Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Q^t$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

PULINUS

Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Universidade Estadual de Campinas

E–mail: pulino@ime.unicamp.br

www.ime.unicamp.br/∼pulino/ALESA/

Janeiro de 2012

Conteúdo

7

Funcionais Lineares e Espaço Dual

Conteúdo

7.1 Introdução

7.2 Funcionais Lineares

Definição 7.2.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um* ***Funcional Linear*** *sobre V é uma aplicação $J : V \longrightarrow \mathbb{F}$ com as seguintes propriedades:*

(a) $J(u + v) = J(u) + J(v) \quad ; \quad \forall\, u,\, v \in V$

(b) $J(\lambda u) = \lambda J(u) \quad ; \quad \forall\, u \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{F}$

Podemos observar facilmente que um funcional linear é uma transformação linear de V em $\mathbb{F}$, onde estamos considerando $\mathbb{F}$ como um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Assim, estamos indicando por $\mathbb{F}$ tanto o corpo como o espaço vetorial.

Exemplo 7.2.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ uma base ordenada para V. A aplicação*

$$\begin{aligned} T_i : \; V &\longrightarrow \mathbb{F} \\ u &\longrightarrow T_i(u) = \alpha_i \end{aligned}$$

onde α_i é a i–ésima coordenada do elemento u com relação à base ordenada β, é um funcional linear sobre V.

Exemplo 7.2.2 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. A aplicação*

$$\begin{aligned} Tr : \quad \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A = [a_{ij}] &\longrightarrow Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

que é o traço da matriz A, é um funcional linear sobre $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 7.2.3 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}([a,b])$. A aplicação*

$$\begin{aligned} T : \; \mathcal{C}([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow T(f) = \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

é um funcional linear sobre $\mathcal{C}([a,b])$.

Definição 7.2.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ munido da norma $\|\cdot\|$. Dizemos que o funcional $J : V \longrightarrow \mathbb{F}$ é limitado, se existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ positiva tal que*

$$|\,J(u)\,| \;\leq\; c\,\|\,u\,\| \qquad \textit{para todo} \qquad u \,\in\, V\,.$$

Definição 7.2.3 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ munido da norma $\|\cdot\|$. A **norma** do funcional $J : V \longrightarrow \mathbb{F}$, induzida pela norma $\|\cdot\|$, é definida por:*

$$|\!|\!|\,J\,|\!|\!| \;=\; \max\left\{\,\frac{|\,J(u)\,|}{\|\,u\,\|} \quad ; \quad \|\,u\,\| \,\neq\, 0\,\right\}$$

Exemplo 7.2.4 *Na Definição 7.2.3, se J é um funcional linear sobre V, podemos verificar facilmente que uma forma alternativa para a definição da norma do funcional linear J é dada por:*

$$|\!|\!|\,J\,|\!|\!| \;=\; \max\{\,|\,J(u)\,| \quad ; \quad \|\,u\,\| \,=\, 1\,\}$$

Podemos verificar facilmente que da Definição 7.2.3, segue que

$$|\,J(u)\,| \;\leq\; |\!|\!|\,J\,|\!|\!|\,\|\,u\,\| \qquad \text{para todo} \qquad u \,\in\, V\,.$$

Essa desigualdade será muito utilizada nas nossas análises.

Exemplo 7.2.5 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ munido do produto interno $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$. Considerando $\overline{v} \in V$ fixo, porém arbitrário. A aplicação definida por:*

$$\begin{aligned} T:\; V &\longrightarrow \mathbb{F} \\ u &\longrightarrow T(u) \,=\, \langle\, u\,,\,\overline{v}\,\rangle \end{aligned}$$

é um funcional linear limitado sobre V. Além disso, $|\!|\!|\,T\,|\!|\!|_2 \,=\, \|\,\overline{v}\,\|_2$.

Exemplo 7.2.6 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{C}([a,b])$ munido do produto interno*

$$\langle\, f\,,\,g\,\rangle \;=\; \int_a^b f(x)g(x)dx\,.$$

A aplicação $J : \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$J(f) \;=\; \int_a^b f(x)dx$$

é um funcional linear limitado sobre $\mathcal{C}([a,b])$. Além disso, $|\!|\!|\,J\,|\!|\!|_2 \,=\, \sqrt{b\,-\,a}\,.$

Exemplo 7.2.7 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([a,b])$ *munido da norma*

$$\| f \|_{\infty} = \max\{ \, | f(x) | \quad ; \quad x \in [a,b] \, \} \, .$$

A aplicação $J : \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow I\!R$ *definida por:*

$$J(f) = \int_{a}^{b} f(x) dx$$

é um funcional linear limitado sobre $\mathcal{C}([a,b])$*. Além disso,* $\|| J \||_{\infty} = b - a$*.*

Exemplo 7.2.8 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([-1,1])$ *munido da norma*

$$\| f \|_{\infty} = \max\{ \, | f(x) | \quad ; \quad x \in [-1,1] \, \} \, .$$

A aplicação $J : \mathcal{C}([-1,1]) \longrightarrow I\!R$ *definida por:*

$$J(f) = \int_{-1}^{0} f(x) dx - \int_{0}^{1} f(x) dx$$

é um funcional linear limitado sobre $\mathcal{C}([-1,1])$*. Além disso,* $\|| J \||_{\infty} = 2$*.*

Exemplo 7.2.9 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([a,b])$ *munido da norma*

$$\| f \|_{\infty} = \max\{ \, | f(x) | \quad ; \quad x \in [a,b] \, \} \, .$$

A aplicação $J : \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow I\!R$ *definida por:*

$$J(f) = f(x_0) \qquad para \qquad x_0 \in [a,b] \;\; fixo$$

é um funcional linear limitado sobre $\mathcal{C}([a,b])$*. Além disso,* $\|| J \||_{\infty} = 1$*.*

Exemplo 7.2.10 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $I\!F$ *munido da norma* $\| \cdot \|$*. A aplicação* ***norma*** $\| \cdot \| : V \longrightarrow I\!R$ *é um funcional sobre* V*, entretanto, não é linear.*

Exercícios

Exercício 7.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. *Mostre que a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p(x) & \longrightarrow & J(p(x)) \ = \ 2p'(0) \ + \ p''(1) \end{array}$$

é um funcional linear sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercício 7.2 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Mostre que a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p(x) & \longrightarrow & J(p(x)) \ = \ \displaystyle\int_0^1 p(x)dx \end{array}$$

é um funcional linear sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 7.3 *Sejam o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *com a base ordenada*

$$\gamma \ = \ \{ \ (1,0,1), \ (1,1,0), \ (0,1,1) \ \}$$

e o espaço vetorial real $\mathbb{R}$ *com a base* $\alpha \ = \ \{ \ -2 \ \}$. *Considere o funcional linear* J *sobre o* $\mathbb{R}^3$ *definido por* $J(x,y,z) \ = \ x - 2y + 3z$. *Determine a representação matricial do funcional* J, *isto é, a matriz* $[J]^{\gamma}_{\alpha}$.

