Transformações Lineares

Carlos Luz, Ana Matos, Sandra Nunes
Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal

Ano Lectivo 2004/2005

Conteúdo

Recorde-se que uma aplicação (ou função) de um conjunto sobre outro é uma regra que, a cada elemento do primeiro conjunto (conjunto de partida), faz corresponder um e um só elemento do segundo (conjunto de chegada).

As transformações lineares são aplicações entre dois espaços vectoriais que, num certo sentido, preservam as operações de adição e multiplicação escalares definidas nesses espaços.

A importância de que se revestem na resolução de diversos problemas de Engenharia, tornam as transformações lineares um tema obrigatório de estudo num curso introdutório de Álgebra Linear. Neste capítulo faremos uma digressão sucinta pelos aspectos essenciais das transformações lineares, realçando, nomeadamente, as ligações estreitas existentes entre as noções de transformação linear e de matriz.

1 Definição. Representação Matricial

Supondo fixada a base canónica em $\mathbb{R}^2$, consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

e o vector $\vec{x} = (1, 1/3) \in \mathbb{R}^2$. Representando este vector pela matriz coluna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$[1], podemos calcular o produto

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{y}.$$

A multiplicação de A por $\vec{x}$ pode então ser vista como uma acção de transformação do vector $\vec{x} = (1, 1/3)$ no vector $\vec{y} = (-1/3, 1)$. A figura 1 ilustra geometricamente o que aconteceu: ao ser multiplicado por A, o vector $\vec{x}$ "sofreu" uma rotação de $+90\,^\circ$, sendo transformado (ou aplicado) no vector $\vec{y}$.

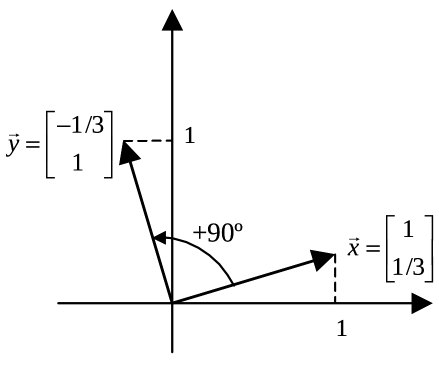

Figura 1: Rotação de $+90^o$.

Em geral, a multiplicação da matriz A pelo vector genérico $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ conduz ao vector $\vec{y} = (-x_2, x_1)$ pois

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \vec{y}. \tag{2}$$

Geometricamente, o vector transformado $\vec{y} = (-x_2, x_1)$ pode ser visto como o resultado da rotação de $\vec{x} = (x_1, x_2)$ de $90\,^\circ$ no sentido positivo, tal como ilustra a fig. 2.

[1]Não havendo perigo de confusão quanto à base fixada, identificaremos um vector de $\mathbb{R}^n$ com a matriz coluna formada pelas suas componentes.

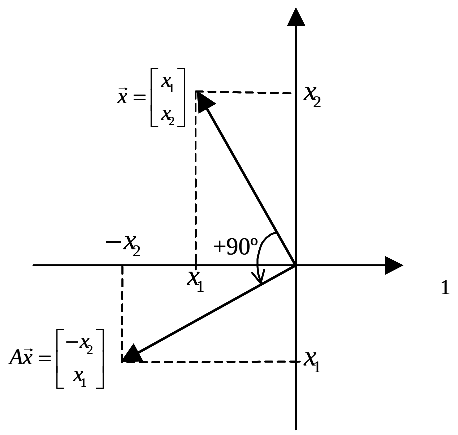

Figura 2: Rotação de $+90^\circ$ definida pela matriz A.

Deste modo, a matriz A define uma aplicação T de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$, designada por *rotação*, que a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ associa o vector $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Simbolicamente, T pode representar-se por

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{x} & \rightarrow & \vec{y} = T(\vec{x}) = A\vec{x}. \end{array}$$

O vector $\vec{y} = T(\vec{x})$ diz-se a **imagem** do vector $\vec{x}$ por intermédio da transformação T. Tendo em conta (2), a rotação T pode ser, alternativamente, definida por

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \rightarrow & T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1). \end{array}$$

T diz-se uma transformação linear dado que satisfaz as condições da definição seguinte:

Definição 1.1 *Sejam E e F dois espaços vectoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : E \rightarrow F$ diz-se uma* ***transformação*** *(ou* ***aplicação****)* ***linear*** *de E em F se:*

1. $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$, *quaisquer que sejam $\vec{x}, \vec{y} \in E$;*

2. $T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$, *quaisquer que sejam $\vec{x} \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Por outras palavras, T é uma transformação linear de E em F se *a imagem da soma de dois vectores de E é igual à soma das imagens dos vectores* e *a imagem do produto de um vector de E por um escalar coincide com o produto do escalar pela imagem do vector.*

Quando se considera uma transformação linear entre dois espaços vectoriais, admite-se que estes têm o mesmo conjunto de escalares. De notar também que as duas condições da definição anterior podem ser reunidas na condição

$$T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y}),$$

para todos os vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de E e todos os escalares λ e μ de $\mathbb{K}$. De facto, esta última igualdade é equivalente às anteriores podendo ser igualmente utilizada para definir transformação linear.

Uma transformação linear de E em F também se diz um **homomorfismo**. Em particular, dir-se-á um **monomorfismo** se é injectiva, um **epiformismo** se é sobrejectiva, um **isomorfismo** se é bijectiva, um **endomorfismo** se $F = E$ e um **automorfismo** se é simultaneamente um endoformismo e um isomorfismo.

Exemplo 1.1 Comecemos por verificar que a rotação $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ vista acima é uma transformação linear. Com efeito, dados dois quaisquer vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ pertencentes a $\mathbb{R}^2$ e um escalar arbitrário $\lambda \in \mathbb{R}$, as propriedades da multiplicação de matrizes permitem escrever

$$T(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

e

$$T(\lambda\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda T(\vec{x}).$$

Mais geralmente, seja A uma matriz qualquer de tipo $m \times n$ e $\vec{x}$ um vector de $\mathbb{R}^n$. A aplicação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ é uma transformação linear. A verificação resulta das propriedades da multiplicação de matrizes, tal como no caso da rotação. ∎

Exemplo 1.2 Uma das transformações lineares mais simples é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada for $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$. Esta função é representada geometricamente, num plano onde se fixou um referencial cartesiano ortonormado, por uma recta que passa pela origem e tem declive a. Com efeito, f é uma transformação linear pois, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

e

$$f(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda f(x).$$

Por outro lado, já a função quadrática $f(x) = x^2$ (representada geometricamente por uma parábola) não é uma transformação linear pois, por exemplo, para $x = 1$ e $y = 1$, tem-se $f(1+1) = f(2) = 2^2 = 4$ e $f(1) + f(1) = 1^2 + 1^2 = 2$. Assim,

$$f(1+1) \neq f(1) + f(1),$$

e, portanto, a primeira condição da definição 1.1 não se verifica. ∎

Vejamos algumas propriedades das transformações lineares.

Proposição 1.1 *Sejam E e F dois espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ e T uma transformação linear de E em F. Então vale o seguinte:*

(a) $T(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, *onde* $\vec{0}_E$ *e* $\vec{0}_F$ *designam respectivamente os vectores nulos de* E *e* F.

(b) $T(-\vec{x}) = -T(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in E$

(c) $T(\vec{x}-\vec{y}) = T(\vec{x}) - T(\vec{y}), \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E.$

(d) *Se* $\vec{x} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{v}_p$, *com* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p \in E$ *e* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, *então*

$$T(\vec{x}) = T(\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_p\vec{v}_p) = \lambda_1 T(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_p T(\vec{v}_p).$$

Demonstração Para provar (a) recorde-se que $0_{\mathbf{K}}\vec{x} = \vec{0}_E$ para qualquer $\vec{x} \in E$. Então, atendendo à definição de transformação linear e de novo à igualdade anterior, tem-se

$$T(\vec{0}_E) = T(0_{\mathbf{K}}\vec{x}) = 0_{\mathbf{K}}T(\vec{x}) = \vec{0}_F.$$

A propriedade (b) é consequência de $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$. De facto, daqui segue-se que

$$T(-\vec{x}) = T\left[(-1)\vec{x}\right] = (-1)T(\vec{x}) = -T(\vec{x}),$$

atendendo à definição de transformação linear.

