Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Já sabemos que o cofator de A_{ij} (Δ_{ij}) é dado por:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

onde A_{ij} é a submatriz da matriz inicial, de onde foram retiradas a $i-$ ésima linha e a $j-$ésima coluna.

A matriz dos cofatores de $A = [\Delta_{ij}]$ denotaremos por $\overline{A}$.

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ então $\overline{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}$

Calculemos os cofatores (entradas de $\overline{A}$).

$$\begin{array}{lllll} \Delta_{11} & = & (-1)^{1+1}\cdot|2| & = & 2 \\ \Delta_{12} & = & (-1)^{1+2}\cdot|1| & = & -1 \\ \Delta_{21} & = & (-1)^{2+1}\cdot|5| & = & -5 \\ \Delta_{22} & = & (-1)^{2+2}\cdot|3| & = & 3 \end{array}$$

Portanto

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Definição: Dada matriz quadrada A, chamaremos de **matriz adjunta de** A à transposta da matriz dos cofatores de A.

$$adj\ A = (\overline{A})^t$$

Exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ então $adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Teorema: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Temos então que $A \cdot adj\ A = (det\ A)\cdot I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Dem: (Exercício)

Definição: Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$ onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para a inversa de A.

Exemplos:

1. Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Se $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ então $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Observações:

- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Nem toda matriz tem inversa;

- Se A_n tem inversa (ou seja existe A^{-1}) então

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= I_n \\ det\ (A \cdot A^{-1}) &= det(I_n) \\ det\ A\ det A^{-1} &= det\ I_n \\ det\ A\ det A^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

  Segue que $det\ A \neq 0$ e $det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}$.

- Se $det\ A \neq 0$ então temos:

$$\begin{aligned} A \cdot adj\ A &= det\ A \cdot I_n \\ A^{-1} \cdot adj\ A &= det\ A \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

  Segue que $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} adj\ A$

Obtenção da inversa

Note que no exemplo 1 a matriz inversa de A coincidiu com a adjunta de A (pois o determinante de A é 1). No caso de matrizes de ordem 2 o cálculo da inversa desta forma é bem prático, no entanto, para ordens maiores este método pode ser bem trabalhoso.

Usaremos esta mesma matriz para mostrar aqui um outro método para encontrar sua inversa. [1]

Colocamos a matriz ao lado da matriz identidade de mesma ordem:

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \end{array}$$

Em seguida fazemos operações elementares com as linhas até trasnformar a matriz da esquerda na matriz identidade. Entende-se como operação elementar: permutar duas linhas, multiplicar uma linha por um número não nulo ou somar uma linha com outra previamente multiplicada por um número.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{l} (L_1' = L_2) \\ (L_2' = L_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|rr} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \begin{array}{l} (L_1'' = L_1') \\ (L_2'' = 3L_1' - L_2') \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|rr} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \begin{array}{l} (L_1''' = L_1'' - 2L_2'') \\ (L_2''' = L_2'') \end{array}$$

A matriz à direita é a matriz inversa procurada. (Note que neste caso encontramos exatamente a matriz que já sabíamos ser a inversa de A).

Exercícios:

1. Verifique se as seguintes matrizes são inversíveis e determine suas inversas (quando existirem):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Dada uma matriz A de ordem dois com determinante não nulo, encontre sua matriz inversa.

[1] Para mais detalhes veja Callioli, pg 31.