Bases Ortonormais e Processo de Gram-Schmidt

Juliana Pimentel

juliana.pimentel@ufabc.edu.br

http://hostel.ufabc.edu.br/~juliana.pimentel

Sala 507-2 - Bloco A, Torre 2

- Um conjunto de vetores em um espaço com produto interno é chamado um *conjunto ortogonal* se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais.
- Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é chamado *ortonormal*.

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0, 1, 0),\ \ u_2 = (1, 0, 1),\ \ u_3 = (1, 0, -1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0,1,0),\ \ u_2 = (1,0,1),\ \ u_3 = (1,0,-1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0.$

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0,1,0), \; u_2 = (1,0,1), \; u_3 = (1,0,-1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$. As normas dos vetores são $\|u_1\| =$

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0, 1, 0), \;\; u_2 = (1, 0, 1), \;\; u_3 = (1, 0, -1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0$. As normas dos vetores são $\|u_1\| = 1$, $\|u_2\| =$

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0, 1, 0), \; u_2 = (1, 0, 1), \; u_3 = (1, 0, -1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$. As normas dos vetores são $\|u_1\| = 1$, $\|u_2\| = \sqrt{2}$, $\|u_3\| =$

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0, 1, 0),\ \ u_2 = (1, 0, 1),\ \ u_3 = (1, 0, -1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0$. As normas dos vetores são $\|u_1\| = 1$, $\|u_2\| = \sqrt{2}$, $\|u_3\| = \sqrt{2}$.

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0, 1, 0),\ u_2 = (1, 0, 1),\ u_3 = (1, 0, -1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$. As normas dos vetores são $\|u_1\| = 1,\ \|u_2\| = \sqrt{2}, \|u_3\| = \sqrt{2}$.A normalização de u_1, u_2, u_3 fornece

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0,1,0),\ \ u_2 = (1,0,1),\ \ u_3 = (1,0,-1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$. As normas dos vetores são $\|u_1\| = 1$, $\|u_2\| = \sqrt{2}$, $\|u_3\| = \sqrt{2}$.A normalização de u_1, u_2, u_3 fornece

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = (0,1,0),\ \ v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

$$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$$

Exemplos

$V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual

$$u_1 = (0,1,0),\ \ u_2 = (1,0,1),\ \ u_3 = (1,0,-1).$$

O conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ é ortogonal, pois $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0$. As normas dos vetores são $\|u_1\| = 1$, $\|u_2\| = \sqrt{2}$, $\|u_3\| = \sqrt{2}$.A normalização de u_1, u_2, u_3 fornece

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = (0,1,0),\ \ v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

$$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$$

$S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ é ortonormal.

- Num espaço com produto interno, uma base constituindo de vetores ortonormais é chamada *base ortonormal*.

- Num espaço com produto interno, uma base constituindo de vetores ortonormais é chamada *base ortonormal*. Um exemplo é a base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1).$$

- Num espaço com produto interno, uma base constituindo de vetores ortonormais é chamada *base ortonormal*. Um exemplo é a base canônica do $\mathbb{R}^3$:

$$i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1).$$

- Se $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base ortonormal de um espaço com produto interno V e u é um vetor qualquer de V então

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n.$$

Exemplo

Sejam

$$v_1 = (0, 1, 0), v_2 = (-4/5, 0, 3/5), v_3 = (3/5, 0, 4/5).$$

Obtenha as coordenadas de $u = (1, 1, 1)$ em relação a base ortonormal $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Exemplo

Sejam

$$v_1 = (0, 1, 0), v_2 = (-4/5, 0, 3/5), v_3 = (3/5, 0, 4/5).$$

Obtenha as coordenadas de $u = (1, 1, 1)$ em relação a base ortonormal $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Solução.

$$\langle u, v_1 \rangle =$$

Exemplo

Sejam

$$v_1 = (0, 1, 0), v_2 = (-4/5, 0, 3/5), v_3 = (3/5, 0, 4/5).$$

Obtenha as coordenadas de $u = (1, 1, 1)$ em relação a base ortonormal $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Solução.

$$\langle u, v_1\rangle = 1, \ \langle u, v_2\rangle = -1/5, \ \langle u, v_3\rangle = 7/5.$$

Exemplo

Sejam

$$v_1 = (0, 1, 0), v_2 = (-4/5, 0, 3/5), v_3 = (3/5, 0, 4/5).$$

Obtenha as coordenadas de $u = (1, 1, 1)$ em relação a base ortonormal $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Solução.

$$\langle u, v_1\rangle = 1, \ \langle u, v_2\rangle = -1/5, \ \langle u, v_3\rangle = 7/5.$$

O vetor de coordenadas de u em relação a S é $(1, -1/5, 7/5)$.

