Universidade Federal de Roraima
Álgebra Linear
Prof^a Kelly Karina Santos

Data:18/03/2020
MB 202
Turma: 1

Operações com Matrizes

1. **Adição**

   Dadas duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]$, definimos a soma de A e B e denotamos por $A + B$ como a matriz de ordem $m \times n$ dada por:

   $$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

   Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   Propriedades:

   Dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem $m \times n$, temos:

   i) $A + B = B + A$ (comutatividade)
   ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)
   iii) $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$

2. **Multiplicação por escalar**

   Seja $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e K um escalar (ou seja, um número real ou complexo), então definimos o produto de k por A como sendo a matriz dada por:

   $$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

   Exemplo: $2\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

3. **Transposição**

   Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ definimos A^t (e lemos "A transposta") da seguinte forma:

   $$A^t = [b_{ij}]_{n\times m}, \text{ onde } b_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ então $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

Propriedades:

i) Uma matriz é simétrica se e somente se ela é igual à sua transposta;

ii) $(A^t)^t = A$, ou seja, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma;

iii) $(A+B)^t = A^t + B^t$

iv) $(kA)^t = kA^t$, onde k é um escalar.

4. **Multiplicação de matrizes**

Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$. O produto de A e B é a matriz $C = AB = [c_{ij}]_{m\times p}$ onde:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Note que o produto de duas matrizes só está definido quando o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda. Além disso a matriz reultante deste produto terá o número de linhas da primeira e o número de colunas da segunda.

A expressão para c_{ij} acima nos diz que para obter o elemento c_{ij} da matriz AB devemos multiplicar os elementos da coluna i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B e somar o resultado.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-2)+3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 2+3\cdot 0+(-1)\cdot 5 \\ 0\cdot(-2)+2\cdot 1+5\cdot 3 & 0\cdot 2+2\cdot 0+5\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 17 & 25 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

i) Em geral $AB \neq BA$;

ii) $AI = IA = A$ onde I denota uma matriz identidade (onde I é uma matriz identidade com orde

iii) $A(B+C) = AB + AC$

iv) $(A+B)C = AC + BC$

v) $(AB)C = A(BC)$

vi) $(AB)^t = B^tA^t$

vii) $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$

Exercícios

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$

   Encontre:

   a) $A + B$;

   b) $A \cdot C$

   c) $B \cdot C$

   d) $D \cdot A$

   e) $-B$

   f) $-D$

2. Por que em geral $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$?

3. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

   Mostre que $AB = BA = 0, AC = A$ e $CA = C$.

4. Considere a seguinte afirmação: $(AB)^t = A^t.B^t$. A afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.