Exercício 7.4 *Sejam o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *com a base canônica*

$$\beta \ = \ \{ \ 1, \ x, \ x^2 \ \}$$

e o espaço vetorial real $\mathbb{R}$ *com a base* $\gamma \ = \ \{ \ 1 \ \}$. *Considere o funcional linear*

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p(x) & \longrightarrow & J(p(x)) \ = \ \displaystyle\int_{-1}^1 p(x)dx \end{array}$$

Determine a representação matricial do funcional J, *isto é, a matriz* $[J]^{\beta}_{\gamma}$.

Exercício 7.5 *Sejam o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ 1, 1 - x, 1 + x^2 \}$$

e o espaço vetorial real $\mathbb{R}$ *com a base* $\alpha = \{ 2 \}$. *Considere o funcional linear*

$$\begin{aligned} J : \ \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &\longrightarrow J(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx \end{aligned}$$

Determine a representação matricial do funcional J, *isto é, a matriz* $[J]^{\gamma}_{\alpha}$.

Exercício 7.6 *Sejam o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *com a base canônica*

$$\beta = \{ 1, x, x^2 \}$$

e o espaço vetorial real $\mathbb{R}$ *com a base* $\gamma = \{ -1 \}$. *Considere o funcional linear*

$$\begin{aligned} J : \ \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &\longrightarrow J(p(x)) = 2p'(0) + p''(1) \end{aligned}$$

Determine a representação matricial do funcional J, *isto é, a matriz* $[J]^{\beta}_{\gamma}$.

Exercício 7.7 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([0,1])$ *munido da norma* $\| \cdot \|_\infty$. *Mostre que a aplicação* $J : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$J(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

para $g \in \mathcal{C}([0,1])$ *fixa, porém arbitrária, é um funcional linear limitado sobre* $\mathcal{C}([a,b])$ *e determine* $\| J \|_\infty$.

Exercício 7.8 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([0,1])$ *munido da norma* $\| \cdot \|_\infty$. *Mostre que a aplicação* $J : \mathcal{C}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$J(f) = \alpha f(0) + \beta f(1) \qquad \textit{para} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

é um funcional linear limitado sobre $\mathcal{C}([0,1])$ *e determine* $\| J \|_\infty$.

Exercício 7.9 *Sejam o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *e o funcional linear* J *definido por:*

$$J(u) \;=\; 2x \,+\, y \,-\, z \qquad \textit{para todo} \qquad u \,=\, (x, y, z) \,\in\, \mathbb{R}^3 \,.$$

Determine uma base para o subespaço $Ker(J)$.

Exercício 7.10 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$, *com* $dim(V) = n$, *e* $J : V \longrightarrow \mathbb{F}$ *um funcional linear. Quais são as possíveis dimensões do subespaço vetorial* $Ker(J)$ *?*

Exercício 7.11 *Sejam o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *e o funcional* J *definido por:*

$$J(p(x)) \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)dx \;+\; p'(0) \qquad \textit{para todo} \qquad p(x) \,\in\, \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,.$$

Mostre que J *é um funcional linear sobre* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *e determine uma base para* $Ker(J)$.

7.3 Espaço Dual

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Denotamos por $L(V, \mathbb{F})$ o conjunto de todos os funcionais lineares sobre V, isto é,

$$L(V, \mathbb{F}) = \{ \, J : V \longrightarrow \mathbb{F} \ / \ J \text{ é um funcional linear} \, \} .$$

Pelo Teorema 4.6.1, sabemos que $L(V, \mathbb{F})$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$.

Exemplo 7.3.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ uma base ordenada para V. O funcional linear definido por:*

$$\begin{aligned} J_i : \ V & \longrightarrow \mathbb{F} \\ v & \longrightarrow J_i(v) = c_i \end{aligned}$$

onde

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

*é o vetor de coordenadas do elemento $v \in V$, tem um importante papel na teoria de espaço dual, como veremos a seguir. O funcional J_i é denominado i–**ésima função coordenada** com respeito à base ordenada β.*

Note que $J_i(v_j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad i = j \\ \\ 0 & \text{para} \quad i \neq j \end{cases}$$

Definição 7.3.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. O espaço vetorial $L(V, \mathbb{F})$ sobre o corpo $\mathbb{F}$ é denominado o **espaço dual** do espaço vetorial V, que denotamos por V^*.*

Observamos no Exemplo 7.3.1, que os funcionais J_i, para $i = 1, \cdots, n$, pertencem ao espaço dual V^*. Além disso, pelo Teorema 4.2.1, existe um único funcional linear J_i, para cada i, tal que $J_i(v_j) = \delta_{ij}$. Desse modo, a partir de uma base ordenada β, obtemos um único conjunto de n funcionais distintos $J_1, \cdots, J_n$ sobre V.

Teorema 7.3.1 *Considere V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ com $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ uma base ordenada para V. Sejam J_i a i–ésima função coordenada com respeito à base ordenada β, para $i = 1, \cdots n$, e $\beta^* = \{ J_1, \cdots, J_n \}$. Então, β^* é uma base ordenada para o espaço dual V^*, denominada **base dual** da base β. Além disso, todo funcional linear $T \in V^*$ é representado da seguinte forma:*

$$T = \sum_{i=1}^{n} T(v_i) J_i$$

e cada elemento $v \in V$ é escrito como:

$$v = \sum_{i=1}^{n} J_i(v) v_i \,.$$

Assim, temos que $dim(V^*) = n$.

Demonstração – Devemos mostrar que o conjunto $\beta^* = \{ J_1, \cdots, J_n \}$ é linearmente independente em V^* e gera o espaço dual V^*.

