

---

# Álgebra Linear e suas Aplicações

## *Notas de Aula*

---

*Petronio Pulino*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Q^t$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$



---

# Álgebra Linear e suas Aplicações

## *Notas de Aula*

*Petronio Pulino*

*Departamento de Matemática Aplicada*

*Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica*

*Universidade Estadual de Campinas*

*E-mail: [pulino@ime.unicamp.br](mailto:pulino@ime.unicamp.br)*

*[www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/](http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/)*

*Janeiro de 2012*

---

# Conteúdo

<b>1</b>	<b><i>Estruturas Algébricas</i></b>	<b>1</b>
1.1	Operação Binária. Grupos . . . . .	2
1.2	Corpo Comutativo . . . . .	7
1.3	Corpo com Valor Absoluto . . . . .	10
1.4	Corpo Ordenado . . . . .	12
1.5	Valor Absoluto num Corpo Ordenado . . . . .	15
1.6	Números Reais . . . . .	17
1.7	Números Complexos . . . . .	20
1.8	Característica do Corpo . . . . .	25
1.9	Métricas . . . . .	27
<b>2</b>	<b><i>Matrizes e Sistemas Lineares</i></b>	<b>29</b>
2.1	Matrizes . . . . .	30
2.2	Tipos Especiais de Matrizes . . . . .	41
2.3	Inversa de uma Matriz . . . . .	59
2.4	Matrizes em Blocos . . . . .	63
2.5	Operações Elementares. Equivalência . . . . .	76
2.6	Forma Escalonada. Forma Escada . . . . .	81
2.7	Matrizes Elementares . . . . .	84
2.8	Matrizes Congruentes. Lei da Inércia . . . . .	101
2.9	Sistemas de Equações Lineares . . . . .	107
<b>3</b>	<b><i>Espaços Vetoriais</i></b>	<b>139</b>
3.1	Espaço Vetorial. Propriedades . . . . .	140
3.2	Subespaço Vetorial . . . . .	147
3.3	Combinação Linear. Subespaço Gerado . . . . .	154
3.4	Soma e Intersecção. Soma Direta . . . . .	158
3.5	Dependência e Independência Linear . . . . .	167
3.6	Bases e Dimensão . . . . .	173
3.7	Coordenadas . . . . .	204
3.8	Mudança de Base . . . . .	212

<b>4</b>	<b><i>Transformações Lineares</i></b>	<b>219</b>
4.1	Transformações do Plano no Plano . . . . .	220
4.2	Transformação Linear . . . . .	221
4.3	Núcleo e Imagem . . . . .	226
4.4	Posto e Nulidade . . . . .	232
4.5	Espaços Vetoriais Isomorfos . . . . .	244
4.6	Álgebra das Transformações Lineares . . . . .	249
4.7	Transformação Inversa . . . . .	253
4.8	Representação Matricial . . . . .	268
<b>5</b>	<b><i>Produto Interno</i></b>	<b>283</b>
5.1	Introdução . . . . .	284
5.2	Definição de Produto Interno . . . . .	284
5.3	Desigualdade de Cauchy–Schwarz . . . . .	297
5.4	Definição de Norma. Norma Euclidiana . . . . .	299
5.5	Definição de Ângulo. Ortogonalidade . . . . .	303
5.6	Base Ortogonal. Coeficientes de Fourier . . . . .	311
5.7	Processo de Gram–Schmidt . . . . .	316
5.8	Complemento Ortogonal . . . . .	324
5.9	Decomposição Ortogonal . . . . .	329
5.10	Identidade de Parseval . . . . .	337
5.11	Desigualdade de Bessel . . . . .	339
5.12	Operadores Simétricos . . . . .	341
5.13	Operadores Hermitianos . . . . .	345
5.14	Operadores Ortogonais . . . . .	347
5.15	Projeção Ortogonal . . . . .	353
5.16	Reflexão sobre um Subespaço . . . . .	361
5.17	Melhor Aproximação em Subespaços . . . . .	365
<b>6</b>	<b><i>Autovalores e Autovetores</i></b>	<b>369</b>
6.1	Autovalor e Autovetor de um Operador Linear . . . . .	370
6.2	Autovalor e Autovetor de uma Matriz . . . . .	379
6.3	Multiplicidade Algébrica e Geométrica . . . . .	394
6.4	Matrizes Especiais . . . . .	399
6.5	Aplicação. Classificação de Pontos Críticos . . . . .	411
6.6	Diagonalização de Operadores Lineares . . . . .	416
6.7	Diagonalização de Operadores Hermitianos . . . . .	438

<b>7</b>	<b><i>Funcionais Lineares e Espaço Dual</i></b>	<b>463</b>
7.1	Introdução . . . . .	464
7.2	Funcionais Lineares . . . . .	465
7.3	Espaço Dual . . . . .	471
7.4	Teorema de Representação de Riesz . . . . .	488
<b>8</b>	<b><i>Álgebra Linear Computacional</i></b>	<b>493</b>
8.1	Introdução . . . . .	494
8.2	Decomposição de Schur. Teorema Espectral . . . . .	495
8.3	Normas Consistentes em Espaços de Matrizes . . . . .	501
8.4	Análise de Sensibilidade de Sistemas Lineares . . . . .	514
8.5	Sistema Linear Positivo–Definido . . . . .	532
8.6	Métodos dos Gradientes Conjugados . . . . .	537
8.7	Fatoração de Cholesky . . . . .	555
8.8	Métodos Iterativos para Sistemas Lineares . . . . .	566
8.9	Sistema Linear Sobredeterminado . . . . .	591
8.10	Subespaços Fundamentais de uma Matriz . . . . .	597
8.11	Projeções Ortogonais . . . . .	615
8.12	Matriz de Projeção Ortogonal . . . . .	621
8.13	Fatoração $QR$ . . . . .	629
8.14	Modelos de Regressão Linear . . . . .	647
8.15	Solução de norma-2 Mínima . . . . .	684
8.16	Problemas de Ponto Sela . . . . .	695
8.17	Decomposição em Valores Singulares . . . . .	711
	<b>Bibliografia</b>	<b>735</b>



## 8

*Álgebra Linear Computacional***Conteúdo**


---

8.1	Introdução . . . . .	494
8.2	Decomposição de Schur. Teorema Espectral . . . . .	495
8.3	Normas Consistentes em Espaços de Matrizes . . . . .	501
8.4	Análise de Sensibilidade de Sistemas Lineares . . . . .	514
8.5	Sistema Linear Positivo–Definido . . . . .	532
8.6	Métodos dos Gradientes Conjugados . . . . .	537
8.7	Fatoração de Cholesky . . . . .	555
8.8	Métodos Iterativos para Sistemas Lineares . . . . .	566
8.9	Sistema Linear Sobredeterminado . . . . .	591
8.10	Subespaços Fundamentais de uma Matriz . . . . .	597
8.11	Projeções Ortogonais . . . . .	615
8.12	Matriz de Projeção Ortogonal . . . . .	621
8.13	Fatoração $QR$ . . . . .	629
8.14	Modelos de Regressão Linear . . . . .	647
8.15	Solução de norma–2 Mínima . . . . .	684
8.16	Problemas de Ponto Sela . . . . .	695
8.17	Decomposição em Valores Singulares . . . . .	711

---

## 8.1 Introdução



## 8.2 Decomposição de Schur. Teorema Espectral

**Teorema 8.2.1** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz que possui um conjunto linearmente independente de autovetores  $v_1, \dots, v_n$  associados aos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Vamos definir uma matriz diagonal  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e uma matriz  $V = [v_1 \cdots v_n]$ , invertível. Então,  $V^{-1}AV = D$ . Reciprocamente, Se  $V^{-1}AV = D$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal e  $V$  é uma matriz invertível. Então, as colunas da matriz  $V$  formam um conjunto linearmente independente de autovetores de  $A$  e os elementos da diagonal principal de  $D$  são os autovalores de  $A$ .*

**Demonstração** – Temos que  $Av_i = \lambda_i v_i$  para  $i = 1, \dots, n$ . Escrevendo na forma matricial, tem-se  $AV = VD$ . Como  $V$  é uma matriz invertível, obtemos  $V^{-1}AV = D$ . A prova da recíproca é feita com os argumentos de forma reversa. ■

**Teorema 8.2.2 (Decomposição de Schur)** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Então, existe uma matriz unitária  $U \in M_n(\mathbb{C})$  e uma matriz triangular superior  $T \in M_n(\mathbb{C})$  tais que  $U^*AU = T$ .*

**Demonstração** – A prova é feita por indução sobre a ordem da matriz da  $A$ . Para  $n = 1$  o resultado é obtido trivialmente. Supomos que o resultado seja válido para  $n = k - 1$ , e vamos mostrar que é válido para  $n = k$ .

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $k$ , e  $(\lambda, v)$  um autopar da matriz  $A$ , com  $\langle v, v \rangle = 1$ . Considere  $U_1$  uma matriz unitária que possui  $v$  como sua primeira coluna, e as outras colunas consideramos como sendo o completamento para uma base ortonormal do espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^k$ . Seja  $W$  uma submatriz de ordem  $k \times (k-1)$  de  $U_1$  considerando da segunda coluna até a  $k$ -ésima coluna, isto é,  $U_1 = [v \ W]$ . Note que,  $W^*v = 0$ .

Definimos agora a matriz  $A_1 = U_1^*AU_1$ , que é representada da seguinte forma:

$$A_1 = \begin{bmatrix} v^* \\ W^* \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} v & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^*Av & v^*AW \\ W^*Av & W^*AW \end{bmatrix}$$

Como  $Av = \lambda v$ , obtemos  $v^*Av = \lambda$  e  $W^*Av = \lambda W^*v = 0$ .

Assim, tomando a matriz  $\widehat{A} = W^* A W$ , de ordem  $(k-1)$ , e o elemento  $w = W^* A^* v$ , temos que a matriz  $A_1$  tem a seguinte forma:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & w^* \\ 0 & \widehat{A} \end{bmatrix}$$

Pela hipótese de indução, temos que existe uma matriz unitária  $\widehat{U}_2$  e uma matriz triangular superior  $\widehat{T}$ , de ordem  $(k-1)$ , tais que  $\widehat{T} = \widehat{U}_2^* \widehat{A} \widehat{U}_2$ . Definimos uma matriz  $U_2$ , de ordem  $k$ , da seguinte forma:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & \widehat{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que  $U_2$  é uma matriz unitária e  $U_2^* A_1 U_2 = T$  é uma matriz triangular superior, que tem a seguinte forma:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & w^* \widehat{U}_2 \\ 0 & \widehat{T} \end{bmatrix}.$$

Fazendo  $U = U_1 U_2$ , e utilizando a expressão da matriz  $A_1$ , obtemos

$$T = U_2^* A_1 U_2 = (U_1 U_2)^* A (U_1 U_2) = U^* A U,$$

o que completa a demonstração. ■

Note que os elementos da diagonal principal da matriz  $T$  são os autovalores da matriz  $A$ , de acordo com o Teorema 6.2.1. O Teorema de Schur mostra que podemos construir uma matriz triangular superior similar a matriz  $A$  através de transformações unitárias, obtendo assim os seus autovalores.

**Teorema 8.2.3 (Teorema Espectral)** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{C})$  uma matriz Hermitiana. Então, existe uma matriz unitária  $U \in M_n(\mathbb{R})$  e uma matriz diagonal  $D \in M_n(\mathbb{R})$  tais que  $U^* A U = D$ . Além disso, as colunas da matriz  $U$  são os autovetores de  $A$  e os elementos da diagonal de  $D$  são os autovalores de  $A$ .*

**Demonstração** – A prova segue do Teorema de Schur. De fato, sabemos que existe uma matriz unitária  $U$  e uma matriz triangular superior  $T$  tais que  $T = U^* A U$ . Como  $A$  é uma matriz Hermitiana temos que  $T^* = U^* A U$ . Logo, tem-se  $T^* = T$ , implicando que  $T$  é uma matriz diagonal real. A segunda parte do teorema segue imediatamente do Teorema 8.2.1, o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.2.4** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica. Então, existe uma matriz ortogonal  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  e uma matriz diagonal  $D \in M_n(\mathbb{R})$  tais que  $Q^t A Q = D$ . Além disso, as colunas da matriz  $Q$  são os autovetores de  $A$  e os elementos da diagonal de  $D$  são os autovalores de  $A$ .*

**Demonstração** – A prova é feita seguindo a demonstração do Teorema de Schur, que é o caso complexo, observando que para matriz simétrica devemos fazer as construções considerando o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$ . A prova é feita por indução sobre a ordem da matriz  $A$ .

É fácil ver que o resultado é válido para matrizes de ordem 1. Supomos que o resultado seja válido para matrizes de ordem  $(n-1)$ , para  $n \geq 2$ , e vamos mostrar que o resultado é válido para matrizes de ordem  $n$ .

Como  $A$  é uma matriz simétrica real, sabemos que qualquer autovalor  $\lambda$  é real,  $v \in \mathbb{R}^n$  o autovetor de  $A$  associado, escolhido de modo que  $\langle v, v \rangle = 1$ . Considere  $Q_1$  uma matriz ortogonal com  $v$  sua primeira coluna, e as outras colunas consideramos como sendo o completamento para uma base ortonormal do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$ , que vamos representar por  $Q_1 = [v \ W]$ .

Definimos agora uma matriz  $A_1 = Q_1^t A Q_1$ , que é uma matriz simétrica real, e podemos representá-la da seguinte forma:

$$A_1 = \begin{bmatrix} v^t \\ W^t \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} v & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^t A v & (W^t A v)^t \\ W^t A v & W^t A W \end{bmatrix}$$

Como  $Av = \lambda v$ , obtemos  $v^t A v = \lambda$  e  $W^t A v = \lambda W^t v = 0$ .

Tomando a matriz  $\hat{A} = W^t A W$ , de ordem  $(n-1)$ , temos que a matriz  $A_1$  possui a seguinte forma:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0^t \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}$$

Como  $\hat{A}$  é uma matriz simétrica real, de ordem  $(n-1)$ , pela hipótese de indução, temos que existe uma matriz ortogonal  $\hat{Q}_2$  e uma matriz diagonal  $\hat{D}$ , de ordem  $(n-1)$ , tais que  $\hat{D} = \hat{Q}_2^t \hat{A} \hat{Q}_2$ .

Assim, podemos definir uma matriz ortogonal  $Q_2$ , de ordem  $n$ , representada na forma:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & \widehat{Q}_2 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que  $Q_2^t A_1 Q_2 = D$  é uma matriz diagonal, que tem a forma:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0^t \\ 0 & \widehat{D} \end{bmatrix}.$$

Fazendo  $Q = Q_1 Q_2$ , e utilizando a expressão da matriz  $A_1$ , obtemos

$$D = Q_2^t A_1 Q_2 = (Q_1 Q_2)^t A (Q_1 Q_2) = Q^t A Q.$$

A segunda parte do teorema segue imediatamente do Teorema 8.2.1, o que completa a demonstração. ■

Este resultado mostra que podemos obter os autovalores e autovetores de uma matriz simétrica real através de uma sequência de transformações ortogonais.

## *Caracterização de Matrizes Positiva–Definidas*

**Teorema 8.2.5** *Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica. As seguintes afirmações são equivalentes*

- (1)  *$A$  é positiva–definida, isto é,  $\langle Ax, x \rangle > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  não–nulo.*
- (2) *Os autovalores de  $A$  são positivos.*
- (3) *Os autovalores das submatrizes principais  $A_k$  são positivos.*
- (4) *Existe uma matriz  $R \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  invertível tal que  $A = R^t R$ .*

**Demonstração** – Inicialmente vamos mostrar que a condição (1) implica na condição (2). Para isso, seja  $\lambda$  um autovalor de  $A$  com  $v$  o autovetor associado, considerando  $\langle v, v \rangle = 1$ . Assim, temos que

$$0 < \langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda,$$

mostrando que os autovalores da matriz  $A$  são positivos.

Agora, consideramos que os autovalores de uma matriz simétrica real  $A$  são positivos, e vamos mostrar que a matriz  $A$  é positiva–definida.

Para isso, tomamos um elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  não–nulo, que não seja um autovetor de  $A$ . Sabemos que como  $A$  é simétrica, possui um conjunto completo de autovetores mutuamente ortonormais. Assim, podemos escrever o elemento  $x$  de modo único como uma combinação linear desses autovetores, isto é,

$$x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Desse modo, temos que

$$\langle Ax, x \rangle = \langle (c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_n \lambda_n v_n), (c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) \rangle$$

Como os autovetores  $v_1, \dots, v_n$  são mutuamente ortonormais, obtemos

$$\langle Ax, x \rangle = c_1^2 \lambda_1 + \cdots + c_n^2 \lambda_n > 0$$

o que mostra que a matriz  $A$  é positiva–definida.

Assim, mostramos que a condição (2) implica na condição (1), completando a prova que as condições (1) e (2) são equivalentes.

Agora vamos mostrar que as condições (1) e (3) são equivalentes. Inicialmente, vamos considerar  $A$  uma matriz positiva-definida e mostrar que a submatriz principal  $A_k$  é também positiva-definida, para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ . Desse modo, mostramos que a condição (1) implica na condição (3). Para isso, vamos tomar um elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  não-nulo, com as  $(n - k)$  componentes, a partir da  $(k + 1)$ -ésima, todas nulas. Por simplicidade, vamos representar esse elemento da seguinte forma:

$$x = \begin{bmatrix} y \\ 0_{r \times 1} \end{bmatrix},$$

para  $y \in \mathbb{R}^k$  não-nulo, onde  $r = n - k$ . Assim, temos que

$$0 < \langle Ax, x \rangle = \begin{bmatrix} y^t & 0_{r \times 1}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & \star \\ \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0_{r \times 1} \end{bmatrix} = \langle A_k y, y \rangle$$

provando que a submatriz principal  $A_k$  é positiva-definida, e que os seus autovalores são todos positivos. Mostrar que a condição (3) implica na condição (1) é imediato, pois podemos trabalhar com a própria matriz  $A$ . Assim, acabamos de mostrar que as condições (1) e (3) são equivalentes.

Finalmente, vamos mostrar que as condições (1) e (4) são equivalentes. Tomando por hipótese que  $A$  é uma matriz positiva-definida, sabemos pelo Teorema 8.2.4 que existe uma matriz ortogonal  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  e uma matriz diagonal  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tais que  $A = Q \Lambda Q^t$ , onde os elementos da diagonal da matriz  $\Lambda$  são os autovalores da matriz  $A$ , que são todos positivos. Assim, podemos escolher a matriz  $R = Q \sqrt{\Lambda} Q^t$ , que é denominada **raiz quadrada positiva-definida** da matriz  $A$ .

Fica claro que podemos fazer mais de uma escolha da matriz  $R$ . Assim, uma outra forma de escolher é a seguinte  $R = \sqrt{\Lambda} Q^t$ , que é denominada **raiz quadrada** da matriz  $A$ . Isto mostra que a condição (1) implica na condição (4).

Considerando agora que existe uma matriz  $R$  invertível tal que  $A = R^t R$ , vamos mostrar que  $A$  é uma matriz positiva definida. A propriedade de simetria é imediata. Considerando um elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  não-nulo, temos que

$$0 < \langle Rx, Rx \rangle = \langle R^t Rx, x \rangle = \langle Ax, x \rangle$$

provando que a  $A$  é uma matriz positiva-definida. Assim mostramos que a condição (4) implica na condição (1). Desse modo, acabamos de mostrar que as condições (1) e (4) são equivalentes, o que completa a demonstração. ■

## 8.3 Normas Consistentes em Espaços de Matrizes

Para uma análise de convergência dos métodos numéricos para sistemas lineares, bem como para a análise de estabilidade dos esquemas de diferenças finitas necessitaremos do conceito de norma de matriz, e de suas propriedades para matrizes especiais, como por exemplo, simétrica, positiva-definida, e sua relação com os autovalores dessas matrizes. É importante observar, que no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$  todas as normas são equivalentes, veja referência [1]. Assim a prova de convergência de uma seqüência pode ser feita com uma norma genérica.

**Definição 8.3.1** *Considere o espaço vetorial  $M_n(\mathbb{R})$ . Uma **norma consistente** em  $M_n(\mathbb{R})$ , é uma aplicação  $\|\cdot\|$  que para cada matriz  $A$  associa o escalar  $\|A\| \in \mathbb{R}$ , com as seguintes propriedades:*

1.  $\|A\| > 0$  com  $\|A\| = 0 \iff A = 0$  (Positividade)
2.  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{F}$  (Homogeneidade Absoluta)
3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (Desigualdade Triangular)
4.  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  (Consistência)

**Teorema 8.3.1** *Considere o espaço vetorial  $M_n(\mathbb{R})$ . A aplicação  $\|\cdot\|_F$  definida sobre  $M_n(\mathbb{R})$  da seguinte forma:*

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

*define uma norma consistente em  $M_n(\mathbb{R})$ , denominada de **norma de Frobenius**.*

**Demonstração** – Podemos observar facilmente que as propriedades 1–3 são satisfeitas, pois a norma de Frobenius pode ser vista como a norma vetorial Euclidiana.

Vamos mostrar a propriedade de consistência. Definimos a matriz  $C = AB$ , assim tem-se que

$$\|AB\|_F^2 = \|C\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy–Schwarz na expressão  $|\cdot|^2$ , obtemos

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right)\end{aligned}$$

Portanto, mostramos que

$$\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 \|B\|_F^2,$$

o que completa a demonstração. ■

**Definição 8.3.2** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Definimos o **traço** da matriz  $A$ , que vamos denotar por  $\text{tr}(A)$ , da seguinte forma:*

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

**Exemplo 8.3.1** *Mostre que o traço é uma aplicação linear de  $M_n(\mathbb{R})$  em  $\mathbb{R}$ .*

**Exemplo 8.3.2** *Mostre que a norma de Frobenius pode ser escrita na forma:*

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^t A)} = \sqrt{\text{tr}(A A^t)}. \quad (8.1)$$

**Teorema 8.3.2** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$  matrizes ortogonais. Então,*

$$\|A\|_F = \|Q_1 A Q_2\|_F,$$

*isto é, a norma de Frobenius é invariante por transformações ortogonais.*

**Demonstração** – O resultado é imediato utilizando a norma de Frobenius escrita em função do traço da matriz  $A$ . ■



**Teorema 8.3.3** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica. Então,*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2},$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores da matriz  $A$ .

**Demonstração** – Como  $A$  é uma matriz simétrica, sabemos que existe uma matriz diagonal  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  e uma matriz ortogonal  $Q$  tais que  $A = Q\Lambda Q^t$ .

Assim, o resultado é obtido pelo Teorema 8.3.2, o que completa a demonstração. ■

**Definição 8.3.3** *Considere o espaço vetorial  $M_n(\mathbb{R})$  e  $\|\cdot\|_\alpha$  uma norma em  $\mathbb{R}^n$ . Definimos uma aplicação  $\|\cdot\|_\alpha$  sobre  $M_n(\mathbb{R})$  da seguinte forma:*

$$\|A\|_\alpha = \max \left\{ \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} ; x \neq 0_{\mathbb{R}^n} \right\}$$

ou de modo análogo

$$\|A\|_\alpha = \max \{ \|Ax\|_\alpha ; \|x\|_\alpha = 1 \}$$

**Teorema 8.3.4** *Sejam a norma  $\|\cdot\|_\alpha$  em  $\mathbb{R}^n$  e a aplicação  $\|\cdot\|_\alpha$  em  $M_n(\mathbb{R})$ . Então, vale a seguinte desigualdade*

$$\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha.$$

**Demonstração** – Para  $x = 0_{\mathbb{R}^n}$  a igualdade é trivialmente satisfeita. Para  $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ , tem-se que

$$\frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} \leq \max \left\{ \frac{\|Az\|_\alpha}{\|z\|_\alpha} ; z \neq 0_{\mathbb{R}^n} \right\} = \|A\|_\alpha$$

Portanto, obtemos  $\|Ax\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|x\|_\alpha$  para  $x \in \mathbb{R}^n$  não nulo. ■

**Teorema 8.3.5** A aplicação  $\|\cdot\|_\alpha$  satisfaz as propriedades de norma consistente

1.  $\|A\|_\alpha > 0$
2.  $\|\lambda A\|_\alpha = |\lambda| \|A\|_\alpha$
3.  $\|A + B\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha + \|B\|_\alpha$
4.  $\|AB\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha$

**Demonstração** – Podemos observar facilmente que as propriedades 1–3 são obtidas pelas propriedades 1–3 de norma vetorial, respectivamente. A propriedade 4 é obtida pelo resultado do Teorema 8.3.4. De fato,

$$\|ABx\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|Bx\|_\alpha \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha \|x\|_\alpha.$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  não nulo. Desse modo, temos que

$$\|AB\|_\alpha = \max \left\{ \frac{\|ABx\|_\alpha}{\|x\|_\alpha} ; \|x\|_\alpha \neq 0_{\mathbb{R}^n} \right\} \leq \|A\|_\alpha \|B\|_\alpha,$$

o que completa a demonstração. ■

**Exemplo 8.3.3** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Faça a representação gráfica das imagens das bolas unitárias em  $\mathbb{R}^2$ , com relação às normas vetoriais  $\|\cdot\|_\infty$  e  $\|\cdot\|_1$ , pela transformação linear  $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida pela matriz  $A$ . Determine  $\|A\|_\infty$  e  $\|A\|_1$  utilizando a representação gráfica obtida anteriormente.

**Teorema 8.3.6** *A norma em  $M_n(\mathbb{R})$  definida por:*

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| ; j = 1, \dots, n \right\}$$

*é induzida (subordinada) pela norma  $\|\cdot\|_1$  em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração** – Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  não-nulo, temos que

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left( \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right\} \right) |x_j| = \left( \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \right\} \right) \|x\|_1 \end{aligned}$$

Assim, mostramos que

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

Para obtermos o resultado desejado, temos que exibir um elemento  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  não-nulo que realiza a igualdade, isto é,

$$\frac{\|A\bar{x}\|_1}{\|\bar{x}\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

Vamos supor que o máximo seja atingido na  $k$ -ésima coluna de  $A$ . Assim, basta tomar  $\bar{x} = e_k$ , onde  $e_k$  é o  $k$ -ésimo elemento da base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Exemplo 8.3.4** *Considere a matriz  $A \in M_3(\mathbb{R})$  dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

*Temos que*

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^3 |a_{ij}| ; j = 1, \dots, 3 \right\} = \max\{10, 9, 7\} = 10.$$

**Teorema 8.3.7** A norma em  $M_n(\mathbb{R})$  definida por:

$$\|A\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \ ; \ i = 1, \dots, n \right\}$$

é induzida (subordinada) pela norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  em  $\mathbb{R}^n$ .

**Demonstração** – Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  não-nulo, temos que

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \right\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \|x\|_{\infty} \end{aligned}$$

Assim, mostramos que

$$\frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

Para obtermos o resultado desejado, temos que exibir um elemento  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  não-nulo que realiza a igualdade, isto é,

$$\frac{\|A\bar{x}\|_{\infty}}{\|\bar{x}\|_{\infty}} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

Vamos supor que o máximo seja atingido na  $k$ -ésima linha da matriz  $A$ .

Tomando  $\bar{x}$  da seguinte forma:

$$\bar{x}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{kj} \geq 0 \\ -1 & \text{se } a_{kj} < 0 \end{cases} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

temos que

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \bar{x}_j = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \|A\bar{x}\|_{\infty}$$

pois  $\|\bar{x}\|_{\infty} = 1$ , o que completa a demonstração. ■

**Exemplo 8.3.5** Considere a matriz  $A \in M_3(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\|A\|_{\infty} = \max \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \ ; \ i = 1, \dots, 3 \right\} = \max\{3, 6, 15\} = 15.$$

**Teorema 8.3.8** Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$  matrizes ortogonais. Então,

$$\|A\|_2 = \|Q_1 A Q_2\|_2,$$

isto é, a norma  $\|\cdot\|_2$  é invariante por transformações ortogonais.

**Demonstração** – A prova segue da definição de norma matricial induzida e do fato que a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^n$  é invariante por transformação ortogonal.  $\square$

**Teorema 8.3.9** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica. Então,*

$$\|A\|_2 = \lambda_{\max} = \max\{|\lambda_j| \ ; \ j = 1, \dots, n\},$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores da matriz  $A$ .

**Demonstração** – Como  $A$  é uma matriz simétrica, sabemos que existe uma matriz  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  diagonal e uma matriz ortogonal  $Q$  tais que  $A = Q\Lambda Q^t$ . Fazendo uso da definição de norma induzida, temos que

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max\{\|Ax\|_2 \ ; \ \|x\|_2 = 1\} \\ &= \max\{\|(Q\Lambda Q^t)x\|_2 \ ; \ \|x\|_2 = 1\} \end{aligned}$$

Chamando  $Q^t x = y$  e usando o fato que  $\|y\|_2 = \|x\|_2 = 1$ , pois a norma Euclidiana é invariante por transformação ortogonal, temos que

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max\{\|Q(\Lambda y)\|_2 \ ; \ \|y\|_2 = 1\} \\ &= \max\{\|\Lambda y\|_2 \ ; \ \|y\|_2 = 1\} \end{aligned}$$

Podemos verificar facilmente que

$$\|\Lambda y\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 y_j^2 \leq \lambda_{\max}^2.$$

Para obtermos o resultado desejado temos que exibir um elemento  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$  que realiza a igualdade. Para isso, vamos supor de  $\lambda_{\max} = |\lambda_k|$  para algum  $k$ , com  $1 \leq k \leq n$ .

Desse modo, basta tomar  $\bar{y} = e_k$ , onde  $e_k$  é o  $k$ -ésimo elemento da base canônica do  $\mathbb{R}^n$ , para obtermos o resultado desejado.

Finalmente, podemos observar que

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max\{\|Ax\|_2 \ ; \ \|x\|_2 = 1\} \\ &= \|Aq_k\|_2 = |\lambda_k| = \lambda_{\max}, \end{aligned}$$

onde  $q_k$  é o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_k$ , de maior valor em módulo, o que completa a demonstração. ■

É importante observar que a norma de Frobenius não é uma norma induzida por nenhuma norma em  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 8.3.10** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Então,  $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^t A\|_2}$ .*

**Demonstração** – Vamos usar a definição da norma  $\|\cdot\|_2$  como ponto de partida

$$\|A\|_2 = \max\{ \|Ax\|_2 \ ; \ \|x\|_2 = 1 \}$$

Para simplificar a análise definimos uma função auxiliar  $g(x) = \|Ax\|_2^2$ , que pode ser escrita também como  $g(x) = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^t Ax, x \rangle$ . Desse modo, temos que encontrar o ponto de máximo da função  $g$  na bola unitária e seu respectivo valor.

Temos que a matriz  $C = A^t A$  é simétrica. Assim, sabemos que  $C = Q \Lambda Q^t$ , onde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  uma matriz diagonal e  $Q = [q_1 \cdots q_n]$  uma matriz ortogonal, com  $(\lambda_j, q_j)$  um autopar da matriz  $C$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Como a matriz  $C$  pode ser semipositiva-definida, veja Exercício 8.7, temos que seus autovalores são todos não-negativos. Assim, podemos ordená-los da seguinte forma:

$$0 \leq \lambda_{\min} = \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

Desse modo, podemos escrever a função  $g$  da seguinte forma:

$$g(x) = \langle A^t Ax, x \rangle = x^t C x = (Q^t x)^t \Lambda (Q^t x)$$

Fazendo a mudança de variável  $y = Q^t x$ , obtemos

$$g(x(y)) = y^t \Lambda y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{j=1}^n y_j^2 = \lambda_{\max} \|y\|_2^2 = \lambda_{\max}$$

Note que  $\|y\|_2^2 = \|Q^t x\|_2^2 = \|x\|_2^2 = 1$ .

Portanto, a função  $g$  tem seu ponto de máximo em  $\bar{x} = q_n$ , que corresponde a  $\bar{y} = e_n$ , que é o  $n$ -ésimo vetor da base canônica do  $\mathbb{R}^n$ , e assume o valor máximo  $g(v_n) = \lambda_{\max}$ .

Agora voltando ao problema inicial, temos

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \max\{ \|Ax\|_2 \ ; \ \|x\|_2 = 1 \} \\ &= \max\{ \sqrt{g(x)} \ ; \ \|x\|_2 = 1 \} \\ &= \sqrt{\lambda_{\max}} = \sqrt{\|C\|_2} \end{aligned}$$

pelo Teorema 8.3.9, o que completa a demonstração. ■

**Definição 8.3.4** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível. Definimos o **número de condição** da matriz com relação à norma  $\|\cdot\|$  em  $M_n(\mathbb{R})$  na forma:*

$$\mathcal{K}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Podemos mostrar que para toda norma induzida  $\|\cdot\|_\alpha$  em  $M_n(\mathbb{R})$ , tem-se que

1.  $\|I\|_\alpha = 1$ .
2.  $\mathcal{K}_\alpha(A) = \|A\|_\alpha \|A^{-1}\|_\alpha \geq 1$ .

**Teorema 8.3.11** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica invertível. Então,*

$$\mathcal{K}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

onde

$$\lambda_{\min} = \min\{|\lambda_j| \ ; \ j = 1, \dots, n\}$$

$$\lambda_{\max} = \max\{|\lambda_j| \ ; \ j = 1, \dots, n\}$$

com  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores da matriz  $A$ .

**Demonstração** – Como  $A$  é uma matriz simétrica invertível, temos que  $A^{-1}$  é uma matriz simétrica.

Assim, a prova segue do fato de que se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , então  $\frac{1}{\lambda}$  é um autovalor de  $A^{-1}$ , pois  $A$  é invertível, e do Teorema 8.3.9.  $\square$

**Exemplo 8.3.6** *Calcular o número de condição  $\mathcal{K}_2(A)$  da seguinte matriz simétrica*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

*A matriz  $A$  é positiva-definida?*

**Exemplo 8.3.7** *Seja  $\epsilon$  uma constante positiva muito pequena, e considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}.$$

*Calcule  $\mathcal{K}_2(A)$  e  $\det(A)$ . O que podemos concluir?*



## ***Exercícios***

**Exercício 8.1** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Mostre que*

$$\|A\|_F^2 = \|a_1\|_2^2 + \cdots + \|a_j\|_2^2 + \cdots + \|a_n\|_2^2,$$

onde  $a_j \in \mathbb{R}^n$  é a  $j$ -ésima coluna de  $A$  e  $\|\cdot\|_2$  é a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercício 8.2** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Mostre que*

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^t A)}.$$

**Exercício 8.3** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$  matrizes ortogonais. Mostre que*

$$\|A\|_F = \|Q_1 A Q_2\|_F,$$

isto é, a norma de Frobenius é invariante por transformação ortogonal.

**Exercício 8.4** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $Q_1, Q_2 \in M_n(\mathbb{R})$  matrizes ortogonais. Mostre que*

$$\|A\|_2 = \|Q_1 A Q_2\|_2,$$

isto é, a norma  $\|\cdot\|_2$  em  $M_n(\mathbb{R})$  é invariante por transformações ortogonais.

**Exercício 8.5** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica. Mostre que*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2},$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores da matriz  $A$ .

**Exercício 8.6** *Considere a matriz simétrica  $A \in M_3(\mathbb{R})$  dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $\|A\|_2$  e  $\|A\|_F$ .

**Exercício 8.7** *Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Mostre que  $C = A^t A$  é uma matriz semipositiva-definida se, e somente se,  $A$  é uma matriz singular.*

**Exercício 8.8** Considere a matriz simétrica  $A \in M_3(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcule  $\|A\|_2$  e  $\|A\|_F$ .

**Exercício 8.9** Considere a matriz  $A \in M_3(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Calcule  $\|A\|_2$  e  $\|A\|_F$ .

**Exercício 8.10** Seja  $P \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz **idempotente**, isto é,  $P^2 = P$ . Mostre que para qualquer norma consistente  $\|\cdot\|$  em  $M_n(\mathbb{R})$  tem-se que  $\|P\| \geq 1$ .

**Exercício 8.11** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz **auto-reflexiva**, isto é,  $A^2 = I$ . Mostre que  $\|A\|_F^2 \geq \sqrt{n}$ .

**Exercício 8.12** Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  **matrizes similares**, isto é, existe uma matriz invertível  $P \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $B = P^{-1}AP$ . Mostre que

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B).$$

**Exercício 8.13** Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  **matrizes ortogonalmente similares**, isto é, existe uma matriz ortogonal  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $B = Q^t A Q$ . Mostre que

$$(a) \quad \|A\|_F = \|B\|_F.$$

$$(b) \quad \|A\|_2 = \|B\|_2.$$

**Exercício 8.14** Sejam  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz diagonal e  $\|\cdot\|_p$  a norma induzida em  $M_n(\mathbb{R})$  pela norma  $\|\cdot\|_p$  em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que

$$\|D\|_p = \max\{|d_i| \ ; \ i = 1, \dots, n\}.$$

**Exercício 8.15** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e  $\|\cdot\|$  uma norma consistente em  $M_n(\mathbb{R})$ . Mostre que*

- (a)  $\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(A^{-1})$ .
- (b)  $\mathcal{K}(cA) = \mathcal{K}(A)$  para  $c \in \mathbb{R}$  não-nulo.

**Exercício 8.16** *Seja  $\|\cdot\|_\alpha$  uma norma induzida em  $M_n(\mathbb{R})$  pela norma  $\|\cdot\|_\alpha$  em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que*

- (a)  $\mathcal{K}_\alpha(I) = 1$ .
- (b)  $\mathcal{K}_\alpha(A) \geq 1$  para  $A \in M_n(\mathbb{R})$  invertível.

**Exercício 8.17** *Seja  $I_n \in M_n(\mathbb{R})$  a matriz identidade. Mostre que*

$$\mathcal{K}_F(I) = n,$$

onde  $\mathcal{K}_F$  é o número de condição com relação à norma de Frobenius.

**Exercício 8.18** *Considere a matriz  $A \in M_2(\mathbb{R})$  dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Calcule  $\|A\|_2$ ,  $\|A^{-1}\|_2$  e  $\mathcal{K}_2(A)$ , através dos autovalores da matriz  $A$ .*

**Exercício 8.19** *Seja  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz ortogonal. Mostre que  $\mathcal{K}_2(Q) = 1$ .*

**Exercício 8.20** *Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida e  $G$  o seu fator de Cholesky. Mostre que*

- (a)  $\|G\|_2 = \sqrt{\|A\|_2}$ .
- (b)  $\mathcal{K}_2(G) = \sqrt{\mathcal{K}_2(A)}$ .

**Exercício 8.21** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e a fatoração  $A = QR$ , onde  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior. Mostre que  $\mathcal{K}_2(A) = \mathcal{K}_2(R)$ .*

## 8.4 Análise de Sensibilidade de Sistemas Lineares

Nesta seção apresentamos alguns resultados de como o número de condição da matriz do sistema linear afeta sua solução com relação a uma perturbação tanto na matriz quanto no elemento do lado direito. Estas perturbações podem ter várias origens. Mostraremos que a pior situação depende, por exemplo, da direção do elemento do lado direito e da direção do elemento que fornece a perturbação do lado direito. Faremos uma análise para o caso particular de uma matriz simétrica, pois fica bem simples encontrar as direções que irão causar a maior perturbação na solução do sistema linear.

Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e o elemento  $b \in \mathbb{R}^n$  não-nulo. Considere o **Sistema Linear**: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  solução da equação

$$Ax = b. \quad (8.2)$$

Como  $A$  é uma matriz invertível, tem-se

$$x^* = A^{-1}b$$

a única solução do sistema linear (8.2).

Vamos considerar que a perturbação do sistema (8.2) seja dada no elemento  $b$ . Assim, temos o seguinte **Sistema Linear Perturbado**: encontrar  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  solução da equação

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \quad (8.3)$$

onde  $\delta b \in \mathbb{R}^n$  é a perturbação em  $b$ . Indicamos por  $\hat{x} = x^* + \delta x^*$  a solução do sistema perturbado (8.3), onde  $\delta x^*$  é a solução do sistema linear

$$A(\delta x) = \delta b \quad (8.4)$$

isto é,  $\delta x^* = A^{-1}(\delta b)$  é que vai fornecer a perturbação da solução do sistema linear (8.2) em função da perturbação  $\delta b$  do elemento  $b$ .

Sejam  $\|\cdot\|$  uma norma vetorial em  $\mathbb{R}^n$  e  $\|\cdot\|$  a norma matricial em  $M_n(\mathbb{R})$ , induzida pela norma vetorial. Desse modo, temos que

$$\|\delta x^*\| = \|A^{-1}(\delta b)\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta b\|. \quad (8.5)$$

Com uma simples manipulação em (8.5), obtemos

$$\frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\| \|\delta b\|}{\|A\| \|x^*\|}. \quad (8.6)$$

Como  $x^*$  é a solução do sistema linear (8.2), temos que

$$\|b\| = \|Ax^*\| \leq \|A\| \|x^*\|. \quad (8.7)$$

Substituindo (8.7) em (8.6), e utilizando a definição do **número de condição** da matriz  $A$ , que é dado por:

$$\mathcal{K}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|,$$

obtemos

$$\frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} \leq \mathcal{K}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \quad (8.8)$$

Desse modo, temos um majorante para o **erro relativo** da solução do sistema linear (8.2), quando consideramos uma perturbação no elemento  $b$ .

## Direções de Máximo Erro Relativo

Vamos analisar a possibilidade de encontrar uma direção para o elemento  $b \in \mathbb{R}^n$  e uma direção para o elemento de perturbação  $\delta b \in \mathbb{R}^n$  de modo que tenhamos a igualdade em (8.8), isto é,

$$\frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} = \mathcal{K}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \quad (8.9)$$

Nesta situação, concluímos que, se  $\mathcal{K}(A)$  for muito grande, uma pequena perturbação no elemento  $b$  vai significar um grande erro relativo na solução do sistema linear (8.2).

Para facilitar a análise e possibilitar uma visualização geométrica do número de condição, vamos introduzir as seguintes definições:

**Definição 8.4.1 (Máxima Ampliação)** Para  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , definimos

$$\maxmag(A) = \max \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} ; x \in \mathbb{R}^n \text{ não-nulo} \right\} = \|A\|$$

é a máxima ampliação dada pela matriz  $A$  e o elemento  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  que satisfaz

$$\maxmag(A) = \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = \|A\|$$

a direção de máxima ampliação dada pela matriz  $A$ .

**Definição 8.4.2 (Mínima Ampliação)** Para  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , definimos

$$\minmag(A) = \min \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} ; \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ não-nulo} \right\}$$

é a mínima ampliação dada pela matriz  $A$  e o elemento  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  que satisfaz

$$\minmag(A) = \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$$

a direção de mínima ampliação dada pela matriz  $A$ .

**Proposição 8.4.1** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível. Então,

1.  $\maxmag(A) = \frac{1}{\minmag(A^{-1})}$
2.  $\maxmag(A^{-1}) = \frac{1}{\minmag(A)}$
3.  $\mathcal{K}(A) = \frac{\maxmag(A)}{\minmag(A)}$

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Voltando ao problema da análise de sensibilidade do sistema linear, vamos procurar uma direção para o elemento  $b$  e uma direção para o elemento  $\delta b$  de modo que tenhamos a igualdade (8.9). Da equação (8.4), tem-se que

$$\|\delta x^*\| = \|A^{-1}(\delta b)\|.$$

Vamos analisar a máxima ampliação dada pela matriz  $A^{-1}$ , isto é,

$$\|A^{-1}\| = \max \left\{ \frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|} ; \quad z \in \mathbb{R}^n \text{ não-nulo} \right\} = \frac{\|A^{-1}\bar{z}\|}{\|\bar{z}\|}. \quad (8.10)$$

Portanto,  $\bar{z}$  é a direção que realiza a máxima ampliação dada pela matriz  $A^{-1}$ .

Desse modo, escolhendo o elemento de perturbação  $\delta b = \epsilon \bar{z}$ , obtemos

$$\|\delta x^*\| = \|A^{-1}(\delta b)\| = \|A^{-1}\| \|\delta b\|. \quad (8.11)$$

Analisando agora a máxima ampliação dada pela matriz  $A$ , isto é,

$$\|A\| = \max \left\{ \frac{\|Aw\|}{\|w\|} ; w \in \mathbb{R}^n \text{ não-nulo} \right\} = \frac{\|A\bar{w}\|}{\|\bar{w}\|}. \quad (8.12)$$

Portanto,  $\bar{w}$  é a direção que realiza a máxima ampliação dada pela matriz  $A$ .

Escolhendo o elemento  $b \in \mathbb{R}^n$  não-nulo, de modo que a solução  $x^*$  do sistema linear (8.2) esteja na direção de máxima ampliação dada pela matriz  $A$ , obtemos

$$\|b\| = \|Ax^*\| = \|A\| \|x^*\| \iff \|x^*\| = \frac{\|b\|}{\|A\|}. \quad (8.13)$$

Portanto, das equações (8.11) e (8.13), temos a igualdade procurada

$$\frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} = \mathcal{K}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \quad (8.14)$$

A seguir apresentamos uma proposição considerando a que matriz do sistema linear é uma matriz positiva-definida, que mostra as direções que levam a igualdade (8.14). Esse resultado será muito interessante para a análise de sensibilidade dos sistemas lineares que são provenientes de discretizações de problemas de valores de contorno.

**Proposição 8.4.2** *Considere o sistema linear (8.2) e o sistema linear perturbado (8.3), no caso em que  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz positiva-definida. Então, a igualdade (8.9) é obtida para a norma-2 quando o elemento  $b = \alpha v_n$  não-nulo, com  $v_n$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_n$  de maior valor, e o elemento de perturbação  $\delta b = \epsilon v_1$ , com  $v_1$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$  de menor valor.*

**Demonstração** – Como  $A$  é uma matriz positiva-definida, seus autovalores são todos positivos. Vamos representá-los da seguinte forma:  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , com  $v_1, v_2, \dots, v_n$  os autovetores associados, respectivamente.

Da equação (8.4), temos que

$$\|\delta x^*\|_2 = \|A^{-1}(\delta b)\|_2. \quad (8.15)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \maxmag(A^{-1}) &= \max \left\{ \frac{\|A^{-1}z\|_2}{\|z\|_2} ; z \in \mathbb{R}^n \text{ não-nulo} \right\} \\ &= \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_1}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Portanto, o elemento  $\bar{z} = v_1$  é a direção que realiza a máxima ampliação dada pela matriz  $A^{-1}$ . Desse modo, considerando a perturbação  $\delta b = \epsilon v_1$ , temos que

$$\|\delta x^*\|_2 = \|A^{-1}\|_2 \|\delta b\|_2 = \frac{\|\delta b\|_2}{\lambda_1}. \quad (8.17)$$

Podemos observar facilmente que a equação (8.17) está dizendo que o erro da solução do sistema linear é ampliado pelo maior autovalor da matriz  $A^{-1}$ .

Da equação (8.2), temos que

$$\|Ax^*\|_2 = \|b\|_2. \quad (8.18)$$

Sabemos que

$$\maxmag(A) = \max \left\{ \frac{\|Az\|_2}{\|z\|_2} ; z \in \mathbb{R}^n \text{ não nulo} \right\} = \|A\|_2 = \lambda_n. \quad (8.19)$$

Portanto, o elemento  $\bar{z} = v_n$  é a direção que realiza a máxima ampliação dada pela matriz  $A$ . Desse modo, escolhendo o elemento  $b = \alpha v_n$  não-nulo, temos que  $x^*$  está na direção de máxima ampliação da matriz  $A$ . Assim, obtemos

$$\|x^*\|_2 = \frac{\|Ax^*\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\|b\|_2}{\lambda_n}. \quad (8.20)$$

Das equações (8.17) e (8.20), obtemos a igualdade desejada

$$\frac{\|\delta x^*\|_2}{\|x^*\|_2} = \mathcal{K}_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (8.21)$$

o que completa a demonstração. ■

Como a matriz  $A$  é positiva-definida, das equações (8.16) e (8.19), temos que o número de condição da matriz  $A$  com relação à norma  $\|\cdot\|_2$  é dado por:

$$\mathcal{K}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}. \quad (8.22)$$

Desse modo, a igualdade (8.21) é um caso extremo do seguinte resultado:



**Proposição 8.4.3** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Então, a solução do sistema linear  $Ax = b$ ,  $x^* = A^{-1}b$ , e a solução do sistema linear perturbado  $\delta x^* = A^{-1}\delta b$  satisfazem as seguintes relações*

$$\|x^*\|_2 \geq \frac{\|b\|_2}{\lambda_n} \quad e \quad \|\delta x^*\|_2 \leq \frac{\|\delta b\|_2}{\lambda_1}, \quad (8.23)$$

e o erro relativo é limitado por

$$\frac{\|\delta x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = \mathcal{K}_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}. \quad (8.24)$$

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Proposição 8.4.4** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica invertível. Considere o sistema linear  $Ax = b$  e o sistema linear perturbado  $A(x + \delta x) = b + \delta b$ . Então, obtemos a igualdade*

$$\frac{\|\delta x^*\|_2}{\|x^*\|_2} = \mathcal{K}_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (8.25)$$

quando o elemento  $b = \alpha v_n$  não-nulo, com  $v_n$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_n$  de maior valor em módulo, e o elemento de perturbação  $\delta b = \epsilon v_1$ , com  $v_1$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$  de menor valor em módulo.