Quanto à propriedade (c) tem-se, atendendo a que $\vec{x}-\vec{y} = \vec{x}+(-\vec{y})$, à definição de transformação linear e à propriedade (b):

$$T(\vec{x}-\vec{y}) = T\left[\vec{x}+(-\vec{y})\right] = T(\vec{x}) + T(-\vec{y}) = T(\vec{x}) - T(\vec{y}).$$

Deixa-se a demonstração de (d) como exercício. ∎

Exemplo 1.3 Considere-se

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \to & T(x_1, x_2) = (x_2, x_1). \end{array}$$

Para verificar que é uma transformação linear realizam-se os seguintes passos:

1. Sejam $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ dois quaisquer vectores de $\mathbb{R}^2$. Então,

$$\begin{aligned} T(\vec{x} + \vec{y}) &= T\left[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\right] = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_2 + y_2, x_1 + y_1) \\ &= (x_2, x_1) + (y_2, y_1) = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) = T(\vec{x}) + T(\vec{y}), \end{aligned}$$

   sendo a 2ª e 3ª igualdades devidas à operação de adição de vectores e as restantes justificadas pelas definições de $\vec{x}$, $\vec{y}$ e T. Deste modo, verifica-se a primeira condição da definição 1.1.

2. Sejam $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} T(\lambda\vec{x}) &= T\left[\lambda(x_1, x_2)\right] = T(\lambda x_1, \lambda x_2) \\ &= (\lambda x_2, \lambda x_1) = \lambda(x_2, x_1) = \lambda T(x_1, x_2) = \lambda T(x), \end{aligned}$$

   sendo as igualdades justificadas exactamente como no procedimento anterior, ficando assim satisfeita a segunda condição da definição 1.1.

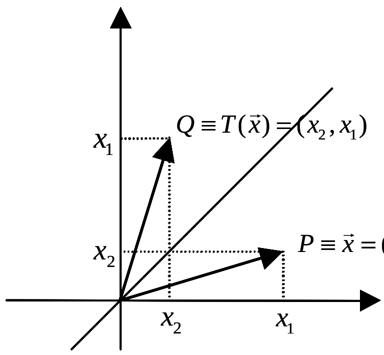

Figura 3: Reflexão.

Para interpretar geometricamente a transformação T observe-se a figura 3 que sugere a simetria dos vectores (x_1, x_2) e (x_2, x_1) relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares. Sejam P e Q as extremidades dos vectores (x_1, x_2) e (x_2, x_1), respectivamente. O ponto médio do segmento $[PQ]$ tem a forma $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$ pertencendo, portanto, à referida bissectriz. Simultaneamente, $[PQ]$ é perpendicular a esta recta, pois sendo

$$\overrightarrow{PQ} = T(x_1, x_2) - (x_1, x_2) = (x_2 - x_1, x_1 - x_2)$$

e $(1, 1)$ um vector com a direcção daquela bissectriz, tem-se

$$\overrightarrow{PQ}|(1, 1) = (x_2 - x_1, x_1 - x_2)|\,(1, 1) = 0.$$

Assim, é natural dizer que T é uma *reflexão*.

Vejamos agora se, à semelhança da transformação rotação, é possível representar matricialmente a reflexão T. A resposta é afirmativa pois:

1. O vector (x_1, x_2) pode escreve-se na forma

$$(x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$$

donde, pela alínea (d) da proposição 1.1,

$$T(x_1, x_2) = x_1 T(1, 0) + x_2 T(0, 1), \tag{3}$$

ou seja,

$$(x_2, x_1) = x_1(0, 1) + x_2(1, 0).$$

2. Esta igualdade escreve-se matricialmente na forma

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pelo que equivale ao seguinte produto matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz $A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ permite definir alternativamente a reflexão T por

$$T(\vec{x}) = A_T\, \vec{x},\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Supondo fixada em $\mathbb{R}^2$ a base canónica $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$, da igualdade (3) conclui-se que as colunas da matriz A_T são, respectivamente, as imagens de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ por meio de T expressas naquela base. Efectivamente, tem-se $T(\vec{e}_1) = (0, 1) = \vec{e}_2$ e $T(\vec{e}_2) = (1, 0) = \vec{e}_1$, pelo que a 1ª coluna de A_T contém as coordenadas de $\vec{e}_2$ e, a 2ª coluna, as coordenadas de $\vec{e}_1$. A matriz A_T diz-se a matriz representativa de T relativamente à base fixada em $\mathbb{R}^2$. ■

Exemplo 1.4 Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3).$$

Para verificar que T é linear sejam (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) quaisquer vectores de $\mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, de forma análoga à do exemplo 1.3, tem-se

$$\begin{aligned} T\left[(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)\right] &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (x_1 + y_1, x_3 + y_3) = (x_1, x_3) + (y_1, y_3) \\ &= T(x_1, x_2, x_3) + T(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T\left[\lambda(x_1, x_2, x_3)\right] &= T(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_3) = \lambda(x_1, x_3) \\ &= \lambda T(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Supondo fixadas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ as respectivas bases canónicas, tal como foi sugerido no exemplo anterior e será provado no teorema 1.1, para obter a representação matricial de T bastará calcular $T(\vec{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0)$, $T(\vec{e}_2) = T(0, 1, 0) = (0, 0)$ e $T(\vec{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 1)$ e considerar a matriz de tipo 2×3 formada por estas imagens, isto é, $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. De facto, para qualquer $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, verifica-se que $T(\vec{x}) = A_T \vec{x}$ pois

$$A_T \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}. \ ■$$

Exemplo 1.5 Considere-se a transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(\vec{x}) = c\,\vec{x}$, onde c é uma constante real. Trata-se de uma transformação linear que, no caso de $c = 0$, se diz a **transformação nula** de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e é representada matricialmente pela matriz nula. Caso $c = 1$, obtém-se a **transformação identidade** em $\mathbb{R}^n$, que é representada matricialmente pela matriz identidade de ordem n, I_n, visto que $T(\vec{x}) = \vec{x} \Leftrightarrow T(\vec{x}) = I_n\vec{x}$. ■

Exemplo 1.6 Seja P_n o espaço vectorial dos polinómios de grau menor ou igual a n e $S_n = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ a sua base canónica. Considere-se, em particular, a transformação $D : P_3 \to P_3$ (designada por operador de derivação) que a cada polinómio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3$$

faz corresponder a sua derivada

$$D(p) = \frac{dp}{dx}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \in P_3.$$

D é uma transformação linear pois, dados $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, $q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ e λ escalar, tem-se

$$D(p+q) = D(p) + D(q)$$

e

$$D(\lambda p) = \lambda D(p).$$

De facto, estas igualdades deduzem-se com facilidade, atendendo a que a derivada da soma é a soma das derivadas e que a derivada do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela derivada da função.

