:**

- **Seja $\Delta i = (x_i+1)^2 + (y_i-1)^2 - R^2$**

1° caso: Se $\Delta i = 0 \rightarrow$ o ponto B deve ser escolhido.

2º caso: Se $\Delta i < 0 \rightarrow$ O ponto B está no interior do circunferência, então deve-se escolher o melhor ponto pelo valor da variável:

$\delta = mh - md$; [Posição (1) ou (2)]

a) Se $\delta \leq 0$ o ponto escolhido é o A;

b) Se $\delta > 0$ o ponto escolhido é o B;

3° caso: Se $\Delta i > 0 \rightarrow$ O ponto B está fora da circunferência, então deve-se escolher o melhor ponto pelo valor da variável:

$\beta = md - mv$; [Posição (3) ou (4)]

a) Se $\beta \leq 0$ o ponto escolhido é o B;

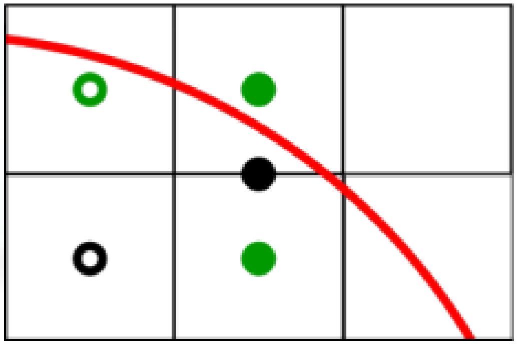
b) Se $\beta > 0$ o ponto escolhido é o C;

Circunferência Alg. de Bresenham

- **Outro forma:**
  - ✓Adota-se o parâmetro de decisão

$$f_{circle}(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$$

  - ✓Gera-se um octante da circunferência, o restante usa-se simetria;
  - ✓A escolha recai em dois pixels;

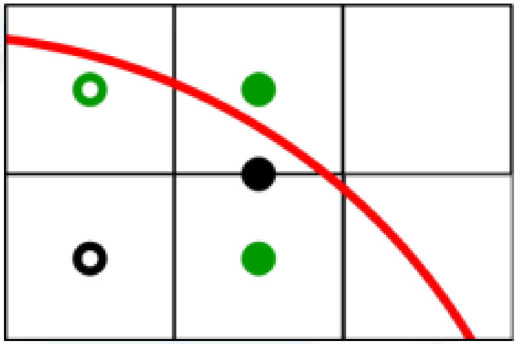


Circunferência Alg. de Bresenham

- Próximo pixel depende do sinal de:

$$p_k = f(x_k+1, y_k-1/2) = (x_k + 1)^2 + (y_k -1/2)^2 - r^2$$

$$p_k = x_k^2 + 2x_k + y_k^2 - y_k + 5/4 - r^2$$



- Parâmetro de decisão calculado incrementalmente:

$$p_{k+1} = x_{k+1}^2 + 2x_{k+1} + y_{k+1}^2 - y_{k+1} +5/4 - r^2$$

- Considerando $x_{k+1} = x_k+1$

$$p_{k+1} = (x_k+1)^2 + 2(x_k+1) + y_{k+1}^2 - y_{k+1} +5/4 - r^2$$

$$p_{k+1} = x_k^2 + 2x_k + 1 + 2x_k + 2 + y_{k+1}^2 - y_{k+1} +5/4 - r^2$$

$$p_{k+1} = x_k^2 + 4x_k + y_{k+1}^2 - y_{k+1} +17/4 - r^2$$

Circunferência Alg. de Bresenham

- **Dois casos possíveis:**

1. **Se $p_k < 0$**

   - A circunferência passa entre ponto médio e pixel superior
   - Logo: $y_{k+1} = y_k$