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Exemplo 8.4.1** Considere  $A \in M_3(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pede-se:

(a) calcule  $\|A\|_2$  e  $\|A^{-1}\|_2$  através de seus autovalores.

(b) Determine as direções para os elementos  $b$  e  $\delta b$  em  $\mathbb{R}^3$  de modo que o erro relativo da solução do sistema linear  $Ax = b$  seja o maior possível, isto é,

$$\frac{\|x^* - \hat{x}\|_2}{\|x^*\|_2} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (8.26)$$

onde  $\hat{x} = x^* + \delta x^*$  é a solução do sistema linear perturbado

$$A(x + \delta x) = b + \delta b.$$

**Exemplo 8.4.2** Considere o sistema linear  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

que tem como solução exata

$$x^* = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

Pede-se:

(a) Calcule  $\mathcal{K}_2(A)$

(b) Encontre a solução  $\hat{x} = x^* + \delta x^*$  do sistema linear perturbado

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \quad (8.28)$$

considerando uma perturbação do elemento  $b$  dada por

$$\delta b = \begin{bmatrix} -9.7 \times 10^{-8} \\ 1.06 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

(c) Compare as grandezas

$$\frac{\|\delta x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \quad e \quad \mathcal{K}_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (8.30)$$

Calcule o ângulo entre o elemento  $b$  e o autovetor  $v_2$  associado ao autovalor  $\lambda_2$  de maior valor em módulo.

Calcule o ângulo entre o elemento  $\delta b$  e o autovetor  $v_1$  associado ao autovalor  $\lambda_1$  de menor valor em módulo.

O que podemos concluir ?

Os autovalores da matriz  $A$  são

$$\lambda_1 = -5.050376 \times 10^{-5} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.980051.$$

Podemos observar que a matriz  $A$  não é positiva-definida. Entretanto,  $A$  é uma matriz simétrica invertível. Assim, temos que

$$\mathcal{K}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 3.920601 \times 10^4, \quad (8.31)$$

indicando que  $A$  é uma matriz *mal-condicionada*.

Note que a solução exata do sistema linear é

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, basta resolver o sistema linear  $A(\delta x) = \delta b$  para obtermos  $\delta x^*$ .

Encontramos

$$\delta x^* = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -2.02030 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1.0020 \\ 0.99797970 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que

$$\frac{\|\delta x^*\|_2}{\|x^*\|_2} = 2.010176 \times 10^{-3} \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = 2.011751 \times 10^{-3} \quad (8.32)$$

Calculando o ângulo entre os elementos  $b$  e  $v_2$ , obtemos

$$\cos(\theta_1) = \frac{\langle b, v_2 \rangle}{\|b\|_2 \|v_2\|_2} = 3.1415925 \quad \implies \quad \theta_1 = 180.000^\circ. \quad (8.33)$$

Calculando o ângulo entre os elementos  $\delta b$  e  $v_1$ , obtemos

$$\cos(\theta_2) = \frac{\langle \delta b, v_1 \rangle}{\|\delta b\|_2 \|v_1\|_2} = 3.1023370 \quad \implies \quad \theta_2 = 177.751^\circ. \quad (8.34)$$

Analisando os resultados apresentados em (8.32)–(8.34), podemos concluir que estamos muito próximos da pior situação.

Finalmente, considerando o sistema linear  $A^{-1}b = x$  e o sistema linear perturbado  $A^{-1}(b + \delta b) = (x + \delta x)$ , obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{\mathcal{K}(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} . \quad (8.35)$$

Desse modo, temos as seguintes desigualdades

$$\frac{1}{\mathcal{K}(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} \leq \mathcal{K}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} . \quad (8.36)$$

Fixamos uma matriz  $A$  e um elemento  $b$ , ambos aleatórios. Consideramos vários erros relativos do elemento  $b$ , também aleatórios. Na Figura (8.1) temos uma ilustração para as desigualdades apresentadas em (8.36). Construimos o sistema linear (8.2) escolhendo o elemento  $b$  de modo que a solução exata seja

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Nesta simulação temos  $\mathcal{K}_2(A) = 80.9018$ .

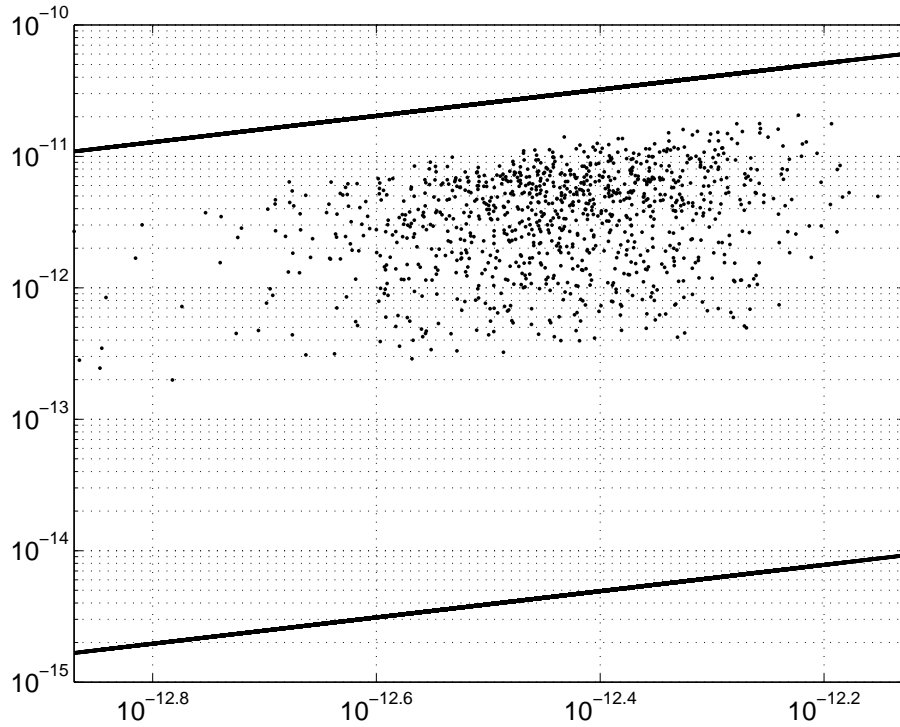


Figura 8.1: Ilustração das desigualdades definidas em (8.36). Consideramos uma matriz aleatória  $A$ , de dimensão  $n = 8$ , e vários erros relativos  $\delta b$  do elemento  $b$ , também aleatórios. Neste caso, temos que  $\mathcal{K}_2(A) = 80.9018$ .

**Exemplo 8.4.3** Analisar a possibilidade de determinar uma direção para o elemento  $b \in \mathbb{R}^n$  e uma direção para a perturbação  $\delta b \in \mathbb{R}^n$  de modo que tenhamos a igualdade em (8.35), isto é,

$$\frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} = \frac{1}{\mathcal{K}(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}. \quad (8.37)$$

Nesta situação teremos o mínimo erro relativo na solução do sistema linear (8.2), decorrente da perturbação  $\delta b$ .

**Exemplo 8.4.4** Considere o sistema linear  $Ax = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 0.5858 \\ 0.8284 \\ 0.5858 \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

que tem como solução exata

$$x^* = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.4142 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

Pede-se:

(a) Calcule  $\mathcal{K}_2(A)$ .

(b) Encontre a solução  $\hat{x} = x^* + \delta x^*$  do sistema linear perturbado

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \quad (8.39)$$

considerando uma perturbação do elemento  $b$  dada por

$$\delta b = \begin{bmatrix} 0.1250 \times 10^{-6} \\ -0.1768 \times 10^{-6} \\ 0.1250 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

(c) Compare as grandezas

$$\frac{\|\delta x^*\|_2}{\|x^*\|_2}, \quad \frac{1}{\mathcal{K}_2(A)} \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad e \quad \mathcal{K}_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (8.41)$$

Determine o ângulo entre o elemento  $b$  e o autovetor  $v_1$  associado ao menor autovalor  $\lambda_1$ .

Determine o ângulo entre o elemento  $\delta b$  e o autovetor  $v_3$  associado ao maior autovalor  $\lambda_3$ .

O que podemos concluir ?

Considerar agora que a perturbação do sistema (8.2) seja dada na matriz  $A$ . Assim, temos o seguinte *Sistema Linear Perturbado*: encontrar  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  solução da equação

$$(A + \Delta A)(x + \delta x) = b, \quad (8.42)$$

onde  $\Delta A \in M_n(\mathbb{R})$  é uma perturbação da matriz  $A$ , de modo que  $A + \Delta A$  seja uma matriz invertível. Vamos denotar por  $\hat{x} = x^* + \delta x^*$  a solução do sistema linear perturbado (8.22). Desse modo, temos que

$$x^* + \delta x^* = (A + \Delta A)^{-1} b. \quad (8.43)$$

Logo, a perturbação  $\delta x^*$  é obtido da seguinte forma:

$$\delta x^* = ((A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}) b. \quad (8.44)$$

Chamando  $B = A + \Delta A$ , temos a seguinte identidade

$$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}(A - B)B^{-1}. \quad (8.45)$$

Substituindo (8.45) em (8.44), e utilizando (8.43), obtemos

$$\delta x^* = -A^{-1} \Delta A (A + \Delta A)^{-1} b = A^{-1} \Delta A (x^* + \delta x^*). \quad (8.46)$$

Tomando a norma de ambos os membros de (8.46), tem-se que

$$\|\delta x^*\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|x^* + \delta x^*\|. \quad (8.47)$$

Finalmente, obtemos

$$\frac{\|\delta x^*\|}{\|x^* + \delta x^*\|} \leq \mathcal{K}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \quad (8.48)$$

De forma análoga, podemos mostrar que

$$\frac{1}{\mathcal{K}(A)} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leq \frac{\|\delta x^*\|}{\|x^* + \delta x^*\|}. \quad (8.49)$$

Das desigualdades (8.48) e (8.49), obtemos

$$\frac{1}{\mathcal{K}(A)} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \leq \frac{\|\delta x^*\|}{\|x^* + \delta x^*\|} \leq \mathcal{K}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \quad (8.50)$$



Fixamos uma matriz  $A$  e um elemento  $b$ , ambos aleatórios. Consideramos vários erros relativos da matriz  $A$ , também aleatórios. Na Figura (8.2) temos uma ilustração para as desigualdades (8.50). Construimos o sistema linear (8.2) escolhendo o elemento  $b$  de modo que a solução exata seja

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

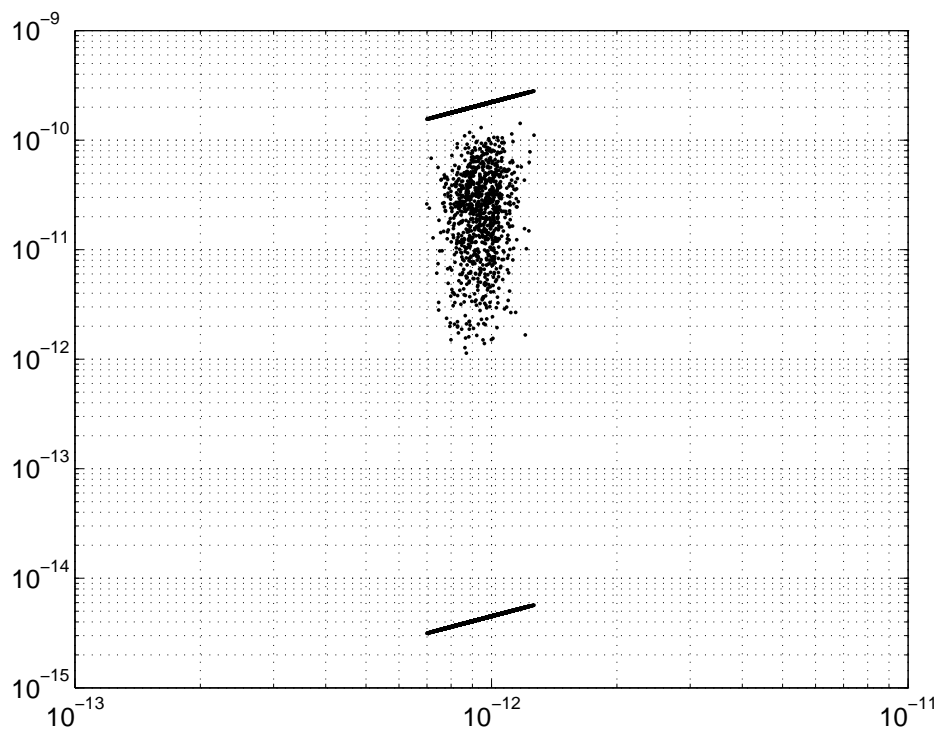


Figura 8.2: Ilustração das desigualdades definidas em (8.50). Consideramos uma matriz aleatória  $A$ , de dimensão  $n = 10$ , e vários erros relativos  $\Delta A$  da matriz  $A$ , também aleatórios. Neste caso, temos que  $\mathcal{K}_2(A) = 80.5347$ .

### ***Perturbações na Forma Paramétrica***

Nesta seção apresentamos uma nova maneira para a *Análise de Sensibilidade*, onde a perturbação é dada tanto na matriz  $A$  quanto no elemento  $b$  de maneira paramétrica.

Consideramos que a perturbação no sistema linear (8.2) seja dada na matriz  $A$  e no elemento  $b$  de forma paramétrica. Assim, temos o seguinte *Sistema Linear Perturbado*: encontrar  $\hat{x}(\epsilon) \in \mathbb{R}^n$  solução da equação

$$(A + \epsilon F)x(\epsilon) = b + \epsilon f \quad ; \quad \epsilon \in \mathbb{R}, \quad (8.51)$$

onde  $F \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $f \in \mathbb{R}^n$  são fixas, porém arbitrárias, e  $\hat{x}(0) = x^*$ .

Como  $A$  é uma matriz invertível, temos que  $\hat{x}(\epsilon)$  é uma função diferenciável em uma vizinhança do parâmetro  $\epsilon = 0$ .

Derivando a equação (8.51) com relação ao parâmetro  $\epsilon$ , obtemos

$$Fx(\epsilon) + (A + \epsilon F) \frac{dx}{d\epsilon}(\epsilon) = f \quad ; \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (8.52)$$

Derivando a equação (8.52) com relação ao parâmetro  $\epsilon$ , obtemos

$$2F \frac{dx}{d\epsilon}(\epsilon) + (A + \epsilon F) \frac{d^2x}{d\epsilon^2}(\epsilon) = 0 \quad ; \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (8.53)$$

Fazendo  $\epsilon = 0$  na equação (8.52) e na equação (8.53), obtemos

$$\frac{d\hat{x}}{d\epsilon}(0) = A^{-1}(f - Fx^*) \quad (8.54)$$

$$\frac{d^2\hat{x}}{d\epsilon^2}(0) = -2(A^{-1}F) \frac{d\hat{x}}{d\epsilon}(0)$$

Consideramos a Fórmula de Taylor da função  $\hat{x}(\epsilon)$  numa vizinhança de  $\epsilon = 0$

$$\hat{x}(\epsilon) = x^* + \frac{d\hat{x}}{d\epsilon}(0)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (8.55)$$

$$\hat{x}(\epsilon) = x^* + A^{-1}(f - Fx^*)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Tomando a norma de ambos os membros de (8.55), tem-se que

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}(\epsilon) - x^*\| &\leq |\epsilon| \|A^{-1}\| \{ \|F\| \|x^*\| + \|f\| \} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \frac{\|\widehat{x}(\epsilon) - x^*\|}{\|x^*\|} &\leq |\epsilon| \|A^{-1}\| \left\{ \|F\| + \frac{\|f\|}{\|x^*\|} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (8.56)$$

Como  $x^*$  é a solução exata do sistema linear (8.2), temos que

$$\|x^*\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}. \quad (8.57)$$

Utilizando a desigualdade (8.57) na desigualdade (8.56), obtemos

$$\frac{\|\widehat{x}(\epsilon) - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \left\{ |\epsilon| \frac{\|F\|}{\|A\|} + |\epsilon| \frac{\|f\|}{\|b\|} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (8.58)$$

Utilizando a definição do *número de condição* da matriz  $A$ , em relação à norma  $\|\cdot\|$ , que é dado por:

$$\mathcal{K}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|, \quad (8.59)$$

obtemos

$$\frac{\|\widehat{x}(\epsilon) - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \mathcal{K}(A) \left\{ |\epsilon| \frac{\|F\|}{\|A\|} + |\epsilon| \frac{\|f\|}{\|b\|} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (8.60)$$

Na desigualdade (8.60), temos que

$$\begin{aligned} \rho_A &= |\epsilon| \frac{\|F\|}{\|A\|} \quad ; \quad \epsilon \in \mathbb{R} \\ \rho_b &= |\epsilon| \frac{\|f\|}{\|b\|} \quad ; \quad \epsilon \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (8.61)$$

representam o erro relativo na matriz  $A$  e o erro relativo no elemento  $b$ , respectivamente.

Portanto, o erro relativo na solução do sistema linear (8.2) é proporcional ao erro relativo  $(\rho_A + \rho_b)$ , onde  $\mathcal{K}(A)$  é o fator de proporcionalidade. Neste sentido, o número de condição  $\mathcal{K}(A)$  quantifica a sensibilidade do problema  $Ax = b$ .

Vamos apresentar através de exemplos uma comparação entre o número de condição e o valor do determinante, de uma matriz invertível.

Considere a matriz  $B \in M_n(\mathbb{R})$  triangular inferior definida da seguinte forma:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.62)$$

Temos que  $\det(B) = 1$  para todo  $n$ . Entretanto,  $\mathcal{K}_1(B) = n 2^{n-1}$  o que torna a matriz *mal-condicionada* quando  $n$  cresce.

**Exemplo 8.4.5** *Faça a construção da matriz  $B^{-1}$  mostrando que é dada por*

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 4 & 2 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 2^{n-2} & 2^{n-3} & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.63)$$

e que  $\|B^{-1}\|_1 = 2^{n-1}$ .

Por outro lado, podemos dar exemplo de uma matriz que é *bem-condicionada*, entretanto o determinante é muito pequeno.

De fato, considere a matriz diagonal  $D \in M_n(\mathbb{R})$  definida da seguinte forma:

$$D = \text{diag}(10^{-1}, \dots, 10^{-1}, \dots, 10^{-1}). \quad (8.64)$$

Temos que  $\det(D) = 10^{-n}$ , que é muito pequeno quando  $n$  cresce. Entretanto, temos que  $\mathcal{K}_\alpha(D) = 1$ , que é o número de condição em relação à uma norma  $\|\cdot\|_\alpha$  que é induzida por uma norma  $\|\cdot\|_\alpha$ .

Portanto, a sensibilidade do problema  $Ax = b$  não está relacionada com o  $\det(A)$ , mas especificamente com o número de condição da matriz do sistema linear.

**Exemplo 8.4.6** Considere a matriz positiva-definida  $A \in M_2(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine as direções para os elementos  $b$  e  $\delta b$  em  $\mathbb{R}^2$  de modo que o erro relativo da solução do sistema linear  $Ax = b$  seja o maior possível, isto é,

$$\frac{\|\delta x^*\|_2}{\|x^*\|_2} = \mathcal{K}_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2},$$

quando consideramos uma perturbação  $\delta b$  no elemento  $b$ .

## 8.5 Sistema Linear Positivo–Definido

Em muitos problemas em Análise Numérica são formulados como sistemas lineares e vários outros problemas, após uma linearização ou uma discretização, são transformados também num problema de sistema linear. Como exemplo de linearização, mencionamos o Método de Newton para sistemas de equações algébricas não lineares, no qual em cada iteração temos que obter a solução de um sistema linear. Entre os problemas de valores de contorno, temos vários métodos de discretização para obtermos uma solução numérica, e desse modo, após a discretização, temos que resolver um sistema linear. Em cada caso, a matriz do sistema linear tem propriedades específicas, dependendo da formulação do problema e do método de discretização escolhido. Por exemplo: pode ser simétrica, positiva–definida, diagonalmente dominante, etc.

De um modo geral, devemos analisar se a matriz é densa, se possui uma estrutura de esparsidade, ou se é simplesmente esparsa, sem uma estrutura bem definida. Uma matriz pode ser considerada esparsa no caso em que possui poucos elementos não–nulos, e esses elementos não estão em posições que seguem uma certa ordem. Matrizes esparsas surgem nos Métodos de Elementos Finitos para problemas de valores de contorno bidimensional, por exemplo. Consideramos que uma matriz é densa, se possui poucos elementos nulos. Matrizes densas estão associadas, por exemplo, ao Método dos Quadrados Mínimos para ajuste de curvas. Os casos mais interessantes são as matrizes que possuem uma certa estrutura de esparsidade, por exemplo: tridiagonal, banda, tridiagonal por blocos. Essas estruturas de esparsidade aparecem com frequência nos sistemas lineares provenientes da discretização de problemas de valores de contorno através dos Esquemas de Diferenças Finitas.

Os métodos numéricos para sistemas lineares podem ser classificados em dois grupos, a saber: Métodos Diretos e Métodos Iterativos. Os métodos diretos são aqueles que, com um número finito de operações elementares encontramos a solução exata. Claro que não estamos considerando erros de arredondamento da aritmética de ponto flutuante. Como exemplo de métodos diretos, temos a Fatoração  $LU$  (Eliminação Gaussiana) e a Fatoração de Cholesky. Apresentamos também o Método dos Gradientes Conjugados, que do ponto de vista computacional é tratado como um método iterativo, mas mostraremos que na sua construção é um método direto, de acordo com a definição acima.

Os métodos iterativos são aqueles que, a partir de uma aproximação inicial para a solução do sistema linear, geram uma seqüência de novas aproximações que converge para a solução exata. Assim, a solução exata é obtida como o limite da seqüência gerada pelo método iterativo. Fica evidente que nos métodos iterativos temos que encontrar as condições para as quais a seqüência seja convergente. Note que os métodos iterativos necessitam de um número infinito de operações elementares para obter a solução exata, mesmo não considerando os erros de arredondamento da aritmética de ponto flutuante. Vamos analisar os Métodos Iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel, Relaxação Sucessiva e o Método da Máxima Descida, que também é denominado Método do Gradiente Otimizado. Inicialmente vamos estudar os métodos numéricos para sistema linear positivo-definido.

Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Considere o Sistema Linear Positivo-Definido: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  solução da equação

$$Ax = b. \quad (8.65)$$

Como  $A$  é positiva-definida, portanto invertível, o sistema linear (8.65) possui uma única solução  $x^* = A^{-1}b$ .

Em geral, nos problemas de interesse prático, a matriz  $A$  é de grande porte e esparsa. Os métodos de decomposição tendem a modificar a estrutura de esparsidade, tornando elementos nulos em elementos não-nulos. Devemos observar que a Fatoração de Cholesky preserva as estruturas de esparsidade de banda e de envelope. Esta última requer uma reserva de posições de elementos nulos que irão se tornar não-nulos no fator de Cholesky, que estão no envelope. Nos métodos iterativos, é necessário somente o cálculo do produto da matriz  $A$  por elementos do  $\mathbb{R}^n$ , com isso não temos necessidade de modificar a estrutura de esparsidade da matriz do sistema linear. Assim, podemos dizer que esta é uma das grandes vantagens dos métodos iterativos.

A seguir apresentamos com todo detalhe o Problema de Minimização associado ao Sistema Linear Positivo-Definido, para que possamos construir o Método da Máxima Descida e o Método dos Gradientes Conjugados.

## ***Problema de Minimização***

Vamos associar ao **Sistema Linear Positivo–Definido**

$$Ax = b$$

o **Problema de Minimização**: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$J(x^*) = \min\{ J(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \}, \quad (8.66)$$

onde o funcional  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é definido da seguinte forma:

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \quad (8.67)$$

com  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno usual do  $\mathbb{R}^n$ .

Podemos verificar facilmente que

$$J(x^*) = -\frac{1}{2} b^t A^{-1} b = -\frac{1}{2} \langle A^{-1} b, b \rangle,$$

onde  $x^* = A^{-1} b$  é a solução exata do sistema linear.

Vamos mostrar que o sistema linear positivo–definido e o problema de minimização são equivalentes, isto é, eles possuem a mesma solução. Essa equivalência vem essencialmente do fato da matriz  $A$  ser positiva–definida.

**Teorema 8.5.1** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva–definida e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Então, o **Problema de Minimização**: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$J(x^*) = \min\{ J(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \} \quad (8.68)$$

*é equivalente ao **Sistema Linear Positivo–Definido***

$$Ax = b. \quad (8.69)$$

**Demonstração** – Inicialmente vamos calcular a *Derivada Direcional* do funcional  $J$  no ponto  $\bar{x}$  na direção do vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ , que é definida da seguinte forma:

$$J'(\bar{x})(v) = \left\{ \frac{d}{dt} J(\bar{x} + tv) \right\}_{t=0}. \quad (8.70)$$



Utilizando a hipótese da matriz  $A$  ser simétrica, temos que

$$J(\bar{x} + tv) = J(\bar{x}) + t\langle A\bar{x}, v \rangle + \frac{t^2}{2}\langle Av, v \rangle - t\langle b, v \rangle \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \quad (8.71)$$

Portanto, derivando (8.71) com relação a  $t$  e fazendo  $t = 0$  obtemos

$$J'(\bar{x})(v) = \langle A\bar{x} - b, v \rangle \quad (8.72)$$

que é a *Derivada Direcional* do funcional  $J$  no ponto  $\bar{x}$  na direção do vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ .

De (8.72) temos a definição de gradiente do funcional  $J$  em um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 8.5.1** *O Gradiente do funcional  $J$  no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é definido por:*

$$\nabla J(x) = Ax - b \quad (8.73)$$

Desse modo, definimos o Ponto Crítico do funcional  $J$ , como segue.

**Definição 8.5.2** *Dizemos que  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é um Ponto Crítico do funcional  $J$  se, e somente se,*

$$J'(x^*)(v) = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in \mathbb{R}^n. \quad (8.74)$$

Desse modo, temos que um ponto crítico do funcional  $J$  é a solução do sistema linear positivo-definido  $Ax = b$ . Portanto, temos um único ponto crítico para  $J$ , que é dado por  $x^* = A^{-1}b$ .

Para classificar o ponto crítico devemos calcular a *Segunda Variação* do funcional  $J$  no ponto  $\bar{x}$  na direção do vetor  $w \in \mathbb{R}^n$ , que é definida da seguinte forma:

$$J''(\bar{x}; v)(w) = \left\{ \frac{d}{dt} J'(\bar{x} + tw)(v) \right\}_{t=0} \quad (8.75)$$

Temos que

$$J'(\bar{x} + tw)(v) = \langle A\bar{x}, v \rangle + t\langle Aw, v \rangle - \langle b, v \rangle \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \quad (8.76)$$

Portanto, derivando (8.76) com relação a  $t$  e fazendo  $t = 0$ , obtemos

$$J''(\bar{x}; v)(w) = \langle Aw, v \rangle \quad (8.77)$$

que é a *Segunda Variação* do funcional  $J$  no ponto  $\bar{x}$  na direção do vetor  $w \in \mathbb{R}^n$ .

De (8.77) temos a definição da matriz Hessiana do funcional  $J$  em um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 8.5.3** A matriz Hessiana do funcional  $J$  no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é definida por:

$$H(x) = A. \quad (8.78)$$

Como  $A$  é uma matriz positiva-definida, temos que

$$J''(x^*; v)(v) > 0$$

para todo  $v \in \mathbb{R}^n$  não-nulo.

Desse modo,  $x^* = A^{-1}b$  é um Ponto de Mínimo Global para o funcional  $J$ , que é a única solução do sistema linear positivo-definido. Como a matriz Hessiana não depende da variável  $x$ , temos que  $J$  é um funcional quadrático, como ilustra a Figura 8.3.

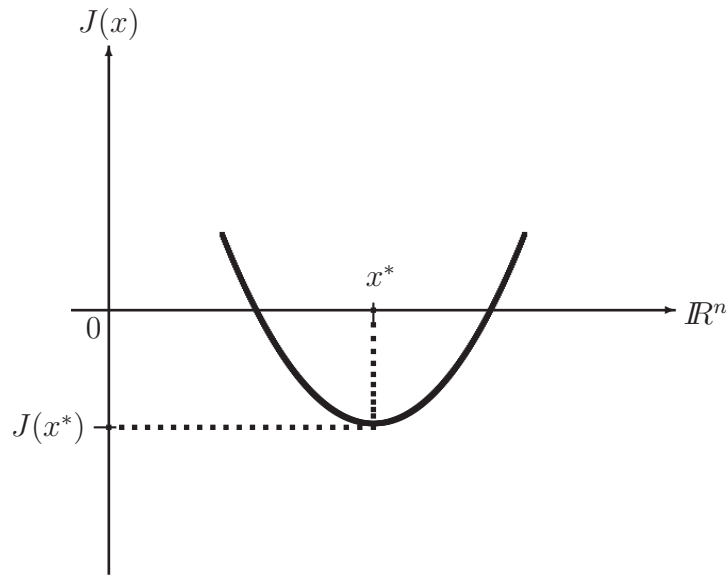


Figura 8.3: Ilustração gráfica do funcional quadrático  $J$ .

Assim, mostramos a equivalência entre o **Problema de Minimização**, descrito em (8.68), e o **Sistema Linear Positivo-Definido**, dado em (8.69).

## 8.6 Métodos dos Gradientes Conjugados

Vamos obter uma solução numérica para o sistema linear positivo-definido (8.65) através de um procedimento iterativo para encontrar o ponto de mínimo do funcional  $J$ , isto é, através de uma solução numérica do problema de minimização (8.66).

### *Método da Máxima Descida*

Sabemos que o ponto de mínimo do funcional  $J$  pode ser encontrado andando na direção de  $-\nabla J(x^{(k)}) = b - Ax^{(k)}$  a partir do ponto  $x^{(k)}$ , que é a direção que o funcional decresce mais rapidamente. Desse modo, se o resíduo  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  é não-nulo, então existe um parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$J(x^{(k)} + \lambda r^{(k)}) < J(x^{(k)}).$$

No Método da Máxima Descida o parâmetro  $\lambda$  é escolhido de modo a obtermos o ponto de mínimo de  $J$  na variedade linear  $S_k$  definida da seguinte forma:

$$S_k = \{ z \in \mathbb{R}^n / z = x^{(k)} + \lambda r^{(k)} ; \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Desse modo, vamos encontrar um ponto  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k r^{(k)}$  tal que

$$J(x^{(k+1)}) = \min \{ J(z) ; z \in S_k \},$$

o que é equivalente a escrever

$$J(x^{(k+1)}) = \min \{ J(x^{(k)} + \lambda r^{(k)}) ; \lambda \in \mathbb{R} \}$$

onde  $\lambda_k$  é o parâmetro que realiza o mínimo.

Definindo a função auxiliar  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$\varphi(\lambda) = J(x^{(k)} + \lambda r^{(k)}) ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e fazendo  $\varphi'(\lambda) = 0$ , obtemos o parâmetro  $\lambda_k$ , que realiza o mínimo de  $J$  na variedade linear  $S_k$ . Assim, tem-se que

$$\lambda_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle Ar^{(k)}, r^{(k)} \rangle}$$

para  $r^{(k)} \in \mathbb{R}^n$  não-nulo.

Como  $A$  é uma matriz positiva-definida, temos que  $\lambda_k > 0$ . Este fato garante que estamos andando sempre na direção correta, como ilustra a Figura 8.4.

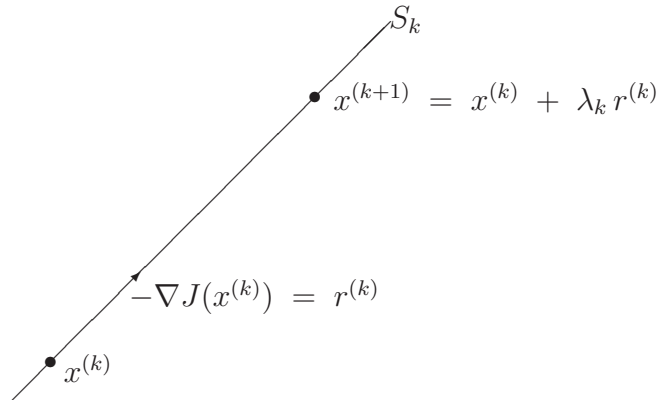


Figura 8.4: Escolha do passo  $\lambda_k$ .

No Método da Máxima Descida, temos que

$$x^{(k+1)} \in \text{span} \{ r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(k)} \} + x^{(0)}$$

e  $\{ x^{(k)} \}$  é uma seqüência minimizante para o funcional  $J$ , isto é,

$$J(x^{(0)}) > \dots > J(x^{(k)}) > J(x^{(k+1)}) > \dots > J(x^*)$$

para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

A convergência global do Método da Máxima Descida segue da seguinte desigualdade

$$J(x^{(k+1)}) - J(x^*) \leq \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{K}_2(A)} \right) (J(x^{(k)}) - J(x^*)) \quad (8.79)$$

Note que, a escolha da aproximação inicial  $x^{(0)}$  não é relevante para a convergência da seqüência  $\{ x^{(k)} \}$ . Desse modo, podemos considerar  $x^{(0)} = 0$ .

**Exemplo 8.6.1** Calcular as equações das curvas de níveis do funcional  $J$ .

**Sugestão:** utilizar a diagonalização da matriz  $A$ , isto é,  $A = Q \Lambda Q^t$ , e acompanhar a demonstração do Teorema 6.7.8.

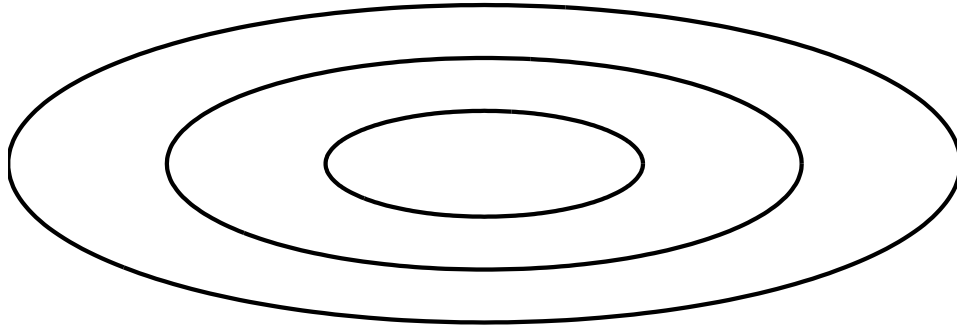


Figura 8.5: Ilustração das curvas de níveis do funcional  $J$  para  $\mathcal{K}_2(A) \gg 1$ , cujo centro é a solução única  $x^*$  do sistema linear positivo-definido (8.65).

Desse modo, podemos descrever o algoritmo do Método da Máxima Descida, que também é conhecido como **Método do Gradiente Otimizado**.

**Algoritmo 8.6.1 (Método da Máxima Descida)**

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$       uma aproximação inicial para  $x^*$

for  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$\lambda_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle Ar^{(k)}, r^{(k)} \rangle}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k r^{(k)}$$

end

Devemos observar que a convergência fica muito lenta no caso em que

$$\mathcal{K}_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

é muito grande, pois as curvas de níveis do funcional  $J$  são elipsóides alongados com centro em  $x^*$ , como ilustra a Figura 8.5, conforme o resultado do Teorema 6.7.8.

Algebricamente, esta dificuldade vem do fato que as direções dos resíduos são muito próximas. Para superar esta situação descrevemos o Método dos Gradientes Conjugados.

## Método dos Gradientes Conjugados

De um modo geral, podemos considerar sucessivas minimizações do funcional  $J$  ao longo de direções  $\{ p^0, p^1, \dots, p^k \}$  que não são necessariamente as direções dos resíduos. Isto é,

$$J(x^{(k+1)}) = \min \{ J(x^{(k)} + \lambda p^{(k)}) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R} \} \quad (8.80)$$

com

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$$

onde o parâmetro  $\lambda_k$  é obtido do mesmo modo que no Método da Máxima Descida, como ilustra a Figura 8.6,

$$\lambda_k = \frac{\langle p^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \rangle} \quad (8.81)$$

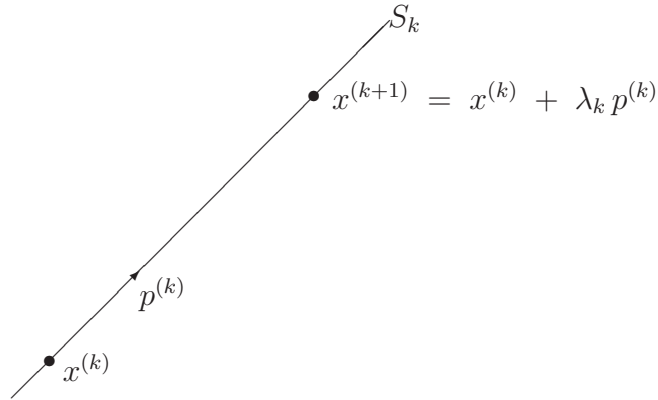


Figura 8.6: Escolha do passo  $\lambda_k$ .

Note que neste caso, tem-se

$$x^{(k+1)} \in \text{span} \{ p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k)} \} + x^{(0)} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Em seguida, escolhemos as direções  $p^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , de modo a obter a convergência do processo iterativo em  $n$  passos, onde  $n$  é a dimensão do sistema linear.

Inicialmente, construímos direções consecutivas  $p^{(k)}$  e  $p^{(k+1)}$   $A$ -conjugadas,

$$\langle Ap^{(k)}, p^{(k+1)} \rangle = 0,$$

com  $p^{(0)} = -\nabla J(x^{(0)}) = r^{(0)}$ . Assim, vamos determinar as direções da forma:

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)} \quad (8.82)$$

onde o parâmetro  $\beta_k$  é obtido impondo a condição que as direções  $p^{(k)}$  e  $p^{(k+1)}$  sejam  $A$ -conjugadas. Assim, tem-se que

$$\beta_k = -\frac{\langle Ar^{(k+1)}, p^{(k)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \rangle} = -\frac{\langle r^{(k+1)}, Ap^{(k)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \rangle} \quad (8.83)$$

Desse modo, temos que a direção  $p^{(k+1)}$  é a projeção ortogonal do resíduo  $r^{(k+1)}$  sobre o complemento ortogonal do subespaço gerado pela direção  $p^{(k)}$ , com relação ao produto interno energia  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ .

Podemos calcular o resíduo  $r^{(k+1)}$  de uma maneira mais econômica. De fato,

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - Ax^{(k)} - \lambda_k Ap^{(k)} \quad (8.84)$$

Assim, temos que

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \lambda_k Ap^{(k)} \quad (8.85)$$

Portanto, obtemos  $r^{(k+1)}$  sem nenhum custo, pois já temos o cálculo de  $Ap^{(k)}$ .

No Algoritmo 8.6.2, apresentamos uma primeira versão do **Método dos Gradientes Conjugados**.

Agora, vamos reescrever os parâmetros  $\lambda_k$  e  $\beta_k$  de uma maneira mais econômica. Inicialmente, para encontrar uma maneira mais barata para o parâmetro  $\lambda_k$ , utilizando as propriedades do Método dos Gradientes Conjugados. Note que

$$\langle p^{(k)}, r^{(k)} \rangle = \langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle + \beta_{k-1} \langle p^{(k-1)}, r^{(k)} \rangle = \langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle$$

pois  $\langle p^{(k-1)}, r^{(k)} \rangle = 0$ , tendo em vista que  $r^{(k)} = -\nabla J(x^{(k)})$ , onde  $x^{(k)}$  é o ponto de mínimo do funcional  $J$  na direção de  $p^{(k-1)}$ . Assim, temos que

$$\lambda_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \rangle} \quad (8.86)$$

Podemos mostrar agora, que dois resíduos consecutivos também são ortogonais, isto é,  $r^{(k)}$  e  $r^{(k+1)}$  são ortogonais. Note que,

$$\langle p^{(k)}, Ap^{(k)} \rangle = \langle r^{(k)}, Ap^{(k)} \rangle + \beta_{k-1} \langle p^{(k-1)}, Ap^{(k)} \rangle = \langle r^{(k)}, Ap^{(k)} \rangle \quad (8.87)$$

Assim, podemos escrever o parâmetro  $\lambda_k$  da seguinte forma alternativa

$$\lambda_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, r^{(k)} \rangle} \quad (8.88)$$

Finalmente, da relação (8.85) e utilizando a relação (8.88) para o parâmetro  $\lambda_k$ , obtemos

$$\langle r^{(k+1)}, r^{(k)} \rangle = \langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle - \lambda_k \langle Ap^{(k)}, r^{(k)} \rangle = 0 \quad (8.89)$$

Portanto, obtemos o resultado desejado.

Vamos obter uma maneira mais econômica de calcular o parâmetro  $\beta_k$ . Utilizando a relação (8.85), temos uma expressão para  $Ap^{(k)}$  que, substituída na relação (8.83) do parâmetro  $\beta_k$ , e com a nova expressão (8.86) para o parâmetro  $\lambda_k$ , implica

$$\beta_k = \frac{\langle r^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle} \quad (8.90)$$

Finalmente, devemos mostrar que  $\{r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(k)}, \dots\}$  é um conjunto ortogonal e que  $\{p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k)}, \dots\}$  é um conjunto  $A$ -conjugado. Assim, mostramos que o Método dos Gradientes Conjugados converge para a solução exata do sistema linear positivo-definido (8.65) em  $n$  passos. Desse modo, podemos dizer que o Método dos Gradientes Conjugados é um método exato.

Vamos obter os resultados acima por indução matemática. Sabemos que esses resultados são válidos para  $k = 1$ , pois as direções  $p^{(0)}$  e  $p^{(1)}$  foram construídas de modo a serem  $A$ -conjugadas. Temos também que  $p^{(0)} = r^{(0)}$  e  $r^{(1)}$  são ortogonais, isto é,  $\langle p^{(0)}, r^{(1)} \rangle = 0$ , tendo em vista que  $r^{(1)} = -\nabla J(x^{(1)})$ , onde  $x^{(1)}$  é o ponto de mínimo do funcional  $J$  na direção de  $p^{(0)}$ .

Supomos, pela hipótese de indução, que os resíduos  $r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(k-1)}$  são mutuamente ortogonais e que as direções

$$p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k-1)}$$

são mutuamente  $A$ -conjugadas, para  $k \geq 2$ .



Da relação (8.85), para  $0 \leq i \leq (k-2)$ , e da hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} \langle r^{(k)}, r^{(i)} \rangle &= \langle r^{(k-1)}, r^{(i)} \rangle - \lambda_{k-1} \langle A p^{(k-1)}, r^{(i)} \rangle \\ &= -\lambda_{k-1} \langle A p^{(k-1)}, r^{(i)} \rangle \end{aligned} \quad (8.91)$$

Da relação (8.82), podemos escrever  $r^{(i)}$  da seguinte forma:

$$r^{(i)} = p^{(i)} - \beta_{i-1} p^{(i-1)} \quad (8.92)$$

que, substituindo na relação (8.91), e da hipótese de indução para as direções, implica

$$\langle r^{(k)}, r^{(i)} \rangle = -\lambda_{k-1} \langle A p^{(k-1)}, p^{(i)} - \beta_{i-1} p^{(i-1)} \rangle = 0 \quad (8.93)$$

para  $i = 0, 1, \dots, (k-2)$ .

Assim, obtemos que os resíduos  $r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(k)}$  são mutuamente ortogonais, pois de (8.89), sabemos que  $r^{(k)}$  e  $r^{(k-1)}$  são ortogonais.

Sabemos que  $p^{(k)}$  e  $p^{(k-1)}$  são  $A$ -conjugados pela própria construção do método. Da relação (8.82), para  $0 \leq i \leq (k-2)$ , e utilizando a hipótese de indução para as direções, temos que

$$\langle p^{(k)}, A p^{(i)} \rangle = \langle r^{(k)}, A p^{(i)} \rangle + \beta_{k-1} \langle p^{(k-1)}, A p^{(i)} \rangle = \langle r^{(k)}, A p^{(i)} \rangle \quad (8.94)$$

Da relação (8.85), temos que

$$A p^{(i)} = \frac{r^{(i)} - r^{(i+1)}}{\lambda_i} \quad (8.95)$$

Substituindo na relação (8.94) e utilizando o fato que os resíduos são mutuamente ortogonais, segue que

$$\langle p^{(k)}, A p^{(i)} \rangle = 0 \quad (8.96)$$

para  $i = 0, 1, \dots, (k-2)$ .

Assim, obtemos o resultado que as direções

$$p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k)}$$

são mutuamente  $A$ -conjugadas, o que completa a demonstração. ■

No caso em que  $A$  é uma matriz esparsa sem uma estrutura bem definida, podemos armazená-la com o Esquema de Coordenadas, isto é,  $(\text{ilin}(\mathbf{k}), \text{jcol}(\mathbf{k}))$  que é a posição do  $k$ -ésimo elemento não-nulo e  $\text{A}(\mathbf{k})$  é o valor deste elemento. Neste esquema de armazenamento não é necessário uma ordem para a entrada dos elementos não-nulos. Os esquemas para armazenamento de uma matriz esparsa estão descritos na seção 8.6. Neste caso, é facilmente calculado o produto da matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  por um elemento do  $x \in \mathbb{R}^n$ . Os procedimentos para o produto de uma matriz esparsa por um vetor estão descritos na seção 8.6.

Uma estrutura de esparsidade que iremos trabalhar mais a frente, e que está ilustrada na Figura 8.7, está relacionada com a discretização da equação de Poisson com condição de Dirichlet num retângulo, pelo Esquema de Diferenças Finitas Centrada numa malha com 5 nós internos em cada uma das direções  $x$  e  $y$ .

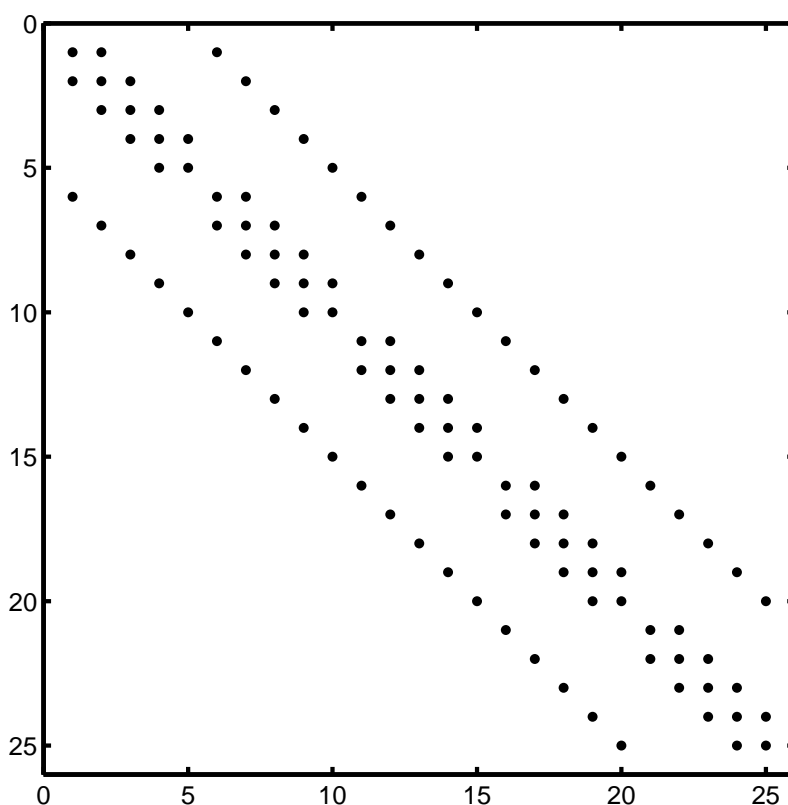


Figura 8.7: Matriz associada a discretização do Problema de Poisson no retângulo.

**Algoritmo 8.6.2 (Método dos Gradientes Conjugados)**

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$       uma aproximação inicial para  $x^*$

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \quad ; \quad p^{(0)} = r^{(0)}$$

for  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\lambda_k = \frac{\langle p^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \rangle}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \lambda_k Ap^{(k)}$$

$$\beta_k = -\frac{\langle Ap^{(k)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \rangle}$$

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)}$$

end

**Complexidade Computacional**

Podemos verificar facilmente que a complexidade computacional, número de operações elementares, do Método dos Gradientes Conjugados, em cada iteração, é dada por:

- **um** produto de matriz por vetor para o cálculo de  $Ap^{(k)}$ .
- **três** produtos internos.

e **um** produto de matriz por vetor para o cálculo do resíduo  $r^{(0)}$ , para iniciar as iterações. Desse modo, a complexidade computacional é do tipo polinomial e da ordem de  $n^2$ , em cada iteração.

Finalmente, temos uma versão econômica para o Método dos Gradientes Conjugados.

