Universidade Federal de Roraima
Álgebra Linear
Prof^a Kelly Karina Santos

Data:18/03/2020
MB 202
Turma: 1

Determinantes

O determinante de uma matriz quadrada A_n é um número associado à mesma (que denotaremos por $detA$ ou $|A|$) da seguinte forma:

1. $n = 1$

   Se $A = [a_{11}]$ então $|A| = a_{11}$.

2. $n = 2$

   Se $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ então $|B| = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$.

3. $n = 3$.

   Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ então

   $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$.

   ## Observações:

   - Esta expressão para o detrminante de uma matriz de ordem 3 pode ser encontrada da seguinte forma: copiamos novamente a primeira e segunda colunas à direita da matriz, efetuamos a multiplicação dos elementos da diagonal principal (representada pela primeira flecha azul) que representaremos por $Azul_1$ e fazendo o mesmo para as outras flechas ($Azul_2, Azul_3, Vermelho_1$, $Vermelho_2, Vermelho_3$),

     $$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

     o resultado para o determinante será obtido fazendo

     $|A| = Azul_1 + Azul_2 + Azul_3 - Vermelho_1 - Vermelho_2 - Vermelho_3$.

- Note ainda que esta expressão para o determinante pode ser escrita ainda da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
|A| &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|
\end{aligned}$$

  onde A_{ij} é a submatriz da matriz inicial, de onde foram retiradas a $i-$ ésima linha e a $j-$ésima coluna.

  Definimos o **cofator** de A_{ij} e escrevemos Δ_{ij} da seguinte forma:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ Cofator de } A_{ij}$$

4. $n \geq 4$

   De maneira geral podemos usar o desenvolvimento de Laplace para o cálculo de determinantes, a qual consiste numa fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n, a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n-1$.

   No caso $n = 4$, se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ então $|A| = a_{11}|\Delta_{11} + a_{12}|\Delta_{12} + a_{13}|\Delta_{13} + a_{14}|\Delta_{14}$

   OBS: Para a expressão acima escolhemos a linha 1 mas poderíamos ter escolhido qualquer linha ou coluna.

   Exemplo:

   Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   Se escolhermos a terceira linha, então teremos:

$$\begin{aligned}
|A| &= 3\Delta_{31} + 0\Delta_{32} + 4\Delta_{33} + 2\Delta_{34} \\
&= 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot 1 \cdot 11 + 0 + 4 \cdot 1 \cdot (-8) + 2 \cdot (-1) \cdot 1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Propriedades dos Determinantes

1. Se A é uma matriz quadrada, então $detA = detA^t$;

2. O determinante é nulo se a matriz quadrada tiver:
   a) uma fila (linha ou coluna) nula;
   b) filas proporcionais;
   c) uma fila igual à soma de outras filas paralelas multiplicadas por constantes (uma para cada fila);

3. O determinante de uma matriz quadrada não se altera se somarmos a uma fila uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante;

4. Invertendo-se a posição de duas linhas paralelas de uma matriz quadrada, seu determinante muda de sinal;

5. multiplicando-se por uma constante k todos os elementos de qualquer fila de uma matriz quadrada, seu determinante fica multiplicado por k;

6. $det(AB) = detA \cdot detB$

Exercícios:

1. Resolva a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} x & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -15 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

2. O determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ vale:

   a) -40 *b)* -38 *c)* 0 *d)* 7 *e)* 1