Primeiramente, vamos mostrar que o conjunto β^* é linearmente independente no espaço dual V^*. Para isso, consideramos a seguinte combinação linear

$$T = \sum_{i=1}^{n} c_i J_i \qquad \text{para} \qquad c_i \in \mathbb{F} \,.$$

Desse modo, tomando

$$\begin{aligned} T(v_j) &= \sum_{i=1}^{n} c_i J_i(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} \\ &= c_j \end{aligned}$$

para $j = 1, \cdots, n$. Em particular, se T é o funcional linear nulo, isto é, T é o elemento neutro do espaço dual V^*, temos que $T(v_j) = 0$ para cada j. Logo, os escalares c_j são todos nulos. Portanto, mostramos que o conjunto β^* é linearmente independente no espaço dual V^*.

Finalmente, vamos mostrar que β^* é um sistema de geradores para o espaço dual V^*.

Como $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ é uma base para V, temos que todo elemento $v \in V$ é representado de modo único por:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i \, v_i = \sum_{i=1}^{n} J_i(v) \, v_i \; .$$

Assim, dado um funcional linear $T \in V^*$, com $T(v_i) = \alpha_i$, temos que

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} J_i(v) \, T(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, J_i(v) \qquad \text{para todo} \qquad v \in V \; .$$

Desse modo, mostramos que todo funcional $T \in V^*$ é escrito de modo único como:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, J_i \; .$$

Portanto, provamos que $V^* = [J_1, \cdots, J_n]$. Logo, $\beta^* = \{ J_1, \cdots, J_n \}$ é uma base para o espaço dual V^* e $dim(V^*) = n$, o que completa a demonstração. ■

Pela observação feita logo abaixo da Definição 7.3.1, podemos concluir que existe uma única base dual β^* relativa à base ordenada β do espaço vetorial V.

Podemos observar facilmente que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, J_i(v_j) = \alpha_j \qquad \text{para} \qquad j = 1, \cdots, n \; .$$

Assim, temos que a representação matricial do funcional linear $T \in V^*$ em relação às bases ordenadas β de V e $\gamma = \{ 1 \}$ de $\mathbb{F}$ é dada por:

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} ,$$

que é uma matriz de ordem $1 \times n$. Além disso, podemos observar que

$$[T]_{\beta^*} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} ,$$

é o vetor de coordenadas do funcional T com relação à base dual β^*.

Exemplo 7.3.2 *Podemos verificar facilmente que todo funcional linear sobre o espaço vetorial* $I\!F^n$, *isto é,* $T : I\!F^n \longrightarrow I\!F$, *é representado da forma:*

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \quad \textit{para todo} \quad (x_1, \cdots, x_n) \in I\!F^n,$$

para certos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I\!F$ *definidos por uma base ordenada de* $I\!F^n$.

De fato, considerando o espaço vetorial $I\!F^n$ com a base canônica $\beta = \{ e_1, \cdots, e_n \}$, temos que todo elemento $u = (x_1, \cdots, x_n) \in I\!F^n$ é escrito de modo único como:

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n .$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} T(x_1, \cdots, x_n) &= x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n) \\ &= \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \end{aligned}$$

onde $\alpha_i = T(e_i) \in I\!F$ para $i = 1, \cdots, n$.

Por outro lado, dados os escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I\!F$, podemos verificar facilmente que a aplicação $T : I\!F^n \longrightarrow I\!F$ definida por:

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

é um funcional linear sobre $I\!F^n$, o que completa a resolução da questão.

Exemplo 7.3.3 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *com a base canônica*

$$\beta = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$$

e o funcional linear T *sobre o* $I\!R^3$ *definido por* $T(x,y,z) = 2x - 3y + z$.

Temos que todo elemento $u = (x,y,z) \in I\!R^3$ é escrito como:

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= x e_1 + y e_2 + z e_3 \\ (x,y,z) &= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) . \end{aligned}$$

Desse modo, para todo $(x,y,z) \in I\!R^3$, temos que

$$T(x,y,z) = x\,T(e_1) + y\,T(e_2) + z\,T(e_3) = 2x - 3y + z .$$

Podemos verificar facilmente que a representação matricial do funcional linear T em relação às bases ordenadas β de $I\!R^3$ e $\gamma = \{ 1 \}$ de $I\!R$ é dada por:

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 7.3.4 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ uma base ordenada para V e T um funcional linear sobre V. Podemos verificar facilmente que o funcional T é representado da forma:*

$$T(v) = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n \qquad \text{para todo} \qquad v \in V ,$$

para certos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ definidos pela base β e o elemento v escrito de modo único como:

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j .$$

De fato, aplicando o funcional T no elemento v, obtemos

$$\begin{aligned} T(v) &= c_1 T(v_1) + \cdots + c_n T(v_n) \\ &= \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n \end{aligned}$$

onde $\alpha_i = T(v_i) \in \mathbb{F}$ para $i = 1, \cdots, n$.

Por outro lado, dados os escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, podemos verificar facilmente que a aplicação $T : V \longrightarrow \mathbb{F}$ definida por:

$$T(v) = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n$$

é um funcional linear sobre V.

Exemplo 7.3.5 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com a base canônica*

$$\beta = \{ p_1(x) = 1 , \ p_2(x) = x , \ p_3(x) = x^2 \}$$

e o funcional linear T sobre o $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por $T(p(x)) = p(1) + p'(1)$.

Temos que todo polinômio $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é escrito como:

$$p(x) = a + bx + cx^2 \qquad \text{para} \qquad a, b, c \in \mathbb{R} .$$

Desse modo, para todo $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, temos que

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= a\,T(p_1(x)) + b\,T(p_2(x)) + c\,T(p_3(x)) \\ &= a + 2b + 3c \end{aligned}$$

onde $T(p_1(x)) = 1$, $T(p_2(x)) = 2$ e $T(p_3(x)) = 3$.

Exemplo 7.3.6 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *e os seguintes elementos*

$$v_1 = (1,0,1) \quad , \quad v_2 = (0,1,-2) \qquad e \qquad v_3 = (-1,-1,0) \, .$$

Pede–se:

(a) Considere o funcional linear T *sobre o* $I\!R^3$ *tal que*

$$T(v_1) = 1 \quad , \quad T(v_2) = -1 \qquad e \qquad T(v_3) = 3 \, .$$

Determine explicitamente a expressão do funcional T.

(b) Seja T *um funcional linear sobre o* $I\!R^3$ *tal que*

$$T(v_1) = T(v_2) = 0 \qquad e \qquad T(v_3) \neq 0 \, .$$

Determine explicitamente a expressão do funcional T.

(c) Seja T *um funcional linear sobre o* $I\!R^3$ *tal que*

$$T(v_1) = T(v_2) = 0 \qquad e \qquad T(v_3) \neq 0 \, .$$

Mostre que $T(2,3,-1) \neq 0$.