**Algoritmo 8.6.3 (Método dos Gradientes Conjugados)**

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$       uma aproximação inicial para  $x^*$

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$       ;       $p^{(0)} = r^{(0)}$

for  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\lambda_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \rangle}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \lambda_k Ap^{(k)}$$

$$\beta_k = \frac{\langle r^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}$$

$$p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)}$$

end

**Exemplo 8.6.2** *Faça uma análise da complexidade computacional do Algoritmo 8.6.3, versão econômica para o Método dos Gradientes Conjugados, e faça uma comparação com a complexidade computacional do Algoritmo 8.6.2.*

## ***Gradientes Conjugados Precondicionado***

Vamos apresentar alguns resultados sobre a velocidade de convergência do Método dos Gradientes Conjugados, tendo em vista que computacionalmente devemos tratá-lo como um método iterativo, isto é, estabelecer um critério de parada. Assim, é muito interessante conhecer sua taxa de convergência. A seguir, temos um resultado para a velocidade de convergência do Método do Gradiente Otimizado.

**Teorema 8.6.1** *Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  simétrica e positiva-definida e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Se  $\{x^{(k)}\}$  é a sequência gerada pelo Método do Gradiente Otimizado. Então,*

$$\|x^* - x^{(k)}\|_a \leq 2 \|x^* - x^{(0)}\|_a \left[ \frac{\sqrt{\mathcal{K}_2(A)} - 1}{\sqrt{\mathcal{K}_2(A)} + 1} \right]^k \quad (8.97)$$

**Demonstração** Veja Luenberger (1973). □

Note que, a taxa de convergência na norma energia do Método do Gradiente Otimizado é bastante sensível ao número de condição espectral da matriz  $A$ , o que torna o método não muito atraente pois o sucesso do método iterativo depende exclusivamente da sua velocidade de convergência. A seguir, temos dois resultados que nos fornecem um panorama de como deve ser a velocidade de convergência do Método dos Gradientes Conjugados.

**Teorema 8.6.2** *Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  simétrica e positiva-definida e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Se  $\{x^{(k)}\}$  é a sequência gerada pelo Método dos Gradientes Conjugado. Então,*

$$\|x^* - x^{(k)}\|_a \leq \|x^* - x^{(0)}\|_a \left[ \frac{\sqrt{\mathcal{K}_2(A)} - 1}{\sqrt{\mathcal{K}_2(A)} + 1} \right]^{2k} \quad (8.98)$$

**Demonstração** Veja Luenberger (1973). □

**Teorema 8.6.3** *Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  simétrica e positiva-definida com  $k$  autovalores distintos e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Então, a sequência  $\{x^{(k)}\}$  gerada pelo Método dos Gradientes Conjugados converge para a solução exata  $x^* = A^{-1}b$  com no máximo  $(k + 1)$  iterações.*

**Demonstração** Veja Luenberger (1973). □

Podemos observar que o Método dos Gradientes Conjugados converge rapidamente na norma energia no caso em  $\mathcal{K}_2(A) \approx 1$  ou no caso em que a matriz  $A$  tiver poucos autovalores distintos, e terá uma convergência muito lenta se  $\mathcal{K}_2(A) \gg 1$ . Assim, vamos necessitar de muitas iterações para atingir uma precisão desejada.

A seguir, vamos mostrar como podemos substituir o sistema linear simétrico e positivo-definido  $Ax = b$  por um sistema linear simétrico e positivo-definido equivalente  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ , onde a matriz  $\tilde{A}$  tem a propriedade de  $\mathcal{K}_2(\tilde{A})$  bem menor que  $\mathcal{K}_2(A)$ . Assim, podemos atingir a precisão requerida com poucas iterações.

A estratégia apresentada acima é denominada *precondicionamento* do sistema linear, onde devemos encontrar uma matriz  $C$  simétrica e positiva-definida para ser o *precondicionador* da matriz  $A$ , isto é,  $\tilde{A} = C^{-1}AC^{-1}$ . Em seguida aplicamos o Método dos Gradientes Conjugados no sistema linear transformado

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad (8.99)$$

onde  $\tilde{x} = Cx$  e  $\tilde{b} = C^{-1}b$ . Neste processo a dificuldade está em escolher uma matriz  $C$  de modo que  $\mathcal{K}_2(\tilde{A}) \ll \mathcal{K}_2(A)$ . A escolha depende muito do problema que deu origem ao sistema linear  $Ax = b$ . A escolha de um bom *precondicionador* pode fazer uma grande diferença na velocidade de convergência. Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$M = C^2$$

$$p^{(k)} = C^{-1}\tilde{p}^{(k)}$$

$$x^{(k)} = C^{-1}\tilde{x}^{(k)}$$

$$z^{(k)} = C^{-1}\tilde{r}^{(k)}$$

$$r^{(k)} = C\tilde{r}^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

no Método dos Gradientes Conjugados para o sistema linear transformado (8.99), obtemos o Método dos Gradientes Conjugados Precondicionado para o sistema linear  $Ax = b$ , onde a matriz simétrica e positiva-definida  $M$  é o *precondicionador*. A seguir, apresentamos o algoritmo.

**Algoritmo 8.6.4 (Gradientes Conjugados Precondicionado)**

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$       uma aproximação inicial para  $x^*$

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

$$Mz^{(0)} = r^{(0)} \quad (\text{resolver em } z^{(0)})$$

$$p^{(0)} = z^{(0)}$$

for  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\lambda_k = \frac{\langle z^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle Ap^{(k)}, p^{(k)} \rangle}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \lambda_k Ap^{(k)}$$

$$Mz^{(k+1)} = r^{(k+1)} \quad (\text{resolver em } z^{(k+1)})$$

$$\beta_k = \frac{\langle z^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle z^{(k)}, r^{(k)} \rangle}$$

$$p^{(k+1)} = z^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)}$$

end

Na escolha da matriz  $M$  simétrica e positiva-definida para ser o preconditionador, observamos que o sistema linear  $Mz = r$  deve ser de fácil resolução, para que tenhamos um algoritmo eficiente. Assim, uma primeira escolha para  $M$  é a matriz  $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$  que é a diagonal principal de  $A$ . Desse modo, temos que o preconditionador do sistema linear  $Ax = b$  é a matriz  $C = \text{diag}(\sqrt{a_{11}}, \dots, \sqrt{a_{nn}})$ .

## Armazenamento de Matrizes Esparsas

Nesta seção apresentamos dois esquemas para armazenamento de matrizes esparsas que geralmente são utilizados para a implementação computacional dos métodos da família dos gradientes conjugados, assim como nos principais pacotes computacionais de *Álgebra Linear Computacional*. Por simplicidade, consideramos como exemplo a matriz esparsa

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 2.0 & 0.0 & -2.0 & 0.0 & 3.0 \\ 0.0 & -3.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 & 0.0 & -4.0 & 0.0 \\ 5.0 & 0.0 & -5.0 & 0.0 & 6.0 \end{bmatrix}$$

que será utilizada para descrever os dois esquemas de armazenamento.

### Esquema de Coordenadas

Vamos denotar por  $(\text{ilin}(\mathbf{k}), \text{jcol}(\mathbf{k}))$  a posição do  $k$ -ésimo elemento não-nulo e por  $\text{Avet}(\mathbf{k})$  o valor do  $k$ -ésimo elemento não-nulo da matriz  $A$ .

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ilin(k)	1	5	2	4	2	1	3	5	4	5	2
jcol(k)	4	5	5	2	1	1	2	3	4	1	3
Avet(k)	-1.0	6.0	3.0	4.0	2.0	1.0	-3.0	-5.0	-4.0	5.0	-2.0

### Esquema de Coleção de Vetores Esparsos

Vamos denotar por  $\text{irowst}(\mathbf{i})$  o início da  $i$ -ésima linha nos vetores  $\text{jcol}$  e  $\mathbf{A}$ , denotamos  $\text{lenrow}(\mathbf{i})$  o número de elementos não nulos na  $i$ -ésima linha, por  $\text{jcol}$  as posições das colunas dos elementos não nulos e por  $\text{Avet}$  o vetor que contém os elementos não nulos da matriz.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
jcol(k)	4	1	5	1	3	4	2	5	1	3	2
Avet(k)	-1.0	1.0	3.0	2.0	-2.0	-4.0	4.0	6.0	5.0	-5.0	-3.0
linha	i	1	2	3	4	5					
lenrow(i)		2	3	1	2	3					
irowst(i)		1	3	11	6	8					



### ***Produto de Matriz Esparsa por Vetor***

Vamos descrever o algoritmo para calcular o produto de uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  por um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ , isto é, vamos calcular o vetor  $y = Ax$ , para o caso em que a matriz esparsa está armazenada pelo Esquema de Coordenadas. Indicamos por *nelem* o número de elementos não-nulos da matriz  $A$ .

#### **Algoritmo 8.6.5 (Produto de Matriz Esparsa por um Vetor)**

```

for i = 1,2, ... , n
y(i) = 0.0
end

for k = 1,2, ... , nelem
y(ilin(k)) = y(ilin(k)) + Avet(k)*x(jcol(k))
end

```

Vamos descrever o algoritmo para calcular o produto de uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  por um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ , isto é, vamos calcular o vetor  $y = Ax$ , para o caso em que a matriz esparsa está armazenada pelo Esquema de Coleção de Vetores Esparsos.

#### **Algoritmo 8.6.6 (Produto de Matriz Esparsa por um Vetor)**

```

for i = 1,2, ... , n
  y(i) = 0.0
  for j = 1, ... , lenrow(i)
    k = irowst(i) + j - 1
    y(i) = y(i) + Avet(k)*x(jcol(k))
  end
end

```

Os algoritmos apresentados acima, para o cálculo do produto de uma matriz esparsa por um vetor, são os mais utilizados na implementação computacional dos métodos da família dos gradientes conjugados, por sua simplicidade e eficiência.

## ***Exercícios***

**Exercício 8.22** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Calcular o gradiente e a Hessiana do funcional*

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.100)$$

**Exercício 8.23** *Considere o Problema de Valor de Contorno com condição periódica*

$$\begin{aligned} -u''(x) + \sigma u(x) &= f(x) \quad ; \quad x \in (0, L) \\ u(0) &= u(L) \end{aligned} \quad (8.101)$$

com  $\sigma > 0$  e  $f$  uma função contínua.

*O sistema linear proveniente da discretização do problema de valor de contorno (8.101) pelo Esquema de Diferenças Finitas Centrada, para uma partição regular*

$$\Pi : 0 = x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = L ,$$

com espaçamento  $h$ , é dado por:

$$\begin{bmatrix} d & -1 & & & -1 \\ -1 & d & -1 & & \\ & -1 & d & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & d & -1 \\ -1 & & & & -1 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_i) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (8.102)$$

onde

$$d = (2 + \sigma h^2) \quad e \quad h = \frac{L}{(n-1)} .$$

*Estamos denotando por  $u_i$  uma aproximação para o valor  $u(x_i)$  fornecida pelo Esquema de Diferenças Finitas. Note que  $u_n = u_1$  devido a condição de contorno periódica.*

*Determine uma solução numérica do sistema linear (8.102) pelo Método dos Gradientes Conjugados, com um resíduo relativo inferior a  $10^{-5}$ .*

*Como exemplo, considere  $L = 1$ ,  $f(x) = \sin(\pi x)$  e  $\sigma = 0.1$ . Para observar o desempenho dos métodos numéricos utilizar vários valores de  $n$ .*

**Exercício 8.24** Considere a matriz  $A$  positiva-definida dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 25 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 30 & 8 & 0 & 2 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 47 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 17 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & 15 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 21 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -9 & 0 & -1 & -3 & -4 & 52 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & -1 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Faça a representação da matriz  $A$  pelo Esquema de Coordenadas e pelo Esquema de Coleção de Vetores Esparsos.

**Exercício 8.25** Faça uma implementação computacional para o Método dos Gradientes, em uma linguagem de sua preferência, considerando que a matriz  $A$  está armazenada pelo Esquema de Coordenadas.

**Exercício 8.26** Faça uma implementação computacional para o Método dos Gradientes Conjugados, em uma linguagem de sua preferência, considerando que a matriz  $A$  está armazenada pelo Esquema de Coordenadas.

**Exercício 8.27** Considerando a matriz do Exercício 8.24 e o vetor  $b$  dado por:

$$b = \begin{bmatrix} 14.00 \\ -24.50 \\ 87.70 \\ 142.50 \\ 7.90 \\ 47.35 \\ -46.45 \\ 8.45 \\ -3.50 \\ 80.00 \end{bmatrix}$$

obter uma solução numérica para o sistema linear  $Ax = b$  utilizando as implementações computacionais dos Exercícios 8.25 e 8.26.

**Exercício 8.28** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m \geq n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , isto é, as colunas de  $A$  formam um conjunto linearmente independente em  $\mathbb{R}^m$ , e um elemento  $b \in \mathbb{R}^m$ . Considere o sistema linear sobredeterminado*

$$Ax = b, \quad (8.103)$$

cuja **Solução de Quadrados Mínimos** é o elemento  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$J(x^*) = \min\{ J(x) \ ; \ x \in \mathbb{R}^n \}, \quad (8.104)$$

onde  $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$  é um funcional quadrático definido da seguinte forma:

$$J(x) = \langle Ax - b, Ax - b \rangle \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.105)$$

*Pede-se*

1. *Determine o gradiente,  $\nabla J(x)$ , do funcional  $J$ .*
2. *Determine a matriz Hessiana,  $H(x)$ , do funcional  $J$ .*
3. *Mostre que o funcional  $J$  possui um único ponto de mínimo global.*
4. *Determine o valor do funcional  $J$  no ponto de mínimo.*
5. *Faça as alterações necessárias no algoritmo do Método dos Gradientes Conjugados para obtermos uma solução numérica do Sistema Linear Normal  $A^t A x = A^t b$ , de modo que não seja feito o cálculo de  $A^t A$  explicitamente.*
6. *Quais são as vantagens em não fazer o cálculo explicitamente de  $A^t A$  ?*

## 8.7 Fatoração de Cholesky

Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida e um elemento  $b \in \mathbb{R}^n$ . Vamos considerar o problema de encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  solução do sistema linear positivo-definido

$$Ax = b.$$

Podemos obter uma solução numérica através da Fatoração de Cholesky da matriz  $A$ , garantida pelo teorema abaixo.

**Teorema 8.7.1** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida. Então, existe uma única matriz triangular superior  $G$ , com os elementos da diagonal principal positivos, tal que  $A = G^t G$ .*

**Demonstração** – Vamos fazer uma construção do fator de Cholesky por indução sobre a ordem da matriz  $A$ . Para  $A = [a_{11}]$ , com  $a_{11} > 0$ , temos que  $G = [\sqrt{a_{11}}]$ . Pela hipótese de indução, supomos a existência do fator de Cholesky para uma matriz de ordem  $n - 1$ , e vamos construir o fator de Cholesky para uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

Inicialmente, escrevemos a matriz  $A$  na forma particionada

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \omega \\ \omega^t & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (8.106)$$

onde a matriz  $A_{n-1}$ , de ordem  $(n - 1)$ , é positiva-definida e  $a_{nn} > 0$ , pois  $A$  é uma matriz positiva-definida, e o elemento  $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Usando a hipótese de indução, sabemos que existe o fator de Cholesky da matriz  $A_{n-1}$ , isto é,  $A = G_{n-1}^t G_{n-1}$ . Desse modo, vamos procurar o fator de Cholesky da matriz  $A$  da seguinte forma:

$$G = \begin{bmatrix} G_{n-1} & c \\ 0^t & \alpha \end{bmatrix} \quad (8.107)$$

com o elemento  $c \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $\alpha > 0$ , que são determinados pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} A_{n-1} & \omega \\ \omega^t & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{n-1}^t & 0 \\ c^t & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{n-1} & c \\ 0^t & \alpha \end{bmatrix} \quad (8.108)$$

resultando nas seguintes equações

$$c^t c + \alpha^2 = a_{nn} \quad \text{e} \quad G_{n-1}^t c = \omega.$$

Como  $G_{n-1}$  é invertível, existe um único elemento  $c \in \mathbb{R}^{n-1}$  solução do sistema triangular inferior

$$G_{n-1}^t c = \omega.$$

Sabemos que

$$\det(A) = \alpha^2 (\det(G_{n-1}))^2 > 0$$

implicando na existência de um único escalar  $\alpha > 0$  solução da equação

$$c^t c + \alpha^2 = a_{nn} \quad \implies \quad \alpha = \sqrt{a_{nn} - c^t c}$$

Portanto, temos a existência e unicidade do Fator de Cholesky. Além disso, mostramos uma forma de construí-lo.

Note que, se  $\alpha$  for um complexo puro, então a matriz  $A$  não é positiva-definida. Desse modo, durante o processo da Fatoração de Cholesky podemos fazer a verificação se a matriz  $A$  é positiva-definida, o que completa a demonstração. ■

A seguir apresentamos o algoritmo da fatoração de Cholesky descrito no Teorema 8.7.1. Note que neste procedimento o fator de Cholesky é construído por coluna, que é obtida resolvendo um sistema triangular inferior, para depois calcular o elemento da diagonal.

#### Algoritmo 8.7.1 (Fatoração de Cholesky)

```

for j = 1, 2, ..., n
  G(j, j) = A(j, j)
  for i = 1, 2, ..., (j-1)
    G(i, j) = A(i, j)
    for k = 1, 2, ..., (i-1)
      G(i, j) = G(i, j) - G(k, i)*G(k, j)
    end
    G(i, j) = G(i, j)/G(i, i)
  end
  G(j, j) = G(j, j) - G(i, j)*G(i, j)
end
G(j, j) = sqrt(G(j, j))
end

```

A seguir, apresentamos uma outra forma de construção do fator de Cholesky, através da comparação entre os elementos da parte triangular superior da equação matricial

$$A = G^t G.$$

Por simplicidade, vamos considerar a seguinte situação

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & & & \\ g_{12} & g_{22} & & \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ & & g_{33} & g_{34} \\ & & & g_{44} \end{bmatrix}$$

Primeiramente calculamos os elementos da primeira linha do fator de Cholesky  $G$ , a partir da diagonal principal, da seguinte forma:

$$(g_{11})^2 = a_{11} \implies g_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$g_{11}g_{12} = a_{12} \implies g_{12} = \frac{a_{12}}{g_{11}}$$

$$g_{11}g_{13} = a_{13} \implies g_{13} = \frac{a_{13}}{g_{11}}$$

$$g_{11}g_{14} = a_{14} \implies g_{14} = \frac{a_{14}}{g_{11}}$$

Em seguida calculamos os elementos da segunda linha do fator de Cholesky  $G$ , a partir da diagonal principal, da seguinte forma:

$$(g_{12})^2 + (g_{22})^2 = a_{22} \implies g_{22} = \sqrt{a_{22} - (g_{12})^2}$$

$$g_{12}g_{13} + g_{22}g_{23} = a_{23} \implies g_{23} = \frac{a_{23} - g_{12}g_{13}}{g_{22}}$$

$$g_{12}g_{14} + g_{22}g_{24} = a_{24} \implies g_{24} = \frac{a_{24} - g_{12}g_{14}}{g_{22}}$$

De modo análogo, calculamos os elementos da terceira linha do fator de Cholesky  $G$ , a partir da diagonal principal, da seguinte forma:

$$(g_{13})^2 + (g_{23})^2 + (g_{33})^2 = a_{33}$$

Assim, escolhemos o elemento  $g_{33}$  na forma:

$$g_{33} = \sqrt{a_{33} - (g_{13})^2 - (g_{23})^2}$$

Em seguida encontramos o elemento  $g_{34}$  na forma:

$$g_{13}g_{14} + g_{23}g_{24} + g_{33}g_{34} = a_{34} \quad \implies \quad g_{34} = \frac{a_{34} - g_{13}g_{14} - g_{23}g_{24}}{g_{22}}$$

Finalmente, calculamos o elemento  $g_{44}$  da seguinte forma:

$$(g_{14})^2 + (g_{24})^2 + (g_{34})^2 + (g_{44})^2 = a_{44}$$

Assim, escolhemos o elemento  $g_{44}$  na forma:

$$g_{44} = \sqrt{a_{44} - (g_{14})^2 - (g_{24})^2 - (g_{34})^2}$$

De um modo geral, temos as seguintes equações

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i g_{ki} g_{kj}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = i, (i+1), \dots, n$ .

Organizando de forma adequada as equações acima, determinamos inicialmente o  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $G$  através da equação

$$a_{ii} = (g_{ii})^2 + \sum_{k=1}^{i-1} (g_{ki})^2.$$

Assim, escolhemos o elemento  $g_{ii}$  da seguinte forma:

$$g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (g_{ki})^2}$$

Em seguida, encontramos os elementos da  $i$ -ésima linha a partir da diagonal principal, através das seguintes equações

$$a_{ij} = g_{ii}g_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} g_{ki} g_{kj}$$

Desse modo, temos que os elementos  $g_{ij}$  são dados por:

$$g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ki} g_{kj}}{g_{ii}} \quad \text{para} \quad j = (i+1), \dots, n$$

e para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .



Podemos observar que para determinar cada elemento  $g_{ii}$  necessitamos do escalar

$$\Delta = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (g_{ki})^2.$$

Como  $g_{ii} = \sqrt{\Delta}$ , temos que se  $\Delta < 0$  a matriz  $A$  não é positiva-definida. Assim, não existe seu fator de Cholesky.

Utilizando a Fatoração de Cholesky da matriz do sistema linear positivo-definido, obtemos sua solução resolvendo dois sistemas triangulares

$$\begin{cases} G^t y = b \\ G x = y \end{cases} \quad (8.109)$$

No procedimento da fatoração de Cholesky o número de operações elementares realizadas é da ordem de  $n^3/6$  e são necessárias  $n$  raízes quadradas. Em várias referências a decomposição de Cholesky é denominada método da raiz quadrada. No procedimento para obtenção da solução de um sistema triangular o número de operações elementares realizadas é da ordem de  $n^2/2$ . Mais a frente, apresentamos o algoritmo da fatoração de Cholesky e os algoritmos para a resolução dos sistemas triangulares. No algoritmo da fatoração de Cholesky o fator de Cholesky pode ser armazenado na parte triangular superior da própria matriz  $A$ , para economia de memória.

A caracterização de uma matriz positiva-definida fornecida pelo Teorema 8.2.5 é um resultando muito importante que utilizamos para obter vários outros resultados teóricos, entretanto, tem uma alta complexidade computacional. Assim, a fatoração de Cholesky é um procedimento simples, eficiente e de baixa complexidade computacional, pelo qual podemos verificar se uma matriz simétrica e positiva-definida.

**Exemplo 8.7.1** *Verifique se a matriz simétrica  $A$  dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 10 & 2 \\ 8 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

*é positiva-definida através da fatoração de Cholesky.*

**Exemplo 8.7.2** *Determine a solução do sistema linear positivo-definido*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

*através da Decomposição de Cholesky.*

O fator de Cholesky da matriz  $A$  é dado por:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, primeiramente temos que resolver o Sistema Triangular Inferior

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, resolvemos o Sistema Triangular Superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

obtendo a solução do sistema linear positivo-definido.

A seguir apresentamos o algoritmo da fatoração de Cholesky, o algoritmo para a resolução do sistema triangular inferior por substituição avançada descrito no Teorema 2.9.11, e o algoritmo para a resolução do sistema triangular superior por substituição atrasada descrito no Teorema 2.9.12, obtendo assim a solução do sistema linear positivo-definido.

### Algoritmo 8.7.2 (Fatoração de Cholesky)

```

for i = 1,2, ... , n
    soma = 0.0
    for j = 1,2, ... , (i - 1)
        soma = soma + G(j,i)*G(j,i)
    end
    delta = A(i,i) - soma
    G(i,i) = sqrt(delta)
    for j = (i+1), ... , n
        soma = 0.0
        for k = 1,2, ... , (i - 1)
            soma = soma + G(k,j)*G(k,i)
        end
        G(i,j) = ( A(i,j) - soma ) / G(i,i)
    end
end

```

### Algoritmo 8.7.3 (Sistemas Triangulares)

```

% Sistema Triangular Inferior G'y = b
for i = 1,2, ... , n
    soma = 0.0
    for j = 1,2, ... ,(i - 1)
        soma = soma + G(j,i)*y(j)
    end
    y(i) = ( b(i) - soma ) / G(i,i)
end

% Sistema Triangular Superior Gx = y
for i = n, ... , 1
    soma = 0.0
    for j = (i + 1), ... , n
        soma = soma + G(i,j)*x(j)
    end
    x(i) = ( y(i) - soma ) / G(i,i)
end

```

## ***Exercícios***

**Exercício 8.29** *Sejam  $L \in M_4(\mathbb{R})$  uma matriz triangular inferior invertível e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:*

$$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

*Obter a solução do sistema linear triangular inferior  $Lx = b$ .*

**Exercício 8.30** *Sejam  $U \in M_4(\mathbb{R})$  uma matriz triangular superior invertível e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:*

$$U = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

*Obter a solução do sistema linear triangular superior  $Ux = b$ .*

**Exercício 8.31** *Sejam  $L \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz triangular inferior invertível e o elemento  $b \in \mathbb{R}^n$ . Escrever um algoritmo para resolução do sistema linear triangular inferior*

$$Lx = b$$

*por **substituição avançada**.*

**Exercício 8.32** *Sejam  $U \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz triangular superior invertível e o elemento  $b \in \mathbb{R}^n$ . Escrever um algoritmo para resolução do sistema linear triangular superior*

$$Ux = b$$

*por **substituição atrasada**.*

**Exercício 8.33** *Seja  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida. Mostre que os elementos da diagonal principal são todos positivos, isto é,*

$$a_{ii} > 0 \quad \text{para todo} \quad i = 1, \dots, n.$$

**Exercício 8.34** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida. Mostre que

$$\det(A) > 0.$$

**Exercício 8.35** Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida. Mostre que a submatriz principal  $A_k$  é positiva-definida, para todo  $k = 1, \dots, n$ .

**Exercício 8.36** Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida e uma matriz  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ , com  $n \geq p$  e  $\text{posto}(B) = p$ . Mostre que a matriz

$$C = B^t A B \in M_p(\mathbb{R})$$

é positiva-definida.

**Exercício 8.37** Considere  $C \in M_4(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Obter a solução do sistema linear  $Cx = b$  utilizando a Fatoração de Cholesky.

**Exercício 8.38** Considere as seguintes matrizes simétricas

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 \\ 3 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & -4 & 1 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique quais matrizes são positiva-definidas.

**Exercício 8.39** Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$  simétrica invertível. Escreva um algoritmo para calcular sua decomposição na forma  $A = LDL^t$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal e  $L$  é uma matriz triangular inferior com os elementos da diagonal principal iguais a 1.

**Exercício 8.40** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida. Qual a relação entre a fatoração  $A = LDL^t$  e a fatoração de Cholesky  $A = G^t G$  ?

**Exercício 8.41** Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida. Escreva um procedimento eficiente, e faça a implementação computacional, para calcular a matriz inversa  $A^{-1}$ , utilizando a fatoração de Cholesky da matriz  $A$ .

**Exercício 8.42** Considere a matriz  $A$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine todos os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais

- (a) A matriz  $A$  é singular.
- (b) A matriz  $A$  é positiva-definida.

**Exercício 8.43** Sejam  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  matrizes positiva-definidas.

- (a) A matriz  $A + B$  é positiva-definida?
- (b) A matriz  $A^2$  é positiva-definida?
- (c) A matriz  $A - B$  é positiva-definida?

**Exercício 8.44** Mostre que a função quadrática

$$f(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + 2z^2$$

possui um ponto de mínimo.

**Exercício 8.45** Sejam  $A \in M_3(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida,  $G \in M_3(\mathbb{R})$  o fator de Cholesky da matriz  $A$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^3$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & \beta \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .
- (b) Calcule  $\det(A)$ .
- (c) Determine a solução do sistema linear positivo-definido  $Ax = b$ .

**Exercício 8.46** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida e  $G \in M_n(\mathbb{R})$  o fator de Cholesky da matriz  $A$ . Mostre que  $\mathcal{K}_2(G) = \sqrt{\mathcal{K}_2(A)}$ .*

**Exercício 8.47** *Considere a matriz positiva-definida  $A$  dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 12 & 2 \\ 2 & 17 & 6 & 1 \\ 12 & 6 & 72 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

(a) *Determine a fatoração de Cholesky  $A = GG^t$ .*

(b) *Determine uma matriz invertível  $P$  de modo que*

$$D = PAP^t$$

*seja uma matriz diagonal, isto é,  $P$  é uma matriz que realiza a diagonalização da matriz  $A$  através da transformação de congruência, veja a seção 2.8.*

(c) *Determine a matriz  $L = P^{-1}$  tal que  $A = LDL^t$ .*

(d) *Determine a relação entre a fatoração  $A = LDL^t$ , obtida no item (c), e a fatoração de Cholesky  $A = GG^t$ .*

**Exercício 8.48** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  positiva-definida. Escreva um procedimento para determinar uma matriz triangular superior  $R \in M_n(\mathbb{R})$ , com os elementos da diagonal principal todos positivos, tal que  $A = RR^t$ .*

**Exercício 8.49** *Considere que  $H = A + iB \in M_n(\mathbb{C})$  é uma matriz positiva-definida, onde  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , isto é, para  $X \in \mathbb{C}^n$ ,*

$$X^*HX > 0 \quad \text{sempre que} \quad X \neq 0_{\mathbb{C}^n}.$$

(a) *Mostre que a matriz real  $C$  definida por:*

$$C = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

*é uma matriz positiva-definida.*

(b) *Escreva um procedimento para determinar a solução do sistema linear*

$$(A + iB)(x + iy) = (b + ic),$$

*onde  $x, y, b, c \in \mathbb{R}^n$ .*

## 8.8 Métodos Iterativos para Sistemas Lineares

### *Iteração de Ponto Fixo. Matriz Convergente*

Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Considere o Sistema Linear: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  solução da equação

$$Ax = b \quad (8.110)$$

Como  $A$  é uma matriz invertível, o sistema linear (8.110) possui uma única solução, que vamos denotar por  $x^* = A^{-1}b$ . Podemos escrever o sistema linear (8.110) em uma forma equivalente

$$x = Px + d \quad (8.111)$$

Desse modo, um método iterativo consiste em considerar uma aproximação inicial, que vamos denotar por  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , para a solução  $x^*$  e construir uma sequência

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + d \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.112)$$

Neste ponto, podemos fazer as seguintes perguntas:

1. Qual a condição de convergência do processo iterativo ?
2. A sequência  $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge para a solução do sistema linear (8.110) ?
3. A aproximação inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  pode ser arbitrária ?

Para responder as questões acima, vamos necessitar das seguintes definições e resultados.

**Definição 8.8.1 (Raio Espectral)** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . Definimos o raio espectral da matriz  $A$ , que denotamos por  $\rho(A)$ , da seguinte forma:*

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \{ |\lambda_j| \} ; \quad \lambda_j \text{ autovalor de } A \} .$$

**Definição 8.8.2** *Dizemos que a matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é convergente se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 ,$$

onde  $A^k = AA^{k-1}$  com  $A^0 = I$ .



**Teorema 8.8.1** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{F})$  e  $\|\cdot\|$  uma norma matricial consistente. Então,  $\rho(A) \leq \|A\|$ .*

**Demonstração** – Considere o autovalor  $\lambda_{max}$  da matriz  $A$  tal que  $|\lambda_{max}| = \rho(A)$ , e o elemento  $v$  o autovetor associado.

Seja  $V \in M_n(\mathbb{F})$  uma matriz cujas colunas são todas iguais ao autovetor  $v$ , isto é,  $V = [v \cdots v \cdots v]$ . Assim, temos que

$$\|\lambda_{max} V\| = |\lambda_{max}| \|V\| = \|AV\| \leq \|A\| \|V\|$$

Portanto, obtemos  $|\lambda_{max}| \leq \|A\|$ , o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.8.2** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{F})$  e  $\epsilon > 0$ . Então, existe uma norma matricial consistente  $\|\cdot\|$  tal que  $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$ .*

**Demonstração** – Pelo Teorema 8.2.2, Teorema da Decomposição de Schur, existe uma matriz unitária  $U \in M_n(\mathbb{F})$  e uma matriz triangular superior  $T \in M_n(\mathbb{F})$  tais que  $A = UTU^*$ .

Considere uma matriz diagonal  $D = \text{diag}(\delta, \dots, \delta^n)$  para  $\delta \in \mathbb{R}_+$ . Construímos a partir da matriz  $D$  e da decomposição de Schur da matriz  $A$ , a seguinte matriz

$$DTD^{-1} = \begin{cases} \lambda_j & \text{na diagonal principal} \\ \frac{t_{ij}}{\delta^{j-i}} & \text{fora da diagonal principal} \end{cases}$$

Note que,  $\lambda_j$  para  $j = 1, \dots, n$ , são os autovalores da matriz  $A$  que aparecem na diagonal principal da matriz  $T$ . Para um determinado valor  $\epsilon > 0$  escolhemos um valor adequado para o parâmetro  $\delta$  de modo que

$$\sum_{j=i+1}^n \left| \frac{t_{ij}}{\delta^{j-i}} \right| \leq \epsilon \quad \text{para todo} \quad i = 1, \dots, (n-1)$$

Assim, vamos definir uma norma matricial  $\|\cdot\|$  em  $M_n(\mathbb{F})$  da seguinte forma:

$$\|B\| = \|(DU^*)B(UD^{-1})\|_{\infty} \quad \text{para toda} \quad B \in M_n(\mathbb{F})$$

que claramente depende da matriz  $A$  e do valor de  $\epsilon$ .

Desse modo, construímos uma norma matricial  $\| \cdot \|$  tal que

$$\| A \| = \| D T D^{-1} \|_{\infty} \leq \rho(A) + \epsilon$$

Note que, a norma matricial  $\| \cdot \|$  é induzida pela seguinte norma vetorial

$$\| ( D U^* ) x \|_{\infty} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{F}^n ,$$

o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.8.3** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $A$  é uma matriz convergente.
- (2)  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0$  ;  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- (3) O raio espectral da matriz  $A$  satisfaz  $\rho(A) < 1$ .
- (4) Existe uma norma matricial  $\| \cdot \|$  tal que  $\| A \| < 1$ .

**Demonstração** – Para a prova vamos considerar as normas  $\| \cdot \|$  e  $\| \cdot \|$  compatíveis, isto é, satisfazendo o Teorema 8.3.4. Em espaço vetorial normado de dimensão finita as normas são equivalentes. Assim a convergência de uma seqüência independe da escolha da norma. Note que estamos usando também o fato que as normas  $\| \cdot \|$  e  $\| \cdot \|$  são funções contínuas.

Inicialmente, vamos mostrar que a condição (1) implica na condição (2). Para isso, tomamos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| A^k x \| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \| A^k \| \| x \| .$$

Pela hipótese, como  $A$  é uma matriz convergente, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \| A^k \| = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0 ,$$

provando que a condição (1) implica na condição (2).

Vamos mostrar agora que a condição (2) implica na condição (3). Para isso, supomos que  $\rho(A) \geq 1$ . Tomando um autovetor  $(\lambda, v)$  da matriz  $A$ , temos

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \| A^k v \| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^k \| v \| \neq 0 ,$$

que é uma contradição. Logo,  $\rho(A) < 1$ , mostrando que a condição (2) implica na condição (3).

Vamos mostrar que a condição (3) implica na condição (4). Se  $\rho(A) < 1$ , utilizando o resultado do Teorema 8.8.2, podemos escolher de maneira conveniente uma constante  $\epsilon > 0$  e uma norma consistente  $\|\cdot\|$  tais que  $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon < 1$ . Assim, mostramos que a condição (3) implica na condição (4).

Finalmente, vamos mostrar que a condição (4) implica na condição (1). Considerando que  $\|A\| < 1$ , obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A\|^k = 0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0,$$

provando que a condição (4) implica na condição (1), o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.8.4** Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

(1) A série geométrica

$$I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

converge se, e somente se, a matriz  $A$  for convergente.

(2) Se  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz convergente, então  $(I - A)$  é invertível, e

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$$

**Demonstração** – Basta provar o item (2), que o item (1) fica automaticamente provado. Como  $A$  é uma matriz convergente, sabemos que  $\rho(A) < 1$ . Assim, os autovalores da matriz  $(I - A)$  são tais que  $(1 - \lambda) \neq 0$ , onde  $\lambda$  é um autovalor da matriz  $A$ . Desse modo, temos que a matriz  $(I - A)$  é invertível. Considerando a identidade

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) = I - A^{k+1},$$

obtemos

$$(I - A) \lim_{k \rightarrow \infty} (I + A + A^2 + \cdots + A^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (I - A^{k+1}) = I,$$

o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.8.5** *Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $\|\cdot\|$  uma norma induzida, com  $\|A\| < 1$ . Então,*

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

**Demonstração** – Como  $\|A\| < 1$ , sabemos que  $(I - A)$  é uma matriz invertível, e

$$1 = \|I\| = \|(I - A)(I - A)^{-1}\| \leq (1 + \|A\|) \|(I - A)^{-1}\|,$$

obtemos

$$\|(I - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{1 + \|A\|}.$$

Consideremos agora a identidade

$$(I - A)^{-1} = I + A(I - A)^{-1},$$

tem-se que

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq 1 + \|A\| \|(I - A)^{-1}\|.$$

Agrupando os termos em comum, temos

$$(1 - \|A\|) \|(I - A)^{-1}\| \leq 1,$$

resultando na desigualdade

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|},$$

o que completa a demonstração. ■

### ***Método de Jacobi***

Inicialmente, vamos descrever o *Método iterativo de Jacobi*. Para isso, representamos a matriz do sistema linear da seguinte forma  $A = L + D + U$ , onde  $L = [l_{ij}]$  é a matriz triangular inferior dada por:

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & ; \quad i > j \\ 0 & ; \quad i \leq j \end{cases} \quad (8.113)$$

$D = [d_{ij}]$  é a matriz diagonal dada por:

$$d_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \quad (8.114)$$

$U = [u_{ij}]$  é a matriz triangular superior dada por:

$$u_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & ; \quad i < j \\ 0 & ; \quad i \geq j \end{cases} \quad (8.115)$$

Assim, o sistema linear (8.110) pode ser escrito da seguinte forma:

$$(L + D + U)x = b \quad (8.116)$$

$$Dx = -(L + U)x + b \quad (8.117)$$

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \quad (8.118)$$

Portanto, temos que no processo iterativo (8.112), a matriz  $P = -D^{-1}(L + U)$  e o vetor  $d = D^{-1}b$ , desde que  $D$  seja uma matriz invertível. Com o objetivo de escrever o algoritmo do Método de Jacobi, vamos representá-lo da seguinte forma:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.119)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$

Desse modo, escrevemos o algoritmo do Método Iterativo de Jacobi, como segue abaixo.

**Algoritmo 8.8.1 (Método Iterativo de Jacobi)**

*Dada uma aproximação inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  para  $x^* = A^{-1}b$*

*for  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$*

*for  $i = 1, 2, 3, \dots, n$*

$x_i^{(k+1)} = b_i$

*for  $j = 1, \dots, (i-1)$*

$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - a_{ij} x_j^{(k)}$

*end*

*for  $j = (i+1), \dots, n$*

$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - a_{ij} x_j^{(k)}$

*end*

$x_i^{(k+1)} = \frac{x_i^{(k+1)}}{a_{ii}}$

*end*

*end*

Note que podemos escrever o processo iterativo da seguinte forma:

dada uma aproximação inicial  $x^{(0)} = d = D^{-1}b$ , tem-se que

$$x^{(k+1)} = (I + P + P^2 + \dots + P^{k+1})d \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.120)$$

Logo, a sequência gerada pelo Método de Jacobi converge se, e somente se,  $P$  for uma matriz convergente. Vamos denotar o ponto de convergência por  $\hat{x}$ , que é dado por:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \hat{x} = (I - P)^{-1}d. \quad (8.121)$$

Agora, basta mostrar que o elemento  $\hat{x}$  é a única solução do sistema linear (8.110).

Substituindo as expressões da matriz  $P$  e do vetor  $d$  na equação (8.121), obtemos

$$\hat{x} = (I + D^{-1}(L + U))^{-1}(D^{-1}b) \quad (8.122)$$

$$= (D(I + D^{-1}(L + U)))^{-1}b \quad (8.123)$$

$$= (D + L + U)^{-1}b = A^{-1}b = x^* \quad (8.124)$$

Portanto, mostramos que o processo iterativo de Jacobi converge para a única solução  $x^*$  do sistema linear (8.110). Além disso, podemos observar que a convergência do Método de Jacobi não depende da escolha da aproximação inicial. Podemos enunciar o seguinte resultado de convergência do Método de Jacobi.

**Teorema 8.8.6** *O Método Iterativo de Jacobi converge para a solução exata do sistema linear (8.110) para qualquer aproximação inicial  $x^{(0)}$  se, e somente se, a matriz de iteração  $P = -D^{-1}A + I$  for convergente.*

Vamos mostrar que a sequência  $\{x^{(k)}\}$  gerada pelo processo iterativo de Jacobi possui uma convergência linear, isto é,

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \beta \|x^{(k)} - x^*\|,$$

quando da convergência do método, onde a constante  $\beta$  é a taxa de convergência.

De fato, vamos considerar o processo iterativo de Jacobi

$$x^{(k+1)} = Px^{(k)} + d,$$

onde  $P = -D^{-1}A + I$  e  $d = D^{-1}b$ . Note que, a solução exata  $x^*$  satisfaz  $x^* = Px^* + d$ . Desse modo, temos que

$$x^{(k+1)} - x^* = P(x^{(k)} - x^*).$$

Escolhendo de forma conveniente as normas  $\|\cdot\|$  e  $\|\!\|\!\cdot\!\|$  compatíveis, isto é, satisfazendo o Teorema 8.3.4, obtemos

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| = \|P(x^{(k)} - x^*)\| \leq \|P\| \|x^{(k)} - x^*\|.$$

Portanto, temos a convergência linear do Método de Jacobi, com a taxa de convergência  $\beta = \|P\|$ , desde que  $\|P\| < 1$ . Este resultado mostra a velocidade de convergência do processo iterativo de Jacobi. Quanto menor for  $\|P\|$  mais rápida será a convergência.

Devemos observar que o fato da matriz  $P$  ser convergente é equivalente à existência de uma norma de modo que  $\|P\| < 1$ , ou ainda, é equivalente a dizer que o raio espectral da matriz  $P$  satisfaz  $\rho(P) < 1$ . Todas essas propriedades são muito úteis do ponto de vista teórico, mas na prática tem um alto custo computacional para determiná-las. Vamos mostrar condições mais simples de ser verificadas para a convergência do Método de Jacobi. Para isso, necessitamos dos seguintes conceitos.

**Definição 8.8.3** Dizemos que  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz **Estritamente Diagonalmente Dominante por Linhas** se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad ; \quad i = 1, \dots, n.$$

**Teorema 8.8.7** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz Estritamente Diagonalmente Dominante por Linhas. Então,  $A$  é invertível.

**Demonstração** – Vamos considerar a matriz  $B = I - D^{-1}A$ , onde  $D$  é a matriz diagonal descrita em (8.114). Pela propriedade da matriz  $A$ , temos que  $D$  é invertível. Podemos observar que  $\|B\|_\infty < 1$ . Assim, pelo Teorema 8.8.4 da seção 8.8, temos que a matriz  $I - B = D^{-1}A$  é não singular. Desse modo, podemos concluir que  $A$  é uma matriz invertível, o que completa a demonstração. ■

Desse modo, temos o seguinte resultado de convergência para o Método de Jacobi, que é facilmente verificado.

**Teorema 8.8.8** Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  Estritamente Diagonalmente Dominante por Linhas e  $P = -D^{-1}A + I$  a matriz de iteração de Jacobi. Então,  $\|P\|_\infty < 1$ .



Utilizando o conceito abaixo, vamos propor uma modificação no método de Jacobi, e mostrar a sua convergência para a solução do sistema linear.

**Definição 8.8.4** Dizemos que  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz **Estritamente Diagonalmente Dominante por Colunas** se

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad ; \quad j = 1, \dots, n.$$

**Teorema 8.8.9** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz Estritamente Diagonalmente Dominante por Colunas. Então,  $A$  é invertível.

**Demonstração** – A prova é feita de forma análoga a do Teorema 8.8.7, considerando a matriz  $B = I - AD^{-1}$ . □

Note que no caso da matriz  $A$  for estritamente diagonalmente dominante por linhas, todos os elementos da diagonal principal são não-nulos. Logo, não ocorre uma divisão por zero no procedimento do Método de Jacobi.

Considerando que a matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  do sistema linear (8.110) seja estritamente diagonalmente dominante por colunas, vamos propor um *Método de Jacobi Modificado*, que é descrito da seguinte forma:

dada uma aproximação inicial  $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , construímos a seguinte sequência

$$y^{(k+1)} = Py^{(k)} + b \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.125)$$

onde  $P = -(L + U)D^{-1}$  é a matriz de iteração.

É fácil mostrar que se a matriz  $P$  for convergente, então a sequência descrita em (8.125) converge para  $y^* = Dx^*$ , onde  $x^* = A^{-1}b$  é a única solução do sistema linear.

A seguir temos um resultado de convergência do Método de Jacobi Modificado.

**Teorema 8.8.10** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz Estritamente Diagonalmente Dominante por Colunas e  $P = -AD^{-1} + I$  a matriz de iteração para o Método de Jacobi Modificado. Então,  $\|P\|_1 < 1$ .

**Exemplo 8.8.1** Para fazer uma apresentação do desempenho do Método Iterativo de Jacobi, vamos considerar o sistema linear  $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 30 & 20 & 30 \\ 10 & 100 & 20 & 40 \\ 10 & 10 & 60 & 20 \\ 5 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205 \\ 190 \\ 140 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Como  $A$  é estritamente diagonalmente dominante por linhas o que implica na convergência do Método Iterativo de Jacobi. Considerando a aproximação inicial  $x^{(0)} = b$ , foram realizadas 54 iterações no Método de Jacobi, para obter uma solução numérica do sistema linear com um erro relativo de  $8.8596 \times 10^{-7}$ .

## ***Método de Gauss–Seidel***

Observamos que no Método de Jacobi quando vamos calcular a  $i$ -ésima componente da solução na  $(k + 1)$ -ésima iteração, todas as componentes anteriores já estão com uma nova aproximação, que no caso de convergência do processo iterativo, estas componentes estarão mais próximas da solução. Assim, com o objetivo de acelerar a convergência do processo iterativo de Jacobi, utilizamos as componentes anteriores a  $i$ -ésima componente na  $(k + 1)$ -ésima iteração. Desse modo, temos o *Método de Gauss–Seidel*

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.126)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . A seguir, apresentamos o algoritmo do Método de Gauss–Seidel.

### **Algoritmo 8.8.2 (Método Iterativo de Gauss–Seidel)**

*Dada uma aproximação inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  para  $x^* = A^{-1}b$*

*for  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$*

*for  $i = 1, 2, 3, \dots, n$*

$$x_i^{(k+1)} = b_i$$

*for  $j = 1, \dots, (i - 1)$*

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - a_{ij} x_j^{(k+1)}$$

*end*

*for  $j = (i + 1), \dots, n$*

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - a_{ij} x_j^{(k)}$$

*end*

$$x_i^{(k+1)} = \frac{x_i^{(k+1)}}{a_{ii}}$$

*end*

*end*

Note que as mesmas condições de convergência para o Método de Jacobi também servem para o Método de Gauss–Seidel, isto é, a convergência do Método de Jacobi implica na convergência do Método de Gauss–Seidel. Podemos representar o Método de Gauss–Seidel na forma matricial, para uma análise mais teórica, da seguinte forma:

$$x^{(k+1)} = G x^{(k)} + d \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.127)$$

onde a matriz de iteração é dada por:

$$G = -(L + D)^{-1} U$$

e o vetor  $d = (L + D)^{-1} b$ , desde que a matriz  $(L + D)$  seja invertível. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado de convergência do Método Iterativo de Gauss–Seidel.

**Teorema 8.8.11** *O Método de Gauss–Seidel converge para a única solução do sistema linear (8.110) para qualquer aproximação inicial  $x^{(0)}$  se, e somente se, a matriz de iteração  $G$  for convergente.*

Como no Método de Jacobi, o Método de Gauss–Seidel possui uma convergência linear, onde a taxa de convergência é dada pela constante  $\beta = \|G\|$ , desde que  $0 < \|G\| < 1$ .

Nos sistemas lineares provenientes da discretização de problemas de valores contorno elípticos, tanto pelo Método de Diferenças Finitas quanto pelo Método dos Elementos Finitos, a matriz do sistema linear é positiva-definida. Assim, apresentamos o seguinte resultado de convergência para o Método de Gauss–Seidel.

**Teorema 8.8.12** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é simétrica e positiva-definida. Então, o Método de Gauss–Seidel converge para a única solução do sistema linear  $Ax = b$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , para toda aproximação inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração** – Como  $A$  é uma matriz simétrica, temos a decomposição

$$A = L + D + L^t.$$

Assim, a matriz de iteração do Método de Gauss–Seidel é dada por:

$$G = -(L + D)^{-1} L^t.$$

Vamos mostrar que o raio espectral da matriz  $G$  satisfaz  $\rho(G) < 1$ .

