Lista 5

Questão 1. A afirmação é falsa. De fato, considere os subespaços(*) $W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x = y\}$ $W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$. O vetor $u = (1,1) \in W_1$, o vetor $v = (0,2) \in W_2$, mas o vetor $u + v = (1,3) \notin W_1 \cup W_2$. É claro que $u \in W_1 \Rightarrow u \in W_1 \cup W_2$, $v \in W_2 \Rightarrow v \in W_1 \cup W_2$. Assim, $u, v \in W_1 \cup W_2 \not\Rightarrow u + v \in W_1 \cup W_2$. Portanto, $W_1 \cup W_2$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Questão 2. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Por definição de subespaço, o vetor nulo $\mathbf{0}$ de V pertence a W_1 e a W_2. Logo, $0 \in W_1 \cap W_2$. Por outro lado, dados $\underline{u, v \in W_1 \cap W_2}$ tem-se: $u, v \in W_1 \cap W_2$, implica que $u, v \in W_1$. Mas, como W_1 é subespaço de V então $u + v \in W_1$. Analogamente, $u + v \in W_2$. Segue-se que $\underline{u + v \in W_1 \cap W_2}$. Além disso, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in W_1 \cap W_2$, tem-se que $u \in W_1$, e, como W_1 é subespaço vetorial, segue-se que $\alpha u \in W_1$. Analogamente, $u \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u \in W_2 \Rightarrow \alpha u \in W_2$. Isto é $\alpha u \in W_1 \cap W_2$. Portanto, $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V.

(*) Verifique que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

Questão 3. Verifique se $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y + z = 0\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

O vetor nulo de $\mathbb{R}^3$, $0 = (0,0,0)$ pertence a U, pois $0 \cdot 2 \cdot 0 + 0 = 0$.

Por outro lado, dados $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in U$, tem-se que

$x_1 + 2y_1 + 2z_1 = 0$ e $x_2 + 2y_2 + z_2 = 0$. O vetor $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ pertence a U

pois $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + 2y_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 + z_2)$

$$= 0 + 0$$

$$= 0.$$

Além disso, dados $u = (x, y, z) \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se, $x + 2y + z = 0$ e $\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.

Mas $\alpha x + 2(\alpha y) + \alpha z = \alpha x + \alpha(2y) + \alpha z$

$$= \alpha [x + 2y + z]$$

$$= \alpha \cdot 0$$

$$= 0.$$

Logo, $\alpha u \in U$. Portanto U é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Lista 6

Questão 1. O vetor nulo de V pertence a U, pois (pondo $\lambda=0$) $0 = 0 \cdot v \in U$.

Por outro lado, dados $u_1, u_2 \in U$, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $u_1 = \lambda_1 v$ e $u_2 = \lambda_2 v$.

Segue-se que $u_1 + u_2 = \lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v \in U$.

Além disso, se $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$, com $u = \lambda v$. Assim, $\alpha u = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda) \cdot v \in U$. Portanto, U é subespaço de V.

Questão 2. Inicialmente note que "se $u \neq \alpha v$, para todo α então $ad - bc \neq 0$".
Ora, essa afirmação é equivalente a: "Se $ad - bc = 0$, então $u = \alpha v$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$".

Provemos pois essa afirmação. Como $v \neq 0$ (por hipótese) então $c \neq 0$ ou $d \neq 0$. Se $c \neq 0$ então pondo $\alpha = \frac{a}{c}$, tem-se $\alpha v = \frac{a}{c} \cdot (c, d) = \left(\frac{ac}{c}, \frac{ad}{c}\right) = \left(\frac{ac}{c}, \frac{bc}{c}\right) = (a, b) = u$, pois $ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc$.

Se porém $d \neq 0$, então basta por $\alpha = \frac{b}{d}$. Ter-se-á $\alpha v = \frac{b}{d}(c, d) = \left(\frac{bc}{d}, \frac{bd}{d}\right) = \left(\frac{ad}{d}, \frac{bd}{d}\right) = (a, b) = u$ $\boxtimes$

Posto isso, dado $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, a fim de saber se $w \in U + V$, isto, é se, existem $u_1 \in U$, $v_1 \in V$, tais que $w = u_1 + v_1$, (ou seja, se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $w = \alpha u + \beta v$) (ou ainda, $(x, y) = \alpha(a, b) + \beta(c, d)$). devemos estudar as soluções do sistema

$$\begin{cases} \alpha a + \beta c = x \\ \alpha b + \beta d = y \end{cases}$$

Mas por hipótese, $u \neq \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, logo, $ad - bc \neq 0$. Assim, (Pela regra de Cramer) a solução do sistema é $\alpha = \frac{dx - cy}{ad - bc}$ e $\beta = \frac{ay - bx}{ad - bc}$. Como a solução do sistema é única, então, <u>cada vetor ~~w~~ w de $\mathbb{R}^2$ se escreve de modo único como soma do</u>, tipo $w = u_1 + u_2$, $u_1 \in U$ e $u_2 \in V$. Logo, $U \oplus V = \mathbb{R}^2$.