Para obter a matriz representativa de D, vamos exprimir na base $S_3 = \{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ as imagens dos elementos de S_3 por meio de D. Tem-se então

$$\begin{array}{l} D(1) = 0 = 0 \times 1 + 0 \times x + 0 \times x^2 + 0 \times x^3, \\ D(x) = 1 = 1 \times 1 + 0 \times x + 0 \times x^2 + 0 \times x^3, \\ D(x^2) = 2x = 0 \times 1 + 2 \times x + 0 \times x^2 + 0 \times x^3, \\ D(x^3) = 3x^2 = 0 \times 1 + 0 \times x + 3x^2 + 0 \times x^3 \end{array}$$

e, portanto, D pode ser representada matricialmente por

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz representativa de D comporta toda a informação que é essencial para determinar os coeficientes da derivada de qualquer polinómio de P_3 e, consequentemente, essa mesma derivada. De facto, obtêm-se os coeficientes da derivada dum polinómio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ multiplicando a matriz A_D pelos coeficientes de $p(x)$:

$$A_D \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Vimos, no exemplo 1.1 acima, que qualquer matriz de elementos reais define uma transformação linear. Nos restantes exemplos, mesmo quando as transformações lineares não foram dadas matricialmente, foram determinadas matrizes representativas. A questão que naturalmente se põe, é a de saber se qualquer transformação linear de um espaço vectorial para outro tem uma representação matricial. A resposta é afirmativa no caso dos espaços vectoriais de dimensão finita como se mostra no resultado seguinte.

Teorema 1.1 *Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita. Suponham-se fixadas em E e em F as bases ordenadas*[2] $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ *e* $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$, *respectivamente, e seja* $T : E \to F$ *uma transformação linear.*

Então, a imagem $\vec{y} = T(\vec{x}) \in F$ de qualquer vector $\vec{x} \in E$ obtém-se por

$$\vec{y} = A\vec{x} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

em que:

- *A é uma matriz do tipo $m \times n$ e as suas colunas são, respectivamente, as coordenadas dos vectores $T(\vec{e}_1)$, $T(\vec{e}_2), \ldots,$ $T(\vec{e}_n)$ relativamente à base $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m\}$ de F;*
- *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as coordenadas de $\vec{x}$ relativamente à base fixada em E, isto é, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$;*
- *$y_1, y_2, \ldots, y_m$ são as coordenadas de $\vec{y}$ relativamente à base fixada em F, isto é, $\vec{y} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + \cdots + y_m\vec{f}_m$.*

*A matriz A é **única** e diz-se a **matriz representativa de** T relativamente às bases fixadas em E e em F.*

Demonstração Dado que T é uma transformação linear tem-se

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) + \cdots + x_nT(\vec{e}_n), \end{aligned} \tag{4}$$

ou seja, $T(\vec{x})$ é uma combinação linear das imagens dos vectores da base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de E. Ora, estas imagens representam-se na base $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$ de F por

$$T(\vec{e}_i) = a_{1i}\vec{f}_1 + a_{2i}\vec{f}_2 + \cdots + a_{mi}\vec{f}_m, \quad \forall i = 1, \ldots n$$

ou matricialmente por

$$T(\vec{e}_i) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}.$$

Então, por (4), $T(\vec{x})$ pode escrever-se na forma

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

[2] Suporemos aqui que os vectores das bases de E e F obedecem a uma ordenação pré-fixada.

Note-se que as linhas desta última matriz são exactamente as coordenadas de $T(\vec{x})$ na base $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_m}\}$ inicialmente fixada em F. Designando $T(\vec{x})$ por $\vec{y}$ e aquelas coordenadas por $y_1, y_2, \ldots, y_m$, obtém-se de (5)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

ou seja, $\vec{y} = A\vec{x}$ em que A designa, como se enunciou, a matriz cujas colunas são as imagens por meio de T dos vectores da base fixada em E. Visto que estas imagens se escrevem de maneira única em função dos vectores da base de F, conclui-se que A é a única matriz que representa T nas bases ordenadas fixadas em E e F. $\blacksquare$

Exemplo 1.7 Seja $T : R^3 \to R^2$ a transformação definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1 + x_3)$ e suponha-se fixada em $\mathbb{R}^3$ a base canónica $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\} = \{(1,0), (1,1)\}$. Para obter a matriz representativa de T há que sucessivamente calcular:

$$\begin{aligned} T(\vec{e_1}) &= T(1,0,0) = (0,1) = -1\vec{f_1} + 1\vec{f_2}; \\ T(\vec{e_2}) &= T(0,1,0) = (1,0) = 1\vec{f_1} + 0\vec{f_2}; \\ T(\vec{e_3}) &= T(0,0,1) = (0,1) = -1\vec{f_1} + 1\vec{f_2}. \end{aligned}$$

Dispondo nas colunas de uma matriz as coordenadas de $T(\vec{e_1})$, $T(\vec{e_2})$ e $T(\vec{e_3})$ na base $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$, obtém-se a matriz que representa T nas bases fixadas:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, se em $\mathbb{R}^2$ a base fixada tivesse sido a base canónica formada pelos vectores $\vec{e_1} = (1,0)$ e , $\vec{e_2} = (0,1)$, a transformação T seria representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pois $T(\vec{e_1}) = \vec{e_2}$, $T(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$ e $T(\vec{e_3}) = \vec{e_2}$. $\blacksquare$

Exemplo 1.8 Suponha-se de novo a reflexão $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Ora já se viu que estando fixada em $\mathbb{R}^2$ a base canónica, a matriz que representa T é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pois $T(\vec{e_1}) = T(1,0) = (0,1) = \vec{e_2}$ e $T(\vec{e_2}) = \vec{e_1}$. Suponha-se, por outro lado, fixada em $\mathbb{R}^2$ a base $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ com $\vec{f_1} = (1,1)$ e $\vec{f_2} = (-1,1)$. Para obter a matriz de T na nova base há que determinar $T(\vec{f_1})$ e $T(\vec{f_2})$ e exprimir estes vectores naquela base. Então, como

$$\begin{aligned} T(\vec{f_1}) &= T(1,1) = (1,1) = 1\vec{f_1} + 0\vec{f_2} \quad \text{e} \\ T(\vec{f_2}) &= T(-1,1) = (1,-1) = 0\vec{f_1} - 1\vec{f_2}, \end{aligned}$$

tem-se que a representação matricial de T na base $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. $\blacksquare$.

1.1 A Composição de Transformações Lineares e o Produto Matricial

Consideremos agora duas transformações lineares $T : E \to F$ e $S : F \to G$ entre espaços vectoriais de dimensão finita. A **composição de** S **com** T é a transformação $S \circ T$ definida por

$$(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})), \quad \forall \vec{x} \in E.$$

Vimos no teorema anterior que a cada transformação linear está associada a matriz que a representa relativamente às bases consideradas. Observemos agora que a composição de transformações lineares está associada ao produto das matrizes que representam aquelas transformações nas bases consideradas.

Proposição 1.2 *Sejam E, F e G espaços vectoriais sobre o mesmo corpo e designemos respectivamente por A_T e A_S as matrizes que representam as transformações lineares $T : E \to F$ e $S : F \to G$ relativamente a bases fixadas em E, F e G. Então, a matriz $A_{S \circ T}$ que representa $S \circ T$, relativamente às mesmas bases, é o produto de A_S por A_T, isto é, $A_{S \circ T} = A_S A_T$.*

Demonstração Provemos primeiro que $S \circ T$ é uma transformação linear. Com efeito, para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in E$ tem-se

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\vec{x} + \vec{y}) &= S(T(\vec{x} + \vec{y})) = S(T(\vec{x}) + T(\vec{y})) \\ &= S(T(\vec{x})) + S(T(\vec{y})) = (S \circ T)(\vec{x}) + (S \circ T)(\vec{y}).\end{aligned}$$

Por outro lado, para qualquer $\vec{x} \in E$ e todos os escalares λ tem-se

$$(S \circ T)(\lambda \vec{x}) = S(T(\lambda \vec{x})) = S(\lambda T(\vec{x})) = \lambda S(T(\vec{x})) = \lambda (S \circ T)(\vec{x}),$$

e, portanto, $S \circ T$ é uma transformação linear.