Inicialmente definimos uma matriz auxiliar  $G_1$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= D^{\frac{1}{2}} G D^{-\frac{1}{2}} = -D^{\frac{1}{2}} (L + D)^{-1} L^t D^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -((L + D) D^{-\frac{1}{2}})^{-1} L^t D^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -(D^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} (L + D) D^{-\frac{1}{2}})^{-1} L^t D^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -(I + L_1)^{-1} L_1^t
 \end{aligned} \tag{8.128}$$

onde a matriz auxiliar  $L_1$  é dada por:

$$L_1 = D^{-\frac{1}{2}} L D^{-\frac{1}{2}}. \tag{8.129}$$

Como a matriz auxiliar  $G_1$  foi obtida da matriz  $G$  através de uma transformação de similaridade, temos que elas possuem os mesmos autovalores, isto é, o mesmo raio espectral. Assim, temos que mostrar que a matriz  $G_1$  satisfaz  $\rho(G_1) < 1$ . Para isso, consideramos  $(\lambda, v)$  um autopar da matriz  $G_1$ , com  $v$  unitário. Utilizando a equação (8.128), temos que

$$-L_1^t v = \lambda (I + L_1) v. \tag{8.130}$$

Fazendo o produto interno de ambos os membros de (8.130) pelo autovetor  $v$ , obtemos

$$-\langle L_1^t v, v \rangle = \lambda (1 + \langle L_1 v, v \rangle). \tag{8.131}$$

Chamando  $\langle L_1 v, v \rangle = a + ib$ , da equação (8.131), tem-se que

$$|\lambda|^2 = \frac{a^2 + b^2}{1 + 2a + a^2 + b^2}. \tag{8.132}$$

Vamos observar que

$$D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}} = I + L_1 + L_1^t. \tag{8.133}$$

Como as matrizes  $A$  e  $D$  são positiva-definidas, a matriz definida em (8.133) também é positiva-definida. Desse modo, temos que

$$1 + \langle L_1 v, v \rangle + \langle L_1^t v, v \rangle = 1 + 2a > 0. \tag{8.134}$$

Portanto, do resultado (8.134) e da relação (8.132), mostramos que o raio espectral da matriz  $G_1$  satisfaz  $\rho(G_1) < 1$ . O que é equivalente a  $\rho(G) < 1$ . Desse modo, a matriz de iteração de Gauss-Seidel é convergente, o que completa a demonstração. ■

### ***Método da Relaxação Sucessiva***

O Método de Gauss-Seidel é muito atrativo pela sua simplicidade. Entretanto, em geral, o raio espectral da sua matriz de iteração é muito próximo da unidade, o que provoca uma convergência muito lenta. Com o objetivo de acelerar sua convergência propomos uma modificação. Seja  $\omega \in \mathbb{R}$  um parâmetro arbitrário, consideramos o procedimento

$$x_i^{(k+1)} = \omega \frac{\left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}} + (1 - \omega) x_i^{(k)} \quad (8.135)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Este procedimento é denominado *Método da Relaxação Sucessiva*, cujo algoritmo apresentamos a seguir.

#### **Algoritmo 8.8.3 (Método da Relaxação Sucessiva)**

*Dada uma aproximação inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  para  $x^* = A^{-1}b$*

*for  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$*

*for  $i = 1, 2, 3, \dots, n$*

$$x_i^{(k+1)} = b_i$$

*for  $j = 1, \dots, (i-1)$*

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - a_{ij} x_j^{(k+1)}$$

*end*

*for  $j = (i+1), \dots, n$*

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k+1)} - a_{ij} x_j^{(k)}$$

*end*

$$x_i^{(k+1)} = \omega \frac{x_i^{(k+1)}}{a_{ii}} + (1 - \omega) x_i^{(k)}$$

*end*

*end*

Vamos representar o Método da Relaxação Sucessiva na forma matricial, para uma análise mais teórica, da seguinte forma:

$$M_{\omega} x^{(k+1)} = N_{\omega} x^{(k)} + \omega b \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.136)$$

onde  $M_{\omega} = D + \omega L$  e  $N_{\omega} = (1 - \omega)D - \omega U$ .

Assim a matriz de iteração é dada por:

$$G_{\omega} = M_{\omega}^{-1} N_{\omega},$$

desde que a matriz  $M_{\omega}$  seja invertível. No caso em que a matriz  $G_{\omega}$  for convergente, isto é,  $\rho(G_{\omega}) < 1$ , o processo iterativo (8.136) converge para a única solução do sistema linear (8.110), para qualquer aproximação inicial  $x^{(0)}$ . Desse modo, a função do parâmetro  $\omega$  é de minimizar  $\rho(G_{\omega})$ .

**Exemplo 8.8.2** Para exemplificar a função do parâmetro  $\omega$ , vamos considerar o sistema linear  $Ax = b$ , onde a matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 30 & 20 & 30 \\ 10 & 100 & 20 & 40 \\ 10 & 10 & 60 & 20 \\ 5 & 10 & 5 & 30 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar que a matriz  $A$  é estritamente diagonalmente dominante por linhas. Desse modo, temos a convergência do Método de Gauss-Seidel. Na Figura 8.8, temos o comportamento do raio espectral da matriz  $G_{\omega}$  em função do parâmetro de relaxação  $\omega$ . Para  $\omega = 1.0$  temos  $\rho(G_{\omega}) = 0.2056$ , que é a matriz de iteração de Gauss-Seidel. Para o Método da Relaxação Sucessiva, temos que  $\rho(G_{\omega}) \geq \rho(G)$ . Este resultado é devido ao fato da matriz  $A$  ser estritamente diagonalmente dominante por linhas.

Para melhor observar o resultado obtido, vamos considerar um vetor  $b$  dado por:

$$b = \begin{bmatrix} 205 \\ 190 \\ 140 \\ 54 \end{bmatrix}.$$

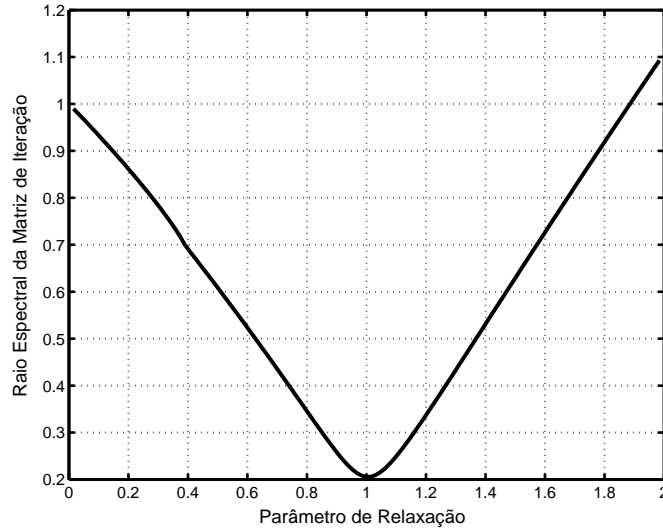


Figura 8.8: Raio espectral da matriz  $G_\omega$  em função do parâmetro  $\omega$ .

Considerando a aproximação inicial  $x^{(0)} = b$ , foram realizadas 13 iterações no Método de Gauss–Seidel, para obter uma solução numérica do sistema linear com um erro relativo de  $8.913 \times 10^{-7}$ . No Método Iterativo de Jacobi foram realizadas 54 iterações para obter a mesma precisão, com uma taxa de convergência  $\rho(P) = 0.6989$ . Este exemplo mostra que o Método de Gauss–Seidel é uma aceleração para o Método de Jacobi.

**Exemplo 8.8.3** Consideramos um sistema linear onde a matriz é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2.1 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 \\ -1.0 & 2.1 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0 & 2.1 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 2.1 & -1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 2.1 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 2.1 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 2.1 & -1.0 \\ -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 2.1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso a matriz  $A$  é positiva-definida. Pelo Teorema 8.8.12, temos que o processo iterativo de Gauss–Seidel é convergente. Na Figura 8.9, temos o comportamento do raio espectral da matriz  $G_\omega$  em função do parâmetro de relaxação  $\omega$ . Para  $\omega = 1.0$  temos  $\rho(G_\omega) = 0.9082$ , que é a matriz de iteração de Gauss–Seidel. Para  $\omega = 1.5313$  temos  $\rho(G_\omega) = 0.6991$ , que é o melhor parâmetro para o Método da Relaxação Sucessiva.



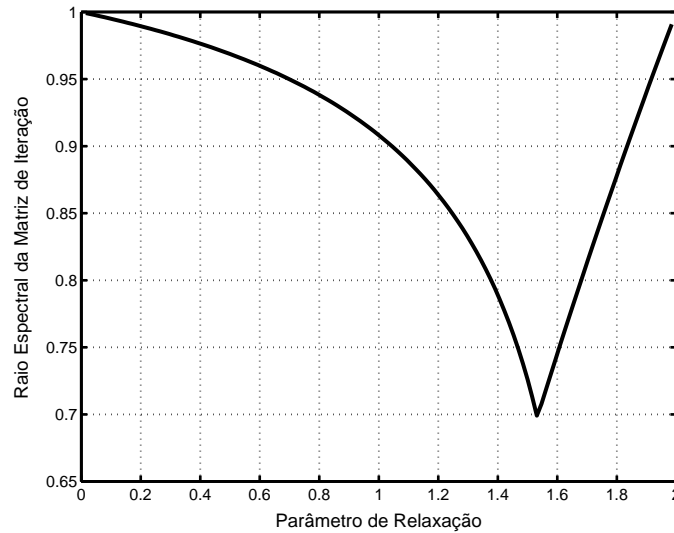


Figura 8.9: Raio espectral da matriz  $G_\omega$  em função do parâmetro  $\omega$ .

Para melhor observar o resultado obtido, vamos considerar um vetor  $b$  dado por:

$$b = \begin{bmatrix} 4.1 \\ -4.1 \\ 4.1 \\ -4.1 \\ 4.1 \\ -4.1 \\ 4.1 \\ -4.1 \end{bmatrix}.$$

Considerando a aproximação inicial  $x^{(0)} = b$ , foram realizadas 118 iterações no Método de Gauss–Seidel, para obter uma solução numérica do sistema linear com um erro relativo de  $9.4871 \times 10^{-7}$ . Para o Método da Relaxação Sucessiva com  $\omega = 1.5313$ , foram realizadas 45 iterações para obter uma solução numérica com um erro relativo de  $9.7103 \times 10^{-7}$ . Note que o Método da Relaxação Sucessiva teve um desempenho muito superior ao Método de Gauss–Seidel, mostrando a real função do parâmetro  $\omega$ .

Finalmente, concluímos que a pesquisa do parâmetro ótimo para o Método da Relaxação Sucessiva, para uma determinada matriz associada a um problema prático, deve ser feita em duas situações. A primeira situação é quando temos vários sistemas lineares com a mesma matriz mudando somente o vetor do lado direito. A segunda situação é no caso em que não temos a convergência do Método de Gauss–Seidel.

## ***Exercícios***

**Exercício 8.50** *Mostre que o Método Iterativo de Jacobi pode ser escrito da forma:*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M r^{(k)},$$

onde  $M \in M_n(\mathbb{R})$  e  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ . *Faça uma comparação com o Método do Gradiente Otimizado, no caso em que a matriz  $A$  seja simétrica e positiva-definida.*

**Exercício 8.51** *Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada  $10m^2$ , 140g de nitrato, 190g de fosfato e 205g de potássio. Dispõe-se de quatro qualidades de adubos com as seguintes características*

- (i) *Cada quilograma do adubo I custa 5 upc e contém 10g de nitrato, 10g de fosfato e 100g de potássio.*
- (ii) *Cada quilograma do adubo II custa 10 upc e contém 10g de nitrato, 100g de fosfato e 30g de potássio.*
- (iii) *Cada quilograma do adubo III custa 5 upc e contém 60g de nitrato, 20g de fosfato e 20g de potássio.*
- (iv) *Cada quilograma do adubo IV custa 30 upc e contém 20g de nitrato, 40g de fosfato e 30g de potássio.*

*Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir uma boa aplicação de adubo se desejamos gastar somente 54 upc a cada  $10m^2$  ?*

*Escrever o modelo matemático. Podemos obter uma solução numérica através do Método Iterativo de Gauss-Seidel ? Justifique a sua resposta. Em caso afirmativo obter uma solução numérica com um erro relativo inferior a  $10^{-3}$ .*

**Exercício 8.52** *Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e a decomposição  $A = M - N$ , com  $M$  uma matriz invertível. Se  $A$  é uma matriz singular, então  $\rho(M^{-1}N) \geq 1$ .*

**Exercício 8.53** *Considere  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ , e a decomposição  $A = M - N$ , com  $M$  uma matriz invertível. Se  $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$  converge para  $x^* = A^{-1}b$ , então  $\rho(M^{-1}N) < 1$ .*

**Exercício 8.54** *Faça a demonstração do Teorema 8.8.9, apresentando todos os detalhes.*

**Exercício 8.55** *Sejam  $L \in M_n(\mathbb{R})$  triangular inferior invertível e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Podemos aplicar o Método de Jacobi para obter uma solução de  $Lx = b$ ? Em caso afirmativo, quantas iterações serão necessárias? Idem para o Método de Gauss-Seidel.*

**Exercício 8.56** *Considere o Problema de Valor de Contorno com condição periódica*

$$\begin{aligned} -u''(x) + \sigma u(x) &= f(x) \quad ; \quad x \in (0, L) \\ u(0) &= u(L) \end{aligned} \tag{8.137}$$

com  $\sigma > 0$  e  $f$  uma função contínua.

O sistema linear proveniente da discretização do problema de valor de contorno (8.137) pelo Esquema de Diferenças Finitas Centrada, para uma partição regular

$$\Pi : 0 = x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = L ,$$

com espaçamento  $h$ , é dado por:

$$\begin{bmatrix} d & -1 & & & -1 \\ -1 & d & -1 & & \\ & -1 & d & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & d & -1 \\ -1 & & & & -1 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_i) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) \end{bmatrix} \tag{8.138}$$

onde

$$d = (2 + \sigma h^2) \quad e \quad h = \frac{L}{(n-1)} .$$

Estamos denotando por  $u_i$  uma aproximação para o valor  $u(x_i)$  fornecida pelo Esquema de Diferenças Finitas. Note que  $u_n = u_1$  devido a condição de contorno periódica.

Determine uma solução numérica do sistema linear (8.138) pelo Método da Relaxação Sucessiva, com um resíduo relativo inferior a  $10^{-5}$ , para vários valores de  $\omega \in [1, 2)$ .

Como exemplo, considere  $L = 1$ ,  $f(x) = \sin(\pi x)$  e  $\sigma = 0.1$ . Para observar o desempenho dos métodos numéricos utilizar vários valores de  $n$ .

**Exercício 8.57** Considere o sistema linear  $Ax = b$ , com a matriz  $A$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (8.139)$$

Qual a condição de convergência do Método de Gauss-Seidel? Qual a escolha ótima para o parâmetro  $\omega$  do Método de Relaxação Sucessiva?

**Exercício 8.58** Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Prove que se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ , então  $\alpha\lambda + \beta$  é um autovalor da matriz  $\alpha A + \beta I$ .

**Exercício 8.59** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  tridiagonal com os elementos da diagonal principal todos nulos ( $a_{ii} = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ ) e os elementos das subdiagonais todos iguais a 1, isto é,  $a_{i,(i+1)} = a_{(i+1),i} = 1$  para  $i = 1, \dots, (n-1)$ . Mostre que, os autovalores da matriz  $A$  são dados por:

$$\lambda_j = 2 \cos \left( \frac{j \pi}{(n+1)} \right) \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, n,$$

e os autovetores associados são dados por:

$$v_j = \begin{bmatrix} \sin \left( \frac{j \pi}{(n+1)} \right) \\ \vdots \\ \sin \left( \frac{k j \pi}{(n+1)} \right) \\ \vdots \\ \sin \left( \frac{n j \pi}{(n+1)} \right) \end{bmatrix}.$$

**Exercício 8.60** Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz tridiagonal de ordem  $n$  com os elementos da diagonal principal todos iguais a  $d$  ( $a_{ii} = d$  para  $i = 1, \dots, n$ ) e os elementos das subdiagonais todos iguais a  $e$ , isto é,

$$a_{i,(i+1)} = a_{(i+1),i} = e \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, (n-1).$$

Prove que

$$\lambda_j = d + 2e \cos \left( \frac{j \pi}{(n+1)} \right) \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, n$$

são os autovalores da matriz  $A$ .

**Exercício 8.61** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

com autovalores  $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$ . Calcular a matriz de Iteração do Método de Jacobi e seus autovalores.

**Exercício 8.62** Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz tridiagonal de ordem  $n$  com os elementos da diagonal principal todos iguais a  $d$  ( $a_{ii} = d$  para  $i = 1, \dots, n$ ), os elementos da diagonal superior todos iguais a  $e$  ( $a_{i,i+1} = e$  para  $i = 1, \dots, (n-1)$ ) e os elementos da diagonal inferior todos iguais a  $f$  ( $a_{(i+1),i} = f$  para  $i = 1, \dots, (n-1)$ ). Mostre que, os autovalores da matriz  $A$  são dados por:

$$\lambda_j = d + 2e\sqrt{\frac{f}{e}} \cos\left(\frac{j\pi}{(n+1)}\right) \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

e os autovetores associados são dados por:

$$v_j = \begin{bmatrix} 2\left(\sqrt{\frac{f}{e}}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{(n+1)}\right) \\ \vdots \\ 2\left(\sqrt{\frac{f}{e}}\right)^k \sin\left(\frac{kj\pi}{(n+1)}\right) \\ \vdots \\ 2\left(\sqrt{\frac{f}{e}}\right)^n \sin\left(\frac{nj\pi}{(n+1)}\right) \end{bmatrix}$$

**Exercício 8.63** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz tridiagonal e positiva-definida

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar  $\mathcal{K}_2(A)$ . O que podemos concluir quando  $n$  cresce?

**Exercício 8.64** Considere a Equação de Difusão–Advecção

$$-\varepsilon u''(x) + \beta u'(x) = f(x) \quad ; \quad x \in (0, 1) \quad (8.140)$$

sujeita a condição de contorno

$$u(0) = 10 \quad e \quad u(1) = 10 \exp(\beta) \quad (8.141)$$

Considere uma partição regular  $\Pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ , com espaçamento  $h$ . O sistema linear proveniente da discretização do problema de valor de contorno (8.140)–(8.141) utilizando uma Fórmula de Diferenças Finitas Centrada para discretizar tanto o termo de difusão, quanto o termo de advecção, é dado por:

$$\begin{bmatrix} d & b & & & \\ c & d & b & & \\ & c & d & b & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & d & b \\ & & & & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) + u_0 \\ \vdots \\ h^2 f(x_i) \\ \vdots \\ h^2 f(x_n) + u_{n+1} \end{bmatrix} \quad (8.142)$$

onde  $d = 2\varepsilon$ ,  $b = (P_e - \varepsilon)$ ,  $c = -(P_e + \varepsilon)$  e  $h = \frac{1}{(n+1)}$ .

Definimos o Número de Péclet Local da seguinte forma:

$$P_e = \frac{|\beta| h}{2\varepsilon} \quad (8.143)$$

Estamos denotando por  $u_i$  uma aproximação para o valor  $u(x_i)$  fornecida pelo Esquema de Diferenças Finitas. Note que  $u_0 = u(0)$  e  $u_{n+1} = u(1)$  devido a imposição da condição de contorno. Sabemos que o Esquema de Diferenças Finitas Centrada é estável para  $P_e < 1$ .

Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $b \in \mathbb{R}^n$  a matriz e o vetor do lado direito do sistema linear (8.142), respectivamente. Definimos o seguinte processo iterativo

$$M u^{(k+1)} = -N u^{(k)} + b, \quad (8.144)$$

onde  $M$  e  $N$  são as partes simétrica e anti-simétrica de  $A$ , respectivamente, isto é,

$$M = \frac{A + A^t}{2} \quad e \quad N = \frac{A - A^t}{2}.$$

Qual a taxa de convergência do processo iterativo (8.144) ?

**Teorema 8.8.13 (Círculos de Gershgorin)** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Então, todo autovalor de  $A$  está em pelo menos um dos círculos  $C_1, \dots, C_n$ , onde o  $i$ -ésimo círculo  $C_i$  tem centro em  $(a_{ii}, 0)$  e raio  $r_i$  dado por:*

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (8.145)$$

**Demonstração** – Seja  $\lambda$  um autovalor de  $A$  e  $v$  o autovetor associado, isto é,  $Av = \lambda v$ . Seja  $i$  o índice da componente de  $v$  tal que

$$|v_i| = \max_{1 \leq j \leq n} \{ |v_j| \}$$

Examinando a  $i$ -ésima componente da equação vetorial  $Av = \lambda v$ , temos que

$$(\lambda - a_{ii})v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}v_j$$

tomando o módulo em ambos os lados da igualdade acima, temos

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \frac{|v_j|}{|v_i|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = r_i$$

Desse modo, temos que o autovalor  $\lambda$  pertence ao  $i$ -ésimo círculo de Gershgorin de  $A$ , o que completa a demonstração. ■

**Exercício 8.65** *Considere a matriz  $A$  estritamente diagonalmente dominante por linhas*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

*Mostre que o zero não está em nenhum círculo de Gershgorin de  $A$ , isto é, a matriz  $A$  tem autovalores não-nulos. Portanto, concluímos que  $A$  é invertível.*

**Exercício 8.66** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  estritamente diagonalmente dominante por linhas. Escreva a matriz de iteração de Jacobi  $P$  associada a matriz  $A$ . Mostre que os raios dos círculos de Gershgorin de  $P$  satisfazem  $r_i < 1$ , e concluindo que a matriz  $P$  é convergente.*

**Exercício 8.67** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  estritamente diagonalmente dominante por linhas. Mostre que  $A$  é uma matriz invertível, utilizando os círculos de Gershgorin.

**Exercício 8.68** Considere a matriz simétrica  $A$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 25 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 30 & 8 & 0 & 2 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 47 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 17 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & 15 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 21 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -9 & 0 & -1 & -3 & -4 & 52 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & -1 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Mostre que  $A$  é uma matriz positiva-definida, utilizando os círculos de Gershgorin.



## 8.9 Sistema Linear Sobredeterminado

Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e  $b \in \mathbb{R}^n$  um elemento não-nulo. Vamos considerar o *Sistema Linear*: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  solução da equação

$$Ax = b. \quad (8.146)$$

Como a matriz  $A$  é invertível, temos que

$$x^* = A^{-1}b \quad (8.147)$$

é a única solução do sistema linear (8.146). Neste caso, temos que o elemento  $x^* \in \mathbb{R}^n$  satisfaz exatamente todas as equações do sistema linear (8.146).

Utilizamos o Método de Decomposição  $LU$  (Eliminação Gaussiana) para encontrar uma solução numérica  $\hat{x}$ . Note que durante o processo de Eliminação Gaussiana podemos identificar se a matriz  $A$  é singular.

Consideramos agora uma matriz  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ . Desse modo, temos que o conjunto

$$\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_n\},$$

onde  $v_j \in \mathbb{R}^m$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ , é *linearmente independente* em  $\mathbb{R}^m$ .

Dado um elemento  $b \in \mathbb{R}^m$ , definimos o *Sistema Linear Sobredeterminado*

$$Ax = b. \quad (8.148)$$

Neste caso, temos duas situações possíveis. Na primeira situação, consideramos que o elemento  $b$  pertence ao subespaço gerado pelas colunas da matriz  $A$ . Assim, podemos encontrar um único elemento  $x^* \in \mathbb{R}^n$  que satisfaz todas as equações do sistema linear sobredeterminado (8.148), isto é, o elemento  $b \in \mathbb{R}^m$  pode ser escrito de modo único como uma combinação linear dos vetores colunas da matriz  $A$ . Dizemos que  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é uma solução clássica para o sistema linear (8.148).

Na segunda situação, consideramos que o elemento  $b$  não pertence ao subespaço gerado pelas colunas da matriz  $A$ . Neste caso, não temos uma solução clássica para o sistema linear (8.148). Portanto, temos que definir o que seja uma solução *matematicamente satisfatória* para o sistema linear sobredeterminado (8.148).

**Exemplo 8.9.1** *Mostre que o sistema linear sobredeterminado*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*possui uma única solução, isto é, o elemento  $b \in \mathbb{R}^3$  é uma combinação linear das colunas da matriz do sistema linear.*

**Exemplo 8.9.2** *Mostre que o sistema linear sobredeterminado*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

*não possui uma solução clássica, isto é, o elemento  $b \in \mathbb{R}^3$  não pode ser escrito como uma combinação linear das colunas da matriz do sistema linear.*

Antes de passar ao estudo de uma solução matematicamente satisfatória para o sistema linear sobredeterminado, vamos necessitar de alguns resultados que apresentamos a seguir.

**Teorema 8.9.1** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ . Então,  $A^t A$  é uma matriz positiva-definida.*

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Teorema 8.9.2** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = r < n$ . Então,  $A^t A$  é uma matriz semipositiva-definida.*

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Teorema 8.9.3** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m < n$  e  $\text{posto}(A) = m$ . Então,  $AA^t$  é uma matriz positiva-definida.*

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Teorema 8.9.4** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m < n$  e  $\text{posto}(A) = m$ . Então,  $A^t A$  é uma matriz semipositiva-definida.*

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

## ***Solução de Quadrados Mínimos***

**Definição 8.9.1** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ . Dado  $b \in \mathbb{R}^m$ , definimos o seguinte problema de minimização: encontrar um elemento  $x^* \in \mathbb{R}^n$  de modo que*

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min\{\|Ax - b\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (8.149)$$

*Dizemos que o elemento  $x^*$  é uma **solução de quadrados mínimos** para o sistema linear  $Ax = b$  e que o elemento  $z^* = Ax^*$  é a **melhor aproximação** do elemento  $b$  no subespaço gerado pelas colunas da matriz  $A$  com relação à norma Euclidiana  $\|\cdot\|_2$ .*

A seguir vamos apresentar um resultado de caracterização da solução de quadrados mínimos para um sistema linear sobredeterminado.

**Teorema 8.9.5** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Definimos o funcional  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma:*

$$J(x) = \langle Ax - b, Ax - b \rangle \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.150)$$

*Então, o **Problema de Minimização**: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que*

$$J(x^*) = \min\{J(x) \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\} \quad (8.151)$$

*é equivalente ao **Sistema Normal***

$$A^t Ax = A^t b. \quad (8.152)$$

**Demonstração** – Inicialmente vamos calcular a *Derivada Direcional* do funcional  $J$  no ponto  $\bar{x}$  na direção do vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ , que é definida da seguinte forma:

$$J'(\bar{x})(v) = \left\{ \frac{d}{dt} J(\bar{x} + tv) \right\}_{t=0} \quad (8.153)$$

Primeiramente, vamos calcular  $J(x + tv)$  para  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J(x + tv) &= \langle A(x + tv) - b, A(x + tv) - b \rangle \\ &= \langle Ax, Ax \rangle + 2t \langle Ax, Av \rangle + t^2 \langle Av, Av \rangle \\ &\quad - 2 \langle Ax, b \rangle - 2t \langle Av, b \rangle + \langle b, b \rangle \end{aligned} \quad (8.154)$$

Podemos escrever  $J(x + tv)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J(x + tv) &= \langle A^t A x, x \rangle + 2t \langle A^t A x, v \rangle + t^2 \langle A^t A v, v \rangle \\ &\quad - 2 \langle A x, b \rangle - 2t \langle A^t b, v \rangle + \langle b, b \rangle \end{aligned} \quad (8.155)$$

Derivando (8.155) com relação a  $t$  e fazendo  $t = 0$ , obtemos

$$J'(\bar{x})(v) = 2 \langle A^t A \bar{x} - A^t b, v \rangle \quad (8.156)$$

que é a *Derivada Direcional* de  $J$  no ponto  $\bar{x}$  na direção do vetor  $v \in \mathbb{R}^n$ , também denominada *Primeira Variação* do funcional  $J$ .

De (8.156) temos a definição do gradiente de  $J$  em um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , como segue.

**Definição 8.9.2** *O Gradiente do funcional  $J$  no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é definido por:*

$$\nabla J(x) = 2 A^t A x - 2 A^t b. \quad (8.157)$$

Desse modo, definimos o Ponto Crítico do funcional  $J$ , como segue.

**Definição 8.9.3** *Dizemos que  $x^*$  é um Ponto Crítico do funcional  $J$  se, e somente se,*

$$J'(x^*)(v) = 0 \quad \text{para todo} \quad v \in \mathbb{R}^n. \quad (8.158)$$

Desse modo, um ponto crítico do funcional  $J$  é uma solução do **sistema normal**

$$A^t A x = A^t b. \quad (8.159)$$

Como  $A$  tem posto completo, a matriz  $C = A^t A$  é positiva-definida.

Portanto, o único ponto crítico do funcional  $J$  é caracterizado da seguinte forma:

$$x^* = (A^t A)^{-1} A^t b,$$

uma vez que  $A^t A$  é uma matriz invertível, veja Teorema 8.9.1.

Para classificar o ponto crítico  $x^*$  devemos calcular a *Segunda Variação* do funcional  $J$  no ponto  $\bar{x}$  na direção do vetor  $w \in \mathbb{R}^n$ , que é definida da seguinte forma:

$$J''(\bar{x}; v)(w) = \left\{ \frac{d}{dt} J'(\bar{x} + tw)(v) \right\}_{t=0}. \quad (8.160)$$

De (8.156), temos que

$$J'(\bar{x} + tw)(v) = 2 \langle A^t A \bar{x}, v \rangle + 2t \langle A^t A w, v \rangle - 2 \langle A^t b, v \rangle \quad (8.161)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Derivando (8.161) com relação a  $t$  e fazendo  $t = 0$ , obtemos

$$J''(\bar{x}; v)(w) = 2 \langle A^t A w, v \rangle \quad (8.162)$$

que é a *Segunda Variação* do funcional  $J$  no ponto  $\bar{x}$  na direção do vetor  $w \in \mathbb{R}^n$ . De (8.162) temos a definição da matriz Hessiana do funcional  $J$  em um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , como segue.

**Definição 8.9.4** A matriz Hessiana do funcional  $J$  no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é definida por:

$$H(x) = 2 A^t A. \quad (8.163)$$

Como  $A^t A$  é uma matriz positiva-definida, temos que  $J''(x^*; v)(v) > 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$  não-nulo. Desse modo,  $x^* = (A^t A)^{-1} A^t b$  é um Ponto de Mínimo Global para o funcional  $J$ .

Assim, mostramos a equivalência entre o problema de minimização (8.151) e o sistema normal (8.152), que fornece uma caracterização da solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$ , o que completa a demonstração. ■

**Definição 8.9.5** Seja  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional. Dizemos que  $J$  é um **funcional quadrático**, se a matriz Hessiana não depende da variável  $x$ .

Portanto, a solução de quadrados mínimos  $x^*$  para o sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$  é a solução do sistema normal

$$A^t A x = A^t b, \quad (8.164)$$

que pode ser obtida através da *Fatoração de Cholesky*, apresentada na seção 8.5.

**Definição 8.9.6** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ . A matriz*

$$A^\dagger = (A^t A)^{-1} A^t$$

*é a **inversa a esquerda**, ou **pseudo-inversa**, da matriz  $A$ , que satisfaz as seguintes propriedades:*

1.  $(AA^\dagger)^t = AA^\dagger$ .
2.  $(A^\dagger A)^t = A^\dagger A$ .
3.  $AA^\dagger A = A$ .
4.  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ .

*A pseudo-inversa é denominada **inversa generalizada de Moore–Penrose**.*

**Exemplo 8.9.3** *A partir da primeira variação do funcional  $J$  dada em (8.156), podemos calcular facilmente as derivadas parciais de primeira ordem do funcional  $J$ . De fato, sabemos que*

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_j} = J'(x)(e_j) = 2 \langle A^t A x - A^t b, e_j \rangle \quad ; \quad j = 1, \dots, n \quad (8.165)$$

*onde  $e_j$  é o  $j$ -ésimo elemento da base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . Desse modo, temos que*

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x_j} = 2 v_j^t A x - 2 v_j^t b \quad ; \quad j = 1, \dots, n \quad (8.166)$$

*onde  $v_j$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ .*

**Exemplo 8.9.4** *Considere o sistema linear sobredeterminado*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

*Determine uma solução de quadrados mínimos através da fatoração de Cholesky.*

## 8.10 Subespaços Fundamentais de uma Matriz

**Definição 8.10.1** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Definimos os seguintes subespaços:*

**1. Espaço Coluna de  $A$**  é o subconjunto do  $\mathbb{R}^m$  definido por:

$$\mathcal{R}(A) = \{ z \in \mathbb{R}^m \mid z = Ax \ ; \ x \in \mathbb{R}^n \} .$$

Podemos observar que  $\mathcal{R}(A)$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^m$  gerado pelas colunas da matriz  $A$ . De fato, utilizando a notação  $A = [v_1 \cdots v_j \cdots v_n]$ , onde  $v_j \in \mathbb{R}^m$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ , temos que, todo elemento  $z \in \mathcal{R}(A)$  pode ser escrito da forma:

$$z = Ax = \sum_{j=1}^n c_j v_j \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

**2. Espaço Nulo de  $A$**  é o subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  definido por:

$$\mathcal{N}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0_{\mathbb{R}^m} \} .$$

Podemos observar facilmente que  $\mathcal{N}(A)$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ , que é o conjunto solução do sistema linear homogêneo  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$ .

**3. Espaço Coluna de  $A^t$**  é o subconjunto do  $\mathbb{R}^n$  definido por:

$$\mathcal{R}(A^t) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = A^t y \ ; \ y \in \mathbb{R}^m \} .$$

Podemos observar que  $\mathcal{R}(A^t)$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  gerado pelas linhas da matriz  $A$ , que também pode ser denominado **espaço linha de  $A$** .

**4. Espaço Nulo de  $A^t$**  é o subconjunto do  $\mathbb{R}^m$  definido por:

$$\mathcal{N}(A^t) = \{ z \in \mathbb{R}^m \mid A^t z = 0_{\mathbb{R}^n} \} .$$

Observamos que  $\mathcal{N}(A^t)$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^m$ . Podemos fazer a seguinte observação. Se o elemento  $z \in \mathcal{N}(A^t)$  temos que

$$A^t z = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Longleftrightarrow \quad z^t A = 0_{\mathbb{R}^n}^t .$$

Assim, podemos denominar o espaço nulo de  $A^t$  como o **espaço nulo esquerdo de  $A$** .

**Proposição 8.10.1** *Sejam  $A, U \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , onde  $U$  é a matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz  $A$ . Então,*

1.  $\mathcal{R}(A^t) = \mathcal{R}(U^t)$ .
2. Uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$  é formada pelas linhas não-nulas da matriz  $U$ .
3.  $\dim(\mathcal{R}(A^t)) = \text{posto}(A)$ , que é igual ao número de linhas não-nulas de  $U$ .

**Demonstração** – 1. Sabemos que cada operação elementar de linhas realizada sobre a matriz  $A$ , substitui uma linha de  $A$  por uma combinação linear de duas outras linhas de  $A$ , ou permutação de linhas. Desse modo, cada linha da matriz  $U$  é uma combinação linear das linhas da matriz  $A$ . Além disso, a matriz  $A$  pode ser obtida novamente da matriz  $U$  através das correspondentes operações inversas de linhas realizadas para obter  $U$ . Assim, as linhas da matriz  $A$  é também uma combinação linear das linhas de  $U$ . Portanto, podemos concluir que as linhas de  $A$  e as linhas de  $U$  geram o mesmo subespaço, isto é,  $\mathcal{R}(A^t) = \mathcal{R}(U^t)$ .

2. Podemos observar facilmente que as linhas não-nulas da matriz  $U$  são linearmente independentes. Caso contrário, poderíamos obter uma outra linha nula através de uma operação elementar de linhas. Entretanto, isso seria uma contradição com a hipótese de que a matriz  $U$  está na forma escalonada. Portanto, uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(U^t) = \mathcal{R}(A^t)$  é formada pelas linhas não-nulas de  $U$ .

3. Sabemos que a dimensão do subespaço  $\mathcal{R}(U^t) = \mathcal{R}(A^t)$  é igual ao número de linhas não-nulas da matriz  $U$ . Portanto, temos que  $\dim(\mathcal{R}(A^t)) = \text{posto}(A)$ , o que completa a demonstração. ■



**Exemplo 8.10.1** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ .

Uma matriz reduzida  $U$ , linha equivalente a matriz  $A$ , é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que  $\dim(\mathcal{R}(A^t)) = \text{posto}(A) = 2$ , que é igual ao número de linhas não-nulas da matriz  $U$ .

Assim, temos que os elementos

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

que são as linhas não-nulas da matriz  $U$ , formam uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ .

**Proposição 8.10.2** *Sejam  $A, U \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , onde  $U$  é a matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz  $A$ . Então,*

1.  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U)$ .
2. Uma base para o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  pode ser obtida através da solução geral do sistema linear reduzido  $Ux = 0_{\mathbb{R}^m}$ .
3.  $\dim(\mathcal{N}(A)) = n - \text{posto}(A)$ , que é igual ao número de variáveis livres do sistema linear reduzido  $Ux = 0_{\mathbb{R}^m}$ .

**Demonstração** – 1. Como  $A$  e  $U$  são equivalentes por linha, pelo Teorema 2.9.4, sabemos que os sistemas lineares homogêneos  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$  e  $Ux = 0_{\mathbb{R}^m}$  possuem o mesmo conjunto solução. Portanto, podemos concluir que  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U)$ .

2. Determinamos uma base para o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  da seguinte forma: para cada variável livre o sistema linear homogêneo  $Ux = 0_{\mathbb{R}^m}$ , temos associada uma solução básica, que é obtida atribuindo o valor 1 a essa variável, e o valor zero para as variáveis livres restantes, e em seguida calculando os valores das variáveis básicas. Desse modo, construímos uma base para o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  formada pelas soluções básicas.

3. Temos que uma base para o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  é formada pelas soluções básicas, isto é, pelos elementos que aparecem na expressão da solução geral do sistema linear homogêneo  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$ . Portanto, temos que  $\dim(\mathcal{N}(A)) = n - \text{posto}(A)$ , pois o  $\text{posto}(A)$  é igual ao número de linhas não-nulas da matriz  $U$ , o que completa a demonstração. ■

**Exemplo 8.10.2** Considere a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o subespaço  $\mathcal{N}(A)$ .

Uma matriz reduzida  $U$ , linha equivalente a matriz  $A$ , é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que  $\dim(\mathcal{N}(A)) = n - \text{posto}(A) = 3$ , onde  $n = 5$  e  $\text{posto}(A) = 2$ , que é igual ao número de linhas não-nulas da matriz  $U$ .

O sistema reduzido equivalente ao sistema linear homogêneo  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$  é dado por:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Escolhendo as variáveis básica  $x_1$  e  $x_5$  e as variáveis livres  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ , a solução geral do sistema linear homogêneo é escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} ; \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, encontramos uma base para o subespaço  $\mathcal{N}(A)$ , formada pelos elementos

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Proposição 8.10.3** *Sejam  $A, U \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , onde  $U$  é a matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz  $A$ . Então,*

1. *Sejam  $c_1, \dots, c_n$  escalares reais, então*

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0_{\mathbb{R}^m} \iff c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0_{\mathbb{R}^m},$$

*onde  $u_j, v_j \in \mathbb{R}^m$  são a  $j$ -ésima coluna da matriz  $U$  e a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ , respectivamente.*

2. *Para cada conjunto de colunas da matriz  $U$  que seja linearmente independente, as correspondentes colunas da matriz  $A$  também são linearmente independentes.*

**Demonstração** – 1. A validade da equivalência vem do fato que os sistemas lineares homogêneos  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$  e  $Ux = 0_{\mathbb{R}^m}$  possuem o mesmo conjunto solução.

2. Sejam  $w_1, \dots, w_k$  um conjunto de colunas de  $U$  linearmente independentes, e  $a_1, \dots, a_k$  as correspondentes colunas de  $A$ . Se  $c_1, \dots, c_n$  escalares reais tais que

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_k = 0_{\mathbb{R}^m},$$

então pelo resultado do item 1. temos que

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_k = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Como  $w_1, \dots, w_k$  são linearmente independentes, isso implica em  $c_1 = \dots = c_k = 0$ . Portanto,  $a_1, \dots, a_k$  são linearmente independentes, o que completa a demonstração.

■

**Proposição 8.10.4** *Sejam  $A, U \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , onde  $U$  é a matriz na forma escalonada linha equivalente a matriz  $A$ . Então,*

1. *Uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$  é formada pelas colunas da matriz  $A$  correspondentes à aquelas colunas da matriz  $U$  que contem pivo.*
2.  *$\dim(\mathcal{R}(A)) = \text{posto}(A)$ .*

**Demonstração** – 1. O resultado segue do item 2. da Proposição 8.10.3, e do fato que as colunas da matriz  $U$  que contem pivo são linearmente independentes, considerando que a matriz  $U$  está na forma escalonada.

2. Temos que  $\dim(\mathcal{R}(A))$  é igual ao número de colunas da matriz  $U$  que contem pivo, que por sua vez é igual ao  $\text{posto}(A)$ , o que completa a demonstração. ■

Desse modo, dos resultados das Proposições 8.10.4 e 8.10.1, segue que para qualquer matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  tem-se que

$$\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^t)).$$

Portanto, podemos concluir que

- (a)  $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^t)$ .
- (b) O número máximo de colunas da matriz  $A$  linearmente independente, é igual ao número máximo de linhas da matriz  $A$  linearmente independente.

**Exemplo 8.10.3** *Considere a matriz  $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Determine uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .*

Uma matriz reduzida  $U$ , linha equivalente a matriz  $A$ , é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, temos que  $\dim(\mathcal{R}(A)) = \text{posto}(A) = 3$ , que é igual ao número de linhas não-nulas da matriz  $U$ .

Podemos observar que a primeira, a segunda e a terceira coluna da matriz  $U$  são as que contem pivo. Assim, temos que os elementos

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

que correspondem a primeira, a segunda e a terceira coluna da matriz  $A$ , formam uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

**Teorema 8.10.1** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,*

1. *O subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$  e o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  são subespaços ortogonais em  $\mathbb{R}^n$ .*
2. *O subespaço  $\mathcal{R}(A)$  e o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$  são subespaços ortogonais em  $\mathbb{R}^m$ .*

**Demonstração** – 1. Seja  $x \in \mathcal{N}(A)$ , isto é,  $Ax = 0$ . Para todo  $y \in \mathbb{R}^m$ , tem-se

$$0 = \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle$$

Como o elemento  $z = A^t y \in \mathcal{R}(A^t)$ , temos que todo elemento do subespaço  $\mathcal{N}(A)$  é ortogonal aos elementos do subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ .

2. Seja  $y \in \mathcal{N}(A^t)$ , isto é,  $A^t y = 0$ . Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , temos que

$$0 = \langle A^t y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$$

Como o elemento  $z = Ax \in \mathcal{R}(A)$ , temos que todo elemento do subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$  é ortogonal aos elementos do subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.10.2** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,*

1.  $\mathcal{R}(A^t)^\perp = \mathcal{N}(A)$ .
2.  $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^t)$ .
3.  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^t)$ .
4.  $\mathcal{N}(A^t)^\perp = \mathcal{R}(A)$ .

### Demonstração

1. Pelo Teorema 8.10.1, temos que o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  é ortogonal ao subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ . Logo, obtemos que  $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{R}(A^t)^\perp$ .

Vamos provar agora que  $\mathcal{R}(A^t)^\perp \subset \mathcal{N}(A)$ . Seja  $x \in \mathcal{R}(A^t)^\perp$ , isto é, o elemento  $x$  é ortogonal a todo elemento  $z = A^t y$  para  $y \in \mathbb{R}^m$ . Desse modo, temos que

$$0 = \langle x, A^t y \rangle = \langle Ax, y \rangle \quad ; \quad \forall y \in \mathbb{R}^m$$

Logo,  $Ax = 0$  o que implica em  $x \in \mathcal{N}(A)$ .

2. Sabemos que  $(\mathcal{R}(A^t)^\perp)^\perp = \mathcal{R}(A^t)$ . Logo,  $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^t)$ .

3. Pelo Teorema 8.10.1, temos que o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$  é ortogonal ao subespaço  $\mathcal{R}(A)$ . Logo, obtemos que  $\mathcal{N}(A^t) \subset \mathcal{R}(A)^\perp$ .

Vamos provar agora que  $\mathcal{R}(A)^\perp \subset \mathcal{N}(A^t)$ . Seja  $y \in \mathcal{R}(A)^\perp$ , isto é, o elemento  $y$  é ortogonal a todo elemento  $z = Ax$  para  $x \in \mathbb{R}^n$ . Desse modo, temos que

$$0 = \langle y, Ax \rangle = \langle A^t y, x \rangle \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Logo,  $A^t y = 0$  o que implica em  $y \in \mathcal{N}(A^t)$ .

4. Sabemos que  $(\mathcal{R}(A)^\perp)^\perp = \mathcal{R}(A)$ . Logo,  $\mathcal{N}(A^t)^\perp = \mathcal{R}(A)$ , o que completa a demonstração. ■

**Observações:**

1. Podemos fazer a seguinte interpretação do item 1. do Teorema 8.10.2: o elemento  $z \in \mathbb{R}^n$  é ortogonal ao subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$  se, e somente se, for solução do sistema homogêneo  $Ax = 0$ .
2. Podemos fazer a seguinte interpretação do item 1. do Teorema 8.10.2: para  $b \in \mathbb{R}^m$ , o sistema linear  $Ax = b$  possui solução se, e somente se, o elemento  $b$  for ortogonal a toda solução do sistema homogêneo  $A^t y = 0$ .
3. Se conhecemos um conjunto gerador para um subespaço  $S$  do  $\mathbb{R}^n$  e queremos encontrar  $S^\perp$ , basta construir uma matriz  $A$  cujas linhas são os elementos do conjunto gerador. Assim, temos que  $S = \mathcal{R}(A^t)$  e  $S^\perp = \mathcal{N}(A)$ .
4. Conhecendo um subespaço  $S$  mediante um conjunto de equações lineares, podemos encontrar uma matriz  $A$  tal que  $S = \mathcal{N}(A)$ , e assim  $S^\perp = \mathcal{R}(A^t)$ .

**Exemplo 8.10.4** *Seja  $S$  um subespaço do  $\mathbb{R}^4$  gerado pelo seguinte conjunto*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

*Vamos construir uma matriz  $A$  da forma:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Assim, temos que o subespaço  $S = \mathcal{R}(A^t)$  e o subespaço  $S^\perp = \mathcal{N}(A)$ .*

*Uma matriz reduzida  $U$ , linha equivalente a matriz  $A$ , é dada por:*

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Desse modo, encontramos uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$  dada por:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$



Encontramos uma base para o subespaço  $S^\perp = \mathcal{N}(A)$  resolvendo o sistema reduzido  $Ux = 0$ , equivalente ao sistema homogêneo  $Ax = 0$ , cuja solução geral é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, encontrando uma base para o subespaço  $S^\perp = \mathcal{N}(A)$ .

**Exemplo 8.10.5** Considere o subespaço  $S$  do  $\mathbb{R}^4$  definido da seguinte forma:

$$S = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 0 \text{ e } y + w = 0 \}.$$

Encontrar uma base para o subespaço  $S$  e uma base para o subespaço  $S^\perp$ .

Temos que,  $(x, y, z, w) \in S$  se, e somente se, suas componentes satisfazem o sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + w = 0 \end{cases}$$

O subespaço  $S = \mathcal{N}(A)$  e o subespaço  $S^\perp = \mathcal{R}(A^t)$ , onde a matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, encontramos uma base para o subespaço  $S^\perp = \mathcal{R}(A^t)$  dada por:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Encontramos uma base para o subespaço  $S = \mathcal{N}(A)$  resolvendo o sistema homogêneo  $Ax = 0$ , cuja solução geral é dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad z, w \in \mathbb{R}.$$

Desse forma, encontramos uma base para o subespaço  $S = \mathcal{N}(A)$ .

Neste momento é muito importante recordar o **Teorema da Decomposição Ortogonal**, Teorema 5.9.1. Sejam  $V$  um espaço vetorial munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $S$  um subespaço de dimensão finita de  $V$ . Então,  $V = S \oplus S^\perp$ , isto é, todo elemento  $u \in V$  pode ser escrito de modo único da seguinte forma:

$$u = v + w \quad \text{com} \quad v \in S \quad \text{e} \quad w \in S^\perp.$$

Além disso, a norma do elemento  $u$  é dada pela *Fórmula de Pitágoras*

$$\|u\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2.$$

Desse resultado, temos a definição de projeção ortogonal sobre os subespaços  $S$  e  $S^\perp$ .

**Definição 8.10.2** *Sejam  $V$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $S$  um subespaço de dimensão finita de  $V$  e  $u \in V$ . Se  $v \in S$  e  $w \in S^\perp$  são os únicos elementos de  $V$  tais que  $u = v + w$ , dizemos que*

1.  $v \in S$  é a **projeção ortogonal** do elemento  $u$  sobre o subespaço  $S$ .
2.  $w \in S^\perp$  é a **projeção ortogonal** do elemento  $u$  sobre o subespaço  $S^\perp$ .