(a) Podemos verificar facilmente que $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ é uma base ordenada para $I\!R^3$. Assim, todo elemento $(x,y,z) \in I\!R^3$ é escrito de modo único como:

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 \\ &= a(1,0,1) + b(0,1,-2) + c(-1,-1,0) \end{aligned}$$

com $a = 2x - 2y - z$, $b = x - y - z$ e $c = x - 2y - z$.

Desse modo, temos que

$$T(x,y,z) = a\,T(v_1) + b\,T(v_2) + c\,T(v_3) = 4x - 7y - z \, .$$

para todo $(x,y,z) \in I\!R^3$.

(b) Considerando que $T(v_3) = \alpha \neq 0$ e do resultado do item **(a)**, temos que

$$T(x,y,z) = \alpha\,(x - 2y - z) \qquad \text{para todo} \qquad (x,y,z) \in I\!R^3 \, .$$

(c) Considerando o resultado do item **(b)**, temos que

$$T(2,3,-1) = -3\alpha \neq 0$$

pois $\alpha \neq 0$.

Exemplo 7.3.7 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1) \}$$

e o funcional linear T *sobre o* $I\!R^3$ *definido por* $T(x,y,z) = 2x - 3y + z$*.*

Vamos determinar a representação matricial do funcional linear T *em relação às bases ordenadas* γ *de* $I\!R^3$ *e* $\alpha = \{ 2 \}$ *de* $I\!R$*.*

Inicialmente vamos obter a representação de $T(v_j)$, onde v_j são os elementos da base ordenada γ, em relação à base $\alpha = \{ 2 \}$ de $I\!R$

$$\begin{aligned} T(1,0,1) &= 3 = 2\,\frac{3}{2} \\ T(1,1,0) &= -1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) \\ T(0,1,1) &= -2 = 2\,(-1) \end{aligned}$$

Desse modo, temos que a representação matricial do funcional linear T em relação às bases ordenadas γ de $I\!R^3$ e $\alpha = \{ 2 \}$ de $I\!R$ é dada por:

$$[T]^{\gamma}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que todo elemento $(x,y,z) \in I\!R^3$ é escrito de modo único como:

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a\,v_1 + b\,v_2 + c\,v_3 \\ &= a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1) \end{aligned}$$

com

$$a = \frac{x - y + z}{2} \quad , \quad b = \frac{x + y - z}{2} \quad \text{e} \quad c = \frac{-x + y + z}{2}.$$

Considerando o elemento $u = (1,2,1) \in I\!R^3$ temos que

$$[u]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que $[T(u)]_{\alpha} = [T]^{\gamma}_{\alpha}\,[u]_{\gamma}$, isto é,

$$[T(u)]_{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}.$$

De fato, $T(1,2,1) = -3 = 2\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Exemplo 7.3.8 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ (2,1), (3,1) \}$$

e vamos denotar por $\gamma^* = \{ J_1, J_2 \}$ *a base dual. Determinar explicitamente as expressões dos funcionais* J_1 *e* J_2.

Para isso, procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_1(v_1) &= J_1(2e_1 + e_2) = 2J_1(e_1) + J_1(e_2) = 1 \\ J_1(v_2) &= J_1(3e_1 + e_2) = 3J_1(e_1) + J_1(e_2) = 0 \end{aligned}$$

onde $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (3,1)$, são os elementos da base ordenada γ, e $\beta = \{ e_1, e_2 \}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Desse modo, obtemos $J_1(e_1) = -1$ e $J_1(e_2) = 3$. Logo, temos que

$$J_1(x,y) = -x + 3y \qquad \text{para todo} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

De modo análogo, determinamos a expressão do funcional J_2.

$$\begin{aligned} J_2(v_1) &= J_2(2e_1 + e_2) = 2J_2(e_1) + J_2(e_2) = 0 \\ J_2(v_2) &= J_2(3e_1 + e_2) = 3J_2(e_1) + J_2(e_2) = 1 \end{aligned}$$

Assim, obtemos $J_2(e_1) = 1$ e $J_2(e_2) = -2$. Logo, temos que

$$J_2(x,y) = x - 2y \qquad \text{para todo} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Exemplo 7.3.9 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ (1,1), (1,-1) \}$$

e vamos denotar por $\gamma^* = \{ J_1, J_2 \}$ *a base dual. De modo análogo, determinamos explicitamente as expressões dos funcionais* J_1 *e* J_2. *Assim, temos que*

$$J_1(x,y) = \frac{1}{2}(x + y) \qquad e \qquad J_2(x,y) = \frac{1}{2}(x - y)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 7.3.10 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *com a base canônica*

$$\beta = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$$

e vamos denotar por $\beta^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *a base dual. De modo análogo, determinamos explicitamente as expressões dos funcionais da base dual.*

$$J_1(x,y,z) = x \quad , \quad J_2(x,y,z) = y \quad \text{e} \quad J_3(x,y,z) = z$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Note que,* $J_i(e_j) = \delta_{ij}$ *para* $i, j = 1, 2, 3$.

Exemplo 7.3.11 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *com a base canônica*

$$\beta = \{ 1, x, x^2 \}$$

e vamos denotar por $\beta^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *a base dual. De modo análogo, determinamos explicitamente as expressões dos funcionais da base dual.*

Para isso, procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_1(p_1(x)) &= 1 \quad , \quad J_1(p_2(x)) = 0 \quad \text{e} \quad J_1(p_3(x)) = 0 \\ J_2(p_1(x)) &= 0 \quad , \quad J_2(p_2(x)) = 1 \quad \text{e} \quad J_2(p_3(x)) = 0 \\ J_3(p_1(x)) &= 0 \quad , \quad J_3(p_2(x)) = 0 \quad \text{e} \quad J_3(p_3(x)) = 1 \end{aligned}$$

onde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ e $p_3(x) = x^2$, são os elementos da base canônica β.

Desse modo, para todo $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, temos que

$$J_1(p(x)) = a \quad , \quad J_2(p(x)) = b \quad \text{e} \quad J_3(p(x)) = c$$

Exemplo 7.3.12 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1) \}$$

e vamos denotar por $\gamma^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *a base dual. De modo análogo, determinamos explicitamente as expressões dos funcionais da base dual. Assim, temos que*

$$\begin{aligned} J_1(x,y,z) &= \frac{1}{2}(x - y + z) \\ J_2(x,y,z) &= \frac{1}{2}(x + y - z) \\ J_3(x,y,z) &= \frac{1}{2}(-x + y + z) \end{aligned}$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $I\!F$. Neste momento uma questão importante que surge é se toda base de V^* é a base dual de alguma base de V. Para isso, vamos fazer um rápido estudo do espaço dual de V^*, isto é, $V^{**} = (V^*)^*$.