$$p_{k+1} = x_k^2 + 4x_k + y_{k+1}^2 - y_{k+1} + 17/4 - r^2$$

$$p_{k+1} = x_k^2 + 4x_k + y_k^2 - y_k + 17/4 - r^2$$

$$p_{k+1} - p_k = 2x_k + 3$$

$$\boxed{p_{k+1} = p_k + 2x_k + 3}$$

Circunferência Alg. de Bresenham

2. Se $p_k \geq 0$

- ✓ A circunferência passa entre ponto médio e pixel inferior
- ✓ Logo: $y_{k+1} = y_k - 1$

$$p_{k+1} = x_k^2 + 4x_k + y_{k+1}^2 - y_{k+1} + 17/4 - r^2$$

$$p_{k+1} = x_k^2 + 4x_k + (y_k - 1)^2 - (y_k - 1) + 17/4 - r^2$$

$$p_{k+1} - p_k = 2x_k - 2y_k + 5$$

$$\boxed{p_{k+1} = p_k + 2x_k - 2y_k + 5}$$

Circunferência Alg. de Bresenham

- **No ponto incial (0, r)**

$$p_k = x_k^2 + 2x_k + y_k^2 - y_k + 5/4 - r^2$$

$$p_0 = x_0^2 + 2x_0 + y_0^2 - y_0 + 5/4 - r^2$$

$$p_0 = 0^2 + 2*0 + r^2 - r + 5/4 - r^2$$

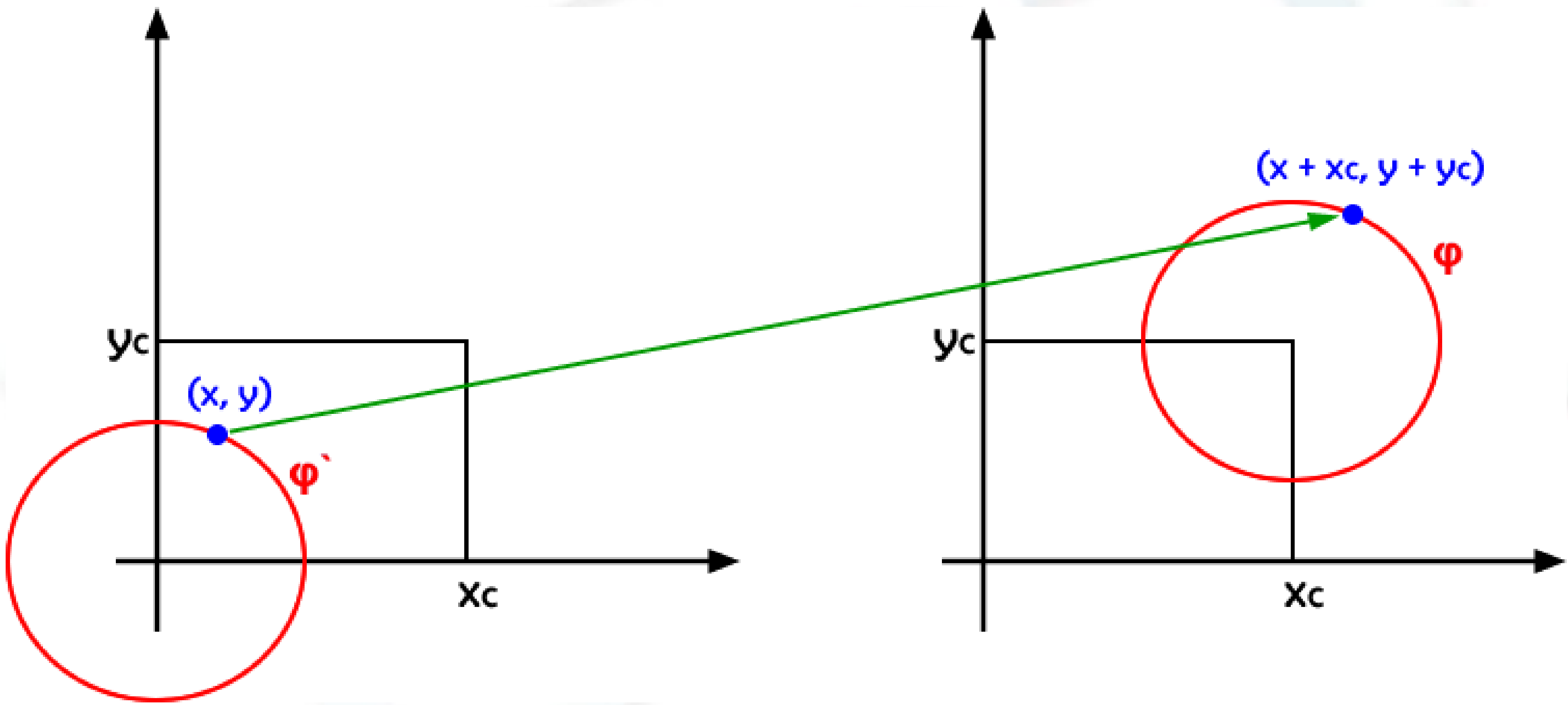
$$\boxed{p_0 = 5/4 - r}$$

- **Quando r for inteiro, defina $p_0 = 1 - r$**

Circunferência Alg. de Bresenham

- **Observação: perceba que a circunferência anterior está centrada na origem;**
- **Caso se queira gerar uma circunferência (φ) centra em (x_c, y_c) e raio R:**
  - ✓ Obtêm-se os pontos (x, y) para a curva (φ`) centrada na origem e raio R,
  - ✓ A circunferência φ desejada terá pontos no formato ($x + x_c$, $y + y_c$);
  - ✓ Tecnicamente diz-se que φ é uma translação de φ`.

Circunferência Alg. de Bresenham



Circunferência Alg. de Bresenham

x = 0 e y = r

Parâmetro = p = 5/4 – r ou 1 - r

Enquanto x ≠ y faça:

liga pixel (x, y, cor)

p≥0

Sim	Não
y = y-1 p = p + 2x – 2y + 5 x = x + 1	não altera y p = p + 2x +3 x = x + 1

Desenhar os demais octantes

Transladar a circunferência para o centro (xc, yc)