**Teorema 8.10.3** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,*

- (a)  $\dim(\mathcal{R}(A^t)) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n$ .
- (b)  $\dim(\mathcal{R}(A)) + \dim(\mathcal{N}(A^t)) = m$ .

**Demonstração** – (a) Pelo Teorema 8.10.2, tem-se  $\mathcal{R}(A^t)^\perp = \mathcal{N}(A)$ , e do Teorema 5.9.1, que é o Teorema da Decomposição Ortogonal, temos que  $\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^t) \oplus \mathcal{R}(A^t)^\perp$ .

Portanto, obtemos

$$\dim(\mathcal{R}(A^t)) + \dim(\mathcal{R}(A^t)^\perp) = n \quad \implies \quad \dim(\mathcal{R}(A^t)) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n,$$

o que completa a prova do item (a).

(b) Pelo Teorema 8.10.2, sabemos que  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^t)$ , e do Teorema 5.9.1, que é o Teorema da Decomposição Ortogonal, temos que  $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ . Portanto, obtemos

$$\dim(\mathcal{R}(A)) + \dim(\mathcal{R}(A)^\perp) = m \quad \implies \quad \dim(\mathcal{R}(A)) + \dim(\mathcal{N}(A^t)) = m,$$

o que completa a prova do item (b). ■

Utilizando as conexões geométricas entre os subespaços fundamentais e o Teorema do Núcleo e da Imagem, apresentamos uma outra demonstração para o fato que a dimensão do subespaço coluna de  $A$  e a dimensão do espaço linha de  $A$  são iguais. Sendo assim, provamos novamente que o posto das matrizes  $A$  e  $A^t$  são iguais.

**Teorema 8.10.4** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,  $\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^t))$ .*

**Demonstração** – Pelos resultados do Teorema 8.10.3, temos que

$$\dim(\mathcal{R}(A)) = m - \dim \mathcal{N}(A^t) \quad e \quad \dim(\mathcal{R}(A^t)) = n - \dim(\mathcal{N}(A)).$$

Agora, consideramos a transformação linear  $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  associada a matriz  $A$  definida por:

$$T_A(x) = Ax,$$

lembrando que os espaços vetoriais  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  são isomorfos, assim como os espaços vetoriais  $\mathbb{R}^m$  e  $M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ .

Podemos verificar facilmente que  $\text{Im}(T_A) = \mathcal{R}(A)$  e  $\text{Ker}(T_A) = \mathcal{N}(A)$ . Desse modo, pelo Teorema 4.4.2, que é o Teorema do Núcleo e da Imagem, sabemos que

$$\dim(\text{Im}(T_A)) + \dim(\text{Ker}(T_A)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Desse modo, temos que

$$\dim(\mathcal{R}(A)) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n \quad \implies \quad \dim(\mathcal{R}(A)) = n - \dim(\mathcal{N}(A)).$$

Como  $\dim(\mathcal{R}(A^t)) = n - \dim(\mathcal{N}(A))$ , provamos que

$$\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^t)),$$

o que completa a demonstração. ■

No Teorema 8.10.4 é importante observar que o subespaço  $\mathcal{R}(A) \subset \mathbb{R}^m$  e que o subespaço  $\mathcal{R}(A^t) \subset \mathbb{R}^n$ , isto é, eles estão contidos em espaços vetoriais diferentes, entretanto, possuem a mesma dimensão.

**Teorema 8.10.5** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,  $\mathcal{N}(A^t A) = \mathcal{N}(A)$ .*

**Demonstração** – É imediato que  $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^t A)$ . De fato, considere um elemento  $x \in \mathcal{N}(A)$ , isto é,  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$ . Logo, temos que

$$A^t Ax = A^t 0_{\mathbb{R}^m} = 0_{\mathbb{R}^n} \implies x \in \mathcal{N}(A^t A).$$

Assim, provamos que  $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^t A)$ .

Considere agora um elemento  $x \in \mathcal{N}(A^t A)$ , isto é,  $A^t Ax = 0_{\mathbb{R}^n}$ . Desse modo, fazendo

$$x^t A^t Ax = 0_{\mathbb{R}} \iff (Ax)^t (Ax) = \|Ax\|_2^2 = 0_{\mathbb{R}} \iff Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$$

obtemos  $x \in \mathcal{N}(A)$ . Assim, provamos que  $\mathcal{N}(A^t A) \subset \mathcal{N}(A)$ . Portanto, mostramos que  $\mathcal{N}(A^t A) = \mathcal{N}(A)$ , o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.10.6** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,  $\mathcal{N}(AA^t) = \mathcal{N}(A^t)$ .*

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Corolário 8.10.1** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,*

$$\text{posto}(A^t A) = \text{posto}(A) = \text{posto}(A^t) = \text{posto}(AA^t).$$

**Demonstração** – Fazendo uso dos resultados anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} \text{posto}(A^t A) &= n - \dim(\mathcal{N}(A^t A)) = n - \dim(\mathcal{N}(A)) \\ &= \text{posto}(A) = \text{posto}(A^t) \\ &= m - \dim(\mathcal{N}(A^t)) = m - \dim(\mathcal{N}(AA^t)) \\ &= \text{posto}(AA^t) \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. ■

## ***Exercícios***

**Exercício 8.69** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para cada um dos subespaços fundamentais da matriz  $A$ .

**Exercício 8.70** Considere a matriz  $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para cada um dos subespaços fundamentais da matriz  $A$ .

**Exercício 8.71** Considere a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para cada um dos subespaços fundamentais da matriz  $A$ .

**Exercício 8.72** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Mostre que apenas um dos sistemas lineares abaixo possui solução

$$Ax = b$$

$$A^t y = 0 \quad \text{com} \quad \langle b, y \rangle \neq 0$$

Faça uma interpretação geométrica.

**Exercício 8.73** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $b, y \in \mathbb{R}^m$ . Mostre que se  $Ax = b$  e  $y^t A = 0$ , então  $\langle b, y \rangle = 0$ . Faça uma interpretação geométrica.

**Exercício 8.74** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $x, b \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que se  $Ax = 0$  e  $A^t y = b$ , então  $\langle b, x \rangle = 0$ . Faça uma interpretação geométrica.

**Exercício 8.75** Dada a matriz  $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para os subespaços  $\mathcal{R}(A^t)$  e  $\mathcal{N}(A)$ .

**Exercício 8.76** Dada a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para os subespaços  $\mathcal{R}(A)$  e  $\mathcal{N}(A^t)$ .

**Exercício 8.77** Sejam a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^5$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Verifique se o elemento  $b$  pertence ao subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ .

**Exercício 8.78** Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Mostre que  $\mathcal{R}(AA^t) = \mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.79** Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Mostre que  $\mathcal{R}(A^tA) = \mathcal{R}(A^t)$ .

**Exercício 8.80** Sejam  $X \in \mathbb{R}^m$ ,  $Y \in \mathbb{R}^n$  e  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  dada por  $A = XY^t$ . Mostre que  $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^t) = 1$ .

**Exercício 8.81** Considere a matriz  $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Escreva a matriz  $A = XY^t$ , com  $X \in \mathbb{R}^3$  e  $Y \in \mathbb{R}^4$ . Determine uma base para o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  e uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ .

**Exercício 8.82** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Mostre que o sistema linear  $Ax = b$  possui solução se, e somente se,  $\text{posto}(A) = \text{posto}(M)$ , onde  $M = [A|b]$  é a matriz ampliada do sistema linear.*

**Exercício 8.83** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Considere que a única solução do sistema linear homogêneo  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$  é a solução trivial  $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ . Qual é o posto da matriz  $A$ ?*

**Exercício 8.84** *Seja uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  tal que o sistema linear homogêneo  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$  possui solução não trivial. Mostre que o sistema linear  $A^t y = b$  não possui solução para alguns elementos  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dê um exemplo considerando uma matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  e um elemento  $b \in \mathbb{R}^3$ .*

**Exercício 8.85** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$ . Considere que a única solução do sistema linear homogêneo  $Ax = 0_{\mathbb{R}^m}$  é a solução trivial  $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ . Mostre que o sistema linear  $A^t y = b$  possui solução para todo  $b \in \mathbb{R}^n$ .*

**Exercício 8.86** *Existe uma matriz  $A$  tal que  $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^4$  e  $\mathcal{R}(A^t) = \mathbb{R}^3$ ?*

**Exercício 8.87** *Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  munido do produto interno usual. Seja  $W$  o subespaço de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos elementos*

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

*Determine uma matriz  $A$  e uma matriz  $B$  tais que*

$$\mathcal{R}(A^t) = W \quad e \quad \mathcal{N}(B) = W.$$

*Inicialmente, faça a representação geométrica dos subespaços fundamentais de cada uma das matrizes  $A$  e  $B$  que estão contidos em  $\mathbb{R}^3$ .*

**Exercício 8.88** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  munido do produto interno usual. Seja  $W$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado pelos elementos

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz  $A$  e uma matriz  $B$  tais que

$$\mathcal{R}(A^t) = W \quad e \quad \mathcal{N}(B) = W.$$

**Exercício 8.89** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  uma solução do sistema linear  $Ax = b$ , isto é,  $A\bar{x} = b$ . Pede-se:

- (a) Mostre que qualquer outra solução  $\hat{x}$  do sistema linear  $Ax = b$  pode ser escrita como  $\hat{x} = \bar{x} + z$ , com  $z \in \mathcal{N}(A)$ .
- (b) Mostre que qualquer elemento  $\hat{x} = \bar{x} + z$ , com  $z \in \mathcal{N}(A)$ , é também uma solução do sistema linear  $Ax = b$ .
- (c) Mostre que o sistema linear  $Ax = b$  possui uma única solução se, e somente se,  $\mathcal{N}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .

**Exercício 8.90** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Tomando  $m = 3$  e  $n = 2$ , dê exemplo de um sistema linear  $Ax = b$  para cada uma das seguintes situações:

- (a) O sistema linear possui infinitas soluções.
- (b) O sistema linear possui uma única solução.
- (c) O sistema linear não possui solução.

Faça uma interpretação geométrica em cada um dos casos.



## 8.11 Projeções Ortogonais

**Teorema 8.11.1** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . A **projeção ortogonal** do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , é o único elemento  $z^* = Ax^* \in \mathcal{R}(A)$  cuja distância ao elemento  $b$  é a menor possível com relação à norma Euclidiana  $\|\cdot\|_2$ , isto é,*

$$\|b - z^*\|_2 \leq \|b - z\|_2 \quad ; \quad \forall z \in \mathcal{R}(A).$$

**Demonstração** – Pelo Teorema da Decomposição Ortogonal, sabemos que o elemento  $b \in \mathbb{R}^m$  pode ser escrito de modo único na forma:

$$b = z^* + w^*,$$

onde  $z^* \in \mathcal{R}(A)$  e  $w^* \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^t)$  são as projeções ortogonais do elemento  $b$  nos subespaços  $\mathcal{R}(A)$  e  $\mathcal{N}(A^t)$ , respectivamente.

Desse modo, temos que

$$b - z = (b - z^*) + (z^* - z) \quad \text{para todo } z \in \mathcal{R}(A),$$

uma vez que

$$(z^* - z) \in \mathcal{R}(A) \quad \text{e} \quad (b - z^*) \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^t),$$

que é a decomposição ortogonal do elemento  $b - z$ .

Pela Fórmula de Pitágoras, obtemos

$$\|b - z\|_2^2 = \|b - z^*\|_2^2 + \|z^* - z\|_2^2.$$

Portanto, temos que

$$\|b - z^*\|_2 \leq \|b - z\|_2 \quad \text{para todo } z \in \mathcal{R}(A),$$

o que completa a demonstração. ■

Considerando uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e um elemento  $b \in \mathbb{R}^m$ , sabemos que o único elemento  $z^* = Ax^* \in \mathcal{R}(A)$ , onde  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é a solução de quadrados mínimos para o sistema linear  $Ax = b$ , é a **melhor aproximação** do elemento  $b$  no subespaço  $\mathcal{R}(A)$  com relação à norma Euclidiana  $\|\cdot\|_2$ .

Desse modo, o elemento  $z^* = Ax^*$  é a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ . Como o elemento  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é a solução do sistema normal

$$A^t A x^* = A^t b \quad \Longleftrightarrow \quad A^t (b - A x^*) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

o elemento  $r^* = b - A x^*$  pertence ao subespaço  $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{R}(A)^\perp$ .

Assim, temos que o elemento  $r^* = b - z^*$  é a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^t)$ .

**Exemplo 8.11.1** *Sejam a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^5$  dados por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Encontrar a projeção ortogonal do elemento  $b$  no subespaço  $\mathcal{N}(A) \subset \mathbb{R}^5$ .*

Sabemos que  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^t)^\perp$ . Desse modo, basta encontrar a projeção ortogonal do elemento  $b$  no subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ . De fato, vamos denotar por  $z^* = A^t x^* \in \mathcal{R}(A^t)$  a projeção ortogonal de  $b$  sobre  $\mathcal{R}(A^t)$ , onde o elemento  $x^* \in \mathbb{R}^3$  é a solução do **sistema normal**  $AA^t x = Ab$ . Logo, o elemento  $r^* = b - z^*$  é a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^t)^\perp$ .

Temos que

$$AA^t = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad e \quad Ab = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Portanto, podemos obter  $x^* \in \mathbb{R}^3$ , que é a solução do sistema normal, através da fatoração de Cholesky da matriz normal  $AA^t$ .

## ***Exercícios***

**Exercício 8.91** Considere a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base para cada um dos subespaços  $\mathcal{R}(A^t)$  e  $\mathcal{N}(A)$ .

(b) Determine um elemento  $b \in \mathbb{R}^5$  de modo que o sistema linear

$$A^t x = b$$

tenha solução.

**Exercício 8.92** Sejam a matriz  $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{N}(A)$ .

**Exercício 8.93** Determine a solução de quadrados mínimos para o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \\ 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e verifique que o resíduo  $r^* = b - Ax^*$  é ortogonal ao subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.94** Determine a solução de quadrados mínimos para o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e verifique que o resíduo  $r^* = b - Ax^*$  é ortogonal ao subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.95** *Sejam a matriz  $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Faça a representação do elemento  $b$  na forma:*

$$b = b_r + b_n,$$

*onde  $b_r \in \mathcal{R}(A^t)$  e  $b_n \in \mathcal{N}(A)$ .*

**Exercício 8.96** *Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam um elementos genérico  $Y \in \mathbb{R}^n$  e o elemento  $X \in \mathbb{R}^n$  dados por:*

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

*Determine a projeção ortogonal do elemento  $Y$  sobre o subespaço gerado pelo elemento  $X$ . O que podemos concluir?*

**Exercício 8.97** *Sejam  $V$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , os elementos ortonormais  $u, v \in V$  e um elemento arbitrário  $w \in V$ . Considere o funcional  $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definido da seguinte forma:*

$$J(\alpha, \beta) = \|w - (\alpha u + \beta v)\|_2^2 \quad ; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

*onde  $\|\cdot\|_2$  é a norma proveniente do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Pede-se:*

- (a) *Mostre que o funcional  $J$  possui um único ponto de mínimo  $(\alpha^*, \beta^*)$ .*
- (b) *Dê uma interpretação geométrica para o elemento  $w^* = \alpha^*u + \beta^*v$ .*
- (c) *Dê uma interpretação geométrica para o elemento  $r^* = w - w^*$ .*

**Exercício 8.98** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida,  $b \in \mathbb{R}^n$  e o funcional  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definido da seguinte forma:

$$J(x) = \langle Ax, x \rangle - 2\langle b, x \rangle \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que o **Problema de Minimização**: Encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$J(x^*) = \min\{ J(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n \}$$

é equivalente ao **Sistema Linear Positivo-Definido**  $Ax = b$ .

O ponto de mínimo  $x^*$  é único? Justifique sua resposta.

**Exercício 8.99** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível,  $b \in \mathbb{R}^n$  e  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o funcional definido da seguinte forma:

$$J(x) = \langle Ax, x \rangle - 2\langle b, x \rangle.$$

Pede-se:

- (a) Determine o gradiente e a matriz Hessiana do funcional  $J$ .
- (b) Determine a caracterização dos pontos críticos de  $J$ .
- (c) Considere a matriz  $A$  e o vetor  $b$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Classifique os pontos críticos de  $J$ . Faça um gráfico das curvas de nível de  $J$ .

**Exercício 8.100** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $T_r$  a transformação linear definida por:

$$\begin{aligned} T_r : \mathcal{R}(A^t) &\longrightarrow \mathcal{R}(A) \\ x_r &\longrightarrow T_r(x_r) = Ax_r \end{aligned}$$

Mostre que  $T_r$  é um isomorfismo de  $\mathcal{R}(A^t)$  em  $\mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.101** Sejam  $V$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , com  $\dim(V) \geq 2$ , os elementos linearmente independentes  $u, v \in V$  e um elemento arbitrário  $w \in V$ . Considere o funcional  $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definido da forma:

$$J(\alpha, \beta) = \|w - (\alpha u + \beta v)\|_2^2 \quad ; \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

onde  $\|\cdot\|_2$  é a norma proveniente do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Pede-se:

- (a) Mostre que o funcional  $J$  possui um único ponto de mínimo  $(\alpha^*, \beta^*)$ .
- (b) Dê uma interpretação geométrica para o elemento  $w^* = \alpha^*u + \beta^*v$ .
- (c) Dê uma interpretação geométrica para o elemento  $r^* = w - w^*$ .

**Exercício 8.102** Considere a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pede-se:

- (a) Determine uma base para cada um dos subespaços  $\mathcal{R}(A^t)$  e  $\mathcal{N}(A)$ .
- (b) Determine a projeção ortogonal do elemento  $b \in \mathbb{R}^5$  dado por:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

no subespaço  $\mathcal{N}(A)$ .

**Exercício 8.103** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , através da fatoração de Cholesky para obter a solução do sistema normal.

## 8.12 Matriz de Projeção Ortogonal

Sejam uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e o elemento  $b \in \mathbb{R}^m$ . Sabemos que a solução de quadrados mínimos  $x^*$  para o sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$  é a solução do sistema normal  $A^t Ax = A^t b$ , isto é,  $x^* = (A^t A)^{-1} A^t b$ . Desse modo, o elemento  $z^* = Ax^*$  é a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , que é representado na forma  $z^* = (A(A^t A)^{-1} A^t)b$ . Portanto, a matriz

$$P = A(A^t A)^{-1} A^t = AA^\dagger$$

é a **matriz de projeção ortogonal** sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

Desse modo, o elemento  $r^* = b - z^* = b - Pb$  é a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^t)$ . Logo, a matriz  $(I - P)$  é a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^t)$ .

**Proposição 8.12.1** *A matriz  $P \in M_m(\mathbb{R})$  é simétrica e idempotente se, e somente se,  $P$  projeta ortogonalmente cada elemento  $b \in \mathbb{R}^m$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(P)$ .*

### Demonstração

( $\Rightarrow$ ) Considerando a hipótese de  $P$  simétrica ( $P^t = P$ ) e idempotente ( $P^2 = P$ ), vamos mostra que para cada elemento  $b \in \mathbb{R}^m$  temos que o elemento  $Pb \in \mathbb{R}^m$  é a projeção ortogonal do elemento  $b$  no subespaço  $\mathcal{R}(P)$ . É fácil ver que  $Pb \in \mathcal{R}(P)$ . Desse modo, basta mostrar que o elemento  $(b - Pb) \in \mathcal{R}(P)^\perp$ . De fato,

$$P^t(b - Pb) = P^t(I - P)b = (P^t - P^t P)b = (P - P^2)b = 0.$$

Portanto, mostramos que o elemento  $(b - Pb) \in \mathcal{N}(P^t) = \mathcal{R}(P)^\perp$ .

( $\Leftarrow$ ) Considerando que  $P$  projeta ortogonalmente cada elemento  $b \in \mathbb{R}^m$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(P)$ , vamos mostrar que a matriz  $P$  é simétrica e idempotente. De fato, temos que  $Pb \in \mathcal{R}(P)$  e que  $(b - Pb) \in \mathcal{N}(P^t) = \mathcal{R}(P)^\perp$ , portanto,

$$P^t(b - Pb) = (P^t - P^t P)b = 0 \quad ; \quad \forall b \in \mathbb{R}^m$$

o que implica em  $(P^t - P^t P) = 0$ . Desse modo,  $P^t = P^t P$  e  $P = P^t P$ , logo, a matriz  $P$  é simétrica. Agora, utilizando a simetria da matriz  $P$  e a igualdade  $P = P^t P$ , obtemos  $P^2 = P$ . O que completa a demonstração. ■

**Definição 8.12.1** Dizemos que  $P \in M_m(\mathbb{R})$  é uma matriz de **projeção ortogonal** se  $P$  for uma matriz simétrica e idempotente.

**Proposição 8.12.2** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e a matriz

$$P = A(A^t A)^{-1} A^t = A A^\dagger \in M_m(\mathbb{R}).$$

Então,

1.  $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(A)$ .
2.  $P$  é uma matriz simétrica e idempotente.

### Demonstração

1. Seja  $z \in \mathcal{R}(P)$ , então o elemento  $z$  é escrito da seguinte forma  $z = Px$  para algum  $x \in \mathbb{R}^m$ . Assim, temos que

$$z = Px = A(A^t A)^{-1} A^t x = A((A^t A)^{-1} A^t x) = Ay$$

onde o elemento  $y = (A^t A)^{-1} A^t x$ .

Desse modo, mostramos que o elemento  $z = Px \in \mathcal{R}(A)$ , isto é,  $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(A)$ .

Tomando agora um elemento  $z \in \mathcal{R}(A)$ . Podemos escrever  $z = Ax$ , pois  $A$  é a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ . Logo, o elemento  $x \in \mathcal{R}(P)$ . Portanto,  $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{R}(P)$ , o que completa a prova do item 1.

2. O fato da matriz  $P$  ser simétrica e idempotente pode ser verificado diretamente ou como um conseqüência imediata do item 1. e da Proposição 8.12.1, pois sabemos que  $P$  projeta ortogonalmente cada elemento  $b \in \mathbb{R}^m$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ . O que completa a demonstração. ■



**Exemplo 8.12.1** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e o subespaço  $S = [v]$  com

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Seja  $P$  o operador linear sobre  $\mathbb{R}^3$  de modo que o elemento  $w \in \mathbb{R}^3$  dado por:

$$w = P(u) \quad \text{para} \quad u \in \mathbb{R}^3,$$

é a projeção ortogonal do elemento  $u$  sobre o subespaço  $S$ . Vamos determinar os autovalores e autovetores de  $P$ .

Sabemos que  $w = P(u) = \alpha^* v \in S$  com

$$\alpha^* = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{v^t u}{v^t v}.$$

Assim, temos que o elemento  $w$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$w = P(u) = \frac{v^t u}{v^t v} v = \frac{v v^t}{v^t v} u$$

Considerando o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  com a base canônica  $\beta$ , temos que

$$[P]_{\beta}^{\beta} = \frac{v v^t}{v^t v} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que,  $P(z) = z$  para todo  $z \in S$ . Portanto,  $\lambda_1 = 1$  é um autovalor do operador linear  $P$  com o elemento  $v_1 \in \mathbb{R}^3$  dada por:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o autovetor associado. Logo,  $S$  é o subespaço associado ao autovalor  $\lambda_1 = 1$ .

O complemento ortogonal do subespaço  $S$  em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^\perp$ , é o hiperplano dado por:

$$S^\perp = H = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v \rangle = 0 \}$$

Note que o subespaço  $S^\perp$  é um plano em  $\mathbb{R}^3$  dado pela equação

$$x - y + 2z = 0.$$

Desse modo, temos que

$$P(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para todo  $u \in S^\perp$ , isto é,  $\text{Ker}(P) = S^\perp$ .

Desse modo, temos que  $P(u) = 0u$  para todo  $u \in S^\perp$ . Assim, podemos concluir que  $\lambda_2 = 0$  é um autovalor de  $P$  e  $S^\perp$  é o subespaço associado ao autovalor  $\lambda_2$ . Assim, quaisquer dois elementos  $v_2$  e  $v_3$  linearmente independentes em  $S^\perp$  são autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2 = 0$ . Desse modo, podemos escolher os elementos

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como sendo os autovetores do operador linear  $P$  associados ao autovalor  $\lambda_2 = 0$ .

**Exemplo 8.12.2** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e o subespaço  $S = [v]$  com

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Seja  $R$  o operador linear sobre  $\mathbb{R}^3$  de modo que o elemento  $w \in \mathbb{R}^3$  dado por:

$$w = R(u) \quad \text{para} \quad u \in \mathbb{R}^3,$$

é a reflexão do elemento  $u$  em torno do subespaço  $S^\perp$ . Vamos determinar os autovalores e autovetores de  $R$ .

Do Exemplo 8.12.1, sabemos que o operador  $P$  de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S$  é dado por:

$$P(u) = \frac{v^t u}{v^t v} v = \frac{v v^t}{v^t v} u \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}^3.$$

Desse modo, o operador  $T$  de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S^\perp$  é dado por:

$$T(u) = u - P(u) = u - \frac{v v^t}{v^t v} u = \left( I - \frac{v v^t}{v^t v} \right) u.$$

Temos que o operador linear  $R$  de reflexão em torno do subespaço  $S^\perp$  é dado por:

$$R(u) = T(u) - P(u) = u - 2P(u) = \left( I - 2 \frac{v v^t}{v^t v} \right) u.$$

Assim, temos que  $R(u) = u$  para todo  $u \in S^\perp$ . Logo, concluímos que  $\lambda_1 = 1$  é um autovalor de  $R$  e  $S^\perp$  é o subespaço associado ao autovalor  $\lambda_1$ . Desse modo, quaisquer dois elementos  $v_1$  e  $v_2$  linearmente independentes em  $S^\perp$  são autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 1$ . Portanto, podemos escolher os elementos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como sendo os autovetores do operador linear  $R$  associados ao autovalor  $\lambda_1 = 1$ .

Sabemos que,  $R(w) = -w$  para todo  $w \in S$ . Portanto,  $\lambda_2 = -1$  é um autovalor do operador linear  $R$  com o elemento  $v_3 \in \mathbb{R}^3$  dada por:

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o autovetor associado. Logo,  $S$  é o subespaço associado ao autovalor  $\lambda_2 = -1$ .

Podemos fazer as seguintes considerações sobre o operador  $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de projeção ortogonal sobre um subespaço  $S \subset \mathbb{R}^n$ :

$$(a) \operatorname{Im}(P) = S \quad (b) P^2 = P \quad (c) \text{A matriz } [P]_\beta^\beta \text{ é simétrica}$$

Note que para o operador linear  $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de reflexão em torno de um subespaço  $S \subset \mathbb{R}^n$  temos que  $R^2 = I$ .

## ***Exercícios***

**Exercício 8.104** *Sejam a matriz  $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Calcule a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  e a respectiva matriz de projeção ortogonal.*

**Exercício 8.105** *Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  munido com o produto interno usual. Encontre a matriz de projeção ortogonal sobre o plano coordenado  $xy$ .*

**Exercício 8.106** *Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  munido com o produto interno usual. Encontre a matriz de projeção ortogonal sobre o plano coordenado  $xz$ .*

**Exercício 8.107** *Sejam  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e o elemento  $x^* \in \mathbb{R}^n$  solução de quadrados mínimos do sistema linear  $Ax = b$ . Mostre que o elemento  $r^* = b - Ax^*$  pertence ao subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ . Qual é a pseudo-inversa da matriz  $A$ ? Justifique sua resposta. Mostre que a pseudo-inversa  $A^\dagger$  satisfaz as propriedades:*

1.  $AA^\dagger$  é uma matriz simétrica.
2.  $A^\dagger A$  é uma matriz simétrica.
3.  $AA^\dagger A = A$ .
4.  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ .

**Exercício 8.108** *Seja  $P \in M_m(\mathbb{R})$  uma matriz de projeção ortogonal, isto é,*

$$P^t = P \quad e \quad P^2 = P.$$

*Mostre que  $R = 2P - I$  é uma matriz ortogonal. Faça a interpretação geométrica para os elementos  $z^* = Pb$  e  $v^* = Rb$ , onde  $b \in \mathbb{R}^m$ .*

**Exercício 8.109** *Seja  $P \in M_m(\mathbb{R})$  uma matriz de projeção ortogonal. Mostre que a matriz  $Q = I - P$  é uma matriz de projeção ortogonal. Faça a interpretação geométrica para os elementos  $z^* = Pb$  e  $v^* = Qb$ , onde  $b \in \mathbb{R}^m$ .*

**Exercício 8.110** *Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^m$  com o produto interno usual. Sejam  $S_1$  e  $S_2$  subespaços do  $\mathbb{R}^m$ ,  $P_1 \in M_m(\mathbb{R})$  a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S_1$  e  $P_2 \in M_m(\mathbb{R})$  a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S_2$ , com a propriedade  $P_1P_2 = P_2P_1 = 0_m$ . Pede-se:*

(a) *Mostre que  $P_1 + P_2$  é uma matriz de projeção ortogonal.*

(b) *Mostre que os subespaços  $S_1$  e  $S_2$  são ortogonais.*

(c) *Mostre que  $P_1 + P_2$  é a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço*

$$W = S_1 \oplus S_2.$$

**Exercício 8.111** *Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  com o produto interno usual. Seja  $S$  o subespaço gerado pelo elemento  $u \in \mathbb{R}^n$  não-nulo. Determine a matriz  $P$  de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S$  e a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S^\perp$ .*

**Exercício 8.112** *Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno usual. Seja  $S$  o subespaço do  $\mathbb{R}^3$  definido pela equação*

$$x - 2y + 3z = 0.$$

*Determine a matriz  $P$  de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S$ .*

**Exercício 8.113** *Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno usual. Seja  $S$  o subespaço do  $\mathbb{R}^3$  definido pela equação*

$$x - 2y + 3z = 0.$$

*Determine a matriz  $Q$  de reflexão sobre o subespaço  $S$ .*

**Exercício 8.114** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz ortogonal e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Determine a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$  e a respectiva matriz de projeção ortogonal. Qual é a dimensão do subespaço  $\mathcal{R}(A)$ ?*

**Exercício 8.115** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e  $b \in \mathcal{N}(A^t)$ . Determine a solução de quadrados mínimos para o sistema linear  $Ax = b$ .*

**Exercício 8.116** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^m$  com o produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e o elemento  $u \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\langle u, u \rangle = 1$ . Definimos as seguintes matrizes

$$P = uu^t \quad \text{e} \quad Q = I - 2P,$$

onde a matriz  $Q$  é denominada **matriz de Householder**. Pede-se:

- (a) Mostre que  $Pw = w$ , com  $w = \alpha u$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dê uma interpretação geométrica.
- (b) Mostre que  $Pv = 0_{\mathbb{R}^m}$  para  $\langle u, v \rangle = 0$ . Dê uma interpretação geométrica.
- (c) Mostre que  $Q^t = Q$  e  $Q^2 = I$ . O que podemos dizer da matriz  $Q$ ?
- (d) Mostre que  $Qw = -w$ , com  $w = \alpha u$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dê uma interpretação geométrica.
- (e) Mostre  $Qv = v$  para  $\langle u, v \rangle = 0$ . Dê uma interpretação geométrica.

## 8.13 Fatoração $QR$

Nesta seção apresentamos um procedimento para obter a fatoração  $QR$  de uma matriz  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , utilizando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, isto é, vamos determinar uma matriz ortogonal  $Q \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  e uma matriz triangular superior  $R \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , com os elementos da diagonal principal positivos, tais que  $A = QR$ . Esse processo é muito importante na determinação da solução de quadrados mínimos para sistemas lineares, de uma maneira geral. Procuramos apresentar interpretações geométricas e fazer as relações com os subespaços fundamentais da matriz  $A$ . Todos os resultados desenvolvidos nessa seção estão fortemente baseados na Teorema 5.7.1, que é o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

Nesse momento é importante recordar o Teorema 5.7.2 e sua demonstração. Desse modo, sabemos que todo espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno tem uma base ortonormal. Sejam  $V$  um espaço vetorial munido de um produto interno e  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base ordenada para  $V$ . A partir dessa base, vamos obter uma base ortogonal, através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Do Teorema 5.7.2, temos que, para  $j = 2, \dots, n$  e  $q_1 = v_1$ ,

$$q_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij} q_i \implies \alpha_{ij} = \frac{\langle v_j, q_i \rangle}{\|q_i\|_2^2} \quad \text{para } i = 1, \dots, j-1$$

Como  $v_1, \dots, v_j$  são linearmente independentes, tem-se que o elemento  $q_j \neq 0_V$ . Além disso, sabemos que o subespaço  $S_j = [v_1, \dots, v_j] = W_j = [q_1, \dots, q_j]$ .

Assim, obtemos uma base ortogonal  $\beta' = \{q_1, \dots, q_n\}$ . Finalmente, fazendo

$$q_j^* = \frac{q_j}{\|q_j\|_2} \quad \text{para } j = 1, \dots, n,$$

obtemos uma base ortonormal  $\beta^* = \{q_1^*, \dots, q_n^*\}$ .

Finalmente, podemos observar que o elemento  $w_j$  escrito na forma:

$$w_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, q_i \rangle}{\langle q_i, q_i \rangle} q_i$$

é a projeção ortogonal do elemento  $v_j$  sobre o subespaço  $W_{j-1}$ . Assim, o elemento  $q_j$  é a projeção ortogonal do elemento  $v_j$  sobre o complemento ortogonal de  $W_{j-1}$ .

### ***Matriz de Mudança de Base***

Durante o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt obtemos a construção da matriz de mudança da base ordenada  $\beta$  para a base ordenada  $\beta^*$ . De fato, os elementos da base  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  são escritos da seguinte forma:

$$v_j = \sum_{i=1}^j r_{ij} q_i^* \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, n,$$

onde os coeficientes da combinação linear  $r_{ij}$  são dados por:

$$r_{ij} = \langle v_j, q_i^* \rangle \quad ; \quad i = 1, \dots, j-1 \quad \text{e} \quad j = 2, \dots, n$$

$$r_{ij} = 0 \quad ; \quad i > j$$

$$r_{jj} = \|q_j\|_2 \quad ; \quad j = 1, \dots, n$$

Desse modo,  $R = [r_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  é a matriz de mudança da base ordenada  $\beta$  para a base ordenada  $\beta^*$ . Podemos observar facilmente que  $R$  é uma matriz triangular superior. Observamos, também, que a matriz  $R$  é construída durante o processo de ortogonalização por colunas, isto é, na construção do elemento  $q_j^*$  construímos a  $j$ -ésima coluna da matriz  $R$ . Assim, a matriz  $R$  é construída da seguinte forma:

$$R = \begin{bmatrix} \|q_1\|_2 & \langle v_2, q_1^* \rangle & \langle v_3, q_1^* \rangle & \cdots & \langle v_n, q_1^* \rangle \\ 0 & \|q_2\|_2 & \langle v_3, q_2^* \rangle & \cdots & \langle v_n, q_2^* \rangle \\ 0 & 0 & \|q_3\|_2 & \cdots & \langle v_n, q_3^* \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|q_n\|_2 \end{bmatrix} = [I]_{\beta^*}^\beta,$$

onde  $[I]_{\beta^*}^\beta$  denota a matriz de mudança da base ordenada  $\beta$  para a base ordenada  $\beta^*$ .



## ***Fatoração $QR$ . Método de Gram–Schmidt***

**Teorema 8.13.1** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ . Então, existe uma matriz ortogonal  $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e uma matriz triangular superior  $R \in M_n(\mathbb{R})$ , com todos os elementos da diagonal principal positivos, tais que  $A = QR$ .*

**Demonstração** – A prova é feita de modo construtivo, isto é, vamos exibir uma maneira de construir as matrizes  $Q$  e  $R$ .

Para isso, vamos utilizar o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt para obter a fatoração  $QR$  de uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ . Desse modo, temos que o conjunto  $\beta = \{v_1, \dots, v_j, \dots, v_n\}$ , onde  $v_j \in \mathbb{R}^m$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ , é linearmente independente em  $\mathbb{R}^m$ , isto é,  $\beta$  é uma base ordenada para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

Através do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt obtemos uma base ortonormal  $\beta^* = \{q_1^*, \dots, q_j^*, \dots, q_n^*\}$ , e a matriz de mudança de base  $R \in M_n(\mathbb{R})$ , que é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal todos positivos. Assim, temos a fatoração  $A = QR$ , onde  $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal que tem como  $j$ -ésima coluna o elemento  $q_j^*$  da base ortonormal  $\beta^*$ . De fato, todo elemento  $v \in \mathcal{R}(A)$  pode ser escrito das seguintes forma:

$$v = Ax \quad \text{e} \quad v = Qz = Q(Rx) = (QR)x$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , uma vez que  $z = Rx$ .

Portanto, temos a fatoração  $A = QR$ , o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.13.2** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m \geq n$  e  $\text{posto}(A) = n$ . Então, existe uma única matriz  $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  ortogonal e uma única matriz  $R \in M_n(\mathbb{R})$ , com os elementos da diagonal principal positivos, tais que  $A = QR$ .*

**Demonstração** – A prova é baseada na conexão entre a fatoração  $QR$  da matriz  $A$  e a fatoração de Cholesky da matriz  $A^t A$ , considerando a unicidade do fator de Cholesky e do fato que a matriz  $R$  é invertível. □

A seguir, apresentamos o algoritmo para obter a fatoração  $QR$  de uma matriz  $A$ , com  $m \geq n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , pelo processo de ortogonalização de Gram–Schmidt.

**Algoritmo 8.13.1 (Método de Gram–Schmidt)**

```

for j = 1,2, ... ,n
    Q(:,j) = A(:,j)
    for i = 1,2, ... ,(j - 1)
        R(i,j) = dot(A(:,j),Q(:,i))
        Q(:,j) = Q(:,j) - R(i,j)*Q(:,i)
    end
    R(j,j) = sqrt(dot(Q(:,j),Q(:,j)))
    Q(:,j) = Q(:,j) / R(j,j)
end

```

No algoritmo acima as funções `dot(·,·)` e `sqrt(·)` denotam os procedimentos para o cálculo do produto interno e da raiz quadrada, respectivamente.

### ***Fatoração QR. Método de Gram–Schmidt Modificado***

Nessa seção apresentamos um algoritmo para obter a fatoração  $QR$  de uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m \geq n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , através de uma pequena alteração no processo de ortogonalização de Gram–Schmidt. O objetivo dessa modificação é tornar o método numericamente mais estável. Em alguns casos os elementos que formam as colunas da matriz  $Q$  obtida pelo Método de Gram–Schmidt apresentam uma perda de ortogonalidade, devido os erros da aritmética de ponto flutuante.

Para exemplificar vamos considerar o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^m$  com o produto interno usual e os elementos  $v_1, \dots, v_4$  linearmente independentes em  $\mathbb{R}^m$ .

Inicialmente tomamos os elementos

$$\begin{aligned} q_1 &= v_1 & \text{e} & \quad q_1^* = \frac{q_1}{\|q_1\|_2} \\ q_2 &= v_2 - \langle v_2, q_1^* \rangle q_1^* & \text{e} & \quad q_2^* = \frac{q_2}{\|q_2\|_2} \end{aligned} \quad (8.167)$$

O elemento  $q_3$  é construído em partes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_3^{(1)} &= v_3 - \langle v_3, q_1^* \rangle q_1^* \\ q_3 &= q_3^{(1)} - \langle q_3^{(1)}, q_2^* \rangle q_2^* \\ q_3^* &= \frac{q_3}{\|q_3\|_2} \end{aligned} \quad (8.168)$$

O elemento  $q_4$  é construído em partes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_4^{(1)} &= v_4 - \langle v_4, q_1^* \rangle q_1^* \\ q_4^{(2)} &= q_4^{(1)} - \langle q_4^{(1)}, q_2^* \rangle q_2^* \\ q_4 &= q_4^{(2)} - \langle q_4^{(2)}, q_3^* \rangle q_3^* \\ q_4^* &= \frac{q_4}{\|q_4\|_2} \end{aligned} \quad (8.169)$$

O procedimento descrito em (8.167)–(8.169) é denominado **Método de Gram–Schmidt Modificado**.

Para um conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linearmente independente em  $\mathbb{R}^m$ , consideramos que já foram construídos os elementos  $q_1^*, \dots, q_{j-1}^*$ , através do procedimento descrito em (8.167)–(8.169), o elemento  $q_j$  é construído da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_j &= v_j \\ q_j &= q_j - \langle q_j, q_k^* \rangle q_k^* \quad \text{para} \quad k = 1, \dots, (j-1) \\ q_j^* &= \frac{q_j}{\|q_j\|_2} \end{aligned} \tag{8.170}$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

A seguir, apresentamos um algoritmo eficiente para obter a fatoração  $QR$  de uma matriz  $A$ , com  $m \geq n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , pelo processo de ortogonalização de Gram–Schmidt modificado.

#### Algoritmo 8.13.2 (Método de Gram–Schmidt Modificado)

```

Q = A
for j = 1, 2, ..., n
    R(j, j) = sqrt(dot(Q(:, j), Q(:, j)))
    Q(:, j) = Q(:, j) / R(j, j)
    for i = (j + 1), ..., n
        R(j, i) = dot(Q(:, j), Q(:, i))
        Q(:, i) = Q(:, i) - R(j, i)*Q(:, j)
    end
end
end

```

No algoritmo acima as funções  $\text{dot}(\cdot, \cdot)$  e  $\text{sqrt}(\cdot)$  denotam os procedimentos para o cálculo do produto interno e da raiz quadrada, respectivamente.

Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m \geq n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e a fatoração  $A = QR$ , onde  $Q \in M_m(\mathbb{R})$  e  $R \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , descritas da seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} \widehat{Q} & \widetilde{Q} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} \widehat{R} \\ 0_{r \times n} \end{bmatrix},$$

onde  $\widehat{Q} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $\widetilde{Q} \in M_{m \times r}(\mathbb{R})$  são matrizes ortogonais,  $\widehat{R} \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos e  $0_{r \times n}$  é a matriz nula de ordem  $r \times n$ , com  $r = m - n$ .

Vamos mostrar como construir as matrizes ortogonais  $\widehat{Q}$  e  $\widetilde{Q}$  fazendo uma relação geométrica da fatoração  $A = QR$  com os subespaços fundamentais  $\mathcal{R}(A)$  e  $\mathcal{N}(A^t)$ .

Por simplicidade, vamos denotar as matrizes  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $Q \in M_m(\mathbb{R})$  da seguinte forma:

$$A = [v_1 \cdots v_j \cdots v_n] \quad \text{e} \quad Q = [q_1^* \cdots q_j^* \cdots q_n^* \ w_1^* \cdots w_j^* \cdots w_r^*],$$

onde  $v_j \in \mathbb{R}^m$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $A$ ,  $q_j^* \in \mathbb{R}^m$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $\widehat{Q}$  e  $w_j^* \in \mathbb{R}^m$  é a  $j$ -ésima coluna da matriz  $\widetilde{Q}$ . Vamos denotar a matriz  $\widehat{R} \in M_n(\mathbb{R})$  da seguinte forma:

$$\widehat{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tomando um elemento  $z \in \mathcal{R}(A)$ , temos que  $z = Ax$  para algum  $x \in \mathbb{R}^n$ . Desse modo, substituindo a fatoração  $A = QR$  na expressão de  $z$ , obtemos

$$\begin{aligned} z &= Ax = \sum_{j=1}^n x_j v_j \\ &= QRx \\ &= \widehat{Q}y = \sum_{j=1}^n y_j q_j^* \end{aligned}$$

onde  $y = \widehat{R}x \in \mathbb{R}^n$ . Note que, como  $\text{posto}(A) = n$ , temos que  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ , cujos elementos são as colunas da matriz  $A$ , é uma base ordenada de  $\mathcal{R}(A)$ .

Portanto, observamos que as colunas da matriz  $\widehat{Q}$  formam uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ . Assim, a base ortonormal  $\beta^* = \{q_1^*, \dots, q_n^*\}$  pode ser obtida da base ordenada  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  de  $\mathcal{R}(A)$  através do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt. Além disso,  $\widehat{R}$  é a matriz de mudança da base ordenada  $\beta$  para a base ortonormal  $\beta^*$ .

Finalmente, como  $Q \in M_m(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal, observamos facilmente que  $\Gamma^* = \{w_1^*, \dots, w_j^*, \dots, w_r^*\}$ , cujos elementos são as colunas da matriz  $\widetilde{Q}$ , é uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{R}(A)^\perp$ . Assim, podemos encontrar uma base ordenada  $\Gamma = \{w_1, \dots, w_j, \dots, w_r\}$  para o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ , que é definido por:

$$\mathcal{N}(A^t) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid A^t z = 0_{\mathbb{R}^n}\},$$

obtendo a solução geral do sistema linear homogêneo

$$A^t z = 0_{\mathbb{R}^n} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle v_j, z \rangle = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Em seguida, determinamos a base ortonormal  $\Gamma^*$  a partir da base ordenada  $\Gamma$  através do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt. Note que os elementos

$$w_1, \dots, w_j, \dots, w_r \in \mathbb{R}^m$$

são as soluções básicas do sistema linear homogêneo  $A^t z = 0_{\mathbb{R}^n}$ , que possui  $n$  equações lineares com  $r = m - n$  variáveis livres. Todo esse procedimento está justificado pelos resultados apresentados na seção 5.8.

## ***Fatoração QR. Solução de Quadrados Mínimos***

**Teorema 8.13.3** *Considere uma matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e um elemento  $b \in \mathbb{R}^m$ . Se conhecemos a fatoração  $A = QR$ , com  $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , uma matriz ortogonal, e  $R \in M_n(\mathbb{R})$ , uma matriz triangular superior, então*

(a) *A solução de quadrados mínimos  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , para o sistema linear  $Ax = b$ , é a única solução do sistema triangular superior  $Rx = Q^t b$ .*

(b) *A matriz  $A^\dagger = R^{-1}Q^t$  é a pseudo-inversa da matriz  $A$ .*

(c) *A matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$  é dada por  $P = QQ^t$ .*

**Demonstração** – (a) A prova segue do fato que a solução de quadrados mínimos é a única solução do sistema normal e utilizar a fatoração  $A = QR$ , considerando que  $R$  é uma matriz invertível.

Para mostrar o item (b), basta utilizar a decomposição  $A = QR$  na expressão da pseudo-inversa da matriz  $A$ . A prova do item (c) é feita de modo análogo.  $\square$

Finalmente, apresentamos o procedimento de como obter a solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$  utilizando a fatoração  $A = QR$ , a partir da sua definição.

Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m \geq n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e a fatoração  $A = QR$ , onde  $Q \in M_m(\mathbb{R})$  e  $R \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , descritas da seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} \hat{Q} & \tilde{Q} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0_{r \times n} \end{bmatrix},$$

onde  $\hat{Q} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $\tilde{Q} \in M_{m \times r}(\mathbb{R})$  são matrizes ortogonais,  $\hat{R} \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior invertível e  $0_{r \times n}$  é a matriz nula de ordem  $r \times n$ , com  $r = m - n$ .

A solução de quadrados mínimos  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é definida como:

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min\{\|Ax - b\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (8.171)$$

Fazendo uso do fato que a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^n$  é invariante por transformação ortogonal, e substituindo a fatoração  $A = QR$  em (8.171), obtemos

$$\begin{aligned}
 \|Ax^* - b\|_2 &= \min\{\|Ax - b\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \min\{\|Q^t(Ax - b)\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \min\{\|Q^t(QRx - b)\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \min\{\|Rx - Q^tb\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\}
 \end{aligned} \tag{8.172}$$

Inicialmente vamos analisar com mais detalhe  $\|Rx - Q^tb\|_2$ . Para isso, utilizamos a seguinte representação

$$Rx - Q^tb = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0_{r \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{Q}^t \\ \tilde{Q}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{R}x \\ 0_{r \times 1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{Q}^tb \\ \tilde{Q}^tb \end{bmatrix}$$

Note que podemos escrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$Rx - Q^tb = \begin{bmatrix} \hat{R}x \\ 0_{r \times 1} \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} \hat{Q}^tb \\ 0_{r \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{Q}^tb \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \hat{R}x - \hat{Q}^tb \\ 0_{r \times 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{Q}^tb \end{bmatrix},$$

onde os elementos do membro direito são ortogonais em  $\mathbb{R}^m$ .

Desse modo, pela Fórmula de Pitágoras, podemos escrever  $\|Rx - Q^tb\|_2$  da forma:

$$\|Rx - Q^tb\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \hat{R}x - \hat{Q}^tb \\ 0_{r \times 1} \end{bmatrix} \right\|_2^2 + \left\| \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ \tilde{Q}^tb \end{bmatrix} \right\|_2^2,$$

que de forma simplificado, obtemos

$$\|Rx - Q^tb\|_2^2 = \|\hat{R}x - \hat{Q}^tb\|_2^2 + \|\tilde{Q}^tb\|_2^2.$$

Finalmente, voltando ao problema original, temos que

$$\begin{aligned}
 \|Ax^* - b\|_2 &= \min\{\|Ax - b\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \min\{\|\hat{R}x - \hat{Q}^tb\|_2 + \|\tilde{Q}^tb\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\} \\
 &= \min\{\|\hat{R}x - \hat{Q}^tb\|_2 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\} + \|\tilde{Q}^tb\|_2
 \end{aligned} \tag{8.173}$$

Podemos observar facilmente que o ponto de mínimo  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é tal que

$$\|\hat{R}x^* - \hat{Q}^tb\|_2 = 0 \iff \hat{R}x^* - \hat{Q}^tb = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \hat{R}x^* = \hat{Q}^tb.$$



Portanto, a solução de quadrados mínimos  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é a única solução do sistema linear triangular superior

$$\widehat{R}x = \widehat{Q}^t b,$$

sabendo que  $\widehat{R}$  é uma matriz invertível, pois  $\text{posto}(A) = n$ .