Considerando fixadas bases em E, F e G, tem-se, atendendo à definição de $S \circ T$ e ao teorema anterior:

$$(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})) = S(A_T \vec{x}) = A_S A_T \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in E.$$

Visto que a representação matricial de uma transformação linear é única, resulta destas igualdades que $A_{S \circ T} = A_S A_T$, tendo em conta que $S \circ T$ é linear. ■

Exemplo 1.9 Consideremos duas transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ representadas, relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, por

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se então que a matriz representativa de $S \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dada por

$$A_{S \circ T} = A_S A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, $(S \circ T)(x_1, x_2) = (x_1 + 3x_2, 2x_2)$.

Por outro lado, a matriz representativa de $T \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é

$$A_{T \circ S} = A_T A_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $(T \circ S)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2,\ 3x_1 + x_2 + x_3)$. ■

1.2 Mudança de Base

Seja $T : E \to E$ um endomorfismo do espaço vectorial E de dimensão finita. Quando neste espaço se efectua uma mudança de base, cada vector de E passa a ser representado por coordenadas distintas das iniciais. Estamos agora interessados em estudar a alteração provocada por uma mudança de base na matriz representativa do endomorfismo T. Comecemos com um exemplo ilustrativo.

Exemplo 1.10 Seja E um espaço vectorial de base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $T : E \to E$ uma transformação linear cuja representação relativamente à base indicada é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando o sistema de vectores $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, em que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 \end{array} \right. , \tag{6}$$

pretende-se:

(a) Mostrar que $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ é uma nova base de E.

(b) Determinar a matriz associada a T na nova base.

Para ver (a) basta verificar que $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ são linearmente independentes. Ora, $\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = \vec{0}_E$ equivale a

$$\lambda_1 (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \lambda_2 (-\vec{e}_1 - \vec{e}_3) + \lambda_3 (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3) = \vec{0}_E$$
$$\Updownarrow$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\vec{e}_1 + \lambda_1 \vec{e}_2 + (-\lambda_2 + 2\lambda_3)\vec{e}_3 = \vec{0}_E.$$

Como $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são linearmente independentes, a última igualdade equivale a

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right. ,$$

pelo que $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ são linearmente independentes.

Passemos à resolução de (b). Como

$$\begin{aligned} T(\vec{f}_1) &= T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (-1, 0, -1), \\ T(\vec{f}_2) &= T(-\vec{e}_1 - \vec{e}_3) = (3, -1, 0) \quad \text{e} \\ T(\vec{f}_3) &= T(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3) = (-5, 2, 0), \end{aligned}$$

as expressões de $T(\vec{f}_1)$, $T(\vec{f}_2)$ e $T(\vec{f}_3)$ na base $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ obtêm-se por:

$$\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = (-1, 0, -1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right. ,$$

$$\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = (3, -1, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_1 = -1 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = -8 \end{array} \right.$$

e

$$\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = (-5, 2, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = -5 \\ \lambda_1 = 2 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 14 \\ \lambda_3 = 7 \end{array} \right. .$$

Consequentemente, a matriz associada a T na nova base é

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 14 \\ 0 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Podemos agora perguntar se existe alguma relação entre entre as matrizes A e B do exemplo anterior. Efectivamente, A e B são **matrizes semelhantes**, isto é, existe uma matriz P, invertível, tal que $B = P^{-1}AP$.

Antes de justificar esta afirmação, vejamos como pode P ser obtida. Considerando as igualdades (6) dadas no enunciado para relacionar as bases $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, podemos escrever

$$[\ \vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \vec{f}_3\ ] = [\ \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3\ ] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

A mencionada matriz P é precisamente a matriz que se encontra mais à direita nesta igualdade e diz-se a **matriz de mudança de base,** isto é,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Note-se que a matriz P é invertível. Com efeito, as 1^{a}, 2^{a} e 3^{a} colunas de P são formadas, respectivamente, pelas coordenadas de $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ na base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Deste modo, as colunas de P são linearmente independentes se e só se $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ também o forem. Dado que estes vectores são linearmente independentes, conclui-se que o mesmo acontece com as colunas de P, pelo que esta matriz é invertível.

Além disto, supondo que $\vec{x}$ se exprime na base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ por $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, podemos escrever esta igualdade na forma matricial do seguinte modo:

$$\vec{x} = [\ \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Logo, por (7), concluimos que

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

ou, mais sucintamente,

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix} P^{-1}X = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{bmatrix} X',$$

onde X e X' designam as matrizes coluna correspondentes às coordenadas de $\vec{x}$ nas bases $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, respectivamente. Deduz-se assim que

$$X' = P^{-1}X \Leftrightarrow X = PX', \tag{8}$$

exprimindo estas igualdades a relação existente entre as coordenadas de $\vec{x}$ em cada uma daquelas bases.

Generalizando para vectores com um qualquer número finito de coordenadas, podemos enunciar:

Proposição 1.3 *Se $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ e $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ são duas bases de um espaço vectorial de dimensão finita e P é a matriz de mudança de base, então as matrizes coluna X e X', que representam um mesmo vector $\vec{x}$ em cada uma das bases, estão relacionadas por $X = PX'$.*

Passamos agora a justificar o que afirmámos atrás: as matrizes A e B do exemplo 1.10 são semelhantes.

Supondo fixada em E a base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, a transformação T pode escrever-se matricialmente na forma

$$Y = AX, \tag{9}$$

onde X é a matriz coluna que representa, naquela base, um dado vector $\vec{x} \in E$ e Y representa a correspondente imagem, na mesma base. Se a base de E passar a ser $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, a transformação T passar-se-á a representar por

$$Y' = BX', \tag{10}$$

onde X' e Y' são, respectivamente, as expressões de X e Y na nova base. Sendo P a matriz de mudança de base temos, por (8), que $Y' = P^{-1}Y$ e $X = PX'$. Utilizando estas igualdades e (9), obtemos

$$Y' = P^{-1}Y = P^{-1}AX = \left(P^{-1}AP\right)X'.$$

Comparando esta expressão com (10), conclui-se que

$$B = P^{-1}AP,$$

isto é, as matrizes que representam T nas bases $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ são semelhantes.

No caso do exemplo 1.10, o leitor pode facilmente verificar que a inversa da matriz de mudança de base P obtida em (7) é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e que $P^{-1}AP = B$.

Todas as deduções feitas são evidentemente válidas num espaço vectorial de dimensão finita, pelo que podemos enunciar:

Proposição 1.4 *Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Um endomorfismo $T : E \to E$ é representado em bases diferentes por matrizes semelhantes.*

2 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Seja $T : E \to F$ uma transformação linear. Associados a T consideram-se habitualmente dois subconjuntos, um do espaço vectorial de partida, E, e o outro do espaço vectorial de chegada, F. O primeiro é o conjunto do vectores de E que são aplicados no vector nulo $\vec{0}_F$ de F, designado por **espaço nulo de** T ou **núcleo de** T e representado habitualmente por $\mathrm{Nuc}(T)$ (ou $\mathrm{Ker}(T)$[3]). Tem-se assim,

$$\mathrm{Nuc}(T) = \left\{\vec{x} \in E : T(\vec{x}) = \vec{0}_F\right\}.$$

O segundo subconjunto mencionado, é o conjunto das imagens de E por meio de T, designa-se por **imagem de** T ou **contradomínio de** T, representa-se por $T(E)$ e, formalmente, é dado por

$$T(E) = \{T(\vec{x}) \in F : \vec{x} \in E\} = \{\vec{y} \in F : \exists \vec{x} \in E : \vec{y} = T(\vec{x})\}.$$

Sendo A a matriz representativa de T, é imediato verificar que $\mathrm{Nuc}(T)$ coincide com o espaço nulo da matriz A e que $T(E)$ não é mais do que o espaço das colunas da mesma matriz (recordem-se as secções 4.5 e 4.6 do volume I. Consequentemente, o seguinte resultado é válido:

Proposição 2.1 *Seja $T : E \to F$ uma transformação linear. Então, o núcleo de T e a imagem de T são subespaços vectoriais de E e F, respectivamente.*

[3]Abreviatura da palavra inglesa *kernel*.

