

# Álgebra Linear I

## Aula 2

Professora Kelly Karina

# Determinantes

## Determinantes

O determinante de uma matriz quadrada  $A_n$  é um número associado à mesma (que denotaremos por  $\det A$  ou  $|A|$ ) da seguinte forma:

- $n = 1$

Se  $A = [a_{11}]$  então  $|A| = a_{11}$ .

- $n = 2$

Se  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  então  $|B| = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$ .

**Exemplo:**  $|10| = 10$ ,  $B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7$

•  $n = 3$

Se  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  então

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

**Exemplo:**

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 0 - 0 - 0 + 10 = 3$$

**Observação:**

Esta expressão para o determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

**Exemplo:**

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
 -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\
 -2 & 0 & 5 & -2 & 0
 \end{array}$$

**Observação:**

Esta expressão para o determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

**Exemplo:**

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
 -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\
 -2 & 0 & 5 & -2 & 0
 \end{array}$$

**Observação:**

Esta expressão para o determinante de uma matriz de ordem 3 pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

**Exemplo:**

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
 -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\
 -2 & 0 & 5 & -2 & 0
 \end{array}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 0 - 0 - 0 + 10 = 3$$

- Esta expressão pode ser escrita ainda da seguinte forma:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

onde  $A_{ij}$  é a submatriz da matriz inicial, de onde foram retiradas a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna.

### Definição:

Definimos o **cofator** de  $A_{ij}$  e escrevemos  $\Delta_{ij}$  da seguinte forma:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

•  $n \geq 4$ 

Usaremos o desenvolvimento de Laplace para o cálculo de determinantes (fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem  $n$ , a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem  $n - 1$ ).

No caso  $n = 4$ , se  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$  então

$$|A| = a_{11}|\Delta_{11}| + a_{12}|\Delta_{12}| + a_{13}|\Delta_{13}| + a_{14}|\Delta_{14}|.$$

**Observação:**

Para a expressão acima escolhemos a linha 1 mas poderíamos ter escolhido qualquer linha ou coluna.



**Exemplo:**

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se escolhermos a terceira linha, então teremos:

$$\begin{aligned} |A| &= 3\Delta_{31} + 0\Delta_{32} + 4\Delta_{33} + 2\Delta_{34} \\ &= 3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \\ &\quad 4(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot 11 + 0 + 4 \cdot 1 \cdot (-8) + 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 \end{aligned}$$

## Propriedades:

- Se  $A$  é uma matriz quadrada, então  $\det A = \det A^t$ ;
- O determinante é nulo se a matriz quadrada tiver:
  - a) uma fila (linha ou coluna) nula;
  - b) filas proporcionais;
  - c) uma fila igual à soma de outras filas paralelas multiplicadas por constantes (uma para cada fila);
- O determinante de uma matriz quadrada não se altera se somarmos a uma fila uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante;
- Invertendo-se a posição de duas linhas paralelas de uma matriz quadrada, seu determinante muda de sinal;
- Multiplicando-se por uma constante  $k$  todos os elementos de qualquer fila de uma matriz quadrada, seu determinante fica multiplicado por  $k$ ;
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .

# Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Já sabemos que o cofator de  $A_{ij}$  ( $\Delta_{ij}$ ) é dado por:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

onde  $A_{ij}$  é a submatriz da matriz inicial, de onde foram retiradas a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna.

## Notação:

A matriz dos cofatores de  $A = [\Delta_{ij}]$  denotaremos por  $\text{cof}(A)$ .

**Exemplo:**

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ então } \text{cof}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}$$

Calculemos os cofatores (entradas de  $\text{cof}(A)$ ).

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |2| = 2$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |1| = -1$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |5| = -5$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |3| = 3$$

Portanto

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

**Definição:**

Dada matriz quadrada  $A$ , chamaremos de **matriz adjunta de  $A$**  à transposta da matriz dos cofatores de  $A$ .

$$\text{adj } A = (\text{cof}(A))^t$$

**Exemplo:**

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ então } \text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

## Teorema:

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Temos então que  $A \cdot \text{adj } A = (\det A) \cdot I_n$ , onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

Dem: (Exercício)

## Definição:

Dada uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , chamamos de inversa de  $A$  uma matriz  $B$  tal que  $AB = BA = I_n$  onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ . Escrevemos  $A^{-1}$  para a inversa de  $A$ .

**Exemplo:**

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ então } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ então } B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

## Observação:

- Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis então  $AB$  é inversível e  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- Nem toda matriz tem inversa;
- Se  $A_n$  tem inversa (ou seja existe  $A^{-1}$ ) então

$$\begin{aligned}A \cdot A^{-1} &= I_n \\ \det(A \cdot A^{-1}) &= \det(I_n) \\ \det A \det A^{-1} &= \det I_n \\ \det A \det A^{-1} &= 1\end{aligned}$$

Segue que  $\det A \neq 0$  e  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

- Se  $\det A \neq 0$  então temos:

$$A \cdot \text{adj } A = \det A \cdot I_n$$

Segue que  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$



## Observação:

No exemplo 1 a matriz inversa de  $A$  coincidiu com a adjunta de  $A$ , pois o determinante de  $A$  é 1.

No caso de matrizes de ordem 2 o cálculo da inversa desta forma (usando a matriz adjunta) é bem prático.

No entanto, para ordens maiores este método pode ser bem trabalhoso.

# Obtenção da inversa

## Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 & (L_1) \\ 1 & 2 & 0 & 1 & (L_2) \end{array}$$

Fazemos operações elementares com as linhas até transformar a matriz da esquerda na matriz identidade.

Operações elementares são:

- permutar duas linhas,
- multiplicar uma linha por um número não nulo ou
- somar uma linha com outra previamente multiplicada por um número.

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 & (L_1) \\ 1 & 2 & 0 & 1 & (L_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & (L'_1 = L_2) \\ 3 & 5 & 1 & 0 & (L'_2 = L_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & (L''_1 = L'_1) \\ 0 & 1 & -1 & 3 & (L''_2 = 3L'_1 - L'_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5 & (L'''_1 = L''_1 - 2L''_2) \\ 0 & 1 & -1 & 3 & (L'''_2 = L''_2) \end{array}$$

A matriz à direita é a matriz inversa procurada.

# Exercícios