É importante observar que o elemento  $r^* = b - Ax^*$  é a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^t)$ , e o elemento  $z^* = Ax^*$  é a projeção ortogonal do elemento  $b$  no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , que é a melhor aproximação do elemento  $b$  no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ . Desse modo, dizemos que o elemento  $r^*$  é o **vetor de resíduo** da melhor aproximação, e que  $\|r^*\|_2$  é o **resíduo** dessa aproximação. Sendo assim, da equação (8.173), podemos concluir que

$$\|b - Ax^*\|_2 = \|r^*\|_2 = \|\widetilde{Q}^t b\|_2,$$

lembrando a segunda igualdade é válida somente em norma, não significando a igualdade dos elementos envolvidos.

## ***Exercícios***

**Exercício 8.117** *Sejam a matriz  $A \in \mathbb{M}_{4 \times 2}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) *Determine uma base ortogonal para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .*

(b) *Determine a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ .*

**Exercício 8.118** *Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  uma matriz invertível e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Descreva como podemos obter a solução do sistema linear  $Ax = b$  através da fatoração  $A = QR$ . Mostre que  $\mathcal{K}_2(R) = \mathcal{K}_2(A)$ . O que podemos concluir ?*

**Exercício 8.119** *Encontre a fatoração  $QR$  da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*através do Processo de Ortogonalização de Gram–Schmidt.*

**Exercício 8.120** *Considere a matriz  $A \in \mathbb{M}_{3 \times 5}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^5$  dados por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

*Encontre a projeção ortogonal do elemento  $b$  no subespaço  $\mathcal{N}(A)$ , utilizando o Método de Gram–Schmidt Modificado. Faça a implementação computacional em uma linguagem de sua preferência. Apresente uma pequena introdução teórica justificando a resolução do problema.*

**Exercício 8.121** Considere a matriz  $A \in \mathbb{M}_{4 \times 2}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .
- (b) Determine uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ .
- (c) Determine a fatoração  $A = QR$ , onde  $Q \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$  e  $R \in \mathbb{M}_{4 \times 2}(\mathbb{R})$ , descritas da seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} \hat{Q} & \tilde{Q} \end{bmatrix} \quad e \quad R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0_2 \end{bmatrix},$$

onde  $\hat{Q}, \tilde{Q} \in \mathbb{M}_{4 \times 2}(\mathbb{R})$  são matrizes ortogonais,  $\hat{R} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos e  $0_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  é a matriz nula.

- (d) Dê uma interpretação para a matriz  $\hat{R}$ .

**Exercício 8.122** Considere a matriz  $A \in \mathbb{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a fatoração  $A = QR$ , através do Processo de Gram-Schmidt, onde a matriz  $Q \in \mathbb{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos.

**Exercício 8.123** Considere a matriz  $A \in \mathbb{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{N}(A)$  e a respectiva matriz de projeção ortogonal, utilizando a fatoração  $A^t = \hat{Q}\hat{R}$ .

**Exercício 8.124** Considere a matriz  $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz de Reflexão sobre  $\mathcal{R}(A^t)$ , utilizando a fatoração  $A^t = \hat{Q}\hat{R}$ .

**Exercício 8.125** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a decomposição  $A = QR$ , através do Processo de Gram-Schmidt, onde  $Q \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in M_3(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos.
- (b) Determine a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .
- (c) Determine a pseudo-inversa da matriz  $A$ .
- (d) Determine a projeção ortogonal do elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dado por:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.126** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e a fatoração  $A = QR$ , com  $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz ortogonal e  $R \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos. Pede-se:

- (a) Mostre que  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(Q)$ .
- (b) Mostre que  $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{N}(Q^t)$ .
- (c) Mostre que  $\mathcal{R}(A^t) = \mathcal{R}(Q^t) = \mathbb{R}^n$ .
- (d) Mostre que  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(Q) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .

**Exercício 8.127** Considere a matriz  $A \in \mathbb{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a decomposição  $A = QR$ , através do Processo de Gram-Schmidt, onde  $Q \in \mathbb{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos.
- (b) Determine a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .
- (c) Determine a pseudo-inversa da matriz  $A$ .
- (d) Determine a projeção ortogonal do elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dado por:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.128** Sejam  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e a fatoração  $A = QR$ , com  $Q \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz ortogonal e  $R \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos. Pede-se:

- (a) Mostre que a solução de quadrados mínimos  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , para o sistema linear  $Ax = b$ , é a única solução do sistema triangular superior  $Rx = Q^t b$ .
- (b) Mostre que  $A^\dagger = R^{-1}Q^t$  é a pseudo-inversa da matriz  $A$ .
- (c) Mostre que  $P = QQ^t$  é a matriz de projeção ortogonal sobre  $\mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.129** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a decomposição  $A = QR$ , através do Processo de Gram-Schmidt, onde  $Q \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in M_3(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos.
- (b) Determine a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .
- (c) Determine a pseudo-inversa da matriz  $A$ .
- (d) Determine a projeção ortogonal do elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dado por:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.130** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a decomposição  $A = QR$ , através do Processo de Gram-Schmidt, onde  $Q \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in M_3(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal positivos.
- (b) Determine a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .
- (c) Determine a pseudo-inversa da matriz  $A$ .

(d) Determine a projeção ortogonal do elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  dado por:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

**Exercício 8.131** Sejam  $A \in M_n(\mathbb{R})$  não singular e  $b \in \mathbb{R}^n$ . Descreva como obter a solução do sistema linear  $Ax = b$  através da fatoração QR da matriz  $A$ . Escreva um procedimento em Matlab para obter uma solução numérica do sistema linear  $Ax = b$  através da fatoração QR da matriz  $A$ , utilizando o Método de Gram-Schmidt. Tome como exemplo a matriz de Hilbert  $A = [a_{ij}]$ , onde

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1},$$

para  $i, j = 1, \dots, n$ , escolhendo o vetor  $b$  de modo que a solução exata  $x^* \in \mathbb{R}^n$  seja dada por:

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

para vários valores de  $n$ , calculando em cada caso o erro relativo

$$\frac{\|x^* - \hat{x}\|_2}{\|x^*\|_2},$$

onde  $\hat{x}$  é a solução numérica.

**Exercício 8.132** Considerando o procedimento em Matlab desenvolvido no Exercício 8.131, faça a implementação de um procedimento eficiente para calcular a matriz inversa  $A^{-1}$  de uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  invertível.

**Exercício 8.133** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .
- (b) Determine uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ .
- (c) Determine a fatoração  $A = QR$ , onde  $Q \in M_4(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior.

**Exercício 8.134** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .
- (b) Determine uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ .
- (c) Determine a fatoração  $A = QR$ , onde  $Q \in M_4(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior.

**Exercício 8.135** Seja  $Q \in M_4(\mathbb{R})$  a matriz de reflexão sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , onde  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que os autovalores da matriz  $Q$  são  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ .
- (b) Mostre que  $E_{\lambda_1} = \mathcal{R}(A)$  e que  $E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(A^t)$ , que são os subespaços associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente.
- (c) Determine uma base ortonormal para  $\mathbb{R}^4$  formada por autovetores de  $Q$ .



## 8.14 Modelos de Regressão Linear

Nesta seção vamos apresentar vários modelos de regressão linear, como aplicação da solução de quadrados mínimos para sistema linear sobredeterminado. O objetivo principal é estudar como podemos relacionar uma variável de observação  $y$ , denominada variável resposta, com outras variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , denominadas variáveis regressoras. Além disso, desejamos encontrar o melhor modelo, denominado Modelo de Regressão Linear, e que tenha uma expressão funcional com menos complexidade possível. Para um estudo mais detalhado sobre o tema podemos consultar a referência [8].

Uma vez escolhido um determinado modelo, apresentamos como obter o ajuste desse modelo a um conjunto de observações da variável  $y$ , através do Método dos Quadrados Mínimos. Finalmente, vamos construir uma ferramenta para analisar a qualidade desse ajuste, procurando fazer uma conexão com as propriedades dos subespaços fundamentais e a solução de quadrados mínimos para um sistema linear sobredeterminado.

### *Modelo de Regressão Linear Simples*

Inicialmente estamos interessados em analisar o comportamento de uma variável resposta  $y$  com relação a uma única variável regressora  $x$ . Assim, queremos determinar qual é a relação entre as variáveis  $y$  e  $x$ . Caso seja possível encontrar essa relação, desejamos formular o melhor modelo de regressão linear simples.

Um modelo de regressão linear, muito utilizado em várias situações de interesse prático, relacionando uma variável resposta  $y$  a uma única variável regressora  $x$  é dado por:

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n, \quad (8.174)$$

isto é, um Modelo de Regressão Linear Polinomial Determinístico, pois não consideramos a possibilidade de erros aleatórios nas observações, ou os erros nas medidas são muito pequenos.

De uma maneira geral, escolhemos um conjunto de funções linearmente independente, definidas no intervalo da variável regressora e que sejam pelo menos contínuas,

$$S = \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$$

e propomos o seguinte modelo de regressão linear simples

$$y(x) = \beta_1 \varphi_1(x) + \beta_2 \varphi_2(x) + \dots + \beta_n \varphi_n(x). \quad (8.175)$$

É importante observar que o termo linear está relacionado aos parâmetros do modelo, e não à relação funcional entre a variável resposta e a variável regressora.

Finalmente, para ajustar o modelo de regressão linear, isto é, determinar os parâmetros do modelo, necessitamos de um conjunto de  $m$  observações, ou medidas, nas duas variáveis  $x$  e  $y$ , que vamos denotar por:

$$(x_1, y_1) \quad , \quad (x_2, y_2) \quad , \quad \cdots \quad , \quad (x_m, y_m) \quad .$$

Desse modo, o gráfico do modelo de regressão linear, que ajusta os dados observados, é denominado **curva de regressão**.

Assim, para cada um dos pares de medidas, obtemos uma equação

$$y_i = \beta_1 \varphi_1(x_i) + \beta_2 \varphi_2(x_i) + \cdots + \beta_n \varphi_n(x_i), \quad (8.176)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ . É importante ressaltar que para uma melhor estimativa dos parâmetros do modelo devemos ter  $m \gg n$ , isto é, o número de medidas deve ser muito maior que o número de parâmetros a serem estimados.

Por simplicidade, representamos esse conjunto de equações na forma matricial

$$AX = Y,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(x_i) & \varphi_2(x_i) & \cdots & \varphi_n(x_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(x_m) & \varphi_2(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_i \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

que é um **sistema linear sobredeterminado**.

Vamos obter a estimativa dos parâmetros do modelo de regressão através da **solução de quadrados mínimos** para o sistema linear sobredeterminado  $AX = Y$ , que indicamos pelo elemento  $\hat{X} \in \mathbb{R}^n$ , que é a solução do **problema de minimização**

$$\|A\hat{X} - Y\|_2 = \min\{\|AX - Y\|_2 \ ; \ X \in \mathbb{R}^n\}, \quad (8.177)$$

que é equivalente ao **sistema normal**

$$A^t A X = A^t Y. \quad (8.178)$$

Encontrada a solução de quadrados mínimos, que indicamos por:

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_i \\ \vdots \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix},$$

obtemos o modelo que melhor se ajusta aos dados observados, que é dado por:

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta}_1 \varphi_1(x) + \hat{\beta}_2 \varphi_2(x) + \cdots + \hat{\beta}_n \varphi_n(x). \quad (8.179)$$

Podemos determinar a solução de quadrados mínimos através da Fatoração de Cholesky, para obter uma solução numérica do sistema normal, ou através da Fatoração  $QR$ , para obter uma solução numérica do problema de minimização.

Considerando um conjunto de  $m$  observações,

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \cdots, \quad (x_m, y_m),$$

com medidas distintas na variável regressora, isto é,  $x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_m$  um conjunto de pontos distintos, podemos mostrar facilmente que  $\dim(\mathcal{R}(A)) = \text{posto}(A) = n$ , onde  $A$  é a matriz do sistema linear sobredeterminado associado ao problema de regressão linear, que é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(x_i) & \varphi_2(x_i) & \cdots & \varphi_n(x_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(x_m) & \varphi_2(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix},$$

desde que o conjunto  $S = \{\varphi_i, \cdots, \varphi_n\}$  seja linearmente independente, de acordo com Definição 3.5.4.

## ***Modelo de Regressão Linear Múltipla***

Nesta seção nosso principal objetivo é estudar um **Modelo de Regressão Linear Múltipla** através da análise de uma possível relação do **peso** ( $kg$ ) dos indivíduos de uma determinada população, denotamos essa variável por  $P$ , em função da **altura** ( $m$ ), indicamos essa variável por  $x$ , do fato do indivíduo ser ou não **fumante**, indicamos essa variável por  $y$ , que assume os valores  $y = 0$  para não fumante e  $y = 1$  para fumante, e do **sexo**, indicamos essa variável por  $z$ , que assume os valores  $z = 0$  para o sexo masculino e  $z = 1$  para o sexo feminino.

A variável  $P$  é denominada **variável dependente** ou **variável resposta** e as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  são denominadas **variáveis regressoras**. Desse modo, a variável resposta é aquela que estamos tentando explicar em função das variáveis regressoras. Portanto, queremos relacionar a variável resposta  $P$  em termos das variáveis regressoras, através do modelo

$$P(x, y, z) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 xy + \beta_6 xz, \quad (8.180)$$

que é chamado um *Modelo de Regressão Linear Múltipla*. É importante observar que o termo **linear** faz referência à relação entre a variável resposta e os parâmetros do modelo, que neste caso são  $\beta_1, \dots, \beta_6$ , e não à relação entre a variável resposta e as variáveis regressoras.

Finalmente, para determinar os parâmetros do modelo de regressão linear múltipla, vamos coletar as informações necessárias entre os alunos matriculados na disciplina MS 512, no segundo semestre de 2007. Desse modo, obtemos um conjunto de  $m$  equações lineares, onde  $m$  é o número de alunos que responderam nosso questionário, com  $n$  incógnitas, neste caso temos  $n = 6$ , que é o número de parâmetros do modelo, dadas por:

$$P_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i + \beta_4 z_i + \beta_5 x_i y_i + \beta_6 x_i z_i, \quad (8.181)$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ , onde indicamos por  $P_i$  os valores observados em nossa população para a variável resposta.

Vamos escrever o sistema de equações lineares (8.181) na forma matricial

$$AX = Y,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1y_1 & x_1z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & y_i & z_i & x_iy_i & x_iz_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & y_m & z_m & x_my_m & x_mz_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix},$$

que é um **sistema linear sobredeterminado**, tendo em vista que possui mais equações do que incógnitas, isto é,  $m \gg n$ , que é uma situação ideal para análise de regressão.

Obtemos a estimativa dos parâmetros do modelo de regressão através da **solução de quadrados mínimos** para o sistema linear sobredeterminado  $AX = Y$ , que indicamos pelo elemento  $\hat{X} \in \mathbb{R}^6$ , que é a solução do **problema de minimização**

$$\|A\hat{X} - Y\|_2 = \min\{\|AX - Y\|_2 \ ; \ X \in \mathbb{R}^6\}, \quad (8.182)$$

que é equivalente ao **sistema normal**

$$A^tAX = A^tY. \quad (8.183)$$

Encontrada a solução de quadrados mínimos, que vamos indicar por:

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_6 \end{bmatrix},$$

encontramos o modelo que melhor se ajusta aos dados que coletamos na nossa população, que é dado por:

$$\hat{P}(x, y, z) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2x + \hat{\beta}_3y + \hat{\beta}_4z + \hat{\beta}_5xy + \hat{\beta}_6xz. \quad (8.184)$$

A seguir apresentamos uma pequena introdução às grandezas estatísticas utilizadas na análise do modelo proposto, verificando a qualidade do ajuste dos dados observados, com a finalidade de verificar a qualidade de previsões que podemos realizar com o modelo. Além disso, mostramos algumas propriedades envolvidas no processo de regressão linear.

## ***Análise do Ajuste do Modelo de Regressão***

Essa avaliação é feita através do **Coefficiente de Determinação do Modelo**

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT}, \quad (8.185)$$

onde  $SQR$  é a **Soma de Quadrados da Regressão**

$$SQR = \sum_{j=1}^m (\hat{P}_j - \bar{p})^2, \quad (8.186)$$

e  $SQT$  é a **Soma de Quadrados Total**

$$SQT = \sum_{j=1}^m (P_j - \bar{p})^2. \quad (8.187)$$

Por simplicidade, estamos indicando  $\hat{P}_j = \hat{P}(x_j, y_j, z_j)$  os valores estimados pelo modelo, e  $\bar{p}$  é a **média** das observações da variável resposta  $P$ , isto é,

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m P_j}{m}.$$

Temos também uma outra grandeza importante para a verificação da qualidade do ajuste, que é a **Soma de Quadrados dos Resíduos**

$$SQE = \sum_{j=1}^m (P_j - \hat{P}_j)^2. \quad (8.188)$$

A grandeza  $SQR$  fornece a variabilidade dos valores estimados em torno da média  $\bar{p}$ , e a grandeza  $SQT$  fornece a variabilidade das observações da variável resposta em torno da média  $\bar{p}$ . A grandeza  $SQE$  fornece a variabilidade do resíduo proveniente do ajuste do modelo.

Através das interpretações geométricas relacionadas com a solução de quadrados mínimos para um sistema linear sobredeterminado, vamos mostrar que

$$SQT = SQR + SQE. \quad (8.189)$$

Observado as grandezas definidas acima, concluímos que  $0 \leq R^2 \leq 1$ . Além disso, melhor será o ajuste do modelo quando  $R^2 \approx 1$ , tendo em vista que teremos  $SQE \approx 0$ .

Desse modo, o coeficiente de determinação do modelo  $R^2$  representa a **porcentagem** da variabilidade total dos valores observados explicada pelo modelo.

**Problema 8.14.1** *Podemos observar facilmente que a nossa população está dividida em quatro grupos distintos. Desse modo, podemos determinar um modelo que melhor se ajusta aos dados da Tabela 8.1 para cada um dos grupos e comparar os resultados com o modelo descrito em (8.184). Faça a identificação de cada um dos modelos e apresente uma conclusão.*

Uma primeira análise estatística de um conjunto de observações é o seu **vetor de média**. Inicialmente, apresentamos a interpretação geométrica para o vetor de média fazendo uso de projeções ortogonais e das conexões entre os subespaços fundamentais. Para isso, considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^m$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $Y \in \mathbb{R}^m$  o **vetor de observações** da variável resposta  $P$  e o **vetor unidade**  $U \in \mathbb{R}^m$  dados por:

$$Y = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que a projeção ortogonal do elemento  $Y$  sobre o subespaço gerado pelo elemento  $U$ , que vamos denotar por  $\bar{Y}$ , é dada por:

$$\bar{Y} = \frac{\langle U, Y \rangle}{\langle U, U \rangle} U = \frac{\sum_{j=1}^m y_j}{m} U = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \vdots \\ \bar{p} \end{bmatrix},$$

onde  $\bar{p}$  é a média do vetor de observações, isto é,

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m P_j}{m}.$$

Assim, concluímos que  $\bar{Y}$  é o **vetor de média** do vetor de observações, isto é,

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \vdots \\ \bar{p} \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar facilmente que o vetor  $\bar{Y}$  pertence ao subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , tendo em vista que o subespaço  $S = [U]$  está contido em  $\mathcal{R}(A)$ .

Além disso, o complemento ortogonal  $S^\perp$  do subespaço  $S$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^m$ , que tem dimensão  $(m - 1)$ , isto é,

$$S^\perp = \{ Z \in \mathbb{R}^m \mid \langle U, Z \rangle = 0 \}.$$

Assim, o elemento  $(Y - \bar{Y})$  é a projeção ortogonal do elemento  $Y$  no subespaço  $S^\perp$ .

Considerando o fato que  $\bar{Y} \in \mathcal{R}(A)$  e as interpretações geométricas relacionadas com a solução de quadrados mínimos para um sistema linear sobredeterminado, vamos mostrar a relação (8.189), e assim provamos também que o coeficiente de determinação do modelo satisfaz

$$0 \leq R^2 \leq 1. \quad (8.190)$$

Chamando  $\hat{X}$  o **vetor de parâmetros**, que é a solução de quadrados mínimos, isto é,

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_n \end{bmatrix}. \quad (8.191)$$

Desse modo, o vetor  $\hat{Y} = A\hat{X}$  que é a projeção ortogonal do vetor de observações  $Y$  no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , isto é,  $\hat{Y}$  é a **melhor aproximação** do vetor  $Y$  no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , é dado por:

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \vdots \\ \hat{P}_m \end{bmatrix}.$$

O elemento  $(Y - \hat{Y})$  é a projeção ortogonal do elemento  $Y$  no subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ .

Sendo assim, podemos reescrever as grandezas  $SQR$ ,  $SQT$  e  $SQE$  na forma:

$$\begin{aligned} SQR &= \|\hat{Y} - \bar{Y}\|_2^2 \\ SQT &= \|Y - \bar{Y}\|_2^2 \\ SQE &= \|Y - \hat{Y}\|_2^2 \end{aligned} \quad (8.192)$$

respectivamente.



Finalmente, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned}\|Y - \bar{Y}\|_2^2 &= \|(Y - \hat{Y}) + (\hat{Y} - \bar{Y})\|_2^2 \\ &= \|Y - \hat{Y}\|_2^2 + \|\hat{Y} - \bar{Y}\|_2^2,\end{aligned}\tag{8.193}$$

desde que o elemento  $(Y - \hat{Y}) \in \mathcal{N}(A^t)$  e o elemento  $(\hat{Y} - \bar{Y}) \in \mathcal{R}(A)$ . Assim, provamos a relação (8.189).

Portanto, da equação (8.193), temos a seguinte relação

$$SQT = \|Y - \bar{Y}\|_2^2 \geq SQR = \|\hat{Y} - \bar{Y}\|_2^2.\tag{8.194}$$

Logo, mostramos que  $0 \leq R^2 \leq 1$ .

Como a matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$ , tem posto completo, isto é,  $\text{posto}(A) = n$ , sabemos que a matriz  $A^t A$  é positiva-definida. Desse modo, temos que  $A^t A$  é uma matriz invertível.

Portanto, o vetor de parâmetros  $\hat{X}$  tem a seguinte **caracterização**:

$$\hat{X} = (A^t A)^{-1} A^t Y,\tag{8.195}$$

que é a solução do sistema normal (8.183).

Desse modo, o elemento  $\hat{Y} = A\hat{X}$ , que é a projeção ortogonal do vetor de observações  $Y$  no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , é representado na seguinte forma:

$$\hat{Y} = A(A^t A)^{-1} A^t Y = PY,\tag{8.196}$$

onde  $P = A(A^t A)^{-1} A^t$  é a **matriz de projeção ortogonal** sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ . Sendo assim, sabemos que

- (a)  $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(A)$ .
- (b)  $P^t = P$  ( $P$  é uma matriz simétrica).
- (c)  $P^2 = P$  ( $P$  é uma matriz idempotente).

Finalmente, vamos mostrar que

$$\sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m \hat{P}_j \iff \frac{\sum_{j=1}^m P_j}{m} = \frac{\sum_{j=1}^m \hat{P}_j}{m}. \quad (8.197)$$

De fato, podemos observar que

$$Y^t U = \langle U, Y \rangle = \sum_{j=1}^m P_j \quad \text{e} \quad \hat{Y}^t U = \langle U, \hat{Y} \rangle = \sum_{j=1}^m \hat{P}_j.$$

Como  $P$  é a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , obtemos

$$\hat{Y}^t U = (PY)^t U = Y^t P^t U = Y^t (PU) = Y^t U, \quad (8.198)$$

desde que  $PU = U$ , pois o vetor unidade  $U \in \mathcal{R}(A)$ , o que prova a igualdade (8.197).

Da relação (8.197), podemos fazer a interpretação geométrica: a projeção ortogonal do vetor  $\hat{Y}$  sobre o subespaço  $S = [U] \subset \mathcal{R}(A)$  é igual ao vetor  $\bar{Y}$ , que é a projeção ortogonal do vetor de observações  $Y$  sobre o subespaço  $S$ .

É importante ressaltar que utilizamos fortemente o fato do subespaço  $S = [U]$  estar contido no subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , isto é, o vetor unidade  $U$  é uma das colunas da matriz  $A$ . Esse fato significa que o modelo de regressão linear possui o **intercepto**, que é o parâmetro  $\beta_1$ , veja o modelo de regressão linear descrito em (8.180).

**Problema 8.14.2** Determinar a estimativa dos parâmetros do modelo descrito em (8.180) utilizando os dados da nossa população, apresentados na Tabela 8.1, através da solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado

$$AX = Y, \quad (8.199)$$

obtida das seguintes maneiras:

- Através da **Fatoração QR** da matriz  $A$ , obtemos a solução para o problema de minimização (8.182). Num primeiro momento, vamos determinar a Fatoração QR da matriz  $A$  através do **Método de Gram-Schmidt Modificado**, que é proveniente do **Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**.
- Através da **Fatoração de Cholesky** da matriz  $C = A^t A$ , obtemos a solução para o sistema normal (8.183).

Comparar com os resultados obtidos no Problema 8.14.1.

Tabela 8.1: Tabela dos dados observados em nossa população

Peso ( <i>kg</i> )	Altura ( <i>m</i> )	<u>Fumante</u>		<u>Sexo</u>	
		(0) Não	(1) Sim	(0) M	(1) F
68.6	1.85	0		0	
64.1	1.75	0		1	
72.0	1.88	0		0	
70.2	1.79	1		0	
50.3	1.53	0		1	
48.5	1.66	0		1	
62.0	1.72	0		1	
69.0	1.77	0		0	
50.0	1.63	0		1	
78.5	1.78	0		0	
55.0	1.70	0		0	
66.0	1.71	0		0	
60.0	1.71	0		1	
60.0	1.71	0		1	
67.0	1.70	0		1	
73.0	1.74	0		0	
74.0	1.80	0		0	
56.0	1.59	0		1	
62.0	1.64	0		1	
54.0	1.55	0		1	
71.0	1.60	1		1	
53.0	1.61	0		1	
70.0	1.61	0		1	
60.0	1.70	0		1	
67.0	1.68	1		1	
60.0	1.68	0		0	
63.0	1.52	0		1	
49.0	1.60	0		1	
63.0	1.65	0		1	
72.0	1.70	0		0	
64.0	1.80	0		0	
85.0	1.86	0		0	

Peso ( <i>kg</i> )	Altura ( <i>m</i> )	<u>Fumante</u>		<u>Sexo</u>	
		(0) Não	(1) Sim	(0) M	(1) F
76.0	1.68	0		0	
97.0	1.77	0		0	
82.0	1.82	0		0	
89.0	1.75	0		0	
66.0	1.77	0		1	
63.0	1.72	0		1	
78.0	1.80	0		0	
63.0	1.79	0		0	
83.0	1.89	0		0	
53.0	1.60	0		1	
84.0	1.83	0		0	
68.0	1.85	0		0	
62.0	1.65	0		1	
61.0	1.68	0		1	
51.0	1.65	0		1	
52.0	1.67	1		1	
53.0	1.55	0		1	
70.0	1.86	0		0	
65.0	1.70	0		0	
70.0	1.71	0		0	
72.0	1.73	0		0	
65.0	1.70	0		0	
85.0	1.80	1		0	
80.0	1.80	0		0	
97.0	1.73	0		0	
96.0	1.65	0		0	
57.0	1.62	0		1	
125.0	1.89	0		0	
76.0	1.79	0		0	
65.0	1.82	0		0	
51.0	1.57	0		1	
60.0	1.50	1		1	

**Exemplo 8.14.1** Considere um experimento conduzido com a finalidade de analisar a variação do **calor específico** da glicerina<sup>1</sup> ( $C_3H_5(OH)_3$ ), indicamos essa variável por  $Y$ , em função da temperatura  $T$ . Os resultados do experimento estão na Tabela 8.2.

Tabela 8.2: Calor específico da glicerina

Temperatura [K] $T$	Calor Específico $\left[\frac{kJ}{kg}K\right]$ $Y$
273.0	2.261
280.0	2.298
290.0	2.367
300.0	2.427
310.0	2.490
320.0	2.564

Nosso objetivo é estudar a relação da variável resposta  $Y$ , que representa o calor específico da glicerina, em função da variável regressora  $T$ , que é a temperatura, através do seguinte **Modelo de Regressão Linear Simples**

$$Y(T) = \beta_1 + \beta_2 T.$$

Apresentar uma análise do modelo proposto, verificando a qualidade do ajuste dos dados observados, através do **Coefficiente de Determinação do Modelo**, da **Soma de Quadrados dos Resíduos** e do **gráfico de dispersão**. O que podemos concluir?

Inicialmente vamos encontrar solução de quadrados mínimos para o sistema linear

$$AX = Y,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 273.0 \\ 1 & 280.0 \\ 1 & 290.0 \\ 1 & 300.0 \\ 1 & 310.0 \\ 1 & 320.0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} 2.261 \\ 2.298 \\ 2.367 \\ 2.427 \\ 2.490 \\ 2.564 \end{bmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>F. P. Incropera e D. P. DeWitt, *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*, LTC, 1998.

A solução de quadrados mínimos  $\hat{X}$  é a solução do sistema normal  $A^tAX = A^tY$ , onde

$$A^tA = \begin{bmatrix} 6 & 1773 \\ 1773 & 525529 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^tY = \begin{bmatrix} 14.4 \\ 4267.6 \end{bmatrix}.$$

Como  $\text{posto}(A) = 2$ , sabemos que a matriz do sistema normal é positiva-definida. Assim, através da Fatoração de Cholesky obtemos o vetor de parâmetros  $\hat{X}$  que é dado por:

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0141876620 \times 10^{-1} \\ 6.4289269051 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Assim, o modelo apresenta um coeficiente de determinação do modelo  $R^2 = 0.9986308869$ , e uma soma de quadrados dos resíduos  $SQE = 9.108823224468478 \times 10^{-5}$ . Desse modo, o melhor modelo que ajusta os dados experimentais é dado por:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 T.$$

Com os resultados obtidos, concluímos que os dados experimentais são bem representados pelo modelo de regressão linear simples, isto é, a variação do calor específico da glicerina tem um relação linear com a temperatura. Na Figura 8.10, temos o gráfico de dispersão indicando o resultado obtido.

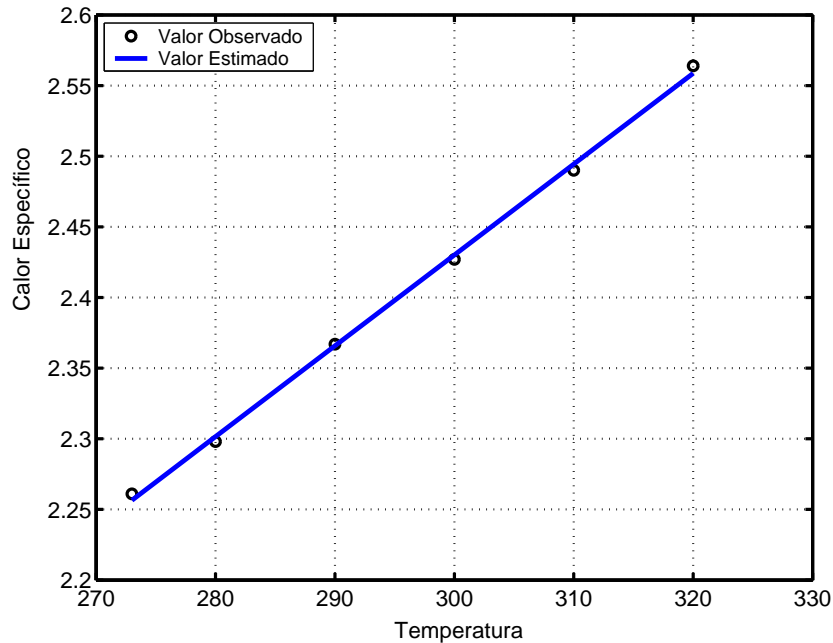


Figura 8.10: Gráfico de dispersão para o Exemplo 8.14.1.

## *Variância, Covariância e Coeficiente de Correlação*

Com os resultados de Álgebra Linear desenvolvidos, vamos apresentar de forma muito básica e como uma aplicação dos conceitos estudados até o momento, algumas medidas estatísticas com as quais estudamos diversas propriedades de variáveis observadas sobre cada indivíduo de uma amostra de uma determinada população. Problemas multivariados surgem em diversas áreas de investigações científicas, tais como, biologia, física, sociologia, ciências médicas, etc, e de forma muito mais natural do que os problemas univariados, quando problemas práticos resultam em coleção de dados na qual mais de uma variável é observada sobre cada um dos indivíduos. Com o objetivo de fazer uma conexão entre os conceitos apresentados no texto, vamos definir e apresentar uma interpretação algébrica das medidas estatísticas como variância amostral, desvio padrão amostral, vetor de média amostral, covariância amostral e coeficiente de correlação amostral. Por simplicidade, e que claramente fica subentendido, omitiremos a palavra amostral nos conceitos que serão apresentados nesta seção. Sempre que possível, e de modo que venha contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos, apresentamos uma interpretação geométrica para cada uma dessas medidas.

A forma de como trabalhar com um problema multivariado depende de como vamos estruturar mais de uma variável observada sobre cada indivíduo de uma amostra de uma determinada população. Todo conjunto multivariado de dados  $Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n$ , onde cada variável  $Y_j$  possui  $m$  medidas, pode ser representado através da **matriz de dados**, que denotamos por  $Y = [y_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , definida da seguinte forma:

$$Y = [Y_1 \cdots Y_j \cdots Y_n] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2j} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{ij} & \cdots & y_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mj} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix},$$

onde  $m$  é o número de indivíduos observados e  $n$  é o número de variáveis sobre cada indivíduo. Desse modo,  $y_{ij}$  é a observação da variável aleatória  $Y_j$  sobre o  $i$ -ésimo indivíduo da amostra.

Assim, uma amostra de  $m$  indivíduos sobre os quais foram observadas  $n$  variáveis, pode ser identificada com  $n$  pontos em  $\mathbb{R}^m$ , ou espaço dos indivíduos. De modo análogo, podemos identificá-la com  $m$  pontos em  $\mathbb{R}^n$ , ou espaço das variáveis.

Como estamos tratando com uma amostra aleatória de  $m$  indivíduos de uma mesma população, as linhas da matriz de dados  $Y$  correspondem às observações das variáveis aleatórias  $Y_1, \dots, Y_n$  sobre indivíduos de maneira que as linhas fornecem observações independentes e identicamente distribuídas das variáveis aleatórias.

Assim sendo, quer estejamos fazendo uma análise no espaço dos indivíduos o  $\mathbb{R}^m$ , ou quer estejamos fazendo uma análise no espaço das variáveis o  $\mathbb{R}^n$ , estamos representando indivíduos ou variáveis com relação à base canônica de cada um desses espaços vetoriais, respectivamente. De uma maneira mais simples, podemos ver cada variável observada  $Y_j$  como um elemento do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^m$ , e a sua respectiva representação com relação à base canônica.

O trabalho com conjuntos de observações com muitas informações apresenta uma certa dificuldade para a extração das propriedades sobre o fenômeno que desejamos estudar. Assim, muitas dessas propriedades que estão contidas neste conjunto de dados, podem ser obtidas pelo cálculo de certas medidas estatísticas conhecidas como *estatística descritiva*, cujos conceitos serão apresentados a seguir, com as devidas conexões com os resultados que foram estudados no texto.

Podemos associar à matriz de dados  $Y$  o **vetor de médias amostrais**, ou simplesmente **vetor de médias**, denotado por  $\bar{Y}$ , que é definido da seguinte forma:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_j \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix},$$

como extensão da média amostral univariada, onde  $\bar{y}_j$  é a média da variável observada  $Y_j \in \mathbb{R}^m$  que é dada por:

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^m y_{ij}}{m} \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, n.$$

Quando o vetor de médias amostrais é identificado como um elemento do espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$ , representa o *centro de gravidade* dos pontos amostrais  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Assim, dizemos que o vetor de médias  $\bar{Y}$  é o *indivíduo médio*, isto é, o representante sumário das observações.



**Definição 8.14.1** Considere  $Y \in \mathbb{R}^m$  uma variável observada. Sejam  $\bar{y}$  a média e  $\bar{Y}$  o vetor de média da variável  $Y$ , respectivamente. A **variância** da variável  $Y$ , que denotamos por  $\text{var}(Y)$ , é definida da seguinte forma:

$$\text{var}(Y) = \frac{\langle Z^*, Z^* \rangle}{m-1},$$

onde  $Z^* = Y - \bar{Y}$ , que é denominado **vetor de resíduo**.

Podemos mostrar facilmente que o elemento  $Z^* = Y - \bar{Y}$  é a projeção ortogonal do elemento  $Y$  no complemento ortogonal do subespaço  $S = [U]$ , tendo em vista que o vetor de média  $\bar{Y}$  é a projeção ortogonal do elemento  $Y$  no subespaço  $S$ . Além disso, sabemos que  $\dim(S^\perp) = m - 1$ . Desse modo, como  $Z^* \in S^\perp$ , temos que qualquer uma de suas componentes depende das outras  $(m - 1)$  componentes restantes. Portanto, desse fato surge a motivação da divisão por  $(m - 1)$  na definição da variância de uma variável de observações. É importante observar que o conceito de variância está vinculado ao **desvio padrão** da variável  $Y$ , que denotamos por  $S_Y$ , definido da seguinte forma:

$$S_Y = \sqrt{\text{var}(Y)}.$$

Uma outra medida muito utilizada em estatística é o conceito de covariância, que é uma medida de associação linear entre duas variáveis observadas.

**Definição 8.14.2** Sejam  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$  variáveis observadas. A **covariância** entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$ , que denotamos por  $\text{cov}(Y_1, Y_2)$ , é definida da seguinte forma:

$$\text{cov}(Y_1, Y_2) = \frac{\langle Z_1^*, Z_2^* \rangle}{m-1},$$

onde  $Z_1^* = Y_1 - \bar{Y}_1$  e  $Z_2^* = Y_2 - \bar{Y}_2$ .

Podemos observar que a covariância pode ser vista como um pseudo-produto interno, denominado **produto interno covariante**, que denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{cov}}$ .

De fato, podemos observar facilmente que os vetores de resíduos

$$Z_1^* = Y_1 - \bar{Y}_1 \quad \text{e} \quad Z_2^* = Y_2 - \bar{Y}_2$$

podem ser escritos da forma:

$$Z_j^* = Y_j - \bar{Y}_j = (I - P)Y_j = HY_j \quad \text{para} \quad j = 1, 2,$$

onde  $P \in M_m(\mathbb{R})$  é a matriz de projeção sobre o subespaço  $S = [U]$ , que é dada por:

$$P = \frac{UU^t}{U^tU},$$

e  $H = I - P$  é a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S^\perp$ .

Assim, a covariância entre as variáveis observadas  $Y_1$  e  $Y_2$  pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{cov}(Y_1, Y_2) &= \frac{\langle Z_1^*, Z_2^* \rangle}{m-1} \\
 &= \frac{(Z_2^*)^t Z_1^*}{m-1} \\
 &= \frac{(Y_2^t H^t)(HY_1)}{m-1} \\
 &= \frac{Y_2^t (H^t H) Y_1}{m-1} \\
 &= \frac{Y_2^t (HY_1)}{m-1} \\
 &= \frac{\langle HY_1, Y_2 \rangle}{m-1} \\
 &= \langle Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbf{cov}},
 \end{aligned} \tag{8.200}$$

uma vez que  $H$ , é uma matriz de projeção ortogonal, satisfaz as propriedades:

$$H^t = H \quad \text{e} \quad H^2 = H,$$

veja a Proposição 8.12.1 e a Definição 8.12.1.

Desse modo, para todo elemento  $Y \in S = [U]$ , temos que

$$\mathbf{cov}(Y, Y) = \frac{Y^t (HY)}{m-1} = \frac{\langle HY, Y \rangle}{m-1} = \langle Y, Y \rangle_{\mathbf{cov}} = 0,$$

uma vez que  $HY = 0_{\mathbb{R}^m}$ .

Portanto, provamos que o produto interno covariante é um pseudo–produto interno em  $\mathbb{R}^m$  associado à matriz semipositiva–definida dada por:

$$\frac{H}{m-1},$$

onde  $H$  é a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S^\perp$ . É importante observar que estamos considerando o espaço vetorial  $\mathbb{R}^m$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , e com a base canônica  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ .

## Formas Bilineares e Formas Quadráticas

**Definição 8.14.3** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Uma **forma bilinear** sobre  $V$  é uma aplicação  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(a) \quad \mathbf{a}(\alpha u + v, w) = \alpha \mathbf{a}(u, w) + \mathbf{a}(v, w)$$

$$(b) \quad \mathbf{a}(u, \alpha v + w) = \alpha \mathbf{a}(u, v) + \mathbf{a}(u, w)$$

para todos  $u, v, w \in V$  e para todo escalar  $\alpha \in \mathbb{F}$ .

**Exemplo 8.14.2** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $J_1$  e  $J_2$  funcionais lineares sobre  $V$ , veja Definição 7.2.1. A aplicação  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$  definida por:*

$$\mathbf{a}(u, v) = J_1(u) J_2(v)$$

para todos  $u, v \in V$ , é uma forma bilinear sobre  $V$ .

**Exemplo 8.14.3** *Considere o espaço vetorial real  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $A \in M_m(\mathbb{R})$  uma matriz fixa, porém arbitrária. A aplicação  $f_A(\cdot, \cdot) : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$  definida da forma:*

$$f_A(X, Y) = \text{tr}(X^t A Y) \quad \text{para todos} \quad X, Y \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

é uma forma bilinear sobre  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

**Teorema 8.14.1** *Considere  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ordenada para  $V$ . Seja  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear sobre  $V$ . Então, a matriz de  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  com relação à base ordenada  $\beta$  é a matriz  $A = [a_{ij}]$  cujos elementos são da forma  $a_{ij} = \mathbf{a}(u_i, u_j)$ .*

**Demonstração** – Para todos  $u, v \in V$ , temos que

$$u = \sum_{i=1}^n b_i u_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^n c_i u_i.$$

Desse modo, temos que

$$\mathbf{a}(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i c_j \mathbf{a}(u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i c_j a_{ij} = [u]_{\beta}^t A [v]_{\beta},$$

onde  $a_{ij} = \mathbf{a}(u_i, u_j)$ , o que completa a demonstração. ■

Portanto, toda forma bilinear  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  sobre  $V$  pode ser representada na forma:

$$\mathbf{a}(u, v) = ([u]_{\beta})^t A [v]_{\beta},$$

onde  $[u]_{\beta}$  e  $[v]_{\beta}$  são os vetores coordenadas dos elementos  $u$  e  $v$  em relação à base ordenada  $\beta$ . Vamos denotar por  $[\mathbf{a}]_{\beta}$  a matriz da forma bilinear  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  em relação à base ordenada  $\beta$ . Podemos verificar facilmente que dada uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , podemos definir uma forma bilinear sobre  $V$  associada a essa matriz.

**Definição 8.14.4** *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,*

$$\beta = \{u_1, \dots, u_j, \dots, u_n\}$$

*uma base ordenada para  $V$ , e  $A \in M_n(\mathbb{F})$  uma matriz fixa, porém arbitrária. A aplicação  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$  definida da forma:*

$$\mathbf{a}(u, v) = ([u]_{\beta})^t A [v]_{\beta} \quad \text{para todos } u, v \in V,$$

*é denominada **forma bilinear** associada à matriz  $A$ .*

**Definição 8.14.5** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear sobre  $V$ . Dizemos que  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  é uma **forma bilinear simétrica** se*

$$\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{a}(v, u) \quad \text{para todos } u, v \in V.$$

**Exemplo 8.14.4** *Seja  $V$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Podemos verificar que o produto interno é uma forma bilinear simétrica sobre  $V$ .*

**Teorema 8.14.2** *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base ordenada para  $V$ ,  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear sobre  $V$ , e  $A = [\mathbf{a}]_{\beta}$  a matriz da forma bilinear  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  com relação à base ordenada  $\beta$ . Então,  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  é uma forma bilinear simétrica se, e somente se,  $A$  é uma matriz simétrica.*

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Definição 8.14.6** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear simétrica sobre  $V$ . A aplicação  $\mathbf{q}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{F}$  definida da forma:*

$$\mathbf{q}(u) = \mathbf{a}(u, u) \quad \text{para todo } u \in V,$$

*é denominada **forma quadrática** associada à forma bilinear simétrica  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ .*

**Definição 8.14.7** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear simétrica sobre  $V$ , e  $\mathbf{q}(\cdot)$  a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ . Dizemos que  $\mathbf{q}(\cdot)$  é uma **forma quadrática positiva** se*

$$\mathbf{q}(u) = \mathbf{a}(u, u) > 0$$

*para todo  $u \in V$  diferente do elemento neutro  $0_V \in V$ .*

**Definição 8.14.8** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear simétrica sobre  $V$ , e  $\mathbf{q}(\cdot)$  a forma quadrática associada à forma bilinear simétrica  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$ . Dizemos que  $\mathbf{q}(\cdot)$  é uma **forma quadrática semipositiva** se*

$$\mathbf{q}(u) = \mathbf{a}(u, u) \geq 0$$

*para  $u \in V$ .*

**Exemplo 8.14.5** *Seja  $V$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Podemos associar ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , que é uma forma bilinear simétrica sobre  $V$ , a forma quadrática positiva dada por:*

$$\mathbf{q}(u) = \langle u, u \rangle \quad \text{para todo} \quad u \in V,$$

*onde a norma Euclidiana  $\|\cdot\|_2$  em  $V$  é definida por:*

$$\|u\|_2 = \sqrt{\mathbf{q}(u)} \quad \text{para todo} \quad u \in V.$$

**Exemplo 8.14.6** *Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  com o produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  a base canônica, e  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida. Podemos definir uma forma bilinear simétrica associada à matriz  $A$  da seguinte forma:*

$$\mathbf{a}(x, y) = ([x]_\beta)^t A [y]_\beta = x^t A y$$

*para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Desse modo, podemos associar a forma quadrática positiva*

$$\mathbf{q}(x) = x^t A x \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

*É importante lembrar que estamos considerando os elementos de  $\mathbb{R}^n$  representados na forma de matriz coluna, devido ao fato dos espaços vetoriais  $\mathbb{R}^n$  e  $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  serem isomorfos.*

**Teorema 8.14.3** *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear sobre  $V$ . Então, as matrizes  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$  representam a forma bilinear  $\mathbf{a}(\cdot, \cdot)$  em relação a bases ordenadas diferentes se, e somente se, a matriz  $B$  é congruente com a matriz  $A$ .*

### Demonstração

( $\Rightarrow$ ) Tomando como hipótese que as matrizes  $A$  e  $B$  representam a mesma forma quadrática, entretanto, com relação a diferentes bases ordenadas, isto é,

$$\mathbf{a}(u, v) = ([u]_{\beta})^t A [v]_{\beta} = ([u]_{\gamma})^t B [v]_{\gamma},$$

onde  $[u]_{\beta} = P[u]_{\gamma}$  para todo  $u \in V$ , representa a mudança de coordenadas.

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} ([u]_{\beta})^t A [v]_{\beta} &= (P[u]_{\gamma})^t A (P[v]_{\gamma}) \\ &= ([u]_{\gamma})^t (P^t A P) [v]_{\gamma} \\ &= ([u]_{\gamma})^t B [v]_{\gamma} \end{aligned}$$

Portanto,  $B = P^t A P$ , onde  $P$  é a matriz de mudança da base ordenada  $\gamma$  para a base ordenada  $\beta$ , que é uma matriz invertível. Assim, mostramos que a matriz  $B$  é congruente com a matriz  $A$ , veja Definição 2.8.1.

( $\Leftarrow$ ) Tomando por hipótese que a matriz  $B$  é congruente com a matriz  $A$ , isto é, existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $B = P^t A P$ .