Exemplo 2.1 Considere-se a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1 + x_3).$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}(T) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)\}\\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_2, x_1 + x_3) = (0, 0)\},\end{aligned}$$

donde os vectores do núcleo de T verificam o sistema de equações

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}.$$

Assim, $\mathrm{Nuc}(T)$ é constituído pelos vectores de $\mathbb{R}^3$ da forma $(-x_3, 0, x_3) = x_3(-1, 0, 1)$, ou seja, $\mathrm{Nuc}(T) = \langle(-1, 0, 1)\rangle$.

Para obter

$$T(\mathbb{R}^3) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \exists(x_1, x_2, x_3) : T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)\}$$

basta ver para que vectores $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ é possível o sistema

$$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \end{cases}.$$

Escrevendo a matriz ampliada deste sistema e calculando a respectiva característica (para o que é suficiente efectuar uma troca de linhas) obtém-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & 1 & y_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \end{array}\right].$$

Como a característica da matriz dos coeficientes iguala a da matriz ampliada, conclui-se que o sistema é sempre possível, qualquer que seja o vector $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Consequentemente, $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$. Finalmente, o conjunto $\{(0, 1), (1, 0)\}$ constitui uma base de $T(\mathbb{R}^3)$, visto que é formado pelas colunas da matriz representativa de T homólogas das que contêm os redutores da matriz em escada.
■

Observe-se que no exemplo anterior é válida a igualdade

$$\dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim T(\mathbb{R}^3) = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3,$$

isto é, a soma das dimensões do núcleo de T e da imagem de T iguala a dimensão do espaço de partida. O resultado seguinte estabelece que aquela igualdade é válida em geral.

Teorema 2.1 *Seja E um espaço vectorial de dimensão finita e $T : E \to F$ uma transformação linear. Então,*

$$\dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim T(E) = \dim E.$$

Demonstração Seja $n = \dim E$ e $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ uma base para $\mathrm{Nuc}(T)$, donde $k = \dim \mathrm{Nuc}(T) \leq n$. Pelo teorema 2.4 (pág. 59) de [4], aqueles elementos são parte de uma certa base de E, por exemplo,

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \ldots, \vec{e}_{k+r} \tag{11}$$

onde $k + r = n$. Vamos demonstrar que os r elementos

$$T(\vec{e}_{k+1}), \ldots, T(\vec{e}_{k+r}) \tag{12}$$

formam uma base de $T(E)$. Ficará assim demonstrado que $\dim T(E) = r$ e visto que $k + r = n$, fica igualmente provado o teorema.

Vejamos primeiro que os r elementos (12) geram $T(E)$. Para tal, seja $\vec{y} \in T(E)$. Então, existe $\vec{x} \in E$ tal que $\vec{y} = T(\vec{x})$. Dado que

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k + \lambda_{k+1} \vec{e}_{k+1} + \cdots + \lambda_{k+r} \vec{e}_{k+r},$$

tem-se

$$\vec{y} = T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T(\vec{e}_i) + \sum_{i=k+1}^{k+r} \lambda_i T(\vec{e}_i) = \sum_{i=k+1}^{k+r} \lambda_i T(\vec{e}_i),$$

atendendo a que T é uma transformação linear e ao facto de $T(\vec{e}_1) = \cdots = T(\vec{e}_k) = \vec{0}_F$. Isto prova que os r elementos de (12) geram $T(E)$.

Provemos finalmente a independência linear destes vectores. Suponhamos que existem escalares $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+r}$ tais que

$$\sum_{i=k+1}^{k+r} \lambda_i T(\vec{e}_i) = \vec{0}_F.$$

Então, pela linearidade de T,

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{k+r} \lambda_i \vec{e}_i\right) = \vec{0}_F$$

pelo que o vector $\vec{x} = \lambda_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + \lambda_{k+r}\vec{e}_{k+r} \in \mathrm{Nuc}(T)$. Logo, existem escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{e}_k$ e, portanto,

$$\vec{x} - \vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{e}_i - \sum_{i=k+1}^{k+r} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E.$$

Dado que os vectores (11) são linearmente independentes, os escalares λ_i, $i = 1, \ldots, k+r$, são nulos e, assim, os r elementos considerados em (12) são linearmente independentes. ■

Exercício 2.1 Supondo fixada em $\mathbb{R}^3$ a base canónica, determinar o núcleo e a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1, x_2 + x_3, x_1)$.

Resolução Bastará determinar os espaços nulo e das colunas da matriz representativa de T. Esta última é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pois $T(1,0,0) = (-2,0,1)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ e $T(0,0,1) = (0,1,0)$. Para obter o espaço nulo é necessário resolver o sistema $A\vec{x} = \vec{0}$, procedendo-se como segue:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{-\frac{1}{2}L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, $A\vec{x} = \vec{0}$ é quivalente a

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases},$$

donde $\mathrm{Nuc}(T) = \{(0, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (0, -1, 1) \rangle$.

Para obter o espaço imagem $T(\mathbb{R}^3)$ é necessário determinar os vectores $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, para os quais o sistema $A\vec{x} = \vec{y}$ é possível, prodecendo-se do seguinte modo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 1 & 0 & 0 & y_3 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}y_1 + y_3 \end{array}\right].$$

Assim, aquele sistema é possível se e só se

$$\frac{1}{2}y_1 + y_3 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -2y_3,$$

donde os vectores de $T(\mathbb{R}^3)$ são da forma $(-2y_3, y_2, y_3) = y_2(0, 1, 0) + y_3(-2, 0, 1)$, ou seja, $T(\mathbb{R}^3) = \langle \{(0, 1, 0), (-2, 0, 1)\} \rangle$. Visto que os vectores geradores de $T(\mathbb{R}^3)$ são linearmente independentes tem-se $\dim T(\mathbb{R}^3) = 2$.

Como não podia deixar de ser, verifica-se que

$$\dim \mathrm{Nuc}(T) + \dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3. \blacksquare$$

3 Inversa de uma Transformação Linear

Considere-se a matriz

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Fixada a base canónica em $\mathbb{R}^2$, esta matriz define a transformação linear $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada, para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, por

$$T_\theta(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta, x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta).$$

T_θ pode ser interpretada geometricamente como uma rotação dos vectores do plano de θ radianos. Com efeito, é fácil verificar analiticamente que θ é o ângulo formado pelo vector (x_1, x_2) e pela sua imagem $T_\theta(x_1, x_2)$, o que justifica a interpretação geométrica dada (recorde-se a matriz (1) que foi interpretada geometricamente como uma rotação de $90°$ no plano; trata-se de um caso particular de A_θ visto que coincide com $A_{\pi/2}$).

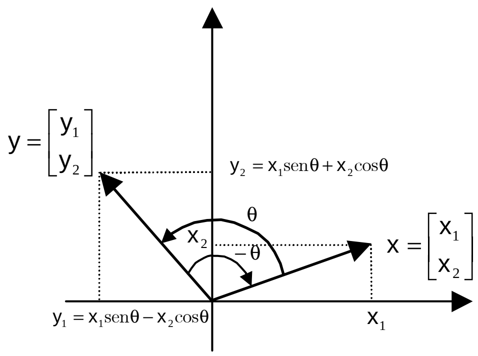

Figura 4: Rotação de θ rad e a sua inversa

Na figura 4, a imagem $(y_1, y_2) = T(x_1, x_2)$ pode ser entendida como o resultado da rotação do vector (x_1, x_2). É natural portanto a pergunta: existe uma transformação "contrária" que reponha a situação inicial, isto é, que permita obter (x_1, x_2) a partir de (y_1, y_2)? Intuitivamente, conclui-se de imediato que a transformação procurada é a rotação de $-\theta$ radianos. Esta transformação diz-se a **transformação inversa** de T_θ e representa-se por T_θ^{-1}. Por analogia com A_θ, a matriz que a define é dada por:

$$A_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Note-se que $A_{-\theta}$ é a matriz inversa de A_θ, pois $A_\theta A_{-\theta} = I_2$, como pode ser facilmente verificado. Este facto revela o paralelismo existente entre a operação de inversão de matrizes e a operação de inversão de transformações lineares.

