UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR
PROF.: JAIRO
ALUNO: FELIPE DERKIAN DE SOUSA FREITAS

PROVA I

BOA VISTA, 15 DE OUTUBRO DE 2020

Universidade Federal de Roraima
Departamento de Matemática
Álgebra Linear I - Prova 1

Data: 15/10/2020
Semestre 2020.1
Turma 1
Prof. Jairo

Responda quatro, dentre as dez questões abaixo.

Questão 1. (2,5 Pontos) Verique se são subespaços de $\mathbb{R}^3$:

a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ 3x + 2y - z = 0\}$;

b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ y = xz\}$.

Questão 2. (2,5 Pontos) Determine a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 5, 4)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, -7, -5)$, exibindo uma base do mesmo.

Questão 3. (2,5 Pontos) Exiba uma base do subespaço $U+W$, onde $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 ;\ x+y = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 ;\ x - y + w = z\}$, e determine a dimensão do subespaço $U \cap W$.

Questão 4. (2,5 Pontos) Verique se $B = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (3, 2, 1)\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Questão 5. (2,5 Pontos) Verique se o conjunto

$$N = \left\{ A = [a_{ij}]_{3\times 3} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) ;\ \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\}$$

é um subespaço de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Em caso armativo, determine a dimensão de N exibindo uma base do mesmo.

Nas questões 6 a 10, abaixo, V é um espaço vetorial de dimensão nita.

Questão 6. (2,5 Pontos) Seja V um espaço vetorial. Mostre que, para cada subespaço U de V, existe um subespaço W de V tal que $U \oplus W = V$.

Questão 7. (2,5 Pontos) Seja $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um subconjunto de um espaço vetorial V. Mostre que se X é L.I., então dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^*$ o conjunto $X^0 = \{\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n\}$ também é L.I.

Questão 8. (2,5 Pontos) Seja V é um espaço vetorial de dimensão nita, W_1 e W_2 subespaços de V, com $W_1 \oplus W_2 = V$. Prove que, se B_1 é base de W_1 e B_2 é base de W_2, então $B = B_1 \cup B_2$ é uma base de V.

Questão 9. (2,5 Pontos) Seja $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ um subconjunto de um espaço vetorial V. Mostre que se X é LI, então são LI os seguintes conjuntos:

a) $X^0 = \{v_1, v_2 + v_1, v_3 + v_1, v_4 + v_1\}$;

b) $X^{00} = \{v_1, v_2, v_3 + \alpha v_1, v_4\}$, $\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Questão 10. (2,5 Pontos) Prove que, se $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é um subconjunto de um espaço vetorial V tal que cada vetor u de $U = \text{Ger}\,X$ se escreve de modo único como combinação linear dos vetores de X . então X é uma base de U.

Observações:

i) Resolva as questões (escreva as soluções em uma folha branca, de preferência papel A4, para facilitar a visibilidade), em seguida digitalize as folhas com as soluções e rena-as em um (único) arquivo no formato PDF.

ii) assine em todas as folhas.

iii) o arquivo com as soluções deve ser enviado até às 17hs.

Felipe Werlion - Prova 1 - Álgebra linear

(Q1) Verifique se são subespaços de $\mathbb{R}^3$:

a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; 3x + 2y - z = 0\}$;

$u = (x_1, y_1, z_1) \in W_1$ implica que $3x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$

$v = (x_2, y_2, z_2) \in W_1$ implica que $3x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$

(1) $u + v$

$(3x_1 + 2y_1 - z_1) + (3x_2 + 2y_2 - z_2) = 0$

$3.(x_1 + x_2) + 2.(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$

isso mostra que

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W_1$

pois as coordenadas de $u + v$ satisfazem a equação

$3x + 2y - z = 0$

(2) Por outro lado $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1) \in W_1$ Pois,

$3x_1 + 2y - z = 0$ logo,

$\alpha(3x_1 + 2y - z) = \alpha 0$

$3(\alpha x_1) + 2(\alpha y) - (\alpha z) = 0$

logo W_1 é subespaço de $\mathbb{R}^3$

(Q1) (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; y = xz\}$.

