Álgebra Linear I
Espaços Vetoriais

Prof. Jairo

Definição

Definição

Um **espaço vetorial** *real* é uma estrutura algébrica formada por um conjunto $V \neq \emptyset$ (cujos elementos são chamados vetores) e duas operações sobre V:

$$+ : \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u+v \end{array} \qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha \cdot u \end{array}$$

chamadas, respectivamente, de *soma de vetores* e *multiplicação por escalar*, as quais satisfazem, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes condições (que chamamos de *axiomas* de espaço vetorial):

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v$, $\forall v \in V$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v$, $\forall v \in V$;

A4. **inderso aditivo:** para cada vetor $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, chamado *inverso aditivo* ou *simétrico*, ou ainda *oposto* de v, tal que $-v + v = \mathbf{0}$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v$, $\forall v \in V$;

A4. **inderso aditivo:** para cada vetor $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, chamado *inverso aditivo* ou *simétrico*, ou ainda *oposto* de v, tal que $-v + v = \mathbf{0}$;

A5. **distributividade:** $(\alpha + \beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$ e $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v, \forall v \in V$;

A4. **inderso aditivo:** para cada vetor $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, chamado *inverso aditivo* ou *simétrico*, ou ainda *oposto* de v, tal que $-v + v = \mathbf{0}$;

A5. **distributividade:** $(\alpha + \beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$ e $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$;

A6. **multiplicação pela unidade:** $1\cdot u = u$.

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v$, $\forall v \in V$;

A4. **inderso aditivo:** para cada vetor $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, chamado *inverso aditivo* ou *simétrico*, ou ainda *oposto* de v, tal que $-v + v = \mathbf{0}$;

A5. **distributividade:** $(\alpha + \beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$ e $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$;

A6. **multiplicação pela unidade:** $1\cdot u = u$.

Onde $+$ e $\cdot$ são, respectivamente, as operações de soma e multiplicação usuais de $\mathbb{R}$.

Comentários sobre a definição

- Como $+$ e $\cdot$ são **funções de** $V \times V$ **em** V então vale frisar que, para cada par de vetores (u, v), são *únicos* os vetores $u+u$ e $u \cdot v$, os quis *pertencem* a V.

Comentários sobre a definição

- Como $+$ e $\cdot$ são **funções de** $V \times V$ **em** V então vale frisar que, para cada par de vetores (u, v), são *únicos* os vetores $u+u$ e $u \cdot v$, os quis *pertencem* a V.
- A definição mais geral de espaço vetorial consiste apenas em trocar $\mathbb{R}$ por um *corpo* $\mathbb{K}$ qualquer na definição acima. Por exemplo, se pormos $\mathbb{C}$ no lugar de $\mathbb{R}$ teremos um *espaço vetorial complexo*.

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.
- Na maioria dos casos porém, nos referiremos ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como "*o espaço vetorial V*" sem se referir às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar (as quais estarão implícitas).

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.
- Na maioria dos casos porém, nos referiremos ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como "*o espaço vetorial* V" sem se referir às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar (as quais estarão implícitas).
- Quando não houver perigo de confusão, escreveremos αu ao invés de $\alpha \cdot u$.

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.
- Na maioria dos casos porém, nos referiremos ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como "*o espaço vetorial* V" sem se referir às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar (as quais estarão implícitas).
- Quando não houver perigo de confusão, escreveremos αu ao invés de $\alpha \cdot u$.
- Normalmente o mesmo símbolo "$+$" será (por simplicidade) utilizado para representar, tanto a *soma de vetores* quanto a *soma usual de números reais*. A distinção ficará implícita.

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.
- Na maioria dos casos porém, nos referiremos ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como "*o espaço vetorial V*" sem se referir às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar (as quais estarão implícitas).
- Quando não houver perigo de confusão, escreveremos αu ao invés de $\alpha \cdot u$.
- Normalmente o mesmo símbolo "$+$" será (por simplicidade) utilizado para representar, tanto a *soma de vetores* quanto a *soma usual de números reais*. A distinção ficará implícita.
- Por vezes o mesmo símbolo 0 será utilizado para representar tanto o vetor nulo do espaço vetorial, quanto o número real zero.

Exemplos

Exemplo (1)

O conjunto $\mathbb{R}$ munido das operações usuais de soma e multiplicação é um espaço vetorial real.

Exemplo (2)

Dados $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definirmos a soma de elementos de $\mathbb{R}^n$ e a multiplicação por escalar pondo

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e

$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

tem-se que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.
O vetor nulo é $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ e o simétrico de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é o

Exemplo (3)

Dados $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definamos a soma de matrizes e a multiplicação por escalar pondo

$$A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

e

$$\alpha\cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

Essas operações tornam o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem $m \times n$ com coeficientes reais um espaço vetorial real.

Exemplo (4)

Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Denotamos por $\mathcal{F}(X;\mathbb{R}) = \{f \mid f : X \to \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as funções f definidas em X e tomando valores reais. Definamos a *a soma de elementos de* $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e a *multiplicação por escalar* do seguinte modo:
dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, pomos

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in X$$

e

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in X$$

O conjunto$\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ munido dessas operações é um espaço vetorial.

Prova (do exemplo 4).