Para melhor precisarmos as noções anteriores, consideremos a transformação linear

$$T : E \to T(E) \subseteq F.$$

Diremos que T é uma **transformação invertível** se T é injectiva, isto é, se transforma elementos distintos de E em elementos distintos de F. Equivale a afirmar que, para $\vec{x}, \vec{y} \in E$, se $\vec{x} \neq \vec{y}$ então $T(\vec{x}) \neq T(\vec{y})$, ou, o que é o mesmo,

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ T(\vec{x}) = T(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

Refira-se também que $T : E \to F$ é sobrejectiva se $T(E) = F$, pois, assim, qualquer elemento do conjunto de chegada é imagem de um elemento do conjunto de partida. Uma tranformação linear simultaneamente injectiva (monoformismo) e sobrejectiva (epimorfismo) é bijectiva (isomorfismo).

O resultado seguinte permite caracterizar as transformações invertíveis de diversas formas, decorrendo daí o seu interesse.

Proposição 3.1 *Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita e $T : E \to T(E) \subseteq F$ uma transformação linear. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) T é invertível;

(b) A **transformação inversa** $T^{-1} : T(E) \subseteq F \to E$ definida por $T^{-1}[T(\vec{x})] = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in E$, é uma transformação linear;

(c) $\mathrm{Nuc}(T) = \{\vec{0}_E\}$, isto é, o núcleo de T reduz-se ao vector nulo de E;

(d) T transforma vectores linearmente independentes de E em vectores linearmente independentes de F, isto é, se $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ são vectores linearmente independentes de E então $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$, $\ldots$, $T(\vec{v}_p)$ são vectores linearmente independentes de F.

Demonstração Provar-se-á sucessivamente (a)$\Rightarrow$ (b)$\Rightarrow$ (c)$\Rightarrow$ (d)$\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Em primeiro lugar, é necessário verificar que T^{-1} é uma aplicação. Com efeito, dado $\vec{u} \in T(E)$, existe um e um só $\vec{x} \in E$ tal que $T(\vec{x}) = \vec{u}$. Isto porque, atendendo à injectividade de T, é absurdo supor a existência de dois vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tais que $\vec{x} \neq \vec{y}$ e $T(\vec{x}) = T(\vec{y}) = \vec{u}$. Por conseguinte, T^{-1} é uma aplicação.

Para verificar que T^{-1} é linear, sejam $\vec{u}, \vec{v} \in T(E)$ e λ, μ escalares. Assim, existem $\vec{x}, \vec{y} \in E$ tais que $\vec{u} = T(\vec{x})$ e $\vec{v} = T(\vec{y})$. Então,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= T^{-1}\left(\lambda T(\vec{x}) + \mu T(\vec{y})\right) = T^{-1}\left(T(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})\right) \\ &= \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \lambda T^{-1}(\vec{u}) + \mu T^{-1}(\vec{v}), \end{aligned}$$

tendo em conta que T é linear e que $T^{-1}(\vec{u}) = T^{-1}[T(\vec{x})] = \vec{x}$ e $T^{-1}(\vec{v}) = T^{-1}[T(\vec{y})] = \vec{y}$, por definição de T^{-1}. Fica assim provado que T^{-1} é uma transformação linear.

(b) $\Rightarrow$ (c) Seja $\vec{x} \in E$ tal que $T(\vec{x}) = \vec{0}_F$. Aplicando T^{-1} a ambos os membros, obtém-se $\vec{x} = T^{-1}(\vec{0}_F)$. Como por hipótese T^{-1} é uma transformação linear, tem-se

$$T^{-1}(\vec{0}_F) = T^{-1}(0 \cdot \vec{0}_F) = 0 \cdot T^{-1}(\vec{0}_F) = \vec{0}_E,$$

pelo que $\vec{x} = \vec{0}_E$. Consequentemente, $\text{Nuc}(T) = \{\vec{0}_E\}$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Queremos provar que $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_p)$ são linearmente independentes. Ora,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i T(\vec{v}_i) = \vec{0}_F \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v}_i\right) = \vec{0}_F \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}_E,$$

pois $\text{Nuc}(T) = \{\vec{0}_E\}$. Como, por hipótese, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ são linearmente independentes, segue-se que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p = 0$. Consequentemente, $T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$, $\ldots$, $T(\vec{v}_p)$ são linearmente independentes.

(d) $\Rightarrow$ (a) Há que provar que T é injectiva, isto é, que $T(\vec{x}) = T(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$. Dado que T é de dimensão finita, pode supor-se, sem perda de generalidade, que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ é uma base de E. Então, sejam $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$ e $\vec{y} = \mu_1\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2 + \cdots + \mu_n\vec{e}_n$ vectores de E tais que $T(\vec{x}) = T(\vec{y})$. Esta igualdade equivale a

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{e}_i\right)$$

ou ainda, tendo em conta que T é linear, a

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\, T(\vec{e}_i) = \vec{0}_F. \tag{13}$$

Como $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ são linearmente independentes, resulta da hipótese que $T(\vec{e}_1)$, $T(\vec{e}_2), \ldots,$ $T(\vec{e}_n)$ são também independentes. Então, de (13) conclui-se que $\lambda_1 - \mu_1$, $\lambda_2 - \mu_2$, $\ldots$, $\lambda_n - \mu_n$, são todos nulos e, portanto, $\vec{x} = \vec{y}$, como se queria provar. ■

Por último, é estabelecido formalmente o paralelismo entre transformações inversas e matrizes inversas.

Proposição 3.2 *Sejam E e F espaços vectoriais da mesma dimensão e $T : E \to F$ uma transformação linear invertível representada matricialmente relativamente a certas bases de E e F pela matriz quadrada A_T. Então, T é bijectiva e a transformação inversa T^{-1} é representada matricialmente relativamente às referidas bases pela matriz inversa de A_T, isto é, $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$.*

Demonstração Sendo T injectiva tem-se que $\dim \text{Nuc}(T) = \vec{0}_E$. Da igualdade $\dim \text{Nuc}(T) + \dim T(E) = n$ e do facto de F ter a mesma dimensão que E, resulta que $T(E) = F$. Assim, T é sobrejectiva e, portanto, bijectiva. Da proposição 3.1-(b) segue-se então que ambas as transformações lineares compostas $T^{-1} \circ T$ e $T \circ T^{-1}$ são representadas pela matriz identidade I_n, pois

$$\left(T^{-1} \circ T\right)(\vec{x}) = T^{-1}[T(\vec{x})] = \vec{x} = I_n\vec{x},\ \forall \vec{x} \in E$$

e

$$\left(T \circ T^{-1}\right)(\vec{x}) = T[T^{-1}(\vec{x})] = \vec{x} = I_n\vec{x},\ \forall \vec{x} \in F.$$

Por outro lado, seja $A_{T^{-1}}$ a matriz quadrada que representa a transformação linear inversa T^{-1} nas bases consideradas. Pela proposição 1.2, $A_{T^{-1} \circ T} = A_{T^{-1}} A_T$ e $A_{T \circ T^{-1}} = A_T A_{T^{-1}}$ donde, $A_{T^{-1}} A_T = A_T A_{T^{-1}} = I_n$, ou seja, $A_{T^{-1}}$ é a matriz inversa de A_T. ■

Exemplo 3.1 Considere-se a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial é

$$A_T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

supondo fixada a base canónica em $\mathbb{R}^3$

Pretende-se averiguar se T é bijectiva e, em caso afirmativo, obter a transformação inversa. Para resolver a primeira das questões, é suficiente determinar o núcleo e a imagem de T. Com efeito, para obter o núcleo efectuam-se as operações seguintes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1+L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\underset{-\frac{1}{2}L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right].$$

Conclui-se então que o sistema homogéneo $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ é possível e determinado, o que implica que $\mathrm{Nuc}(T) = \{(0, 0, 0)\}$, ou seja, T é injectiva.