Assim, temos que  $A = (P^t)^{-1} B P^{-1}$ , e obtemos

$$\begin{aligned} ([u]_{\beta})^t A [v]_{\beta} &= ([u]_{\beta})^t \{ (P^t)^{-1} B P^{-1} \} [v]_{\beta} \\ &= (P^{-1}[u]_{\beta})^t B (P^{-1}[v]_{\beta}) \\ &= ([u]_{\gamma})^t B [v]_{\gamma} \end{aligned}$$

onde  $[u]_{\beta} = P[u]_{\gamma}$  para todo  $u \in V$ . Logo,  $P$  é a matriz de mudança da base ordenada  $\gamma$  para a base ordenada  $\beta$ , o que completa a demonstração. ■

Podemos verificar facilmente que a covariância é uma **forma bilinear simétrica** sobre o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^m$ . De fato, a covariância satisfaz:

$$(a) \quad \mathbf{cov}(kY_1 + Y_2, Y) = k\mathbf{cov}(Y_1, Y) + \mathbf{cov}(Y_2, Y)$$

$$(b) \quad \mathbf{cov}(Y, kY_1 + Y_2) = k\mathbf{cov}(Y, Y_1) + \mathbf{cov}(Y, Y_2)$$

$$(c) \quad \mathbf{cov}(Y_1, Y_2) = \mathbf{cov}(Y_2, Y_1)$$

para todo  $k \in \mathbb{R}$  e para todos  $Y, Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$ .

Desse modo, temos que a variância é uma **forma quadrática** associada à forma bilinear simétrica definida pela covariância, isto é,

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{cov}(Y, Y) \quad \text{para todo} \quad Y \in \mathbb{R}^m.$$

Logo, a variância é uma forma quadrática semipositiva, uma vez que

$$\mathbf{cov}(Y, Y) = \mathbf{var}(Y) = 0$$

para todo elemento  $Y \in S = [U]$ .

Assim sendo, a partir da variância podemos definir pseudo-norma, proveniente do produto interno covariante, denominada **norma covariante**, que vamos denotar por:

$$\|Y\|_{\mathbf{cov}} = \sqrt{\mathbf{var}(Y)} = \sqrt{\mathbf{cov}(Y, Y)} = \sqrt{\langle Y, Y \rangle_{\mathbf{cov}}}$$

para todo  $Y \in \mathbb{R}^m$ .

**Definição 8.14.9** *Sejam  $Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$  variáveis observadas. A matriz  $C = [c_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  definida por:*

$$c_{ij} = \mathbf{cov}(Y_i, Y_j) \quad \text{para} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

*é denominada **matriz de covariância**.*

Note que a diagonal principal da matriz de covariância  $C$ , isto é,

$$c_{ii} = \mathbf{cov}(Y_i, Y_i) = \mathbf{var}(Y_i) \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n,$$

é o **vetor de variância** das variáveis observadas.

Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^m$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , e com a base canônica  $\beta = \{e_1, \dots, e_j, \dots, e_m\}$ . Como a covariância é uma forma bilinear simétrica sobre o  $\mathbb{R}^m$ , sabemos que sua matriz em relação à base canônica  $\beta$ , que vamos denotar por  $A = [\mathbf{cov}]_\beta$ , é uma matriz simétrica dada por:

$$a_{ij} = \mathbf{cov}(e_i, e_j) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{para } i = j \\ \frac{-1}{m(m-1)} & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (8.201)$$

De fato, temos que

$$e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_j = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z_j^* = e_j - \bar{e}_j = -\frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 - m \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, obtemos

$$a_{ii} = \mathbf{cov}(e_i, e_i) = \mathbf{var}(e_i) = \frac{\langle Z_i^*, Z_i^* \rangle}{m-1} = \frac{1}{m}$$

para  $i = 1, \dots, m$ , e

$$a_{ij} = \mathbf{cov}(e_i, e_j) = \frac{\langle Z_i^*, Z_j^* \rangle}{m-1} = \frac{-1}{m(m-1)}$$

para  $i \neq j$ .

Portanto, podemos calcular a variância entre as variáveis observadas  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$  da seguinte forma:

$$\mathbf{cov}(Y_1, Y_2) = ([Y_1]_\beta)^t [\mathbf{cov}]_\beta [Y_2]_\beta = (Y_1)^t [\mathbf{cov}]_\beta Y_2,$$

facilitando consideravelmente os cálculos.

Podemos verificar facilmente que a matriz  $[\mathbf{cov}]_\beta$ , descrita em (8.201), é a mesma matriz obtida pelos cálculos realizados em (8.200) para representar a covariância, isto é,

$$[\mathbf{cov}]_\beta = \frac{H}{m-1},$$

onde  $H$  é a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S^\perp$ .



Sejam  $Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$  variáveis observadas. Vamos definir a **matriz de dados**, que denotamos por  $Y \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , da seguinte forma:

$$Y = [Y_1 \cdots Y_j \cdots Y_n],$$

e a **matriz das médias**, que vamos denotar por  $\bar{Y} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , da seguinte forma:

$$\bar{Y} = [\bar{Y}_1 \cdots \bar{Y}_j \cdots \bar{Y}_n],$$

onde  $\bar{Y}_j$  é o vetor de média da variável  $Y_j$ .

Temos também associada à matriz de dados  $Y$  a **matriz de Gramm** definida por:

$$G = Y^t Y,$$

freqüentemente utilizada em análise de sinal e controle, por exemplo.

Finalmente, representamos a matriz de covariância  $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  da seguinte forma:

$$C = \frac{(Y - \bar{Y})(Y - \bar{Y})^t}{m - 1} = \frac{Z^t Z}{m - 1},$$

onde a matriz  $Z = Y - \bar{Y} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , denominada **matriz de resíduos**.

Sabemos que a matriz  $Z^t Z$  é positiva-definida para  $m \geq n$  e  $\text{posto}(Z) = n$ . Assim, a matriz de covariância é positiva-definida.

De modo análogo, sabemos que a matriz  $Z^t Z$  é semipositiva-definida para  $m \geq n$  e  $\text{posto}(Z) = r < n$ . Assim, a matriz de covariância é semipositiva-definida.

Para o caso que  $m < n$ , a matriz  $Z^t Z$  é semipositiva-definida. Desse modo, a matriz de covariância é semipositiva-definida.

Podemos observar facilmente que a matriz  $Z = Y - \bar{Y}$  pode ser escrita da forma:

$$Z = (I - P)Y = HY,$$

onde  $P \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  é a matriz de projeção sobre o subespaço  $S = [U]$ , e a matriz  $H = I - P$  é a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S^\perp$ .

Portanto, a matriz de covariância pode ser escrita da seguinte forma:

$$C = \frac{Z^t Z}{m - 1} = \frac{Y^t H^t H Y}{m - 1} = \frac{Y^t (H^t H) Y}{m - 1} = \frac{Y^t H Y}{m - 1},$$

uma vez que  $H^t = H$  e  $H^2 = H$ .

**Exemplo 8.14.7** Considere as variáveis observadas  $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathbb{R}^4$  dadas por:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Verifique que a matriz de covariância  $C = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  é dada por:

$$C = \frac{Z^t Z}{m-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 10 & -3 & -7 \\ -3 & 2 & 0 \\ -7 & 0 & 18 \end{bmatrix},$$

onde  $Z = Y - \bar{Y}$  é a matriz de resíduos,  $Y$  a matriz de dados e  $\bar{Y}$  a matriz das médias. Determine o posto da matriz de covariância. Neste exemplo, a matriz de covariância é uma matriz positiva-definida?

**Exemplo 8.14.8** Considere  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_j, \dots, d_m)$  uma matriz diagonal, com  $d_i > 0$  para  $i = 1, \dots, m$ , e o produto interno energia  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  em  $\mathbb{R}^m$  associado à matriz positiva-definida  $D$ , isto é, para  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$  temos que

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle_D = Y_2^t D Y_1.$$

- (a) Determine o vetor de média  $\bar{Y}$  da variável observada  $Y \in \mathbb{R}^m$  com relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ , denominado **vetor de média ponderada**.
- (b) Mostre que a matriz de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S = [U]$  com relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ , onde  $U \in \mathbb{R}^m$  é o vetor unidade, é dada por:

$$P = \frac{U U^t D}{U^t D U} = \frac{U (DU)^t}{(DU)^t U}.$$

- (c) Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  munido do produto interno energia associado à matriz diagonal  $D = \text{diag}(2, 3, 5)$ . Sejam as variáveis observadas  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^3$  dadas por:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a covariância entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$  definida da seguinte forma:

$$\text{cov}(Y_1, Y_2) = \frac{\langle Z_1^*, Z_2^* \rangle_D}{2},$$

onde  $Z_1^* = Y_1 - \bar{Y}_1$  e  $Z_2^* = Y_2 - \bar{Y}_2$ .

**Exemplo 8.14.9** Considere  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_j, \dots, d_m)$  uma matriz diagonal, com  $d_i > 0$  para  $i = 1, \dots, m$ , e o produto interno energia  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  em  $\mathbb{R}^m$  associado à matriz positiva-definida  $D$ , isto é, para  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$  temos que

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle_D = Y_2^t D Y_1.$$

Sejam  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$  duas variáveis observadas. Temos que a covariância entre as variáveis observadas  $Y_1$  e  $Y_2$  pode ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_1, Y_2) &= \frac{\langle Z_1^*, Z_2^* \rangle_D}{m-1} \\ &= \frac{(Z_2^*)^t (D Z_1^*)}{m-1} \\ &= \frac{(Y_2^t H^t) (D H Y_1)}{m-1} \\ &= \frac{Y_2^t (H^t D H) Y_1}{m-1} \\ &= Y_2^t (A Y_1) \\ &= \langle Y_1, Y_2 \rangle_A = \langle Y_1, Y_2 \rangle_{\text{cov}}, \end{aligned}$$

onde  $Z_1^* = Y_1 - \bar{Y}_1$ ,  $Z_2^* = Y_2 - \bar{Y}_2$  e a matriz  $A$  é dada por:

$$A = \frac{H^t D H}{m-1},$$

onde  $H = I - P$  a matriz de projeção sobre o subespaço  $S^\perp$  e  $P$  a matriz de projeção sobre o subespaço  $S = [U]$ , com relação ao produto interno energia  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ , veja Exercício 8.14.8.

Portanto, o produto interno covariante é um pseudo-produto interno em  $\mathbb{R}^m$ , munido do produto interno energia  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ , associado à matriz semipositiva-definida  $A$ , uma vez que  $H$  é uma matriz semipositiva-definida e  $D$  é uma matriz positiva-definida.

Podemos notar que a covariância depende da magnitude e da unidade física das variáveis observadas, quando essas possuem uma unidade. Desse modo, a covariância é utilizada preferencialmente nas aplicações nas quais as variáveis possuem a mesma unidade física. Desse modo, seria muito interessante definir uma medida que não tenha uma dependência da magnitude das variáveis observadas, e portanto, não depende da unidade física de cada uma delas.

**Definição 8.14.10** *Sejam  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$  duas variáveis observadas. O coeficiente de correlação entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$ , que denotamos por  $\mathbf{corr}(Y_1, Y_2)$ , é definido da seguinte forma:*

$$\mathbf{corr}(Y_1, Y_2) = \frac{\langle Z_1^*, Z_2^* \rangle}{\|Z_1^*\|_2 \|Z_2^*\|_2} = \frac{\mathbf{cov}(Y_1, Y_2)}{\|Y_1\|_{\mathbf{cov}} \|Y_2\|_{\mathbf{cov}}}.$$

Considerando as interpretações algébricas das medidas de variância e covariância, ou seja, das definições de produto interno covariante e de norma covariante, podemos verificar que o coeficiente de correlação entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$  pode ser visto da forma:

$$\mathbf{corr}(Y_1, Y_2) = \cos(\theta_{12}^*),$$

onde  $\theta_{12}^* \in [0, \pi]$  é o ângulo entre os vetores de resíduos  $Z_1^*$  e  $Z_2^*$  com relação ao produto interno usual do  $\mathbb{R}^m$ , ou também pode ser interpretado como o ângulo entre as variáveis observadas  $Y_1$  e  $Y_2$  com relação ao produto interno covariante, veja a Definição 5.5.1, uma vez que o produto interno covariante satisfaz a desigualdade de Cauchy–Schwarz, veja o Teorema 5.3.1, isto é,

$$\mathbf{cov}(Y_1, Y_2)^2 \leq \mathbf{cov}(Y_1, Y_1) \mathbf{cov}(Y_2, Y_2)$$

para todos  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$ .

**Definição 8.14.11** *Sejam  $Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$  variáveis observadas. A matriz  $R = [r_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  definida por:*

$$r_{ij} = \mathbf{corr}(Y_i, Y_j) = \cos(\theta_{ij}^*) \quad \text{para} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

é denominada **matriz de correlação**.

Considere as variáveis observadas  $Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$ . Sabemos que a matriz de covariância  $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  pode ser representada da seguinte forma:

$$C = \frac{(Y - \bar{Y})^t(Y - \bar{Y})}{m - 1} = \frac{Z^t Z}{m - 1},$$

onde  $Z = Y - \bar{Y}$  é a matriz de resíduos,  $Y$  é a matriz de dados, e  $\bar{Y}$  é a matriz das médias.

Vamos considerar que  $Y_j \notin S = [U]$ , para  $j = 1, \dots, n$ . Assim, temos que

$$Z_j^* = Y_j - \bar{Y}_j \neq 0_{\mathbb{R}^m} \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, n.$$

Inicialmente, definimos uma matriz diagonal  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_i, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$  da seguinte forma:

$$d_i = \frac{1}{(Z_i^*)^t Z_i^*} = \frac{1}{(Y_i - \bar{Y}_i)^t (Y_i - \bar{Y}_i)} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n.$$

Desse modo, podemos representar a matriz de correlação da seguinte forma:

$$R = \sqrt{D} Z^t Z \sqrt{D} = \left( Z \sqrt{D} \right)^t \left( Z \sqrt{D} \right).$$

Observamos que os elementos da diagonal principal na matriz de correlação são todos iguais a 1, pois

$$\text{corr}(Y_i, Y_i) = \cos(\theta_{ii}^*) = 1,$$

de acordo com a Definição 8.14.10, e conseqüentemente da interpretação geométrica do coeficiente de correlação.

Como  $\sqrt{D}$  é uma matriz positiva-definida, temos que a matriz de correlação  $R$  é uma matriz positiva-definida se, e somente se,  $\text{posto}(Z) = n$ , para  $n < m$ . No caso em que  $\text{posto}(Z) = r < n$ , com  $n < m$ ,  $R$  é uma matriz semipositiva-definida.

**Exemplo 8.14.10** Considerando as informações do Exemplo 8.14.7, determine a matriz de correlação  $R \in M_3(\mathbb{R})$ , como descrita acima. Verifique se  $R$  é positiva-definida.

**Exemplo 8.14.11** Considere a matriz  $R = [r_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  definida da forma:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ r & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Determine os valores do escalar  $r$  de modo que  $R$  seja uma matriz positiva-definida.

Inicialmente vamos considerar a matriz  $P$  de projeção ortogonal sobre o subespaço  $S = [U]$ , onde  $U \in \mathbb{R}^n$  é o vetor unidade, que é dada por:

$$P = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que  $\lambda_1 = 1$ , com multiplicidades algébrica e geométrica iguais à 1, e  $\lambda_2 = 0$ , com multiplicidades algébrica e geométrica iguais à  $n - 1$ , são os autovalores da matriz  $P$ , veja Exemplo 6.1.13.

Podemos representar a matriz  $R$  da seguinte forma:

$$R = nrP + (1 - r)I_n,$$

onde  $I_n \in M_n(\mathbb{R})$  é a matriz identidade.

Podemos mostrar facilmente que se  $\lambda$  é um autovalor de uma matriz  $A$  com  $v$  o autovetor associado, então  $\alpha\lambda + \beta$  é um autovalor da matriz  $\alpha A + \beta I_n$  com  $v$  o autovetor associado, veja Exercício 6.30. Desse modo, podemos concluir que os autovalores da matriz  $R$  são dados por:

$$\mu_1 = nr + (1 - r) \quad \text{e} \quad \mu_2 = 1 - r.$$

De modo análogo, o autovalor  $\mu_1$  tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais à 1, e o autovalor  $\mu_2$  tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais à  $n - 1$ .

Portanto, impondo a condição que os autovalores de  $R$  devem ser positivos, obtemos

$$\frac{1}{1-n} < r < 1.$$

Assim, como  $R$  é uma matriz simétrica, temos que  $R$  é uma matriz positiva-definida, veja Corolário 6.7.1. Podemos mostrar facilmente que

$$\det(R) = [nr + (1-r)](1-r)^{n-1}.$$

Observe que a matriz  $R$  pode ser considerada uma matriz de correlação onde as variáveis observadas possuem correlações iguais.

**Exemplo 8.14.12** Considere a matriz  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$  definida da forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} d & \text{para } i = j \\ r & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

com  $r \neq d$  e  $d > 0$ . Determine os valores dos escalares  $r$  e  $d$  de modo que  $A$  seja uma matriz positiva-definida e faça uma representação geométrica no plano numérico  $\mathbb{R}^2$ , e mostre que

$$\det(A) = [d + (n-1)r](d-r)^{n-1}.$$

**Exemplo 8.14.13** Com os resultados do Exemplo 8.14.12, determine os autovalores da matriz  $[\mathbf{cov}]_\beta \in M_m(\mathbb{R})$  descrita em (8.201), onde  $\beta$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^m$ , e as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores. Descreva o subespaço associado a cada um dos autovalores da matriz  $[\mathbf{cov}]_\beta$ .

**Exemplo 8.14.14** Considere as variáveis observadas  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^4$  dadas por:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Determine a covariância entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$  utilizando a matriz  $[\mathbf{cov}]_\beta$  descrita em (8.201), onde  $\beta$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^4$ , e calcule também pela Definição 8.14.2.

**Exemplo 8.14.15** Com os resultados do Exemplo 8.14.12, tomando  $d = 1$ ,  $r = \frac{1}{2}$  e  $n = 5$ , calcule  $\det(A)$ .

Sejam  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$  duas variáveis observadas que possuem uma relação linear, isto é,

$$Y_2 = \alpha Y_1 + \beta U$$

para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , onde  $U \in \mathbb{R}^m$  é o vetor unidade. Neste caso, podemos observar que os vetores de resíduos  $Z_1^* = Y_1 - \bar{Y}_1$  e  $Z_2^* = Y_2 - \bar{Y}_2$  também possuem a mesma relação linear.

Portanto, temos que

$$\text{corr}(Y_1, Y_2) = \cos(\theta_{12}^*) = \pm 1,$$

uma vez que o coeficiente de correlação é invariante quando existe uma relação linear entre as variáveis observadas, veja Exercício 8.141.

Reciprocamente, se o coeficiente de correlação entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$  é igual a 1, podemos concluir que existe uma relação linear entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$ ?

**Exemplo 8.14.16** Considere as variáveis observadas  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^4$  dadas por:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad e \quad Y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Verifique que o coeficiente de correlação entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$  é igual a 1. Podemos afirmar que existe uma relação linear entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$ ? Em caso afirmativo, determine essa relação linear, isto é, determine constantes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$Y_2 = \alpha Y_1 + \beta U,$$

através de um problema de regressão linear simples.

Portanto, apresentamos uma interpretação algébrica e uma interpretação geométrica para cada uma das medidas estatísticas de variância, covariância e coeficiente de correlação. Dessa forma, podemos analisar de vários outros aspectos as suas aplicações em problemas de interesse prático.



## Exercícios

**Exercício 8.136** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^m$  munido do produto interno usual. Sejam um vetor  $Y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\bar{y}$  a **média** do vetor  $Y$  e o **vetor unidade**  $U \in \mathbb{R}^m$  dados por:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^m y_j}{m} \quad e \quad U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que a média do vetor  $Y$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|Y\|_2 \cos(\theta),$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $Y$  e  $U$ .

Seja  $Z^* = Y - \bar{Y}$ , onde  $\bar{Y}$  é o **vetor de média** do vetor  $Y$ , mostre que

$$\|Z^*\|_2^2 = \|Y\|_2^2 - \|\bar{Y}\|_2^2 = \|Y\|_2^2 - m(\bar{y})^2.$$

Além disso, podemos verificar facilmente que a média do vetor  $Z^*$ , que denotamos por  $\bar{z}^*$ , é nula, isto é,  $\bar{z}^* = 0$ . Logo, o vetor de média  $\bar{Z}^* = 0_{\mathbb{R}^m}$ . Explique esse resultado.

**Exercício 8.137** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^4$  com o produto interno usual. Sejam  $S$  o subespaço gerado pelo conjunto  $\beta = \{q_1, q_2\}$  e o vetor  $Y \in \mathbb{R}^4$  dados por:

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontre o elemento  $\hat{Y}$  que é a melhor aproximação do elemento  $Y$  em  $S$ .
- (b) Faça uma análise da qualidade dessa aproximação utilizando o **Coefficiente de Determinação do Modelo**, isto é,

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} = \frac{\|\hat{Y} - \bar{Y}\|_2^2}{\|Y - \bar{Y}\|_2^2},$$

onde  $\bar{Y}$  é o vetor de média do vetor  $Y$ .

- (c) Determine uma base ortogonal para o subespaço  $S^\perp$ , que é o complemento ortogonal do subespaço  $S$  em  $\mathbb{R}^4$  com relação ao produto interno usual.

**Exercício 8.138** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , onde a primeira coluna da matriz  $A$  é o vetor unidade  $U$  que é dado por:

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$Y \in \mathbb{R}^m$ , vetor de observações, e  $\hat{Y} \in \mathbb{R}^m$  a projeção ortogonal do vetor de observações  $Y$  sobre o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , vetor de estimativas. Mostre que a média do vetor de resíduos  $Z = Y - \hat{Y}$  é igual a zero.

**Exercício 8.139** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^m$  munido do produto interno usual, e com a norma Euclidiana  $\|\cdot\|_2$  proveniente do produto interno. Mostre que a distância Euclidiana é invariante por translação, isto é, para todos  $X, Y \in \mathbb{R}^m$  tem-se que

$$d_2(X, Y) = \|X - Y\|_2 = d_2(X', Y') = \|X' - Y'\|_2,$$

com

$$X' = X - T \quad \text{e} \quad Y' = Y - T,$$

onde  $T \in \mathbb{R}^m$  é o elemento que realiza a translação.

**Exercício 8.140** Seja  $Y \in \mathbb{R}^m$  um variável observadas. Mostre que

(a) A variância não é invariante com relação à multiplicação por um escalar, isto é,

$$\text{var}(Y) \neq \text{var}(kY)$$

(b) A variância é invariante com relação à adição por um elemento constante, isto é,

$$\text{var}(Y) = \text{var}(Y + kU)$$

para todo  $k \in \mathbb{R}$ , onde  $U \in \mathbb{R}^m$  é o vetor unidade.

**Exercício 8.141** Sejam  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^m$  variáveis observadas. Mostre que o coeficiente de correlação entre as variáveis  $Y_1$  e  $Y_2$  é invariante quando existe uma relação linear em cada uma das variáveis, isto é,

$$\text{corr}(Y_1, Y_2) = \text{corr}((\alpha_1 Y_1 + \beta_1 U), (\alpha_2 Y_2 + \beta_2 U))$$

para todos  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ , onde  $U \in \mathbb{R}^m$  é o vetor unidade.

**Exercício 8.142** Considere as variáveis observadas  $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathbb{R}^3$  dadas por:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz de covariância  $C = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  definida por:

$$c_{ij} = \mathbf{cov}(Y_i, Y_j)$$

para  $i, j = 1, 2, 3$ .

**Exercício 8.143** Sejam  $Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$  variáveis observadas, e a matriz de covariância  $C = [c_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  definida por:

$$c_{ij} = \mathbf{cov}(Y_i, Y_j) \quad \text{para} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Faça uma análise de forma detalhada para cada situação em que a matriz de covariância  $C$  é semipositiva-definida.

**Exercício 8.144** Sejam  $Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$  variáveis observadas, e tome as seguintes combinações lineares

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i Y_i \quad e \quad Z = \sum_{j=1}^n b_j Y_j.$$

Mostre que a covariância entre  $Y$  e  $Z$  é representada da seguinte forma:

$$\mathbf{cov}(Y, Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \mathbf{cov}(Y_i, Y_j) = (X_1)^t C X_2,$$

onde  $C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é a matriz de covariância, veja Definição 8.14.9, e os elementos  $X_1, X_2 \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$  são dados por:

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

**Exercício 8.145** Sejam  $Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$ . Mostre que a equação

$$c_1 Y_1 + \dots + c_j Y_j + \dots + c_n Y_n = 0_{\mathbb{R}^m}$$

é invariante por translação se, e somente se,

$$c_1 + \dots + c_j + \dots + c_n = 0,$$

isto é,

$$c_1 Y'_1 + \dots + c_j Y'_j + \dots + c_n Y'_n = 0_{\mathbb{R}^m},$$

onde  $Y'_j = Y_j - X$  para  $j = 1, \dots, n$ , para qualquer elemento  $X \in \mathbb{R}^m$  que realiza a translação.

**Exercício 8.146** O **centróide** do conjunto de variáveis observadas  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$ , que indicamos por  $\bar{Y}$ , é definido da seguinte forma:

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_j + \dots + Y_n}{n}.$$

Desse modo, temos que

$$n\bar{Y} - Y_1 - \dots - Y_j - \dots - Y_n = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Como uma aplicação do Exercício 8.145, mostre que o centróide do conjunto de variáveis transladadas  $Y'_j = Y_j - X$  para  $j = 1, \dots, n$ , que indicamos por  $\bar{Y}'$ , é dado por:

$$\bar{Y}' = \bar{Y} - X,$$

para qualquer elemento  $X \in \mathbb{R}^m$  que realiza a translação.

**Exercício 8.147** Faça uma verificação do Exercício 8.146, para o seguinte conjunto de variáveis observadas  $Y_1, \dots, Y_4 \in \mathbb{R}^3$  dado por:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

e  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  o elemento que realiza a translação.

**Exercício 8.148** Considere um experimento conduzido com a finalidade de analisar a variação do **calor específico** do etileno glicol<sup>2</sup> ( $C_2H_4(OH)_2$ ), indicamos essa variável por  $Y$ , em função da temperatura, que indicamos por  $T$ , e da densidade, que indicamos por  $D$ . Os resultados do experimento estão na Tabela 8.2.

Tabela 8.3: Propriedades Termofísicas do etileno glicol

Temperatura [K] $T$	Densidade $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ $D$	Calor Específico $\left[\frac{kJ}{kg K}\right]$ $Y$
280.0	1125.8	2.323
290.0	1118.8	2.368
300.0	1114.4	2.415
310.0	1103.7	2.460
320.0	1096.2	2.505
330.0	1089.5	2.549
340.0	1083.8	2.592
350.0	1079.0	2.637
360.0	1074.0	2.682
370.0	1066.7	2.728

Estudar a relação da variável resposta  $Y$ , que representa o calor específico do etileno glicol, em função da variável regressora  $T$ , que é a temperatura, e da variável regressora  $D$ , que é a densidade, através do seguinte **Modelo de Regressão Linear Múltipla**

$$Y(T, D) = \beta_1 + \beta_2 T + \beta_3 D + \beta_4 TD.$$

Apresentar uma análise do modelo proposto, verificando a qualidade do ajuste dos dados observados, através do **Coefficiente de Determinação do Modelo**, da **Soma de Quadrados dos Resíduos** e do **gráfico de dispersão**. O que podemos concluir?

Considere as variáveis observadas  $T$ ,  $D$ ,  $Y$ , dadas na Tabela 8.3, e determine a matriz de correlação. O que podemos concluir?

<sup>2</sup>F. P. Incropera e D. P. DeWitt, *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*, LTC, 1998.

## 8.15 Solução de norma-2 Mínima

Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m < n$  e  $\text{posto}(A) = m$ , e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Considere o conjunto solução do **Sistema Linear Subdeterminado**  $Ax = b$  definido por:

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \}.$$

Definimos a solução de norma-2 mínima para o sistema linear  $Ax = b$ , como sendo o elemento  $x^* \in S$  tal que

$$\|x^*\|_2 \leq \|x\|_2 \quad \text{para todo} \quad x \in S.$$

Vamos determinar a solução de norma-2 mínima  $x^*$  através da fatoração  $A^t = QR$ , onde  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  e  $R \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ , descritas da seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} \hat{Q} & \tilde{Q} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix},$$

onde  $\hat{Q} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  e  $\tilde{Q} \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$  são matrizes ortogonais,  $\hat{R} \in M_m(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior e  $0_{p \times m} \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$  é a matriz nula, com  $p = n - m$ .

Substituindo a fatoração  $A = R^t Q^t$  no sistema linear  $Ax = b$ , obtemos

$$R^t Q^t x = b.$$

Chamando  $z = Q^t x$ , temos o seguinte sistema linear triangular inferior

$$R^t z = b \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{R}^t y + 0^t w = b,$$

onde  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $w \in \mathbb{R}^p$ , que são as variáveis livres do sistema linear  $R^t z = b$ .

Note que o elemento  $z \in \mathbb{R}^n$  foi particionado da seguinte forma:

$$z = \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}.$$

Como  $\|x\|_2 = \|z\|_2$ , podemos observar facilmente que para encontrar uma solução de norma-2 mínima para o sistema linear  $Ax = b$ , basta encontrar uma solução de norma-2 mínima para o sistema linear  $R^t z = b$ .

Como estamos interessado em determinar uma solução de norma-2 mínima para o sistema linear  $R^t z = b$ , vamos tomar  $w^* = 0_{\mathbb{R}^p}$ .

Desse modo, ficamos com o seguinte sistema triangular inferior

$$\widehat{R}^t y = b,$$

que possui uma única solução  $y^*$ , desde que  $\widehat{R}$  é invertível, pois  $\text{posto}(A^t) = m$ .

Assim, a solução de norma-2 mínima  $z^*$  para o sistema linear  $R^t z = b$  é dada por:

$$z^* = \begin{bmatrix} y^* \\ w^* \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução de norma-2 mínima  $x^*$  para o sistema linear  $Ax = b$  é obtida da seguinte forma:

$$x^* = Qz^* = \begin{bmatrix} \widehat{Q} & \widetilde{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^* \\ w^* \end{bmatrix} \iff x^* = \widehat{Q}y^*.$$

Finalmente, temos que a caracterização da solução de norma-2 mínima para o sistema linear  $Ax = b$  é representada da seguinte forma:

$$x^* = \widehat{Q}\widehat{R}^{-t}b,$$

pois  $y^* = \widehat{R}^{-t}b$ .

Desse modo, tomando a fatoração  $A^t = \widehat{Q}\widehat{R}$ , temos que a matriz  $A^\dagger = \widehat{Q}\widehat{R}^{-t}$  é a **inversa a direita**, ou **pseudo-inversa**, da matriz  $A$ .

Podemos observar facilmente que a solução de norma-2 mínima  $x^* \in S$  é o elemento que está mais próximo do elemento neutro  $0_{\mathbb{R}^n}$ . Assim, temos uma interpretação geométrica para a solução de norma-2 mínima.

Note que o conjunto solução  $S$  pode ser representado da seguinte forma:

$$S = \mathcal{N}(A) + x_p,$$

onde  $x_p$  é uma solução particular para o sistema linear  $Ax = b$ . Desse modo, dizemos que  $S$  é uma **variedade linear**, isto é, um subespaço vetorial transladado.

### ***Problema de Minimização com Restrição***

Uma outra maneira para encontrar a solução de norma-2 mínima para o sistema linear subdeterminado

$$Ax = b$$

é através do seguinte **Problema de Programação Quadrática**

$$\begin{cases} \min \{ \langle x, x \rangle \} \\ \text{sujeito a} \quad Ax - b = 0_{\mathbb{R}^m} \end{cases}$$

Utilizando o **Método dos Multiplicadores de Lagrange**, associamos ao *Problema de Programação Quadrática com Restrição* um *Problema de Otimização Global*, considerando a função de Lagrange

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle + \langle Ax - b, \lambda \rangle,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Sendo assim, temos que determinar os pontos críticos da função de Lagrange, isto é, encontrar  $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que

$$\nabla F(x^*, \lambda^*) = \begin{cases} \nabla_x F(x^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \nabla_\lambda F(x^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^m} \end{cases}$$

Inicialmente, precisamos encontrar  $\nabla_x F(x, \lambda)$ . Para isso, calculamos a *primeira variação* da função de Lagrange  $F$  com relação à variável  $x$ , que é definida da forma:

$$F'_x(x, \lambda)(v) = \left\{ \frac{d}{dt} F(x + tv, \lambda) \right\}_{t=0}$$

para  $v \in \mathbb{R}^n$ . Assim, temos que

$$F'_x(x, \lambda)(v) = \langle x + A^t \lambda, v \rangle \quad \text{para todo} \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

mostrando que

$$\nabla_x F(x, \lambda) = x + A^t \lambda.$$



De modo análogo, vamos encontrar  $\nabla_\lambda F(x, \lambda)$ . Para isso, precisamos calcular a *primeira variação* da função de Lagrange  $F$  com relação à variável  $\lambda$ , que é definida da forma:

$$F'_\lambda(x, \lambda)(w) = \left\{ \frac{d}{dt} F(x, \lambda + tw) \right\}_{t=0}$$

para  $w \in \mathbb{R}^m$ . Assim, temos que

$$F'_\lambda(x, \lambda)(w) = \langle Ax - b, w \rangle \quad \text{para todo } w \in \mathbb{R}^m,$$

mostrando que

$$\nabla_\lambda F(x, \lambda) = Ax - b.$$

Portanto, temos que  $\nabla F(x, \lambda)$  é um vetor coluna, de ordem  $(n + m) \times 1$ , dado por:

$$\nabla F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_x F(x, \lambda) \\ \nabla_\lambda F(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + A^t \lambda \\ Ax - b \end{bmatrix},$$

que utilizamos para calcular os pontos críticos da função de Lagrange.

Desse modo, obtemos o seguinte

**Problema de Ponto Sela:** encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} x + A^t \lambda = 0_{\mathbb{R}^n} \\ Ax = b \end{cases}$$

que na forma matricial é representado por:

$$\begin{bmatrix} I_n & A^t \\ A & 0_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ b \end{bmatrix},$$

onde  $I_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é a matriz identidade e  $0_m \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  é a matriz nula.

É importante observar que estamos considerando um *sistema linear indefinido* como sendo aquele que possui uma **matriz indefinida**, isto é, a matriz do sistema linear é simétrica e possui autovalores de ambos os sinais.

Neste caso, a matriz do Problema de Ponto Sela que é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} I_n & A^t \\ A & 0_m \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica invertível, de ordem  $(n+m)$ , que possui  $n$  autovalores positivos e  $m$  autovalores negativos, de acordo com os resultados do Exemplo 6.7.7.

Sendo assim, podemos mostrar que a solução  $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  do Problema de Ponto Sela é um **ponto sela** para a função de Lagrange, isto é, tem-se

$$F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*),$$

para quaisquer  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ . De modo equivalente, temos que

$$F(x^*, \lambda^*) = \min_x \max_{\lambda} \{ F(x, \lambda) \}.$$

Finalmente, do sistema linear indefinido, obtemos

$$\lambda^* = -(AA^t)^{-1}b \quad \text{e} \quad x^* = -A^t\lambda^* = A^t(AA^t)^{-1}b,$$

onde  $x^*$  é a solução de norma-2 mínima para o sistema linear  $Ax = b$ .

Como  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m < n$  e  $\text{posto}(A) = m$ , sabemos que a matriz  $AA^t$  é positiva-definida. Logo, o vetor dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$  é a única solução do sistema linear positivo-definido  $AA^t\lambda = -b$ , que pode ser obtida pela Fatoração de Cholesky, descrita na seção 8.5.

**Definição 8.15.1** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m < n$  e  $\text{posto}(A) = m$ . A matriz*

$$A^\dagger = A^t(AA^t)^{-1}$$

*é a **inversa a direita**, ou **pseudo-inversa**, da matriz  $A$ , que satisfaz as seguintes propriedades:*

1.  $(AA^\dagger)^t = AA^\dagger$ .
2.  $(A^\dagger A)^t = A^\dagger A$ .
3.  $AA^\dagger A = A$ .
4.  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ .

*A pseudo-inversa é denominada **inversa generalizada de Moore-Penrose**.*

Finalmente, para fazer a classificação do ponto crítico  $(x^*, \lambda^*)$ , temos que calcular a segunda variação da função de Lagrange com relação às variáveis  $x$  e  $\lambda$ . Assim, obtemos a **matriz Hessiana**

$$H(x, \lambda) = \begin{bmatrix} I_n & A^t \\ A & 0_m \end{bmatrix},$$

onde

$$F''_{xx}(x, \lambda; v)(u) = \left\{ \frac{d}{dt} F'_x(x + tu, \lambda)(v) \right\}_{t=0} = \langle I_n u, v \rangle$$

$$F''_{\lambda x}(x, \lambda; v)(u) = \left\{ \frac{d}{dt} F'_x(x, \lambda + tu)(v) \right\}_{t=0} = \langle A^t u, v \rangle$$

para  $v, u \in \mathbb{R}^n$ , e

$$F''_{x\lambda}(x, \lambda; w)(z) = \left\{ \frac{d}{dt} F'_\lambda(x + tz, \lambda)(w) \right\}_{t=0} = \langle Az, w \rangle$$

$$F''_{\lambda\lambda}(x, \lambda; w)(z) = \left\{ \frac{d}{dt} F'_\lambda(x, \lambda + tz)(w) \right\}_{t=0} = \langle 0_m z, w \rangle$$

para  $w, z \in \mathbb{R}^m$ .

Como a matriz Hessiana da função de Lagrange  $F$  é uma matriz indefinida, temos que o ponto crítico  $(x^*, \lambda^*)$  é um ponto de sela.

Podemos também determinar a matriz Hessiana da função de Lagrange  $F$  de uma outra maneira. Para isso, vamos representar  $\nabla F(X)$ , que é um vetor coluna de ordem  $(n + m) \times 1$ , da seguinte forma:

$$\nabla F(X) = \begin{bmatrix} x + A^t \lambda \\ Ax - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & A^t \\ A & 0_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ b \end{bmatrix} = HX - B,$$

onde os elementos  $X, B \in \mathbb{R}^{n+m}$  são dados por:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ b \end{bmatrix}.$$

Desse modo, a primeira variação da função de Lagrange  $F$  no ponto  $X$  na direção do vetor  $Y \in \mathbb{R}^{n+m}$ , pode ser escrita da seguinte forma:

$$F'(X)(Y) = \langle HX - B, Y \rangle.$$

Portanto, a segunda variação da função de Lagrange  $F$  no ponto  $X$  na direção do vetor  $Z \in \mathbb{R}^{n+m}$ , é definida da seguinte forma:

$$F''(X; Y)(Z) = \left\{ \frac{d}{dt} F'(X + tZ, \lambda)(Y) \right\}_{t=0} = \langle HZ, Y \rangle.$$

Assim, mostramos que a matriz  $H$  é a matriz Hessiana da função de Lagrange.

Vamos indicar por  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  os autovalores positivos da matriz  $H$ , com  $v_1, \dots, v_n$  os autovetores associados, e indicamos por  $\beta_1, \dots, \beta_m$  os autovalores negativos da matriz  $H$ , com  $w_1, \dots, w_m$  os autovetores associados.

Como  $H$  é uma matriz simétrica, sabemos que

$$\Gamma = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$$

é uma base ortonormal para o espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Desse modo, todo elemento  $Y \in \mathbb{R}^{n+m}$  pode ser escrito de modo único como:

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=1}^m b_i w_i.$$

Portanto, temos que

$$Y^t H Y = \langle H Y, Y \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \alpha_i + \sum_{i=1}^m b_i^2 \beta_i \quad \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

dependendo do elemento  $Y$  escolhido, pois o primeiro somatório é positivo e o segundo somatório é negativo. Assim, mostramos que  $H$  é uma matriz indefinida.

**Exemplo 8.15.1** Considere a matriz  $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  e o vetor  $b \in \mathbb{R}^2$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre a solução de norma-2 mínima do sistema linear  $Ax = b$ .

Considerando o seguinte

**Problema de Ponto Sela:** encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^4$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^2$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} x + A^t \lambda = 0_{\mathbb{R}^4} \\ Ax = b \end{cases}$$

temos que  $x^*$  é a solução de norma-2 mínima.

Obtendo explicitamente a solução do sistema linear indefinido, através de equações não acopladas, sabemos que  $\lambda^*$  é a única solução do sistema linear positivo-definido

$$AA^t \lambda = -b,$$

desde que  $\text{posto}(A) = 2$  e  $AA^t$  é uma matriz positiva-definida. Para isso, tomamos a fatoração de Cholesky da matriz  $AA^t$ , cujo fator de Cholesky é dado por:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e resolvendo os sistemas triangulares

$$\begin{cases} G^t z = -b \\ G \lambda = z^* \end{cases}$$

temos que o vetor dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$  é dado por:

$$\lambda^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução de norma-2 mínima é determinada da forma:

$$x^* = -A^t \lambda^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## ***Exercícios***

**Exercício 8.149** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m < n$  e  $\text{posto}(A) = m$ , e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Considere o conjunto solução do sistema linear  $Ax = b$  definido por:*

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \}.$$

*Definimos a solução de norma-2 mínima do sistema  $Ax = b$ , como sendo o elemento  $x^* \in S$  tal que*

$$\|x^*\|_2 \leq \|x\|_2 \quad \text{para todo} \quad x \in S.$$

*(a) Mostre que  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é dado por  $x^* = A^t(AA^t)^{-1}b$ , utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, considerando a função de Lagrange*

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle + \langle Ax - b, \lambda \rangle,$$

*onde  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.*

*(b) Mostre que a matriz  $A^\dagger = A^t(AA^t)^{-1}$  é a pseudo-inversa da matriz  $A$ , isto é, mostre que  $A^\dagger$  satisfaz as propriedades de Moore-Penrose.*

**Exercício 8.150** *Encontre a solução de norma-2 mínima do sistema linear*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

*utilizando o procedimento **qrndmin** disponível na página da disciplina no link Matlab. Compare o resultado obtido com a solução de uma calculadora científica e também com o resultado obtido pelo Matlab utilizando o procedimento **mldivide**, que tem a seguinte sintaxe*

**>> Xstar = mldivide(A,b)**

*O que podemos dizer a respeito do método utilizado em cada um dos casos?*

**Exercício 8.151** *Determine a solução de norma-2 mínima para  $Ax = b$ , onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

*Dê uma interpretação geométrica.*

**Exercício 8.152** Considere o sistema linear apresentado no Exercício 8.150. Determine a solução de norma-2 mínima utilizando a solução geral na sua forma paramétrica.

**Exercício 8.153** Considere a matriz  $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  e o vetor  $b \in \mathbb{R}^2$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando a fatoração  $A^t = QR$ , com  $Q \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$  e  $R \in M_2(\mathbb{R})$ , encontre a solução de norma-2 mínima do sistema linear  $Ax = b$ . Determine a pseudo-inversa da matriz  $A$ , fazendo uso da fatoração  $A^t = QR$ .

**Exercício 8.154** Encontre a solução de norma-2 mínima do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

através do Problema de Ponto Sela.

**Exercício 8.155** Seja a matriz  $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^3$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encontre a solução de norma-2 mínima do sistema linear  $Ax = b$  através do Problema de Ponto Sela.

**Exercício 8.156** Seja a matriz  $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^2$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determine a solução de norma-2 mínima do sistema linear  $Ax = b$ .

**Exercício 8.157** Seja a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^3$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre a solução de norma-2 mínima do sistema linear  $Ax = b$  fazendo uso do procedimento `qr` do Matlab. Determine a pseudo-inversa  $A^\dagger$  da matriz  $A$ .

**Exercício 8.158** Seja a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^3$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

(a) Faça um procedimento em Matlab para encontrar a solução de norma-2 mínima do sistema linear subdeterminado  $Ax = b$ , considerando a fatoração

$$A^t = QR,$$

com  $Q \in M_{5 \times 3}(\mathbb{R})$  e  $R \in M_3(\mathbb{R})$ .

(b) Faça um procedimento em Matlab para encontrar a solução de norma-2 mínima do sistema linear subdeterminado  $Ax = b$ , através do Problema de Ponto Sela.

(c) Verifique que a matriz do Problema de Ponto Sela, que é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} I_n & A^t \\ A & 0_m \end{bmatrix},$$

é uma matriz simétrica, de ordem  $(n + m)$ , que possui  $n$  autovalores positivos e  $m$  autovalores negativos, com  $m = 3$  e  $n = 5$ . Utilize o procedimento `eig` do Matlab para calcular os autovalores da matriz  $H$ . Construa a matriz  $H$  da seguinte forma:

```
>> H = [ eye(5)  A' ; A  zeros(3) ];
```

**Exercício 8.159** Encontre a solução de norma-2 mínima do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

através do Problema de Ponto Sela.



## 8.16 Problemas de Ponto Sela

Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  positiva-definida,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m < n$  e  $\text{posto}(B) = m$ , e o funcional  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definido por:

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle.$$

Considere o seguinte **Problema de Programação Quadrática**

$$\begin{cases} \min \{ J(x) \} \\ \text{sujeito a} & Bx = d \end{cases}$$

Utilizando o **Método dos Multiplicadores de Lagrange**, associamos ao *Problema de Programação Quadrática com Restrição* um *Problema de Otimização Global*, considerando a função de Lagrange

$$F(x, \lambda) = J(x) + \langle Bx - d, \lambda \rangle,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Sendo assim, temos que determinar os pontos críticos da função de Lagrange, isto é, encontrar  $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que

$$\nabla F(x^*, \lambda^*) = \begin{cases} \nabla_x F(x^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \nabla_\lambda F(x^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^m} \end{cases}$$

Calculando a *primeira variação* da função de Lagrange  $F$  com relação à variável  $x$ , obtemos

$$\nabla_x F(x, \lambda) = Ax + B^t \lambda - b,$$

e calculando a *primeira variação* da função de Lagrange  $F$  com relação à variável  $\lambda$ , obtemos

$$\nabla_\lambda F(x, \lambda) = Bx - d.$$

Desse modo, temos o seguinte

**Problema de Ponto Sela:** Encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} Ax + B^t \lambda = b \\ Bx = d \end{cases} \quad (8.202)$$

que na forma matricial é representado por:

$$\begin{bmatrix} A & B^t \\ B & 0_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix},$$

onde  $0_m$  é a matriz nula de ordem  $m \times m$ .

Por simplicidade, vamos indicar o sistema linear indefinido por  $HX = Y$ , onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H = \begin{bmatrix} A & B^t \\ B & 0_m \end{bmatrix}.$$

Nesta caso, a matriz do Problema de Ponto Sela  $H$  é uma matriz simétrica invertível, de ordem  $n + m$ , com  $n$  autovalores positivos e  $m$  autovalores negativos, isto é,  $H$  é uma matriz indefinida, de acordo com os resultados do Exemplo 6.7.8.

Finalmente, calculando a segunda variação da função de Lagrange  $F$  com relação às variáveis  $x$  e  $\lambda$ , obtemos a matriz Hessiana de  $F$ , que é a matriz  $H$ . Assim, o ponto crítico  $(x^*, \lambda^*)$  é um ponto de sela para a função de Lagrange.

### ***Solução de Quadrados Mínimos. Problema Primal–dual***

Sejam  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Queremos determinar a solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$ . Para isso, definimos o funcional  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$J(x) = \langle Ax - b, Ax - b \rangle \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.203)$$

Desse modo, temos o seguinte

**Problema Primal:** encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$J(x^*) = \min \{ J(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n \}, \quad (8.204)$$

que é equivalente ao **Sistema Normal**

$$A^t Ax = A^t b. \quad (8.205)$$

Assim, a solução de quadrados mínimos  $x^* \in \mathbb{R}^n$  é a única solução do sistema normal, isto é,

$$A^t Ax^* = A^t b \iff A^t(b - Ax^*) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

que podemos concluir que o elemento  $w^* = b - Ax^* \in \mathcal{N}(A^t) = \mathcal{R}(A)^\perp$ . Logo,  $w^*$  é a melhor aproximação do elemento  $b \in \mathbb{R}^m$  no subespaço  $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{R}(A)^\perp$ .

Portanto, queremos determinar o elemento  $w^* \in \mathcal{N}(A^t)$  que está mais próximo do elemento  $b \in \mathbb{R}^m$  com relação à norma Euclidiana. Sendo assim, temos o seguinte

**Problema Dual**

$$\begin{cases} \min \{ \|w - b\|_2 \} \\ \text{sujeito a} \quad A^t w = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

Utilizando o **Método dos Multiplicadores de Lagrange**, associamos ao *Problema de Programação Quadrática com Restrição* um *Problema de Otimização Global*, considerando a função de Lagrange

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{2} \langle w - b, w - b \rangle + \langle A^t w, \lambda \rangle,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Assim, temos que determinar os pontos críticos da função de Lagrange  $F$ , isto é, encontrar  $(w^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  tal que

$$\nabla F(w^*, \lambda^*) = \begin{cases} \nabla_w F(w^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^m} \\ \nabla_\lambda F(w^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

Calculando a *primeira variação* da função de Lagrange  $F$  com relação à variável  $w$ , obtemos

$$\nabla_w F(w, \lambda) = w + A\lambda - b,$$

e calculando a *primeira variação* da função de Lagrange  $F$  com relação à variável  $\lambda$ , obtemos

$$\nabla_\lambda F(w, \lambda) = A^t w.$$

Desse modo, temos o seguinte

**Problema de Ponto Sela:** encontrar  $w^* \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} w + A\lambda = b \\ A^t w = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases} \quad (8.206)$$

que na forma matricial é representado por:

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ A^t & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0_{\mathbb{R}^n} \end{bmatrix},$$

onde  $I_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  é a matriz identidade e  $0_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  é a matriz nula.