Inicialmente note que $+$ está bem definida. Com efeito, para par (f, g) de funções de X em $\mathbb{R}$, a soma $f+g$ é uma (única) função de X em $\mathbb{R}$ (verifique). A mesma observação vale para $\cdot$. Posto isso, provaremos que as referidas operações satisfazem os axiomas de espaço vetorial.
Antes porém, lembremos que duas funções são iguais quando possuem o mesmo domínio, mesmo contradomínio as imagens de cada elemento do domínio por essas funções são iguais. Assim, para provar as igualdades de funções que aparecerão abaixo, como todas funções em questão possuem o mesmo domínio e contradomínio, então só precisaremos verificar que a imagem de cada elemento $x \in X$ por essas funções são iguais. $\square$

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \quad \forall x \in X \\ &= g(x) + f(x), \quad \forall x \in X \\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Segue-se que $f+g = g+f$.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X \\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

  Segue-se que $f+g = g+f$.
- Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $f+g = g+f$.
- Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $f+g = g+f$.
- Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X \\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$
Segue-se que $f+g = g+f$.
- Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
Com efeito, dado $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$,

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X \\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$
Segue-se que $f+g = g+f$.
- Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
Com efeito, dado $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned} (\mathbf{0}+f)(x) &= \mathbf{0}(x)+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= 0+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= f(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $f+g = g+f$.
- Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
Com efeito, dado $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned}(\mathbf{0}+f)(x) &= \mathbf{0}(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= 0+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= f(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $\mathbf{0}+f = f$.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $f+g = g+f$.
- Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
Com efeito, dado $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned}(\mathbf{0}+f)(x) &= \mathbf{0}(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= 0+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= f(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $\mathbf{0}+f = f$.
Portanto $\mathbf{0}+f = f, \quad \forall f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Prova do exemplo 4 cont.

- $A4$. Fica como exercício.

Prova do exemplo 4 cont.

- *A*4. Fica como exercício.
- *A*5.(*primeira parte*). Dados $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4*. Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte)*. Dados $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}[\alpha \cdot (f + g)](x) &= \alpha \cdot [(f + g)(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha \cdot [(f(x) + g(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4.* Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte).* Dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} [\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha \cdot [(f+g)(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha \cdot [(f(x)+g(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f + \alpha\cdot g$.

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4.* Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte).* Dados $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} [\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha \cdot [(f+g)(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha \cdot [(f(x)+g(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f + \alpha\cdot g$.

Portanto, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f + \alpha\cdot g, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4*. Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte)*. Dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

  $$\begin{aligned} [\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha\cdot[(f+g)(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha\cdot[(f(x)+g(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha\cdot f(x)+\alpha\cdot g(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

  Logo, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g$.

  Portanto, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- *A5.(segunda parte)*. Fica como exercício.

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4*. Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte)*. Dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} [\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha\cdot[(f+g)(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha\cdot[(f(x)+g(x)], \quad \forall x \in X \\ &= \alpha\cdot f(x)+\alpha\cdot g(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

  Logo, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g$.

  Portanto, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- *A5.(segunda parte)*. Fica como exercício.
- *A6*. Fica como exercício.

Observações

- Exceto em casos excepcionais, sempre que nos referirmos aos espaços vetoriais dos exemplos acima, ficará implícito que as operações que estamos considerando são aquelas ali descritas. De modo que tomaremos liberdade de escrever, por exemplo, "*O espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$", sem mencionar as operações (ficará implícito que estamos considerando as operações definidas no exemplo 2, pondo $n = 3$).

Observações

- Exceto em casos excepcionais, sempre que nos referirmos aos espaços vetoriais dos exemplos acima, ficará implícito que as operações que estamos considerando são aquelas ali descritas. De modo que tomaremos liberdade de escrever, por exemplo, "*O espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$", sem mencionar as operações (ficará implícito que estamos considerando as operações definidas no exemplo 2, pondo $n = 3$).
- Escreveremos a expressão $u - v$ para significar a soma $u + (-v)$.

Propriedades

Nas propriedades abaixo, V é um espaço vetorial, $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

P_1. (lei do cancelamento)

Se $u + v = u + w$, então $v = w$.

Prova.

Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{0} + v && (A3) \\ &= (-u + u) + v && (A4) \\ &= -u + (u + v) && (A2) \\ &= -u + (u + w) && (Hipótese) \\ &= (-u + u) + w && (A2) \\ &= \mathbf{0} + w && (A4) \\ &= w. && (A3) \end{aligned}$$

$\square$

Propriedades

P_2. Dados $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $0 \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Propriedades

P_2. Dados $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $0 \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

P_3. Se $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $v = \mathbf{0}$.

Propriedades

P_2. Dados $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $0 \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

P_3. Se $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $v = \mathbf{0}$.

P_4. $(-1) \cdot v = -v$.

Propriedades

P_2. Dados $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $0 \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

P_3. Se $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $v = \mathbf{0}$.

P_4. $(-1) \cdot v = -v$.

P_5. Dados $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$, tem-se

$$\beta \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\beta \alpha_i) v_i .$$

Exercícios

Nos enunciados abaixo, V é um espaço vetorial, $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. O vetor nulo de V e o simétrico de cada elemento v de V são únicos.
2. $-(-u) = u$ e $(-\alpha) \cdot u = \alpha(-u) = -(\alpha \cdot u)$.
3. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.
4. Use P_1 para mostrar as seguintes implicações:

$$u + v = \mathbf{0} \Rightarrow u = -v$$

$$u + v = v \Rightarrow u = \mathbf{0}.$$

5. Prove que as operações definidas nos exemplos 2 e 3 do texto, dão aos respectivos conjuntos a estrutura de espaço vetorial. Complete a prova do exemplo 4 e prove as propriedades P_2 a P_5 do texto.