Para obter o subespaço imagem $T(\mathbb{R}^3)$ efectuam-se os seguintes procedimentos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_3 \end{array}\right] \underset{L_1+L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 2 & 1 & y_2+y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_3 \end{array}\right]$$
$$\underset{-\frac{1}{2}L_2+L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 2 & 1 & y_2+y_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & y_3 - \frac{y_2+y_1}{2} \end{array}\right].$$

Assim, $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ pois o sistema é sempre possível, qualquer que seja $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Deste modo, T é sobrejectiva e, dado que é injectiva, é bijectiva. Aliás, este facto poderia ter sido imediatamente concluido após a verificação da invertibilidade de T. Com efeito, sendo T invertível e representada por uma matriz quadrada fica garantido, pela proposição 3.2, que T é bijectiva.

Finalmente, a determinação da transformação inversa T^{-1} pode, portanto, fazer-se calculando a matriz inversa de A_T, que é a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente, $T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2 - x_3,\ -x_1 - x_2 + 2x_3)$, como facilmente se verifica multiplicando $(A_T)^{-1}$ por (x_1, x_2, x_3). ■

4 Exercícios Resolvidos

$\boxed{1}$ Verifique quais das aplicações são lineares (considere $\mathbb{C}$ como um espaço vectorial real):

(a) $$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_1 + x_2) \end{array}$$

(b) $$S: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^4 \\ z = x + yi & \to & S(z) = S(x + yi) = (x, x + y, -y, x)\,, \end{array}$$

(c) $\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1, x_2) & \to & \varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, k)\,, \quad k \text{ constante real.} \end{array}$

Resolução Em cada uma das alíneas vamos proceder à verificação das condições da definição de transformação linear.

(1a) Verificação de 1: para quaisquer $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{aligned} T(\vec{x}+\vec{y}) &= T\left((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)\right) \\ &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\ &= (x_1 + y_1, 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) \\ &= (x_1, 2x_1 + x_2) + (y_1, 2y_1 + y_2) \\ &= T(x_1, x_2, x_3) + T(y_1, y_2, y_3) \\ &= T(\vec{x}) + T(\vec{y}). \end{aligned}$$

Verificação de 2: para quaisquer $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} T(\lambda\vec{x}) &= T\left(\lambda(x_1, x_2, x_3)\right) = T(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ &= (\lambda x_1, 2\lambda x_1 + \lambda x_2) = \lambda(x_1, 2x_1 + x_2) \\ &= \lambda T(x_1, x_2, x_3) = \lambda T(\vec{x}). \end{aligned}$$

Logo T é linear.

(1b)Verificação de 1: para quaisquer $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ de $\mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} S(z_1 + z_2) &= S\left((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)\right) = S\left((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i\right) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, -(y_1 + y_2), x_1 + x_2) \\ &= (x_1, x_1 + y_1, -y_1, x_1) + (x_2, x_2 + y_2, -y_2, x_2) \\ &= S(x_1 + y_1 i) + S(x_2 + y_2) = S(z_1) + S(z_2). \end{aligned}$$

Verificação de 2: para quaisquer $z = x + yi \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} S(\lambda z_1) &= S\left(\lambda(x_1 + y_1 i)\right) = S(\lambda x_1 + \lambda y_1 i) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_1 + \lambda y_1, -\lambda y_1, \lambda x_1) = \lambda(x_1, x_1 + y_1, -y_1, x_1) \\ &= \lambda S(x_1 + y_1 i) = \lambda S(z_1). \end{aligned}$$

Logo S é linear.

(1c) Dados $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, tem-se, por um lado,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}+\vec{y}) &= \varphi\left[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)\right] \\ &= \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, k); \end{aligned}$$

por outro,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}) &= \varphi(x_1, x_2) + \varphi(y_1, y_2) \\ &= (x_1, x_2, k) + (y_1, y_2, k) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 2k). \end{aligned}$$

Portanto φ verifica a condição 1 se e só se $2k = k \Leftrightarrow k = 0$. Facilmente se vê também que neste caso φ verifica a condição 2. Logo φ é linear se e só se $k = 0$.

$\boxed{2}$ Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (3x + y - 2z, 2y + 2z)\,.$$

(a) Determine a matriz representativa de T supondo fixadas:

i. As bases canónicas tanto em $\mathbb{R}^3$ como em $\mathbb{R}^2$;

ii. A base $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ em $\mathbb{R}^3$ e a base canónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Classifique T quanto à injectividade e sobrejectividade e indique uma base para $\mathrm{Nuc}(T)$ e a dimensão de $T(\mathbb{R}^3)$.

Resolução

(a-i) Seja A_T a matriz de T considerando fixadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ a base canónica. As colunas de A_T são as coordenadas dos transformados $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$. Como

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (3,0) = 3(1,0) + 0\,(0,1)\,, \\ T(0,1,0) &= (1,2) = 1(1,0) + 2\,(0,1) \quad \text{e} \\ T(0,0,1) &= (-2,2) = -2(1,0) + 2\,(0,1)\,, \end{aligned}$$

tem-se

$$A_T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a-ii) Seja B_T a matriz de T supondo fixadas em $\mathbb{R}^3$ a base $\{(1,1,1)\,,(0,1,1)\,,(0,0,1)\}$ e em $\mathbb{R}^2$ a base canónica. As colunas de B_T são as coordenadas dos transformados dos vectores da base considerada em $\mathbb{R}^3$ expressos na base canónica de $\mathbb{R}^2$. Como

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (2,4) = 2(1,0) + 4\,(0,1)\,, \\ T(0,1,1) &= (-1,4) = -1(1,0) + 4\,(0,1) \quad \text{e} \\ T(0,0,1) &= (-2,2) = -2(1,0) + 2\,(0,1)\,, \end{aligned}$$

conclui-se

$$B_T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Vamos obter o núcleo de T :

$$\mathrm{Nuc}(T) = \{(x,y,z) : T(x,y,z) = (0,0)\}.$$

Como

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -z \end{array} \right. ,$$

tem-se $\mathrm{Nuc}(T) = \{(z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Assim, $\{(1,-1,1)\}$ constitui uma base para $\mathrm{Nuc}(T)$ e T não é injectiva, pois $\mathrm{Nuc}(T) \neq \{(0,0,0)\}$.

Vamos agora obter o subespaço imagem de T. Ora,

$$T(\mathbb{R}^3) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (a,b)\}.$$

Para determinar os vectores (a,b) que tornam o sistema $T(x,y,z) = (a,b)$ possível, vamos transformar a respectiva matriz ampliada numa matriz em escada:

$$T(x,y,z) = (a,b) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 2z = a \\ 2y + 2z = b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc} \boxed{3} & 1 & -2 & | \quad a \\ 0 & \boxed{2} & 2 & | \quad b \end{array} \right].$$

Conclui-se assim que o sistema é sempre possível qualquer que seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, pelo que $T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$. Consequentemente, $\dim T(\mathbb{R}^3) = 2$ e T é sobrejectiva, uma vez que $T(\mathbb{R}^3)$ coincide com o conjunto de chegada.

3 Considere o espaço vectorial real M_2 das matrizes reais de ordem 2 e o endomorfismo $T : M_2 \to M_2$ definido por

$$T(X) = XA, \text{ sendo } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que T é uma transformação linear.

