UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR
PROF.: JAIRO
ALUNO: FELIPE DERKIAN DE SOUSA FREITAS

LISTA 16

BOA VISTA, 15 DE NOVEMBRO DE 2020

Universidade Federal de Roraima
Álgebra Linear I - Lista 16
Prof. Jairo S. Araujo Costa

Data:05-12/11/2020
MB202
Turma 1

Questão 1. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Dados $u, v \in V$, determine $\langle 2u, 3v\rangle$ sabendo que $\|u + v\| = 7$ e $\|u - v\| = 3$.

Questão 2. Verique se os vetores da base canônica de $P_3(\mathbb{R})$ é uma base ortonormal em relação ao produto interno dado por

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

E se fosse o produto interno

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt?$$

Determine outro produto interno sobre $P_3(\mathbb{R})$, relativo ao qual a base canônica de $P_3(\mathbb{R})$ é uma base ortonormal.

Questão 3. Exercício 10, página 123 do livro "Álgebra linear essencial", disponível em https://www.ronaldofreiredelima.com/books (clique em Draft).

Observações:

i) Resolva as questões (escreva as soluções em uma folha branca, de preferência papel A4, para facilitar a visibilidade), em seguida digitalize as folhas com as soluções e rena-as em um (único) arquivo no formato PDF. O envio desse arquivo será utilizado para atestar sua frequência nas aulas dos dias 05-12/11/2020. As soluções contidas no referido arquivo serão corrigidas para, com as demais listas de exercícios, formar a nota N_4 (ver plano de ensino do curso);

ii) assine em todas as folhas.

$\langle 2u, 3v \rangle$ Lista 16 - AL

① Temos que $\|u+v\| = 7$ e $\|u-v\| = 3$ então para $\|u-v\|$ temos,

$\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}$ colocando raiz quadrado de ambos os lados temos

$\|u-v\|^2 = \left(\sqrt{\langle u-v, u-v \rangle}\right)^2$ então:

$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle$ resolvendo produto interno tem-se.

$\|u-v\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle u, -v \rangle + \langle -v, u \rangle + \langle -v, -v \rangle$

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + (-1).\langle u, v \rangle + (-1).\langle v, u \rangle + (-1).(-1).\langle v, v \rangle$

$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ ✱

Agora para $\|u+v\|$ temos,

$\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v, u+v \rangle}$ colocando raiz quadrado dos dois lados

$\|u+v\|^2 = \left(\sqrt{\langle u+v, u+v \rangle}\right)^2$ então:

$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$ que desenvolvendo o produto interno tem-se

$\|u+v\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$

Felype

logo $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 \Rightarrow \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 - \left(\|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2\right)$

$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \cancel{\|u\|^2} + 2\langle u, v \rangle + \cancel{\|v\|^2} - \cancel{\|u\|^2} + 2\langle u, v \rangle - \cancel{\|v\|^2}$

$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$

logo, $\langle u, v \rangle = \dfrac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$

Portanto: $\langle 2u, 3v \rangle$

$= 2.3.\dfrac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$

$= \dfrac{6}{4}.(7^2 - 3^2) = 60$ ✱

Lista 1 GAL ②

$P_3(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) ; f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \}$

$B = \{ f_i \in P_3(\mathbb{R}) ; f_i(t) = t^i , i = \{0 - 3\}$

$= \{ f_0, f_1, f_2, f_3 \} = \{ 1, t, t^2, t^3 \}$

② Definimos $T : P_3(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$

Sendo

$T(f_i) = e_{i+1}$, com $i \in \{0, \dots, 3\}$,

onde $B' = \{e_1, \dots, e_4\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$,

$B = \{f_0, \dots, f_3\}$ é a base canônica de $P_3(\mathbb{R})$ e $\langle , \rangle$ o produto interno canônico de $\mathbb{R}^4$.

T é um isomorfismo. Em particular T é injetivo, assim,

$$\langle , \rangle_0 : P_3(\mathbb{R}) \times P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_0 = \langle T(f), T(g) \rangle$$ é um produto interno em $P_3(\mathbb{R})$.

Felipe

Além disso, $\langle f_i, f_j \rangle = \langle T(f_i), T(f_j) \rangle = \langle e_{i+1}, e_{j+1} \rangle$

Para $i,j \in \{0, \dots, 3\}$ tem-se $\begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$