Considere um elemento $v \in V$, arbitrário. A aplicação L_v sobre V^* dada por:

$$L_v(T) = T(v) \qquad \text{para} \qquad T \in V^*$$

é um funcional linear sobre V^*. De fato,

$$L_v(\lambda T_1 + T_2) = (\lambda T_1 + T_2)(v) = \lambda T_1(v) + T_2(v) = \lambda L_v(T_1) + L_v(T_2) ,$$

para $T_1 , T_2 \in V^*$ e $\lambda \in I\!F$. Assim, temos que $L_v \in V^{**}$.

Lema 7.3.1 *Considere V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $I\!F$. Seja $v \in V$ um elemento não–nulo. Então, existe um funcional linear T sobre V tal que $T(v) \neq 0$. Equivalentemente, se $L_v(T) = 0$ para todo $T \in V^*$, então $v = 0$.*

Demonstração – Como v é um elemento não–nulo de V, existe uma base ordenada $\beta = \{ v_1, \cdots , v_n \}$ de V tal que $v_1 = v$. Considerando que $\beta^* = \{ J_1, \cdots , J_n \}$ é a base dual da base β, temos que $J_1(v_1) = J_1(v) = 1 \neq 0$. ■

Teorema 7.3.2 *Considere V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $I\!F$ e para cada elemento $v \in V$ definimos o funcional linear L_v sobre V^* por:*

$$L_v(T) = T(v) \qquad para \qquad T \in V^* .$$

Então, a aplicação $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ definida por $\varphi(v) = L_v$ é um isomorfismo.

Demonstração – Primeiramente vamos mostrar que a aplicação φ é linear. De fato, sejam $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!F$. Chamando $w = \lambda u + v$, para todo $T \in V^*$, temos que

$$\varphi(\lambda u + v)(T) = L_w(T) = \lambda T(u) + T(v) = \lambda L_u(T) + L_v(T) .$$

Assim, temos que $\varphi(\lambda u + v) = \lambda L_u + L_v = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$. Logo, mostramos que a aplicação φ é uma transformação linear de V em V^{**}.

Pelo Lema 7.3.1, temos que a aplicação φ é injetora, pois $\varphi(v) = L_v$ é o funcional nulo se, e somente se, $v = 0_V$. Pelo Teorema 7.3.1, sabemos que

$$dim(V^{**}) = dim(V^*) = dim(V) .$$

Portanto, φ é sobrejetora. Logo, φ é um isomorfismo de V em V^{**}. ■

Corolário 7.3.1 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *e* V^* *o espaço dual de* V*. Então, toda base ordenada de* V^* *é a base dual de alguma base ordenada de* V*.*

Demonstração – Seja $\beta^* = \{ J_1, \cdots, J_n \}$ uma base ordenada de V^*. Sabemos, pelo Teorema 7.3.1, que existe uma base ordenada $\beta^{**} = \{ L_1, \cdots, L_n \}$ de V^{**}, que é a base dual da base β^*, isto é,

$$L_i(J_j) = \delta_{ij} .$$

Pelo Teorema 7.3.2, sabemos que os espaços vetoriais V e V^{**} são isomorfos, isto é, para cada i existe um elemento $v_i \in V$ tal que $\varphi(v_i) = L_{v_i}$, onde φ é um isomorfismo de V em V^{**}. Desse modo, temos que

$$L_i(T) = L_{v_i}(T) = T(v_i) \qquad \text{para} \qquad T \in V^* .$$

Assim, temos que $\beta = \{ v_1, \cdots, v_n \}$ é uma base ordenada para V de modo que β^* é a sua base dual, o que completa a demonstração. ∎

Exemplo 7.3.13 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$*. Para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *definimos os seguintes funcionais lineares*

$$J_1(x,y) = \frac{x - y}{2} \qquad e \qquad J_2(x,y) = \frac{x + y}{2}.$$

Podemos verificar facilmente que $\gamma^* = \{ J_1, J_2 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(\mathbb{R}^2)^*$*, bastando mostra que* γ^* *é linearmente independente em* $(\mathbb{R}^2)^*$*, e que* $\gamma = \{ v_1, v_2 \}$*, onde* $v_1 = (1, -1)$ *e* $v_2 = (1, 1)$*, é a base ordenada de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* γ^* *é a sua base dual.*

Considerando o funcional linear $J(x, y) = x - 2y$ sobre o $\mathbb{R}^2$, temos que $J(v_1) = 3$ e $J(v_2) = -1$. Logo, sabemos que

$$[J]_\alpha^\gamma = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [J]_{\gamma^*} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

onde estamos tomando $\alpha = \{ 1 \}$ a base de $\mathbb{R}$.

Desse modo, dado o elemento $u = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$J(u) = 3J_1(u) - J_2(u) = -3 - 2 = -5.$$

De fato, avaliando J no ponto $(1, 3) \in \mathbb{R}^2$, obtemos $J(1, 3) = -5$.

Note que, podemos obter o mesmo resultado utilizando o fato que

$$[J]_\alpha = [J]_\alpha^\gamma \, [u]_\gamma .$$

Podemos verificar facilmente que

$$[u]_\gamma = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que

$$[J]_\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -5.$$

Portanto, obtemos $J(1, 3) = -5$, lembrando que $\alpha = \{ 1 \}$ é a base de $\mathbb{R}$, o que completa uma primeira exemplificação da teoria exposta anteriormente.

