Álgebra Linear I
Subespaços Vetoriais

Prof. Jairo

Definição

Em muitos casos é conveniente obtermos espaços vetoriais a partir de outros (ou seja, herdando suas operações). Esses espaços "derivados" de outros são chamados de subespaços vetoriais. Mais precisamente,

Definição

Seja V um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto $W \subset V$ de V é um *subespaço vetorial* (ou simplesmente um *subespaço*) de V quando a restrição das operações de V a W tornam W um espaço vetorial.

Exemplo (Subespaços triviais)

Seja V um espaço vetorial. São subespaços de V:

Exemplo (Subespaços triviais)

Seja V um espaço vetorial. São subespaços de V:

- o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado apenas pelo vetor nulo de V;

Exemplo (Subespaços triviais)

Seja V um espaço vetorial. São subespaços de V:

- o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado apenas pelo vetor nulo de V;
- O próprio V.

Exemplo (Subespaços triviais)

Seja V um espaço vetorial. São subespaços de V:

- o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado apenas pelo vetor nulo de V;
- O próprio V.

Exemplo

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o conjunto formado pelos polinômios de grau menor ou igual a n. A restrição a P_n das operações de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, tornam P_n um espaço vetorial (verifique). Logo, P_n é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exemplo (Subespaços triviais)

Seja V um espaço vetorial. São subespaços de V:

- o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado apenas pelo vetor nulo de V;
- O próprio V.

Exemplo

Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $P_n \subset \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o conjunto formado pelos polinômios de grau menor ou igual a n. A restrição a P_n das operações de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, tornam P_n um espaço vetorial (verifique). Logo, P_n é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exemplo

Seja $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. A restrição das operações do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ a W fazem de W um espaço vetorial (verifique).

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, dados $u, v \in W$, o vetor $u + v$ é **único** e **pertence** a W; dados $u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o vetor αu é **único** e **pertence a** W).

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, dados $u, v \in W$, o vetor $u + v$ é **único** e **pertence** a W; dados $u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o vetor αu é **único** e **pertence a** W).

   Ora, a unicidade desses vetores é garantida para elementos de V e, como $W \subset V$, então continua válida para elementos de W.

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, dados $u, v \in W$, o vetor $u + v$ é **único** e **pertence** a W; dados $u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o vetor αu é **único** e **pertence a** W).

   Ora, a unicidade desses vetores é garantida para elementos de V e, como $W \subset V$, então continua válida para elementos de W.

   Assim, precisamos mostrar apenas que a soma de vetores de W e a multiplicação de escalares por vetores de W ainda são vetores de W.

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, dados $u, v \in W$, o vetor $u + v$ é **único** e **pertence** a W; dados $u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o vetor αu é **único** e **pertence a** W).

   Ora, a unicidade desses vetores é garantida para elementos de V e, como $W \subset V$, então continua válida para elementos de W.

   Assim, precisamos mostrar apenas que a soma de vetores de W e a multiplicação de escalares por vetores de W ainda são vetores de W.

ii. As operações continuam satisfazendo os axiomas de espaço vetorial.

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, dados $u, v \in W$, o vetor $u + v$ é **único** e **pertence** a W; dados $u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o vetor αu é **único** e **pertence a** W).

   Ora, a unicidade desses vetores é garantida para elementos de V e, como $W \subset V$, então continua válida para elementos de W.

   Assim, precisamos mostrar apenas que a soma de vetores de W e a multiplicação de escalares por vetores de W ainda são vetores de W.

ii. As operações continuam satisfazendo os axiomas de espaço vetorial.

   Para isso, basta verificar que o vetor nulo de V pertence a W (por quê?)

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, dados $u, v \in W$, o vetor $u + v$ é **único** e **pertence** a W; dados $u \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o vetor αu é **único** e **pertence a** W).

   Ora, a unicidade desses vetores é garantida para elementos de V e, como $W \subset V$, então continua válida para elementos de W.

   Assim, precisamos mostrar apenas que a soma de vetores de W e a multiplicação de escalares por vetores de W ainda são vetores de W.

ii. As operações continuam satisfazendo os axiomas de espaço vetorial.

   Para isso, basta verificar que o vetor nulo de V pertence a W (por quê?)

   Isso nos leva à seguinte proposição (cujos detalhes que faltam para a demonstração serão deixados a cargo do leitor):

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *as seguintes condições forem satisfeitas:*

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *as seguintes condições forem satisfeitas:*

(1) $\mathbf{0} \in W$;

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *as seguintes condições forem satisfeitas:*

(1) $\mathbf{0} \in W$;

(2) *se* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$;

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *as seguintes condições forem satisfeitas:*

(1) $\mathbf{0} \in W$;

(2) *se* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$;

(3) *se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $v \in W$, *então* $\lambda v \in W$.