Observações: 1. Caso tivéssemos mostrado apenas que $U + V = \mathbb{R}^2$, sem provar a unicidade da escrita de w como soma do tipo $w = u_1 + u_2$, $u_1 \in U$ e $u_2 \in V$, então deveríamos ainda mostrar que $U \cap V = \{0\}$.

Para isso, poderíamos proceder assim.

Dado $w \in U \cap V$, tem-se

$$w \in U \cap V \Rightarrow w \in U \Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R};\ w = \lambda_1 u;$$

$$w \in U \cap V \Rightarrow w \in V \Rightarrow \exists \lambda_2 \in \mathbb{R};\ w = \lambda_2 v.$$

Afirmamos que $\lambda_1 = 0$. Com efeito, se fosse $\lambda_1 \neq 0$ então teríamos

$u = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v$ (pois $\lambda_1 u = \lambda_2 v$). Isto é, u seria múltiplo de v, o que é vetado pela hipótese. Segue-se que $\lambda_1 = 0$ e $w = 0 \cdot u = \mathbf{0}$. Portanto, $U \cap V = \{0\}$.

2. Vale as recíprocas dos dois fatos provados acima. (Ver Pg 26 e 27 do livro "Álgebra Linear Essencial").

Questão 3.

i) $\boxed{U+V=\mathbb{R}^3}$. Dado $w=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, tomemos $u=(x,-x-z,z)$ e $v=(0,y+x+z,0)$.
Note que $u\in U$ pois $x+(-x-z)+z=0$ e $v\in V$. Além disso,
$$u+v=(x+0,\,-x-z+y+x+z,\,z+0)=(x,y,z)=w.$$ Logo, $U+V=\mathbb{R}^3$.
Por outro lado, dado $w=(x,y,z)\in U\cap V$, tem-se:
$x+y+z=0$ (pois $w\in U$) e $x=z=0$ (já que $w\in V$). Assim, $x=y=z=0$. Isto é $w=(0,0,0)$. Portanto $U\cap V=\{0\}$, isto é $U\oplus V=\mathbb{R}^3$.

ii) $\boxed{U+W=\mathbb{R}^3}$.

Solução 1. Dado $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, tomemos $u=(-y+z,\,y-z,\,0)$ e $w=(y-z+x,\,z,\,z)$.
Tem-se que $u\in U$, $w\in W$ e $u+w=(-y+z+y-z+x,\,y-z+z,\,0+z)=(x,y,z)=v$. Logo, $U+W=\mathbb{R}^3$.
$\mathbb{R}^3$ não é soma direta de U e W, pois o vetor $v_0=(-2,1,1)\in U\cap W$ e $v_0\neq 0$.

Solução 2. A fim de analisar a igualdade $U+W=\mathbb{R}^3$, devemos analisar, para um vetor $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ a existência de vetores $u=(a,b,c)\in U$ e $w=(d,e,f)\in W$ tais que $v=u+w$.

Isto é equivalente a analisar o que ocorre com as soluções do sistema

$$(*)\begin{cases} a+b+c=0 \\ e=f \\ a+d=x \\ b+e=y \\ c+f=z. \end{cases}$$

(note que as incógnitas são: a, b, c, d, e, e f.)

Como o sistema $(*)$ é possível e indeterminado (Verifique), então a igualdade $U+W=\mathbb{R}^3$ é verdadeira (pois os vetores u e w acima existem) mas não se tem $U\oplus W=\mathbb{R}^3$, já que os vetores u e w que satisfazem a igualdade $v=u+w$, (com $u\in U$, $w\in W$ e $v\in\mathbb{R}^3$) não são únicos.

Obs. Essa técnica de analisar o sistema associado às somas de vetores do tipo $u=v+w$ e às igualdades que definem os subespaços em questão, também poderiam ser utilizados nos demais itens, (i) e (ii).

iii) $\boxed{V+W=\mathbb{R}^3}$

Dado $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, tomemos $v=(0,y-z,0)$ e $w=(x,z,z)$. Tem-se $v\in V$, $w\in W$ e $v+w=(x,y,z)=u$. Isto é $V+W=\mathbb{R}^3$

Por outro lado, dado $u=(x,y,z)\in V\cap W$, tem-se:

$$\begin{cases} x=z=0 \\ y=z \end{cases}$$

. Logo, $x=z=y=0$, ou seja, $u=0$. Segue-se que $V\cap W=\{0\}$. Portanto $V\oplus W=\mathbb{R}^3$.