Coordenadas em relação a bases ortogonais

Se $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base ortogonal de um espaço com produto interno V, então

$$S' = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \cdots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$$

é uma base *ortonormal* de V. Então qualquer vetor $u \in V$ pode ser escrito como

$$u = \langle u, \frac{v_1}{\|v_1\|}\rangle \frac{v_1}{\|v_1\|} + \cdots + \langle u, \frac{v_n}{\|v_n\|}\rangle \frac{v_n}{\|v_n\|}$$

Coordenadas em relação a bases ortogonais

Podemos expressar u como uma combinação linear dos vetores da base ortogonal S' como

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

- Construir bases ortogonais e ortonormais de espaços com produto interno.
- A partir de uma base qualquer de um espaço vetorial existe um processo para se obter uma base ortonormal.
- Processo de ortonormalização para uma base.

Teorema da Projeção

Se W é um subspaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V,

Teorema da Projeção

Se W é um subspaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V, então cada vetor $u \in V$ pode ser expresso de uma única maneira como

Teorema da Projeção

Se W é um subspaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V, então cada vetor $u \in V$ pode ser expresso de uma única maneira como

$$u = w_1 + w_2$$

Teorema da Projeção

Se W é um subspaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V, então cada vetor $u \in V$ pode ser expresso de uma única maneira como

$$u = w_1 + w_2$$

onde $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

Teorema da Projeção

Se W é um subspaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V, então cada vetor $u \in V$ pode ser expresso de uma única maneira como

$$u = w_1 + w_2$$

onde $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

- $w_1 := proj_W u$ é chamado *projeção ortogonal de u em W*,

Teorema da Projeção

Se W é um subspaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V, então cada vetor $u \in V$ pode ser expresso de uma única maneira como

$$u = w_1 + w_2$$

onde $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$.

- $w_1 := proj_W u$ é chamado *projeção ortogonal de u em W*,
- w_2 é chamado *componente de u ortogonal a W*.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Descreveremos o processo de ortonormalização para uma base $S = \{v_1, v_2\}$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Descreveremos o processo de ortonormalização para uma base $S = \{v_1, v_2\}$.
Seja $v_1' = v_1$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Descreveremos o processo de ortonormalização para uma base $S = \{v_1, v_2\}$.
Seja $v_1' = v_1$. Queremos encontrar v_2' ortogonal a v_1'.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Descreveremos o processo de ortonormalização para uma base $S = \{v_1, v_2\}$.
Seja $v_1' = v_1$. Queremos encontrar v_2' ortogonal a v_1'. Tomaremos $v_2' = v_2 - cv_1'$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, ou seja,

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Descreveremos o processo de ortonormalização para uma base $S = \{v_1, v_2\}$.
Seja $v_1' = v_1$. Queremos encontrar v_2' ortogonal a v_1'. Tomaremos $v_2' = v_2 - cv_1'$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, ou seja, $\langle v_2 - cv_1', v_1' \rangle = 0$. Então $c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Descreveremos o processo de ortonormalização para uma base $S = \{v_1, v_2\}$.
Seja $v_1' = v_1$. Queremos encontrar v_2' ortogonal a v_1'. Tomaremos $v_2' = v_2 - cv_1'$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, ou seja, $\langle v_2 - cv_1', v_1' \rangle = 0$. Então $c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle}$.Ficamos com

$$
\begin{aligned}
v_1' &= v_1 \\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'} v_1'
\end{aligned}
$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Observe que v_2' foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v_1'.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Observe que v_2' foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v_1'. O vetores v_1' e v_2' são vetores ortogonais não nulos.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Observe que v_2' foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v_1'. O vetores v_1' e v_2' são vetores ortogonais não nulos. Normalizando obtemos

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|}, \; u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|},$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Observe que v_2' foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v_1'. O vetores v_1' e v_2' são vetores ortogonais não nulos. Normalizando obtemos

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|}, \; u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|},$$

A base $S' = \{u_1, u_2\}$ é ortonormal.

Exemplo

Seja $S = \{(2,1),(1,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Obtenha a partir de S uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução. $v_1 = (2,1), v_2 = (1,1)$

Exemplo

Seja $S = \{(2,1),(1,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Obtenha a partir de S uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução. $v_1 = (2,1), v_2 = (1,1)$

$$v_1' = v_1 = (2,1)$$

$$v_2' = v_2 - cv_1', \quad c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}$$

Exemplo

Seja $S = \{(2,1),(1,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Obtenha a partir de S uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução. $v_1 = (2,1), v_2 = (1,1)$

$$v_1' = v_1 = (2,1)$$

$$v_2' = v_2 - cv_1', \qquad c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}$$

Assim,

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'} v_1' =$$

Exemplo

Seja $S = \{(2,1),(1,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Obtenha a partir de S uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução. $v_1 = (2,1), v_2 = (1,1)$

$$v_1' = v_1 = (2,1)$$

$$v_2' = v_2 - cv_1', \qquad c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}$$