Exemplo 7.3.14 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. *Para todo* $p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, *definimos os funcionais lineares*

$$J_1(p(x)) = p(1) \qquad e \qquad J_2(p(x)) = p'(1)\,.$$

Verificamos facilmente que $\gamma^* = \{ J_1, J_2 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))^*$, *bastando mostra que* γ^* *é linearmente independente em* $(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))^*$. *Denotando a base ordenada* $\gamma = \{ q_1(x), q_2(x) \}$ *para* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *de modo que* γ^* *seja sua base dual, temos que* $J_i(q_j(x)) = \delta_{ij}$. *Desse modo, obtemos*

$$q_1(x) = 1 \qquad e \qquad q_2(x) = x - 1\,.$$

Considerando o funcional linear $J \in (\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))^*$ definido por:

$$J(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx\,,$$

sabemos que $J = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2$, onde

$$\alpha_1 = J(q_1) = \int_0^1 q_1(x)dx = 1 \qquad \text{e} \qquad \alpha_2 = J(q_2) = \int_0^1 q_2(x)dx = -\frac{1}{2}\,.$$

Desse modo, temos que

$$J(p(x)) = J_1(p(x)) - \frac{1}{2}J_2(p(x)) \qquad \text{para todo} \qquad p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})\,.$$

Assim, o vetor de coordenadas do funcional J em relação à base dual γ^* é dado por:

$$[J]_{\gamma^*} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Para exemplificar, consideramos o polinômio $q(x) = 2 + 3x$ e vamos calcular o valor $J(q(x))$ que é dado por:

$$J(q(x)) = J_1(q(x)) - \frac{1}{2}J_2(q(x)) = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}\,.$$

Por outro lado, fazendo o calculo diretamente da definição do funcional J obtemos

$$J(q(x)) = \int_0^1 (2 + 3x)dx = \frac{7}{2}\,.$$

Exemplo 7.3.15 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$. *Definimos os funcionais lineares*

$$J_1(x,y,z) = x \quad , \quad J_2(x,y,z) = -x + y \qquad e \qquad J_3(x,y,z) = -x + y - z$$

para todo elemento $(x,y,z) \in I\!R^3$.

Mostre que $\gamma^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(I\!R^3)^*$. *Determine uma base ordenada* γ *para* $I\!R^3$ *de modo que* γ^* *seja sua base dual.*

Sabemos que a dimensão do espaço dual $(I\!R^3)^*$ é igual a três. Assim, basta mostrar que γ^* é linearmente independente. Tomando a combinação linear nula

$$aJ_1(x,y,z) + bJ_2(x,y,z) + cJ_3(x,y,z) = 0$$

e avaliando nos elementos da base canônica $\beta = \{ e_1, e_2, e_3 \}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \\ \qquad b + c = 0 \\ \qquad\quad - c = 0 \end{cases}$$

que possui somente solução trivial $a = b = c = 0$. Desse modo, provamos que γ^* é linearmente independente em $L(I\!R^3, I\!R)$.

Por simplicidade, denotamos a base ordenada $\gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$. Inicialmente, vamos determinar o primeiro elemento $v_1 = (a,b,c)$ que pode ser representado por:

$$v_1 = ae_1 + be_2 + ce_3 \qquad \text{para} \qquad a,\, b,\, c, \in I\!R^3 \,.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} J_1(v_1) &= aJ_1(e_1) + bJ_1(e_2) + cJ_1(e_3) = 1 \\ J_2(v_1) &= aJ_2(e_1) + bJ_2(e_2) + cJ_2(e_3) = 0 \\ J_3(v_1) &= aJ_3(e_1) + bJ_3(e_2) + cJ_3(e_3) = 0 \end{aligned}$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases}$$

que possui como única solução $a = 1$, $b = 1$ e $c = 0$. Logo, $v_1 = (1,1,0)$. De modo análogo, determinamos os elementos v_2 e v_3. Desse modo, o espaço vetorial real $I\!R^3$ tem como base ordenada $\gamma = \{ (1,1,0), (0,1,1), (0,0,-1) \}$, cuja base dual é γ^*.

Exemplo 7.3.16 *Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Definimos os funcionais lineares*

$$J_1(p(x)) = p(-1) \qquad e \qquad J_2(p(x)) = p(1)$$

para todo polinômio $p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

Mostre que $\gamma^* = \{ J_1, J_2 \}$ é uma base para o espaço dual $(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))^*$. Determine uma base ordenada γ para $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ de modo que γ^* seja sua base dual.

Sabemos que a dimensão do espaço dual $(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))^*$ é igual a dois. Assim, basta mostrar que γ^* é linearmente independente. Tomando a combinação linear nula

$$aJ_1(p(x)) + bJ_2(p(x)) = 0$$

e avaliando nos elementos da base canônica $\beta = \{ p_1(x) = 1 , p_2(x) = x \}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

que possui somente solução trivial $a = b = 0$. Assim, mostramos que γ^* é linearmente independente em $L(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Por simplicidade, denotamos a base ordenada $\gamma = \{ q_1(x), q_2(x) \}$. Primeiramente, vamos determinar o primeiro elemento q_1 que pode ser escrito da seguinte forma:

$$q_1(x) = ap_1(x) + bp_2(x) \qquad \text{para} \qquad a, b \in \mathbb{R} .$$

Sabemos que

$$J_1(q_1(x)) = aJ_1(p_1(x)) + bJ_1(p_2(x)) = 1$$

$$J_2(q_1(x)) = aJ_2(p_1(x)) + bJ_2(p_2(x)) = 0$$

Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

que possui como única solução

$$a = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad b = -\frac{1}{2} .$$

Logo, temos o elemento $q_1(x) = \frac{1}{2}(1 - x)$.

De modo análogo, determinamos o elemento $q_2(x) = \frac{1}{2}(1 + x)$.

Exercícios

Exercício 7.12 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ (1,0,1), (1,2,1), (0,0,1) \} .$$

Determine a base dual $\gamma^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *da base ordenada* γ.

Exercício 7.13 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *com a base ordenada*

$$\gamma = \{ (1,-1,3), (0,1,-1), (0,3,-2) \} .$$

Determine a base dual $\gamma^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *da base ordenada* γ.

Exercício 7.14 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. *Definimos os funcionais lineares*

$$J_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx \qquad e \qquad J_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)dx$$

para todo polinômio $p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. *Mostre que* $\gamma^* = \{ J_1, J_2 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))^*$. *Determine uma base ordenada* γ *para* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *de modo que* γ^* *seja sua base dual.*

Exercício 7.15 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. *Definimos os funcionais lineares*

$$J_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx \qquad e \qquad J_2(p(x)) = \int_{-1}^1 p(x)dx$$

para todo polinômio $p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. *Mostre que* $\gamma^* = \{ J_1, J_2 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}))^*$. *Determine uma base ordenada* γ *para* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *de modo que* γ^* *seja sua base dual.*

Exercício 7.16 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$. *Definimos os funcionais lineares*

$$J_1(x,y,z) = x - 2y \quad , \quad J_2(x,y,z) = x + y + z \qquad e \qquad J_3(x,y,z) = y - 3z$$

para todo elemento $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Mostre que* $\gamma^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(\mathbb{R}^3)^*$. *Determine uma base ordenada* γ *para* $\mathbb{R}^3$ *de modo que* γ^* *seja sua base dual.*