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *as seguintes condições forem satisfeitas:*

(1) $\mathbf{0} \in W$;

(2) *se* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$;

(3) *se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $v \in W$, *então* $\lambda v \in W$.

Observação: Poderíamos ter escolhido a proposição acima como definição (neste caso, o que adotamos como definição seria um teorema de caracterização, ou seja, um teorema do do tipo *se e somente se*).

Às vezes pode ser útil (para tornar mais concisa a prova de que $W \subset V$ é subespaço) reunir as condições (2) e (3) da proposição anterior, em uma única condição, conforme a seguinte

Proposição

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, forem satisfeitas as seguintes condições:

Às vezes pode ser útil (para tornar mais concisa a prova de que $W \subset V$ é subespaço) reunir as condições (2) e (3) da proposição anterior, em uma única condição, conforme a seguinte

Proposição

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, forem satisfeitas as seguintes condições:

(1) $\mathbf{0} \in W$;

Às vezes pode ser útil (para tornar mais concisa a prova de que $W \subset V$ é subespaço) reunir as condições (2) e (3) da proposição anterior, em uma única condição, conforme a seguinte

Proposição

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, forem satisfeitas as seguintes condições:

(1) $\mathbf{0} \in W$;

(2) *se* $u, v \in W$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *então* $\alpha u + \beta v \in W$.

Às vezes pode ser útil (para tornar mais concisa a prova de que $W \subset V$ é subespaço) reunir as condições (2) e (3) da proposição anterior, em uma única condição, conforme a seguinte

Proposição

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, forem satisfeitas as seguintes condições:

(1) $\mathbf{0} \in W$;

(2) *se* $u, v \in W$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *então* $\alpha u + \beta v \in W$.

Prova.

A cargo do leitor.
Sugestão: É fácil! $\square$

Às vezes pode ser útil (para tornar mais concisa a prova de que $W \subset V$ é subespaço) reunir as condições (2) e (3) da proposição anterior, em uma única condição, conforme a seguinte

Proposição

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V se, e somente se, forem satisfeitas as seguintes condições:

(1) $\mathbf{0} \in W$;

(2) *se* $u, v \in W$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *então* $\alpha u + \beta v \in W$.

Prova.

A cargo do leitor.
Sugestão: É fácil! $\square$

Observação: Nas duas proposições anteriores, a condição (1) poderia ser omitida, desde que se acrescentasse a hipótese $W \neq \emptyset$. Justifique.

Exemplo

$W = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

$W = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Prova.

De fato, o vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$ pertence a W pois as duas coordenadas de $\mathbf{0}$ são iguais.
Além disso, dados $u = (x, x), v = (y, y) \in W$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se: $\alpha u = (\alpha x, \alpha x), \beta v = (\beta y, \beta y)$ e $\alpha u + \beta v = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y)$.
Segue-se que $\alpha u + \beta v \in W$, pois as coordenadas do vetor $\alpha u + \beta v$ são iguais. Portanto W é subespaço de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Exemplo

$W = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

$W = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R}\}$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Prova.

De fato, os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (2, 4)$ pertencem a W, mas o vetor $u + v = (3, 5)$ não pertence a W. $\square$

Exemplo

$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & a+1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R});\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ não é subespaço de $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Exemplo

$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & a+1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R});\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ não é subespaço de $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Prova.

De fato, o vetor nulo $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ não pertence a W. $\square$

Exemplo

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}(\mathrm{I}) = \{f : \mathrm{I} \to \mathbb{R};\ f$ é uma função contínua$\} \subset \mathcal{F}(\mathrm{I}; \mathbb{R})$ é subespaço de $\mathcal{F}(\mathrm{I}; \mathbb{R})$.

Exemplo

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}(\mathrm{I}) = \{f : \mathrm{I} \to \mathbb{R};\ f$ é uma função contínua$\} \subset \mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})$ é subespaço de $\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})$.

Prova.

Com efeito, o vetor nulo de $\mathcal{F}(\mathrm{I};\mathbb{R})$ é a função $\mathbf{0} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, dada por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}$. Como $\mathbf{0}$ é contínua, então $\mathbf{0} \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$. Por outro lado, dados $f, g \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, as funções

$$\begin{array}{rcl} f+g : \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} \alpha f : \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha f(x) \end{array}$$

são contínuas. Logo, $f + g \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$ e $\alpha f \in \mathcal{C}(\mathrm{I})$. $\square$

Exercícios

1. Faça o que ficou como exercício no texto.
2. Prove que a interseção de subespaços vetoriais ainda é um subespaço vetorial.
3. Prove que a união de dois subespaços ainda é um subespaço se, e somente se, um deles está contido no outro.
4. Verifique se o conjunto $W \subset \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ das matrizes diagonais de ordem 3 é um subespaço de $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.