Assim,

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'} v_1' = (1,1) -$$

Exemplo

Seja $S = \{(2,1),(1,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Obtenha a partir de S uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução. $v_1 = (2,1), v_2 = (1,1)$

$$v_1' = v_1 = (2,1)$$

$$v_2' = v_2 - cv_1', \quad c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}$$

Assim,

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'} v_1' = (1,1) - \frac{\langle (1,1),(2,1) \rangle}{(2,1),(2,1)} =$$

Exemplo

Seja $S = \{(2,1),(1,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Obtenha a partir de S uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Solução. $v_1 = (2,1), v_2 = (1,1)$

$$v_1' = v_1 = (2,1)$$

$$v_2' = v_2 - cv_1', \qquad c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}$$

Assim,

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'} v_1' = (1,1) - \frac{\langle (1,1),(2,1) \rangle}{(2,1),(2,1)} =$$

$$= (-1/5, 2/5).$$

Exemplo

Normalizando

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|}$$

Exemplo

Normalizando

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}),$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$$

Exemplo

Normalizando

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}),$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Exemplo

Normalizando

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}),$$

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Então $S' = \{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Considere uma base $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Então

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Considere uma base $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Então

$$v_1' = v_1 = (2, 1)$$

$$v_2' = v_2 - c v_1', \quad c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}$$

Assim $v_1' \perp v_2'$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Considere uma base $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Então

$$v_1' = v_1 = (2, 1)$$

$$v_2' = v_2 - c v_1', \quad c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}$$

Assim $v_1' \perp v_2'$. Vamos procurar v_3' ortogonal a v_1' e v_2'.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Considere uma base $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Então

$$v_1' = v_1 = (2, 1)$$
$$v_2' = v_2 - cv_1', \quad c = \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}$$

Assim $v_1' \perp v_2'$. Vamos procurar v_3' ortogonal a v_1' e v_2'. Por analogia, escolhemos

$$v_3' = v_3 - mv_2' - kv_1'$$

e escolhemos m, k tais que $\langle v_3', v_2' \rangle = \langle v_3', v_1' \rangle = 0$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} 0 = \langle v_3', v_1' \rangle =& \langle v_3 - m v_2' - k v_1', v_1' \rangle = \\ =& \langle v_3, v_1' \rangle - m \langle v_2', v_1' \rangle - k \langle v_1', v_1' \rangle \end{aligned}$$

Assim, como $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, temos $\langle v_3', v_1' \rangle = 0$ se, e somente se,

$$k = \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}.$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

$$
\begin{aligned}
0 = \langle v_3', v_1' \rangle = & \\
& = \langle v_3, v_1' \rangle - m\langle v_2', v_1' \rangle - k\langle v_1', v_1' \rangle
\end{aligned}
$$

Assim, como $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, temos $\langle v_3', v_1' \rangle = 0$ se, e somente se,

$$k = \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}.$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} 0 = \langle v_3', v_1' \rangle =& \langle v_3 - m v_2' - k v_1', v_1' \rangle = \\ =& \langle v_3, v_1' \rangle - m \langle v_2', v_1' \rangle - k \langle v_1', v_1' \rangle \end{aligned}$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned} 0 = \langle v_3', v_1' \rangle =& \langle v_3 - mv_2' - kv_1', v_1' \rangle = \\ =& \langle v_3, v_1' \rangle - m\langle v_2', v_1' \rangle - k\langle v_1', v_1' \rangle \end{aligned}$$

Assim, como $\langle v_2', v_1' \rangle = 0$, temos $\langle v_3', v_1' \rangle = 0$ se, e somente se,

$$k = \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{v_1', v_1'}.$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Da mesma forma, $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$ se, e somente se,

$$m = \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{v_2', v_2'}.$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Da mesma forma, $\langle v_3', v_2' \rangle = 0$ se, e somente se,

$$m = \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{v_2', v_2'}.$$

Portanto,

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'.$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos $v_4', v_5', \cdots, v_n'$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

A partir de uma base $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, construímos a base ortogonal $\{v_1', v_2', \cdots, v_n'\}$:

$$v_1' = v_1$$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

$$\cdots$$

$$v_n' = v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\langle v_{n-1}', v_{n-1}' \rangle} v_{n-1}' - \cdots - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1'$$

Se quisermos obter uma base ortonormal, basta normalizar os vetores $v_1', v_2', \cdots, v_n'$, tomando

$$u_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|}, u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \cdots, u_n = \frac{v_n'}{\|v_n'\|}$$

A base $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ é ortonormal.

Exercício

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $S = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ em uma base ortonormal.

Exercício

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $S = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ em uma base ortonormal. (**Resposta.**

$$\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\})$$