Exercício 7.17 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Definimos os funcionais lineares*

$$J_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx\,, \quad J_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)dx \quad e \quad J_3(p(x)) = \int_0^{-1} p(x)dx$$

para todo polinômio $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Mostre que* $\gamma^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))^*$. *Determine uma base ordenada* γ *para* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *de modo que* γ^* *seja sua base dual.*

Exercício 7.18 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Definimos os funcionais lineares*

$$J_1(p(x)) = p(-1)\,, \quad J_3(p(x)) = p(0) \quad e \quad J_3(p(x)) = p(1)$$

para todo polinômio $p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Mostre que* $\gamma^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))^*$. *Determine uma base ordenada* γ *para* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *de modo que* γ^* *seja sua base dual.*

Exercício 7.19 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *Definimos os funcionais lineares*

$$J_1(p(x)) = p(-1)\,, \quad J_2(p(x)) = p'(-1)\,, \quad J_3(p(x)) = p(1) \quad e \quad J_4(p(x)) = p'(1)$$

para todo polinômio $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. *Mostre que* $\gamma^* = \{ J_1, J_2, J_3, J_4 \}$ *é uma base para o espaço dual* $(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}))^*$. *Encontre uma base ordenada* γ *para* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *de modo que* γ^* *seja sua base dual.*

Exercício 7.20 *Considerando os Exercícios 7.17 e 7.18 e o funcional linear*

$$J(p(x)) = \int_{-1}^1 p(x)dx + p'(0)\,,$$

determine $[J]_{\gamma^*}$ *e o valor de* $J(q(x))$ *para* $q(x) = 1 - 2x + x^2$.

Exercício 7.21 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$, $\beta = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *a base ordenada de* V *e* $\beta^* = \{ J_1, J_2, J_3 \}$ *a base dual da base* β. *Sabendo que*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2a \\ a \\ -5a \end{bmatrix} \qquad e \qquad [J]_{\beta^*} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\,,$$

encontre o valor de a *para que* $J(v) = -46$, *onde* $v \in V$ *e* $J \in V^*$. *Considere que* $\alpha = \{ 1 \}$ *é a base de* $\mathbb{F}$.

7.4 Teorema de Representação de Riesz

Teorema 7.4.1 (Teorema de Riesz) *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $J : V \longrightarrow \mathbb{F}$ um funcional linear. Então, existe um único elemento $\overline{v} \in V$ de modo que o funcional linear J é representado da seguinte forma:*

$$J(u) = \langle u , \overline{v} \rangle \qquad \textit{para todo} \qquad u \in V .$$

Além disso, $\| J \|_2 = \| \overline{v} \|_2$.

Demonstração – Seja $\beta = \{ q_1, \cdots , q_n \}$ uma base ortonormal para V. Vamos definir o elemento $\overline{v}$ da seguinte forma:

$$\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \overline{J(q_j)}\, q_j .$$

Vamos considerar F um funcional linear sobre V definido por:

$$F(u) = \langle u , \overline{v} \rangle .$$

Assim, temos que

$$F(q_i) = \langle q_i , \sum_{j=1}^{n} \overline{J(q_j)}\, q_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} J(q_j) \langle q_i , q_j \rangle = J(q_i) .$$

para todo $i = 1, \cdots , n$. Como $F(q_i) = J(q_i)$ para todo elemento da base β, temos que os funcionais F e J são os mesmos.

Agora vamos mostrar a unicidade do elemento $\overline{v} \in V$. Supomos que os elementos $\overline{v}$, $\overline{w} \in V$ satisfazem

$$J(u) = \langle u , \overline{v} \rangle \qquad \text{e} \qquad J(u) = \langle u , \overline{w} \rangle \qquad ; \qquad \forall\, u \in V .$$

Assim, temos que

$$\langle u , \overline{v} \rangle - \langle u , \overline{w} \rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle u , \overline{v} - \overline{w} \rangle = 0 \qquad ; \qquad \forall\, u \in V .$$

Fazendo $u = \overline{v} - \overline{w}$, obtemos

$$\| \overline{v} - \overline{w} \|_2^2 = 0 .$$

Assim, temos que $\overline{v} - \overline{w} = 0_V$. Logo, $\overline{v} = \overline{w}$, provando a unicidade do elemento $\overline{v}$.

Finalmente, vamos mostrar que $\| J \|_2 = \| \overline{v} \|_2$. Da Definição 7.2.3, temos que

$$| J(u) | \leq \| J \|_2 \| u \|_2 \qquad \text{para todo} \qquad u \in V .$$

Fazendo $u = \overline{v}$, obtemos

$$\| \overline{v} \|_2^2 = \langle \overline{v} , \overline{v} \rangle = | J(\overline{v}) | \leq \| J \|_2 \| \overline{v} \| .$$

Considerando que J é diferente do funcional nulo, isto é, $\overline{v} \neq 0_V$, temos que

$$\| \overline{v} \|_2 \leq \| J \|_2 . \tag{7.1}$$

Da Representação de Riesz e da desigualdade de Cauchy–Schwarz, vemos que

$$| J(u) | = | \langle u , \overline{v} \rangle | \leq \| u \|_2 \| \overline{v} \|_2 . \tag{7.2}$$

Da definição da norma do funcional J e da desigualdade (7.2), segue que

$$\| J \|_2 = \max\{ | J(u)) | \quad ; \quad \| u \|_2 = 1 \} \leq \| \overline{v} \|_2 . \tag{7.3}$$

Portanto, das desigualdades (7.1) e (7.3), obtemos $\| J \|_2 = \| \overline{v} \|_2$. ■

Exemplo 7.4.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *. Considere o funcional linear* $J : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por:*

$$J(u) = 2x + y - z \qquad \textit{para todo} \qquad u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ,$$

Assim, pelo Teorema de Representação de Riesz, temos que

$$J(u) = \langle u , \overline{v} \rangle \qquad \text{para todo} \qquad u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 .$$

Podemos observar que o elemento $\overline{v} = (2, 1, -1)$. Assim, temos que

$$\| J \|_2 = \| \overline{v} \|_2 = \sqrt{6} .$$

Exemplo 7.4.2 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ *uma base ortonormal para* V*. Sabemos que todo elemento* $v \in V$ *é escrito de modo único como:*

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j \, q_j \; .$$

No Exemplo 7.3.4, mostramos que todo funcional linear T *sobre* V *é representado da forma* $T(v) = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n$ *para os escalares* $\alpha_i = T(q_i) \in \mathbb{F}$*. Utilizando essa representação do funcional linear* T *em relação à base ortonormal* β *de* V*, podemos apresentar uma nova demonstração para o Teorema de Riesz.*

De fato, Desejamos encontrar um elemento $\overline{v} \in V$, que é escrito de modo único como:

$$\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} b_j \, q_j \; ,$$

tal que $T(v) = \langle v , \overline{v} \rangle$ para todo $v \in V$.