Finalmente, resolvendo o sistema linear indefinido (8.206), obtemos

$$\lambda^* = (A^t A)^{-1} A^t b \quad \text{e} \quad w^* = b - A(A^t A)^{-1} A^t b.$$

Podemos observar que  $\lambda^* = (A^t A)^{-1} A^t b = x^*$  é a solução de quadrados mínimos do sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$ , isto é,  $\lambda^* = x^*$  é a solução do *Problema Primal*.

**Exemplo 8.16.1** Considere a matriz  $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  e o vetor  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre a projeção ortogonal do elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  no subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$  e a solução de quadrados mínimos do sistema  $Ax = b$ , através do Problema de Ponto Sela.

Neste exemplo, temos o seguinte

**Problema de Ponto Sela:** encontrar  $w^* \in \mathbb{R}^4$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^3$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} w + A\lambda = b \\ A^t w = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \quad (8.207)$$

que na forma matricial é representado por:

$$\begin{bmatrix} I_4 & A \\ A^t & 0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix},$$

onde  $I_4 \in M_4(\mathbb{R})$  é a matriz identidade e  $0_3 \in M_3(\mathbb{R})$  é a matriz nula.

O elemento  $w^* = b - A\lambda^*$  é a projeção ortogonal do elemento  $b \in \mathbb{R}^4$  no subespaço  $\mathcal{N}(A^t) = \mathcal{R}(A)^\perp$ , e  $\lambda^* = x^*$  é a solução de quadrados mínimos para o sistema  $Ax = b$ .

Por simplicidade, vamos indicar o sistema linear indefinido por  $HX = Y$ , onde os elementos  $X, Y \in \mathbb{R}^7$  são dados por:

$$X = \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} \quad e \quad Y = \begin{bmatrix} b \\ 0_{\mathbb{R}^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e a matriz  $H \in M_7(\mathbb{R})$  é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} I_4 & A \\ A^t & 0_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, podemos obter uma solução numérica do sistema linear indefinido através da fatoração  $H = QR$ , onde  $Q \in M_7(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $R \in M_7(\mathbb{R})$  é uma matriz triangular superior, da seguinte forma:

$$HX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad QRX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad RX = Q^t Y.$$

Desse modo, temos que resolver o sistema linear triangular superior  $RX = Q^t Y$ , pelo processo de substituição atrasada, descrito no Algoritmo 2.9.2. A fatoração  $H = QR$  pode ser obtida pelo Método de Gram–Schmidt Modificado, descrito no Algoritmo 8.13.2.

Fazendo uso dos procedimentos acima mencionados, obtemos a solução do sistema linear indefinido que é dada por:

$$X^* = \begin{bmatrix} w^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Desse modo, temos que a projeção ortogonal do elemento  $b$  sobre o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ , e a solução de quadrados mínimos para o sistema linear  $Ax = b$ , são dados por:

$$w^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda^* = x^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

## Quadrados Mínimos com Restrição

Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ , com  $p < n$  e  $\text{posto}(B) = p$ , e  $d \in \mathbb{R}^p$ . Considere o problema:

**Encontrar uma solução de Quadrados Mínimos para o Sistema Linear Sobre-determinado  $Ax = b$  com a restrição  $Bx = d$ .**

Considere o funcional  $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  definido da seguinte forma:

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax - b, Ax - b \rangle = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2.$$

Representamos nosso problema com o **Problema de Programação Quadrática**

$$\begin{cases} \min \{ J(x) \} \\ \text{sujeito a} \quad Bx = d \end{cases}$$

Utilizando o **Método dos Multiplicadores de Lagrange**, associamos ao *Problema de Programação Quadrática com Restrição* um *Problema de Otimização Global*, considerando a função de Lagrange

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{2} \langle Ax - b, Ax - b \rangle + \langle Bx - d, \lambda \rangle,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Sendo assim, temos que determinar os pontos críticos da função de Lagrange, isto é, encontrar  $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  tal que

$$\nabla F(x^*, \lambda^*) = \begin{cases} \nabla_x F(x^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \nabla_\lambda F(x^*, \lambda^*) = 0_{\mathbb{R}^p} \end{cases}$$

Calculando a *primeira variação* da função de Lagrange  $F$  com relação à variável  $x$ , obtemos

$$\nabla_x F(x, \lambda) = A^t Ax + B^t \lambda - A^t b,$$

e calculando a *primeira variação* da função de Lagrange  $F$  com relação à variável  $\lambda$ , obtemos

$$\nabla_\lambda F(x, \lambda) = Bx - d.$$

Desse modo, temos o seguinte

**Problema de Ponto Sela:** Encontrar  $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} A^t A x + B^t \lambda = A^t b \\ B x = d \end{cases} \quad (8.208)$$

que na forma matricial é representado por:

$$\begin{bmatrix} A^t A & B^t \\ B & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^t b \\ d \end{bmatrix},$$

onde  $0_p$  é a matriz nula de ordem  $p \times p$ . Como  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , sabemos que  $A^t A$  é uma matriz positiva-definida.

Por simplicidade, vamos indicar o sistema linear indefinido por  $HX = Y$ , onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A^t b \\ d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H = \begin{bmatrix} A^t A & B^t \\ B & 0_p \end{bmatrix}.$$

Nesta caso, a matriz do Problema de Ponto Sela  $H$  é uma matriz simétrica invertível, de ordem  $n + m$ , com  $n$  autovalores positivos e  $m$  autovalores negativos, isto é,  $H$  é uma matriz indefinida, de acordo com os resultados do Exemplo 6.7.8.

Finalmente, calculando a segunda variação da função de Lagrange  $F$  com relação às variáveis  $x$  e  $\lambda$ , obtemos a matriz Hessiana de  $F$ , que é a matriz  $H$ . Assim, o ponto crítico  $(x^*, \lambda^*)$  é um ponto de sela para a função de Lagrange.



**Exemplo 8.16.2** Considere a matriz  $A \in \mathbb{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  e o vetor  $b \in \mathbb{R}^4$  dados por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar a solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$  com a restrição  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , isto é,  $Bx = d$ , onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad e \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Por simplicidade, vamos indicar o sistema linear indefinido por  $HX = Y$ , onde os elementos  $X, Y \in \mathbb{R}^4$  são dados por:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} \quad e \quad Y = \begin{bmatrix} A^t b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e a matriz  $H \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$  é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} A^t A & B^t \\ B & 0_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como  $\text{posto}(A) = 3$ , temos que  $A^t A$  é uma matriz positiva-definida. Assim, sabemos que  $H$  é uma matriz indefinida.

Utilizando a fatoração  $H = QR$ , que pode ser obtida pelo Método de Gram-Schmidt Modificado, obtemos a solução do sistema linear indefinido, e por consequência a solução de quadrados mínimos com restrição, dadas por:

$$X^* = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad x^* = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Note que o multiplicador de Lagrange  $\lambda^* = \frac{1}{3}$ .

### ***Método de Uzawa***

Considere o **Problema de Ponto Sela**: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} Ax + B^t \lambda = b \\ Bx = d \end{cases}$$

onde  $A \in M_n(\mathbb{R})$  positiva-definida,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^m$  e  $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m < n$  e  $\text{posto}(B) = m$ .

O **Método de Uzawa com Direções de Gradientes**<sup>3</sup> é largamente utilizado para obter uma solução numérica para o Problema de Ponto Sela, que descrevemos a seguir.

Sejam  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$  e  $Ax_1 = b - B^t \lambda_0$

$$q_k = d - Bx_k$$

$$p_k = B^t q_k$$

$$Ah_k = p_k$$

$$\alpha_k = \frac{\langle q_k, q_k \rangle}{\langle p_k, h_k \rangle}$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} - \alpha_k q_k$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k$$

para  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Devemos obter uma solução numérica para o sistema linear positivo-definido

$$Ah_k = p_k,$$

de maneira eficiente, o que pode ser feito através do Método dos Gradientes Conjugados, nos casos em que a matriz  $A$  é esparsa e de grande porte, ou pelo Método de Cholesky, caso contrário. Note que na aproximação inicial temos, também, de obter uma solução numérica para o sistema linear positivo-definido  $Ax_1 = b - B^t \lambda_0$ .

---

<sup>3</sup>Dietrich Braess, *Finite Elements*, Cambridge University Press, 1997.

**Exemplo 8.16.3** *Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve conter de 950 unidades de vitamina A, 725 unidades de vitamina B, 625 unidades de vitamina C, 700 unidades de vitamina D e 850 unidades de vitamina E.*

*Com o objetivo de analisar como deve ser uma refeição equilibrada, foram estudados três alimentos. Fixada a mesma quantidade de 1.0 grama de cada alimento, determinou-se que :*

- (i) O alimento I contém 1 unidade de vitamina A, 1 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E, e custa R\$ 15,00 por quilograma.*
- (ii) O alimento II contém 2 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidades de vitamina E, e custa R\$ 20,00 por quilograma.*
- (iii) O alimento III contém 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B, 3 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 2 unidades de vitamina E, e custa R\$ 10,00 por quilograma.*

*Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II e III devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja a mais equilibrada possível e desejamos que cada refeição tenha 550 gramas a um custo de R\$ 9,50 ?*

Temos um **Problema de Quadrados Mínimos com Restrição**, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 950 \\ 725 \\ 625 \\ 700 \\ 850 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.00 & 1.00 \\ 0.015 & 0.02 & 0.01 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d = \begin{bmatrix} 550 \\ 9.50 \end{bmatrix},$$

cuja solução obtida pelo Método de Uzawa é dada por:

$$x^* = \begin{bmatrix} 167.86 \\ 316.07 \\ 66.07 \end{bmatrix},$$

que representa a quantidade em gramas de cada um dos alimentos I, II e III que devem compor uma refeição.

Considerando somente a solução de quadrados mínimos para o sistema linear  $Ax = b$ , obtemos a solução

$$x^* = \begin{bmatrix} 179.55 \\ 328.41 \\ 61.36 \end{bmatrix},$$

que representa a quantidade em gramas de cada um dos alimentos I, II e III que devem compor uma refeição mais equilibrada possível.

Neste caso, teremos uma refeição contendo 569.32 gramas a um custo de R\$9,88, que possui uma coerência com a solução do Problema de Quadrados Mínimos com Restrição, observando que a quantidade de cada um dos alimentos I, II e III tiveram uma modificação no sentido inverso ao custo.

**Exemplo 8.16.4** Considere o **Problema de Ponto Sela:** encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^3$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^2$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} Ax + B^t\lambda = b \\ Bx = d \end{cases}$$

onde  $A \in M_3(\mathbb{R})$  é uma matriz positiva-definida,  $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ , com  $\text{posto}(B) = 2$ ,  $b \in \mathbb{R}^3$  e  $d \in \mathbb{R}^2$  dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad e \quad d = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

utilizando o Método de Uzawa.

Sabemos que o Problema de Ponto Sela está associado ao seguinte

### Problema de Programação Quadrática com Restrição

$$\begin{cases} \min \{ J(x) \} \\ \text{sujeito a} \quad Bx = d \end{cases}$$

onde o funcional  $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  é definido por:

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle.$$

Utilizando o Método de Uzawa obtemos uma solução numérica com um erro relativo inferior à  $10^{-12}$ , em 20 iterações, dada por:

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.769230769230729 \\ -2.230769230769186 \\ 2.230769230769171 \end{bmatrix} \quad e \quad \lambda^* = \begin{bmatrix} -10.38461538461517 \\ 2.15384615384613 \end{bmatrix}.$$

O Método de Uzawa fica interessante quando  $A$  é uma matriz esparsa e de grande porte.

**Exemplo 8.16.5** Encontre a solução de norma-2 mínima do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

através do **Problema de Ponto Sela**: encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^4$  e  $\lambda^* \in \mathbb{R}^3$  solução do sistema linear indefinido

$$\begin{cases} x + B^t \lambda = 0_{\mathbb{R}^4} \\ Bx = d \end{cases}$$

utilizando o Método de Uzawa, onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para esse Problema de Ponto Sela, podemos escrever o Método de Uzawa da forma:

Sejam  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$  e  $x_1 = -B^t \lambda_0$

$$q_k = d - Bx_k$$

$$p_k = B^t q_k$$

$$h_k = p_k$$

$$\alpha_k = \frac{\langle q_k, q_k \rangle}{\langle p_k, h_k \rangle}$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} - \alpha_k q_k$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k$$

para  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Utilizando o algoritmo de Uzawa, descrito acima, obtemos uma solução numérica, com um erro relativo inferior à  $10^{-12}$  em 60 iterações, para a solução de norma-2 mínima  $x^*$  e para o vetor dos multiplicadores do Lagrange  $\lambda^*$ , dadas por:

$$x^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad e \quad \lambda^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

## ***Exercícios***

**Exercício 8.160** *Mostre que uma solução  $(x^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  do Problema de Ponto Sela definido em (8.202), é um **ponto sela** para a **Função de Lagrange***

$$F(x, \lambda) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle + \langle Bx - d, \lambda \rangle,$$

*isto é, para quaisquer  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ , tem-se*

$$F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*),$$

*equivalentemente*

$$F(x^*, \lambda^*) = \min_x \max_{\lambda} \{ F(x, \lambda) \}.$$

**Exercício 8.161** *Seja a matriz  $A \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R})$  e o elemento  $b \in \mathbb{R}^5$  dados por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

*Encontre uma aproximação para a projeção ortogonal do elemento  $b$  no subespaço  $\mathcal{N}(A)$ , utilizando o método de Uzawa. Faça a implementação computacional em uma linguagem de sua preferência.*

**Exercício 8.162** *Um agricultor deseja adubar a sua plantação e disponha de dois tipos diferentes de adubos, tipo A e Tipo B. O primeiro adubo do tipo A contém 3.0 g de fósforo, 1.0 g de nitrogênio e 8.0 g de potássio, e custa R\$ 10,00 por quilograma. O segundo adubo do tipo B contém 2.0 g de fósforo, 3.0 g de nitrogênio e 2.0 g de potássio, e custa R\$ 8,00 por quilograma.*

*Sabemos que um quilograma de adubo dá para 10.0 m<sup>2</sup> de terra, e que sua plantação necessita de pelo menos 300.0 g de fósforo, 150.0 g de nitrogênio e 400.0 g de potássio a cada 10.0 m<sup>2</sup>.*

*Quanto o agricultor deve misturar de cada tipo de adubo para conseguir o efeito desejado se está disposto a gastar R\$ 0,70 a cada 10.0 m<sup>2</sup> com a adubação ?*

**Exercício 8.163** *Sejam a matriz  $A \in M_{10}(\mathbb{R})$  positiva-definida, o vetor  $b \in \mathbb{R}^{10}$  e a matriz  $B \in M_{2 \times 10}(\mathbb{R})$ , de posto completo, dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 25 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 30 & 8 & 0 & 2 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 47 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 17 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 & 15 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 21 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -9 & 0 & -1 & -3 & -4 & 52 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & -1 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 24 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14.00 \\ -24.50 \\ 87.70 \\ 142.50 \\ 7.90 \\ 47.35 \\ -46.45 \\ 8.45 \\ -3.50 \\ 80.00 \end{bmatrix}$$

$$e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considere o funcional  $J : \mathbb{R}^{10} \rightarrow \mathbb{R}$  definido da seguinte forma:

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle.$$

Determine uma solução numérica do **Problema de Programação Quadrática**

$$\begin{cases} \min \{ J(x) \} \\ \text{sujeito a} \quad x \in \mathcal{N}(B) \end{cases}$$

através do Método de Uzawa.



## 8.17 Decomposição em Valores Singulares

Nessa seção vamos apresentar uma metodologia para a construção da Decomposição em Valores Singulares de uma matriz de ordem  $m \times n$ , fazendo conexões algébricas e geométricas com os resultados estudados até o momento, apresentaremos também suas aplicações em vários problemas de interesse prático. Para isso, vamos necessitar de alguns resultados que apresentamos a seguir.

**Teorema 8.17.1** *Sejam  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  e  $v$  um autovetor da matriz  $A^t A$  associado a um autovalor  $\lambda$  não-nulo. Então,  $Av$  é um autovetor da matriz  $AA^t$  associado ao mesmo autovalor  $\lambda$ .*

**Demonstração** – Temos que  $A^t Av = \lambda v$ . Assim, obtemos

$$(AA^t)(Av) = A(A^t Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av).$$

Portanto,  $(\lambda, Av)$  é um autopar da matriz  $AA^t$ , o que completa a demonstração. ■

**Corolário 8.17.1** *Seja  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então, as matrizes  $A^t A$  e  $AA^t$  possuem os mesmos autovalores não-nulos, contando com as suas multiplicidades.*

**Demonstração** – A prova segue imediata do Teorema 8.17.1. □

**Teorema 8.17.2** *Sejam  $v_1$  e  $v_2$  autovetores ortogonais da matriz  $A^t A$ , associados a autovalores não-nulos. Então,  $Av_1$  e  $Av_2$  são autovetores ortogonais da matriz  $AA^t$ .*

**Demonstração** – Como  $v_1$  e  $v_2$  são autovetores ortogonais da matriz  $A^t A$ , associados a autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não-nulos, respectivamente, temos que

$$\langle A^t Av_1, A^t Av_2 \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Pelo Teorema 8.17.1, sabemos que  $Av_1$  e  $Av_2$  são autovetores da matriz  $AA^t$  associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não-nulos, respectivamente. Desse modo, temos que

$$\langle A^t Av_1, A^t Av_2 \rangle = \langle Av_1, (AA^t)(Av_2) \rangle = \lambda_2 \langle Av_1, Av_2 \rangle = 0.$$

Por hipótese temos que  $\lambda_2 \neq 0$ , assim provamos que  $Av_1$  e  $Av_2$  são ortogonais, o que completa a demonstração. ■

**Teorema 8.17.3** *Seja  $B \in M_m(\mathbb{R})$  uma matriz com um conjunto de  $m$  autovetores*

$$S = \{v_1, \dots, v_m\}$$

*linearmente independente em  $\mathbb{R}^m$ , associados aos autovalores*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m,$$

*respectivamente, e supomos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  são não-nulos e que  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_m$  são nulos. Então,  $\{v_1, \dots, v_r\}$  é uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(B)$ .*

**Demonstração** – Sabemos que  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é uma base para  $\mathbb{R}^m$ . Logo, todo elemento  $x \in \mathbb{R}^m$  é escrito de modo único como

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i.$$

Tomando  $y \in \mathcal{R}(B)$ , isto é,  $y = Bx$  para algum  $x \in \mathbb{R}^m$ , temos que

$$y = Bx = B \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i Bv_i = \sum_{i=1}^r (\alpha_i \lambda_i) v_i.$$

Portanto, mostramos que  $\{v_1, \dots, v_r\}$  é uma base para o subespaço  $\mathcal{R}(B)$ , o que completa a demonstração. ■

Assim sendo, provamos também que

$$\text{posto}(B) = \dim(\mathcal{R}(B)) = r,$$

onde  $r$  é o número de autovalores não-nulos da matriz  $B$ .

Além disso, podemos observar facilmente que os autovetores

$$v_{r+1}, \dots, v_m,$$

associados aos autovalores nulos, formam uma base para o subespaço  $\mathcal{N}(B)$ .

Sabemos que a matriz simétrica  $AA^t$  possui um conjunto de  $m$  autovetores linearmente independentes, e que a matriz simétrica  $A^tA$  possui um conjunto de  $n$  autovetores linearmente independentes. Assim, do Corolário 8.17.1 e do Teorema 8.17.3, apresentamos uma outra maneira para provar que

$$\text{posto}(AA^t) = \text{posto}(A^tA),$$

uma vez que  $AA^t$  e  $A^tA$  possuem o mesmo número de autovalores não-nulos, contando com suas multiplicidades.

**Teorema 8.17.4 (Decomposição em Valores Singulares)** *Seja  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então, existe uma matriz ortogonal  $U \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ , uma matriz diagonal  $\Sigma \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  da seguinte forma:*

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0),$$

com  $\sigma_i > 0$ , e uma matriz ortogonal  $V \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , tais que  $A = U\Sigma V^t$ .

Antes de passarmos à demonstração do Teorema 8.17.4, vamos fazer algumas observações interessantes relacionadas à Decomposição em Valores Singulares.

(1) No caso em que  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é uma matriz positiva-definida, temos a fatoração  $A = Q\Lambda Q^t$ , onde  $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $\Lambda \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é uma matriz diagonal, que podemos representar na forma:

$$Q = [q_1 \cdots q_j \cdots q_n] \quad \text{e} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n),$$

com  $(\lambda_j, q_j)$  um autopar da matriz  $A$ .

(2) Sabemos que  $AA^t \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  é uma matriz semipositiva-definida. Considerando a fatoração  $A = U\Sigma V^t$ , obtemos

$$AA^t = (U\Sigma V^t)(V\Sigma^t U^t) = U\Sigma\Sigma^t U^t,$$

onde  $\Sigma\Sigma^t \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  é uma matriz diagonal da forma:

$$\Sigma\Sigma^t = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_i^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0),$$

e  $U = [u_1 \cdots u_j \cdots u_m] \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal.

Desse modo, temos que  $u_1, \dots, u_j, \dots, u_m$  são autovetores da matriz  $AA^t$  associados aos autovalores  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_i^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0$ , respectivamente.

Logo,

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, r,$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  são os autovalores não-nulos da matriz  $AA^t$ .

Sabemos que  $A^t A \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz semipositiva-definida. De modo análogo, temos que  $A^t A = V \Sigma^t \Sigma V^t$ , onde  $\Sigma^t \Sigma \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz diagonal da forma:

$$\Sigma^t \Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_i^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0),$$

e  $V = [v_1 \cdots v_j \cdots v_n] \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal.

Desse modo, temos que  $v_1, \dots, v_j, \dots, v_n$  são autovetores da matriz  $A^t A$  associados aos autovalores  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_i^2, \dots, \sigma_r^2, 0, \dots, 0$ , respectivamente.

Logo,  $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$  para  $j = 1, \dots, r$ , onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  são os autovalores não-nulos da matriz  $A^t A$ .

Já mostramos que

(3) Pelo Teorema 8.10.6, temos que  $\mathcal{N}(AA^t) = \mathcal{N}(A^t)$ .

(4) Pelo Teorema 8.10.3, temos que  $\mathbb{R}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^t)$ .

(5) Pelo Teorema 8.17.3, temos que  $\mathcal{R}(AA^t) = [u_1, \dots, u_r]$ .

Assim, temos que  $u_1, \dots, u_r$  formam uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ , e  $u_{r+1}, \dots, u_m$  formam uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ .

De modo análogo, mostramos que

(6) Pelo Teorema 8.10.5, temos que  $\mathcal{N}(A^t A) = \mathcal{N}(A)$ .

(7) Pelo Teorema 8.10.3, temos que  $\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(A^t) \oplus \mathcal{R}(A^t)^\perp = \mathcal{R}(A^t) \oplus \mathcal{N}(A)$ .

(8) Pelo Teorema 8.17.3, temos que  $\mathcal{R}(A^t A) = [v_1, \dots, v_r]$ .

Assim, temos que  $v_1, \dots, v_r$  formam uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ , e  $v_{r+1}, \dots, v_n$  formam uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{N}(A)$ .

Finalmente, vamos passar para a demonstração do Teorema 8.17.4, que é feita de forma construtiva.

Como  $A^t A \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz simétrica, sabemos que possui um sistema completo de autovetores ortonormais

$$v_1, \dots, v_j, \dots, v_n,$$

associados aos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n$ , respectivamente, e que formam uma base ortonormal para  $\mathbb{R}^n$ .

Vamos construir uma matriz ortogonal  $V = [v_1 \cdots v_j \cdots v_n] \in M_n(\mathbb{R})$ . Desse modo, temos que

$$v_j^t(A^t A v_j) = v_j^t(\lambda_j v_j) = \lambda_j v_j^t v_j = \lambda_j \implies \|A v_j\|_2^2 = \lambda_j \geq 0$$

para  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Supomos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  são os autovalores não-nulos, e que  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  são os autovalores nulos. Logo, temos que

$$A v_j = 0_{\mathbb{R}^m} \quad \text{para} \quad j = (r+1), \dots, n.$$

Para os autovalores positivos,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , definimos

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \quad \text{e} \quad u_j = \frac{A v_j}{\sigma_j}$$

para  $j = 1, 2, \dots, r$ .

Os elementos  $u_1, \dots, u_r$  são ortonormais em  $\mathbb{R}^m$ . De fato,

$$u_i^t u_j = \left( \frac{A v_i}{\sigma_i} \right)^t \left( \frac{A v_j}{\sigma_j} \right) = \frac{v_i^t (A^t A v_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{v_i^t (\lambda_j v_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\lambda_j v_i^t v_j}{\sigma_i \sigma_j} = \delta_{ij},$$

o que prova o resultado desejado.

Desse modo, podemos completar o conjunto ortonormal  $\{u_1, \dots, u_r\}$  para obter uma base ortonormal  $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$  para o  $\mathbb{R}^m$ .

Assim, podemos construir uma matriz ortogonal  $U \in M_m(\mathbb{R})$  da forma:

$$U = [u_1 \cdots u_r \ u_{r+1} \cdots u_m] \in M_m(\mathbb{R}).$$

Finalmente, obtemos a **Decomposição em Valores Singulares** da matriz  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  na forma:

$$A = U\Sigma V^t \quad \Longleftrightarrow \quad U^t A V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0).$$

Os escalares positivos  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  são denominados **Valores Singulares** da matriz  $A$ .

De fato, denotando  $\Sigma = [u_i^t A v_j]$ , sabemos que, para  $i = 1, \dots, m$ ,

$$u_i^t A v_j = 0_{\mathbb{R}} \quad \text{para} \quad j = (r+1), \dots, n,$$

desde que  $A v_j = 0_{\mathbb{R}^m}$  para  $j = (r+1), \dots, n$ , e que

$$u_i^t A v_j = u_i^t (\sigma_j u_j) = \sigma_j u_i^t u_j \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, r,$$

desde que  $A v_j = \sigma_j u_j$  para  $j = 1, \dots, r$ .

Logo, para  $i = 1, \dots, m$ , temos que

$$u_i^t A v_j = \sigma_j u_i^t u_j = \sigma_j \delta_{ij} \quad \text{para} \quad j = 1, \dots, r.$$

Portanto, obtemos

$$U^t A V = \Sigma = \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma} & 0_{r \times q} \\ 0_{p \times r} & \widehat{D} \end{bmatrix},$$

onde  $\widehat{\Sigma}$  é uma matriz diagonal de ordem  $r \times r$  dada por:

$$\widehat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r),$$

e  $\widehat{D}$  é uma matriz diagonal nula de ordem  $p \times q$ , com  $p = m - r$  e  $q = n - r$ .

Podemos observar facilmente que

$$\text{posto}(A) = r \leq \min\{m, n\}.$$

Assim, completamos a demonstração do Teorema 8.17.4. ■

**Exemplo 8.17.1** *Encontre a Decomposição em Valores Singulares da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

*detalhando todos os passos.*

Inicialmente vamos calcular os autovalores e autovetores da matriz  $A^t A$ , que é uma matriz positiva-definida, desde que  $\text{posto}(A) = 2$ . O polinômio característico da matriz  $A^t A$  é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A^t A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Assim, seus autovalores são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 1$ , e podemos escolher os seguintes autovetores ortonormais associados

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que é uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ .

Logo, a matriz ortogonal  $V \in M_2(\mathbb{R})$  é dada por:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto os valores singulares da matriz  $A$  são

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.$$

Assim, a matriz diagonal  $\Sigma \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$  é dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, vamos construir a matriz ortogonal  $U = [u_1 \ u_2 \ u_3] \in M_3(\mathbb{R})$ . Os elementos  $u_1$  e  $u_2$  são escolhidos da forma:

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que  $\{u_1, u_2\}$  é uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

Escolhemos o elemento  $u_3$  de modo que  $\{u_3\}$  seja uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ , isto é,  $\{u_1, u_2, u_3\}$  é uma base ortonormal para  $\mathbb{R}^3$ .

Para isso, temos que obter a solução geral do sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é dada por:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Assim, o elemento  $u_3$  é dado por:

$$u_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, a matriz ortogonal  $U \in M_3(\mathbb{R})$  é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix},$$

Portanto, temos a Decomposição em Valores Singulares  $A = U\Sigma V^t$ .



**Exemplo 8.17.2** *Encontre a Decomposição em Valores Singulares da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

*detalhando todos os passos.*

Inicialmente vamos calcular os autovalores e autovetores da matriz  $A^t A$ , que é uma matriz positiva-definida, desde que  $\text{posto}(A) = 2$ . O polinômio característico da matriz  $A^t A$  é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A^t A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Assim, seus autovalores são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 1$ , e podemos escolher os seguintes autovetores ortonormais associados

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que é uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A^t)$ .

Logo, a matriz ortogonal  $V \in M_2(\mathbb{R})$  é dada por:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto os valores singulares da matriz  $A$  são

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.$$

Assim, a matriz diagonal  $\Sigma \in M_{4 \times 2}(\mathbb{R})$  é dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, construímos a matriz ortogonal  $U = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4] \in M_4(\mathbb{R})$ . Os elementos  $u_1$  e  $u_2$  são escolhidos da forma:

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que  $\{u_1, u_2\}$  é uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{R}(A)$ .

Escolhemos os elementos  $u_3$  e  $u_4$  de modo que  $\{u_3, u_4\}$  seja uma base ortonormal para o subespaço  $\mathcal{N}(A^t)$ , isto é,  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  é uma base ortonormal para  $\mathbb{R}^4$ .

Para isso, temos que obter a solução geral do sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que é dada por:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{para } c, d \in \mathbb{R}.$$

Assim, os elementos  $u_3$  e  $u_4$  são dados por:

$$u_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, a matriz ortogonal  $U \in M_4(\mathbb{R})$  é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Portanto, temos a Decomposição em Valores Singulares  $A = U\Sigma V^t$ .

## ***Aplicações da Decomposição em Valores Singulares***

Neste momento estamos preparados para apresentar várias aplicações da Decomposição em Valores Singulares fazendo uma conexão entre os diversos temas estudados neste texto. Além disso, apresentamos uma maneira simples e elegante para obter a *Solução Ótima de Quadrados Mínimos* para um sistema linear  $Ax = b$ , que é uma generalização dos resultados até agora apresentados sobre o tema.

**Teorema 8.17.5** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,*

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max},$$

onde  $\sigma_{\max}$  é o maior valor singular da matriz  $A$ .

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Corolário 8.17.2** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,  $\|A\|_2 = \|A^t\|_2$ .*

**Teorema 8.17.6** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^r \sigma_j^2},$$

onde  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  são os valores singulares da matriz  $A$ .

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Teorema 8.17.7** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Então, a matriz  $A$  pode ser fatorada na forma:*

$$A = QS,$$

denominada ***Decomposição Polar***, onde  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $S \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz semipositiva-definida.

**Demonstração** – Considerando a Decomposição em Valores Singulares da Matriz  $A$ , obtemos

$$A = U\Sigma V^t = U(V^t V)\Sigma V^t = (UV^t)(V\Sigma V^t) = QS,$$

onde  $Q = UV^t \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $S = V\Sigma V^t \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz semipositiva-definida, o que completa a demonstração. ■

**Exemplo 8.17.3** Seja  $A = QS$  a Decomposição Polar da matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , com  $A$  uma matriz invertível. Mostre que  $S$  é uma matriz positiva-definida.

**Proposição 8.17.1** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  positiva-definida. Então, existe uma matriz invertível  $R \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $A = R^t R$ , denominada **raiz quadrada** de  $A$ .

**Demonstração** – A prova será feita através dos Exemplos a seguir. ■

**Exemplo 8.17.4** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  semipositiva-definida, e  $G \in M_n(\mathbb{R})$  seu fator de Cholesky, isto é,  $A = G^t G$ . Considere a fatoração em Valores Singulares da Matriz  $G$ , isto é,  $G = U\Sigma V^t$ , e a matriz semipositiva-definida  $X = V\Sigma V^t$ . Desse modo, temos que

$$A = G^t G = (V\Sigma U^t)(U\Sigma V^t) = V\Sigma^2 V^t = (V\Sigma V^t)(V\Sigma V^t) = X^2.$$

Portanto,  $X$  é a **raiz quadrada semipositiva-definida** da matriz  $A$ . No caso em que  $A$  é uma matriz positiva-definida,  $X$  é a sua **raiz quadrada positiva-definida**.

**Exemplo 8.17.5** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz semipositiva-definida, e consideramos sua fatoração na forma  $A = Q\Lambda Q^t$ , onde  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz diagonal. Tomando a matriz semipositiva-definida

$$R = Q\sqrt{\Lambda}Q^t,$$

obtemos

$$R^2 = (Q\sqrt{\Lambda}Q^t)(Q\sqrt{\Lambda}Q^t) = Q\Lambda Q^t = A.$$

Portanto,  $R$  é a **raiz quadrada semipositiva-definida** da matriz  $A$ . No caso em que  $A$  é uma matriz positiva-definida,  $R$  é a sua **raiz quadrada positiva-definida**.

**Exemplo 8.17.6** Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz positiva-definida, e consideramos sua fatoração na forma  $A = Q\Lambda Q^t$ , onde  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz ortogonal e  $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$  é uma matriz diagonal. Tomando a matriz invertível

$$\hat{R} = \sqrt{\Lambda}Q^t,$$

obtemos

$$\hat{R}^t \hat{R} = (\sqrt{\Lambda}Q^t)^t (\sqrt{\Lambda}Q^t) = Q\Lambda Q^t = A.$$

Portanto,  $\hat{R}$  é a **raiz quadrada** da matriz  $A$ .

### ***Solução Ótima de Quadrados Mínimos***

Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $\text{posto}(A) = r \leq \min\{m, n\}$ , e o elemento  $b \in \mathbb{R}^m$ . Considere os seguintes problemas equivalentes

**(M) Problema de Quadrados Mínimos:** encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min\{\|Ax - b\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n\}.$$

**(SN) Sistema Normal:** Encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  solução do sistema linear

$$A^t Ax = A^t b.$$

Temos que  $x^*$  é a solução de quadrados mínimos para o sistema linear  $Ax = b$ . Entretanto, considerando a possibilidade de que  $\text{posto}(A) = r \leq \min\{m, n\}$ , o problema **(M)** pode possuir infinitas soluções. Vamos indicar por  $\mathbb{X}_{LS}$  o conjunto solução do problema **(M)**, isto é,

$$\mathbb{X}_{LS} = \{x^* \in \mathbb{R}^n / \|Ax^* - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2, \quad x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Assim sendo, vamos definir o elemento  $x^+ \in \mathbb{X}_{LS}$  tal que

$$\|x^+\|_2 \leq \|x^*\|_2 \quad \text{para todo} \quad x^* \in \mathbb{X}_{LS},$$

como a **Solução Ótima de Quadrados Mínimos** para o sistema linear  $Ax = b$ .

Finalmente, vamos mostrar como utilizar a *Decomposição em Valores Singulares*

$$A = U\Sigma V^t$$

para obtermos a *Solução Ótima de Quadrados Mínimos* para o sistema linear  $Ax = b$ .

Desse modo, temos que

$$\|Ax - b\|_2 = \|U\Sigma V^t x - b\|_2 = \|U^t(U\Sigma V^t x - b)\|_2 = \|\Sigma V^t x - U^t b\|_2.$$

Chamando  $y = V^t x$  e  $d = U^t b$ , obtemos

$$\|Ax - b\|_2 = \|\Sigma y - d\|_2,$$

que de acordo com os nossos objetivos, podemos considerar

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|\Sigma y - d\|_2^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i y_i - d_i)^2 + \sum_{i=r+1}^m d_i^2.$$

Como nosso objetivo é minimizar  $\|\Sigma y - d\|_2^2$ , e o segundo termo da expressão da direita não depende da variável  $y$ , basta impor a seguinte condição

$$\sum_{i=1}^r (\sigma_i y_i - d_i)^2 = 0,$$

que obtemos

$$y_i = \frac{d_i}{\sigma_i} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, r,$$

e como as variáveis  $y_i$  para  $i = (r+1), \dots, n$  estão livres, podemos escolher

$$y_i = 0 \quad \text{para} \quad i = (r+1), \dots, n.$$

Assim, encontramos um elemento  $y^+ \in \mathbb{R}^n$  dado por:

$$y^+ = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \frac{d_r}{\sigma_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que minimiza  $\|\Sigma y - d\|_2^2$  e que possui a menor norma-2 possível, desde que escolhemos as variáveis livres todas nulas.

Portanto, a **solução ótima de quadrados mínimos** para o sistema linear  $Ax = b$  é dada por  $x^+ = Vy^+$ , isto é,

$$\|x^+\|_2 \leq \|x^*\|_2 \quad \text{para todo} \quad x^* \in \mathbb{X}_{SL},$$

onde as infinitas **soluções de quadrados mínimos** são  $x^* = Vy^*$ , onde

$$y^* = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \frac{d_r}{\sigma_r} \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

com as variáveis livres  $y_i$  para  $i = (r+1), \dots, n$ .

Considerando a matriz  $\Sigma \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  dada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma} & 0_{r \times q} \\ 0_{p \times r} & \widehat{D} \end{bmatrix},$$

onde  $\widehat{\Sigma}$  é uma matriz diagonal de ordem  $r \times r$  dada por:

$$\widehat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r),$$

e  $\widehat{D}$  é uma matriz nula de ordem  $p \times q$ , com  $p = m - r$  e  $q = n - r$ .

Definimos a matriz  $\Sigma^\dagger \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  da seguinte forma:

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma}^\dagger & 0_{r \times p} \\ 0_{q \times r} & \widehat{D}^t \end{bmatrix},$$

onde  $\widehat{\Sigma}^\dagger$  é uma matriz diagonal de ordem  $r \times r$  dada por:

$$\widehat{\Sigma}^\dagger = \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_r}\right),$$

e  $\widehat{D}^t$  é uma matriz diagonal nula de ordem  $q \times p$ . Podemos verificar facilmente que a matriz  $\Sigma^\dagger \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  é a pseudo-inversa da matriz  $\Sigma$ .

Assim, podem os escrever a solução ótima de quadrados mínimos da forma:

$$x^+ = (V\widehat{\Sigma}^\dagger U^t)b = A^\dagger b,$$

onde a matriz  $A^\dagger = V\widehat{\Sigma}^\dagger U^t \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  é a **pseudo-inversa** da matriz  $A$ , isto é, a matriz  $A^\dagger$  satisfaz as seguintes propriedades

1.  $(AA^\dagger)^t = AA^\dagger$ .
2.  $(A^\dagger A)^t = A^\dagger A$ .
3.  $AA^\dagger A = A$ .
4.  $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ .

que são as propriedades de Moore–Penrose.

**Teorema 8.17.8** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então,*

$$\|A^\dagger\|_2 = \frac{1}{\sigma_{\min}},$$

onde  $\sigma_{\min}$  é o menor valor singular da matriz  $A$ .

**Demonstração** – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

**Definição 8.17.1** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Definimos o **número de condição** da matriz  $A$  com relação à norma  $\|\cdot\|_2$  na forma:*

$$\mathcal{K}_2(A) = \|A\|_2 \|A^\dagger\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}.$$

Assim, podemos fazer uma análise de sensibilidade para Problemas de Quadrados Mínimos, que é uma generalização do que foi apresentado até o momento para sistema linear cuja matriz é invertível.



Vamos apresentar uma forma interessante, e importante, da aplicação da Decomposição em Valores Singulares em Problemas de Quadrados Mínimos. Considere uma matriz  $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , e um elemento  $b \in \mathbb{R}^m$ . Vamos utilizar a Decomposição em Valores Singulares  $A = U\Sigma V^t$  para obter uma *Solução Ótima de Quadrados Mínimos* para o sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$ , fazendo uma redução do posto da matriz  $A$ .

Para isso, consideramos uma precisão  $\varepsilon > 0$  e ordenamos os valores singulares da matriz  $A$  da seguinte forma:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{r(\varepsilon)} > \varepsilon \geq \cdots \geq \sigma_n.$$

Vamos escolher uma matriz  $A_\varepsilon$  de modo que  $\text{posto}(A_\varepsilon) = r(\varepsilon) < n$ , utilizando a decomposição  $A = U\Sigma V^t$ , da seguinte forma:

$$A_\varepsilon = U\Sigma_\varepsilon V^t$$

onde a matriz  $\Sigma_\varepsilon$  é dada da seguinte forma:

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \widehat{\Sigma}_\varepsilon & 0_{r(\varepsilon) \times q} \\ 0_{p \times r(\varepsilon)} & \widehat{D} \end{bmatrix},$$

onde  $\widehat{\Sigma}_\varepsilon$  é uma matriz diagonal de ordem  $r(\varepsilon) \times r(\varepsilon)$  dada por:

$$\widehat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_{r(\varepsilon)}),$$

e  $\widehat{D}$  é uma matriz diagonal nula de ordem  $p \times q$ , com  $p = m - r(\varepsilon)$  e  $q = n - r(\varepsilon)$ .

Portanto, a **solução ótima de quadrados mínimos** para o sistema linear  $A_\varepsilon x = b$  é dada por  $x_\varepsilon^+ = Vy_\varepsilon^+$ , onde

$$y_\varepsilon^+ = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \frac{d_{r(\varepsilon)}}{\sigma_{r(\varepsilon)}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, podemos escrever  $x_\varepsilon^+ = V\Sigma_\varepsilon^\dagger U^t b$ .

Verificamos facilmente que

$$\|A - A_\varepsilon\|_2 < \varepsilon,$$

o que justifica a escolha da solução ótima de quadrados mínimos, em vez da solução de quadrados mínimos para o sistema linear sobredeterminado  $Ax = b$  que é dada por:

$$x^* = Vy^*,$$

onde  $y^*$  é dado por:

$$y^* = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \frac{d_{r(\varepsilon)}}{\sigma_{r(\varepsilon)}} \\ \vdots \\ \frac{d_n}{\sigma_n} \end{bmatrix},$$

desde que  $\text{posto}(A) = n$ .

Assim, a solução de quadrados mínimos  $x^*$  é representada da seguinte forma:

$$x^* = V\Sigma^\dagger U^t b,$$

que não apresenta vantagem em relação à solução obtida através da fatoração  $QR$ .

**Exemplo 8.17.7** *Determine a solução ótima de quadrados mínimos para  $Ax = b$ , onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

## ***Exercícios***

**Exercício 8.164** *Determine a Decomposição em Valores Singulares das matrizes*

$$(a) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (b) \ A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (c) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

*detalhando todos os passos.*

**Exercício 8.165** *Determine a Decomposição em Valores Singulares das matrizes*

$$(a) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (b) \ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad ,$$

*detalhando todos os passos.*

**Exercício 8.166** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Mostre que*

$$\|A\|_2 = \sigma_{\max} \quad ,$$

*onde  $\sigma_{\max}$  é o maior valor singular da matriz  $A$ .*

**Exercício 8.167** *Seja  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Mostre que*

$$\|A^\dagger\|_2 = \frac{1}{\sigma_{\min}} \quad ,$$

*onde  $\sigma_{\min}$  é o menor valor singular da matriz  $A$ .*

**Exercício 8.168** *Determine a solução ótima de quadrados mínimos para  $Ax = b$ , onde*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .$$

**Exercício 8.169** *Seja  $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  uma matriz ortogonal. Determine a matriz pseudo-inversa da matriz  $Q$ .*

**Exercício 8.170** *Dada a matriz  $A \in M_2(\mathbb{R})$  e sua Decomposição Polar  $A = QS$ , onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad S = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

*Determine a Decomposição em Valores Singulares  $A = U\Sigma V^t$*

**Exercício 8.171** Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $\text{posto}(A) = r \leq \min\{m, n\}$ , e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Considere os seguintes problemas:

**(M) Problema de Quadrados Mínimos:** Encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\|Ax^* - b\|_2^2 = \min \{ \|Ax - b\|_2^2 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n \}$$

que é equivalente ao problema

**(SN) Sistema Normal:** Encontrar  $x^* \in \mathbb{R}^n$  solução do sistema linear

$$A^t Ax = A^t b.$$

Pede-se:

(a) Faça uma análise do conjunto solução  $\mathbb{X}_{LS}$  do problema **(M)**  $\iff$  **(SN)**.

(b) Determine a caracterização do elemento  $x^+ \in \mathbb{X}_{LS}$  tal que

$$\|x^+\|_2 \leq \|x^*\|_2 \quad \text{para todo} \quad x^* \in \mathbb{X}_{LS},$$

denominado **Solução Ótima de Quadrados Mínimos** para  $Ax = b$ .

(c) Dê a interpretação geométrica para o elemento  $z^+ \in \mathbb{R}^m$  definido por:

$$z^+ = Ax^+,$$

para cada uma das situações analisadas no item (a).

(d) Considerando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determine a solução ótima de quadrados mínimos para  $Ax = b$ .

(e) Considerando o resultado do item (d), tome o elemento  $w^+$  definido por:

$$w^+ = b - z^+,$$

onde  $z^+ = Ax^+$  e  $x^+$  é a solução ótima de quadrados mínimos para o sistema linear  $Ax = b$ . Verifique que o elemento  $w^+ \in \mathcal{N}(A^t)$  é não-nulo e dê uma interpretação geométrica para os elementos  $z^+$  e  $w^+$ . Justifique esse resultado.

**Exercício 8.172** *Sejam  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , com  $\text{posto}(A) = r \leq \min\{m, n\}$ , e  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  os valores singulares da matriz  $A$ . Pede-se:*

(a) *Mostre que a norma de Frobenius da matriz  $A$  é dada por:*

$$\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2$$

(b) *Para  $m > n$  e  $\text{posto}(A) = n$ , mostre que o subconjunto*

$$S = \{Ax \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_2 = 1 \ ; \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

*é um hiper-elipsóide em  $\mathbb{R}^m$ , determinando as direções dos semi-eixos e seus respectivos comprimentos.*

(c) *Utilizando a Decomposição em Valores Singulares da matriz  $A$ , mostre que para todo  $\epsilon > 0$ , existe uma matriz  $A_\epsilon \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  de posto completo tal que*

$$\|A - A_\epsilon\|_2 < \epsilon.$$

(d) *Considerando a fatoração  $A = U\Sigma V^t$ , mostre que*

$$A = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j^t \quad \text{e} \quad A^\dagger = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\sigma_j} v_j u_j^t,$$

*onde  $A^\dagger$  é a pseudo-inversa da matriz  $A$ .*

(e) *Mostre que a matriz  $P = AA^\dagger$  é a matriz de projeção ortogonal em  $\mathcal{R}(A)$ .*

(f) *Mostre que a matriz  $P = A^\dagger A$  é a matriz de projeção ortogonal em  $\mathcal{R}(A^t)$ .*

(g) *Determine a Decomposição em Valores Singulares e a pseudo-inversa da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(h) *Mostre que os autovalores da matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 0_n & A^t \\ A & 0_m \end{bmatrix},$$

*de ordem  $m + n$ , são*

$$-\sigma_1, \dots, -\sigma_r, \sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0.$$

**Exercício 8.173** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz semipositiva-definida. Considerando a matriz  $X$  do Exemplo 8.17.4 e a matriz  $R$  do Exemplo 8.17.5, mostre que  $X = R$ . No caso em que  $A$  é uma matriz positiva-definida, mostre que as matrizes  $X$  e  $R$  são diferentes da matriz  $\hat{R}$  do Exemplo 8.17.6.*

**Exercício 8.174** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{R})$  uma matriz semipositiva-definida. Então, existe uma única matriz semipositiva-definida  $R \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $A = R^2$ .*





# Bibliografia

- [1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1977.
- [2] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume I, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.
- [3] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume II, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.
- [4] Tom M. Apostol, *Linear Algebra—A First Course with Applications to Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1997.
- [5] Alexander Basilevsky, *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*, Dover, 1983.
- [6] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Editora Harbra Ltda, 1986.
- [7] C. A. Callioli, H. H. Domingues e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, Atual Editora, 2003.
- [8] R. Charnet, C. A. L. Freire, E. M. R. Charnet e H. Bonvino, *Análise de Modelos de Regressão Linear com Aplicações*, Editora da Unicamp, Segunda Edição, 2008.
- [9] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, edusp, 2001.
- [10] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice–Hall, Third Edition, 1997.
- [11] Gene H. Golub & Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins, 1996.
- [12] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Editora da USP, 1971.
- [13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1996.
- [14] Bernard Kolman e David R. Hill, *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*, LTC, Oitava Edição, 2006.
- [15] Serge Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, Springer, 1986.
- [16] Elon L. Lima, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.
- [17] Elon L. Lima, *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1996.

- [18] Seymour Lipschutz, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Makron Books, 1994.
- [19] LUENBERGER, D. D. (1973), *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley.
- [20] Patricia R. de Peláez, Rosa F. Arbeláez y Luz E. M. Sierra, *Algebra Lineal con Aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia, 1997.
- [21] Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.
- [22] David S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991.