Seja $V \in \mathbb{R}^3$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = xz\}$ ou $S = \{(x, x \cdot z, z) ; x, z \in \mathbb{R}\}$
isto é, a segunda componente (y) dos vetores precisam ser iguais ao produto de $x \cdot z$.

① $W_2 \neq 0$, pois $(0,0,0) \in W_2$.

Para u e $v \in W_2$:

$u = (x_1, x_1 z_1, z_1) \in W_2$ e $v = (x_2, x_2 z_2, z_2) \in W_2$ Temos:

① $u + v$

$$(x_1, x_1 z_1, z_1) + (x_2, x_2 z_2, z_2) = 0$$

$$(x_1 + x_2, x_1 z_1 + x_2 z_2, z_1 + z_2) = 0$$

$$\in W_2$$

② αu

$$\alpha u = \alpha \cdot (x_1, x_1 z_1, z_1)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha \cdot (x_1 z_1), \alpha z_1) \in W_2$$

logo W_2 é subespaço de $\mathbb{R}^3$

Felipe Dertinon

Felipe Wertrior

Q2) Determine a dimensão do Subespaço W de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v1 = (1,1,5,4)$, $v2 = (1,1,1,1)$ e $v3 = (1,1,-7,-5)$, exibindo uma base do mesmo.

para determinar a dimensão é necessário verificar se são LI e se geram W. Então

$$a.(1,1,5,4) + b(1,1,1,1) + c(1,1,-7,-5) = 0$$

$$(a,a,5a,4a) + (b,b,b,b) + (c,c,-7c,-5c) = (0,0,0,0)$$

$$(a+b+c,\ a+b+c,\ 5a+b-7c,\ 4a+b-5c) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+c=0 \\ 5a+b-7c=0 \\ 4a+b-5c=0 \end{cases} \xrightarrow{L1 \leftarrow L1 - L2} \begin{cases} 0+0+0=0 \\ a+b+c=0 \\ 5a+b-7c=0 \\ 4a+b-5c=0 \end{cases}$$

Como temos uma linha nula isso mostra que temos 4 vetores onde são LD. portanto a $\underline{\dim W = 3}$ que é a quantidade de vetores não nulos.

$$\dim W = 3$$

Felipe Dervian

(Q4) Verifique se $B = \{(1,2,3),(4,5,6),(3,2,1)\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

(I) B é LI?

$a(1,2,3)+b(4,5,6)+c(3,2,1)=0$

$(a,2a,3a)+(4b,5b,6b)+(3c,2c,c)=(0,0,0)$

$(a+4b+3c,\ 2a+5b+2c,\ 3a+6b+c)=(0,0,0)$

$$\text{(1)}\begin{cases} a+4b+3c=0 \\ 2a+5b+2c=0 \\ 3a+6b+c=0 \end{cases} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-2L_1} \text{(2)}\begin{cases} a+4b+3c=0 \\ -3b-4c=0 \\ 3a+6b+c=0 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-3L_1}$$

$$\text{(3)}\begin{cases} a+4b+3c=0 \\ -3b-4c=0 \\ -6b-8c=0 \end{cases} \xrightarrow{L_2\leftarrow L_2\cdot -\frac{1}{3}} \text{(4)}\begin{cases} a+4b+3c=0 \\ b+\frac{4c}{3}=0 \\ -6b-8c=0 \end{cases} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3+6L_2}$$

$$\text{(5)}\begin{cases} a+4b+3c=0 \\ b+\frac{4c}{3}=0 \\ 0a+0b+0c=0 \end{cases}$$

* Logo o sistema Indeterminado e possui infinitas soluções. Portanto é LD e não forma uma base do $\mathbb{R}^3$.

Q10 Prove que, se $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é um subconjunto de um espaço vetorial V tal que cada vetor u de $V = \text{Ger}\,X$ se escreve de modo único como combinação linear dos vetores de X, então X é uma base de V.

De fato, se $X \subset V$ e V é gerado pelos vetores de X, logo os vetores de X são linearmente independentes e formam uma base para o subespaço vetorial V logo que escrevem-se de modo único (LI) logo forma uma base de V. Logo X é base de V, pois pela Definição a base deve ser L.I. e a base deve gerar V.

Felipe Verkian