Desse modo, para todo $v \in V$, temos que

$$\begin{aligned} T(v) &= T(q_1) \, c_1 + \cdots + T(q_n) \, c_n \\ \langle v , \overline{v} \rangle &= c_1 \, \overline{b}_1 + \cdots + c_n \, \overline{b}_n \end{aligned}$$

Comparando as expressões acima, obtemos $b_j = \overline{T(q_j)}$ para $j = 1, \cdots , n$.

Assim, o elemento $\overline{v} \in V$, que estamos procurando, é escrito como:

$$\overline{v} = \sum_{j=1}^{n} \overline{T(q_j)} \, q_j$$

que é o elemento de V que realiza a representação do funcional linear T com relação ao produto interno, isto é,

$$T(v) = \langle v , \overline{v} \rangle$$

para todo $v \in V$. A prova da unicidade do elemento $\overline{v}$ e que $\| T \|_2 = \| \overline{v} \|_2$ é a mesma prova feita no Teorema 7.4.1.

Exemplo 7.4.3 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^n$*, com a base canônica* β*, munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *. No Exemplo 7.3.2, mostramos que todo funcional linear* T *sobre o espaço vetorial* $I\!R^n$ *é representado da forma:*

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad \textit{para todo} \qquad u = (x_1, \cdots, x_n) \in I\!R^n ,$$

para os escalares $\alpha_i = T(e_i) \in I\!R$*, onde* e_i *é o i–ésimo elemento da base canônica.*

Desse modo, pelo Teorema de Riesz, temos que T é representado da forma:

$$T(u) = \langle u , \overline{v} \rangle \qquad \text{para todo} \qquad u = (x_1, \cdots, x_n) \in I\!R^n ,$$

onde o elemento $\overline{v} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in I\!R^n$. Logo, pelo Teorema de Riesz, sabemos que o elemento $\overline{v}$ é único e que $|\!|\!| T |\!|\!|_2 = \| \overline{v} \|_2$.

Exemplo 7.4.4 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^n$*, com a base canônica* β*, munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e o funcional linear* $T(x, y, z) = x - 2y + 4z$ *definido sobre* $I\!R^n$*. Sabemos que* T *é representado com relação à base* β *da seguinte forma:*

$$T(u) = x\,T(e_1) + y\,T(e_2) + z\,T(e_3)$$

para todo $u = (x, y, z) \in I\!R^n$*. Temos também que o elemento*

$$\overline{v} = (T(e_1) , T(e_2) , T(e_3)) = (1, -2, 4)$$

realiza a representação do funcional linear T *com relação ao produto interno, isto é,*

$$T(u) = \langle u , \overline{v} \rangle = x - 2y + 4z$$

para todo $u = (x, y, z) \in I\!R^n$*. Assim,* $|\!|\!| T |\!|\!|_2 = \| \overline{v} \|_2 = \sqrt{21}$.

Exercícios

Exercício 7.22 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *com o produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall\; p,\, q \;\in\; \mathcal{P}_1(\mathbb{R})\,.$$

Seja $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcional linear definido por:* $T(p(x)) \;=\; p(1)$*. Determine o elemento* $q(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *tal que* $T(p(x)) \;=\; \langle\, p \,,\, q \,\rangle$ *para todo* $p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$*.*

Exercício 7.23 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *munido do produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

com a base ortogonal $\beta \;=\; \{\, q_1(x) \,,\, q_2(x) \,,\, q_3(x) \,\}$*, onde*

$$q_1(x) \;=\; 1 \quad , \quad q_2(x) \;=\; x \qquad e \qquad q_3(x) \;=\; x^2 \;-\; \frac{1}{3}\,.$$

Dado o funcional linear T *sobre o* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *definido por:*

$$T(p(x)) \;=\; p(1) \;+\; p'(1)\,.$$

Determine o elemento $\overline{p}(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *de modo que* $T(p(x)) = \langle\, p \,,\, \overline{p} \,\rangle$ *para todo* $p(x)$ *em* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*.*

Exercício 7.24 *Considere o espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}^2$ *munido do produto interno usual* $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ *e com a base canônica* $\beta \;=\; \{\, e_1,\, e_2 \,\}$*. Dado o funcional linear* T *sobre* $\mathbb{C}^2$ *definido por:* $T(z_1, z_2) \;=\; 2z_1 \;-\; z_2$*. Determine o elemento* $\overline{v} \in \mathbb{C}^2$ *tal que* $T(u) \;=\; \langle\, u \,,\, \overline{v} \,\rangle$ *para todo* $u \in \mathbb{C}^2$*.*

Bibliografia

[1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1977.

[2] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume I, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[3] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume II, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[4] Tom M. Apostol, *Linear Algebra–A First Course with Applications to Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1997.

[5] Alexander Basilevsky, *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*, Dover, 1983.

[6] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Editora Harbra Ltda, 1986.

[7] C. A. Callioli, H. H. Domingues e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, Atual Editora, 2003.

[8] R. Charnet, C. A. L. Freire, E. M. R. Charnet e H. Bonvino, *Análise de Modelos de Regressão Linear com Aplicações*, Editora da Unicamp, Segunda Edição, 2008.

[9] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, edusp, 2001.

[10] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice– Hall, Third Edition, 1997.

[11] Gene H. Golub & Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins, 1996.

[12] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Editora da USP, 1971.

[13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1996.

[14] Bernard Kolman e David R. Hill, *Introdução à Álgebra Lienar com Aplicações*, LTC, Oitava Edição, 2006.

[15] Serge Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, Springer, 1986.

[16] Elon L. Lima, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.

[17] Elon L. Lima, *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1996.

[18] Seymour Lipschutz, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Makron Books, 1994.

[19] LUENBERGER, D. D. (1973), *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley.

[20] Patricia R. de Peláez, Rosa F. Arbeláez y Luz E. M. Sierra, *Algebra Lineal con Aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia, 1997.

[21] Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.

[22] David S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991.