Segundo Trabalho

- **Neste trabalho você deve (INDIVIDUALMENTE):**

1. Desenvolver um programa que permita desenhar circunfências por meio dos algoritmos: **Equação paramétrica**, **Incremental com Simetria** e **Bresenham**.

2. Construir um relatório que descreva a construção e os resultados de maneira comparativa.

3. Apresentar o programa desenvolvido e entregar o relatório digital na sala do professor;

   - Obviamente você será arguido nesse momento.

Segundo Trabalho

- **OBSERVAÇÕES:**
  - ✓ Objetivo do trabalho é que você veja os algoritmos trabalhando e os compare, desse modo, implemente de forma que isso aconteça;
  - ✓ Trabalhos entregues sem defesa não serão aceitos (receberão nota zero (0)).
    - Dessa forma, **NÃO** adianta apenas fazer o trabalho e enviar por e-mail;
    - **Muita atenção:** não sou uma PJ ou PF precisando de software de rasterização, com isso em mente apresente com o intuito de:
      - – Provar que você entende os algoritmos;
      - – Provar que você realmente é o autor do programa.

Segundo Trabalho

- **OBSERVAÇÕES (Cont...):**
  - ✓ Trabalhos entregues sem o relatório serão avaliados em cinquenta porcento (50%) da nota;
  - ✓ Trabalhos entregues após a data final estabelecida não serão aceitos, a não ser com a apresentação de atestado médico ou declaração de serviço militar;
- **DICAS:**
  1. Escolha a linguagem de programação que você mais domina e que você entende que **não** será um fator limitante no desenvolvimento do trabalho;
  2. Comece a desenvolver o trabalho hoje e não deixe para apresentar no último dia.

Dúvidas