(b) Determine a matriz representativa de T relativamente à base canónica de M_2 :

$$\left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Caracterize Nuc(T) e $T(M_2)$. T é um automorfismo?

Resolução

(a) T é linear pois dadas quaisquer duas matrizes $X, Y \in M_2$ e um escalar arbitrário $\lambda \in \mathbb{R}$, as propriedades da multiplicação de matrizes garantem que as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$T(X+Y) = (X+Y)\,A = XA + XB = T(X) + T(Y)$$

e

$$T(\lambda X) = (\lambda X)\,A = \lambda\,(XA) = \lambda T(X).$$

(b) Efectuemos o cálculo das imagens dos vectores da base canónica por meio de T :

$$\begin{aligned}
T(E_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_1 + 2E_2 \\
T(E_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_2 \\
T(E_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = E_3 + 2E_4 \\
T(E_4) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_4.
\end{aligned}$$

Consequentemente, a matriz representativa de T na base considerada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) O núcleo de T é definido por

$$\mathrm{Nuc}(T) = \{X \in M_2 : T(X) = O\}.$$

Como

$$\begin{aligned}
T(X) = O \Leftrightarrow XA = O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a+b = 0 \\ c = 0 \\ 2c+d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

conclui-se que $\mathrm{Nuc}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, isto é, o núcleo reduz-se ao vector nulo de M_2. Do teorema 2.1 sai então que $\dim T(M_2) = 4$, pelo que $T(M_2) = M_2$. Uma vez que T é injectiva e sobrejectiva, T é bijectiva, tratando-se, portanto, de um isomorfismo. Como também é um endomorfismo, conclui-se que T é um automorfismo.

$\boxed{4}$ Relativamente às bases canónicas, determine as matrizes das transformações lineares $T \circ \varphi$ e $\varphi \circ T$, em que T e φ estão definidas no exercício resolvido 1.

Resolução Visto que $T(1,0,0) = (1,2)$, $T(0,1,0) = (0,1)$ e $T(0,0,1) = (0,0)$, conclui-se que a matriz representativa de T, A_T, é dada por

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado, no caso da aplicação φ é obrigatório que $k = 0$, pelo que a respectiva matriz representativa é

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte,

$$A_{T\circ\varphi} = A_T A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A_{\varphi\circ T} = A_\varphi A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ Considere a transformação linear $T_\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (μ parâmetro real) cuja representação matricial em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é

$$A_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1-\mu^2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores de μ para os quais T_μ é injectiva.

(b) Determine $T_1(\mathbb{R}^2) \oplus V$, onde V é o subespaço de $\mathbb{R}^2$ representado geometricamente pelo eixo dos xx.

(c) Diga qual a matriz que representa T_2 relativamente à base $\{(1,1),\ (-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Resolução

(a) T_μ é injectiva se e só se $\mathrm{Nuc}(T_\mu) = \{\vec{0}\}$ o que equivale a dizer que a única solução do sistema $A_\mu x = 0$ é a solução nula. Isto equivale ainda a dizer que a característica de A_μ é 2, ou seja,

$$\det A_\mu \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1-\mu^2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4\left(1-\mu^2\right) \neq 0 \Leftrightarrow \mu \notin \{-1,1\}.$$

(b) Comecemos por calcular o subespaço $T_1(\mathbb{R}^2)$ para o basta determinar quais os vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ que tornam possível o sistema $A_1 x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Ora,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a \\ -4 & 5 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 5 & b \\ 0 & 0 & a \end{array}\right],$$

donde o sistema é possível se e só se $a = 0$, tendo-se, pois, $T_1(\mathbb{R}^2) = \langle(0,1)\rangle$ (eixo dos yy). Visto que $V = \langle(1,0)\rangle$ (eixo dos xx), tem-se $T_1(\mathbb{R}^2) \cap V = \{\vec{0}\}$ e $T_1(\mathbb{R}^2) + V = \langle(0,1), (1,0)\rangle = \mathbb{R}^2$, donde $T_1(\mathbb{R}^2) \oplus V = \mathbb{R}^2$.

(c) A imagem de um vector genérico $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ por meio de T_2 é dada por

$$T_2(\vec{x}) = A_2\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 \\ -4x_1 + 5x_2 \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz representativa de T_2 relativamente à base $\{(1,1), (-1,0)\}$ são as coordenadas de $T_2(1,1) = (-3,1)$ e $T_2(-1,0) = (0,4)$ nessa base. A expressão de $T_2(1,1) = (-3,1)$ na base $\{(1,1), (-1,0)\}$ obtém-se resolvendo o sistema

$$\gamma_1(1,1) + \gamma_2(-1,0) = (-3,1) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 = -3 \\ \gamma_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 1 \\ \gamma_2 = 4 \end{cases}.$$

Analogamente, para exprimir $T_2(-1,0) = (0,4)$ na base $\{(1,1), (-1,0)\}$ resolve-se

$$\gamma_1(1,1) + \gamma_2(-1,0) = (0,4) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ \gamma_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 4 \\ \gamma_2 = 4 \end{cases}.$$

Assim, T_2 é representada na base considerada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Considere a tranformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (2x, 4x - y, 3y - z)$.

(a) Determine a matriz representativa de T supondo fixadas em $\mathbb{R}^3$:

i. A base canónica;

ii. A base $\{(1,0,1), (0,1,0), (0,-1,1)\}$.

(b) Mostre que as matrizes determinadas em (a) são semelhantes.

(c) Mostre que T é invertível e determine a sua inversa.

Resolução

(a-i) Seja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Como $T(1,0,0) = (2,4,0)$, $T(0,1,0) = (0,-1,3)$ e $T(0,0,1) = (0,0,-1)$, tem-se

$$A_T = \begin{bmatrix} T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a-ii) Seja B_T a matriz de T na base considerada. Designemos os elementos desta base por $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$, respectivamente. As colunas de B_T são as coordenadas dos transformados destes vectores,

$$\begin{aligned} T(\vec{f}_1) &= T(1,0,1) = (2,4,-1), \\ T(\vec{f}_2) &= T(0,1,0) = (0,-1,3) \quad \text{e} \\ T(\vec{f}_3) &= T(0,-1,1) = (0,1,-4), \end{aligned}$$

na mesma base. A expressão de $T(\vec{f}_1)$ nesta base obtém-se de

$$\mu_1\vec{f}_1 + \mu_2\vec{f}_2 + \mu_3\vec{f}_3 = (2,4,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 - \mu_3 = 4 \\ \mu_1 + \mu_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 2 \\ \mu_2 = 1 \\ \mu_3 = -3 \end{cases}.$$

A expressão de $T(\vec{f}_2)$ obtém-se de

$$\mu_1\vec{f}_1 + \mu_2\vec{f}_2 + \mu_3\vec{f}_3 = (0,-1,3) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 - \mu_3 = -1 \\ \mu_1 + \mu_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 2 \\ \mu_3 = 3 \end{cases} .$$

Finalmente, a expressão de $T(\vec{f}_3)$ na base considerada obtém-se de

$$\mu_1\vec{f}_1 + \mu_2\vec{f}_2 + \mu_3\vec{f}_3 = (0,1,-4) \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 - \mu_3 = 1 \\ \mu_1 + \mu_3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = -3 \\ \mu_3 = -4 \end{cases} .$$

Então,

$$B_T = \begin{bmatrix} T(\vec{f}_1) & T(\vec{f}_2) & T(\vec{f}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Pretende-se ver que A_T e B_T são matrizes semelhantes, isto é, que existe uma matriz P, invertível, tal que $B = P^{-1}AP$. Continuando a representar respectivamente por $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ os elementos da base $\{(1,0,1),(0,1,0),(0,-1,1)\}$, tem-se que as relações entre esta base e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ são as seguintes,

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

ou, matricialmente,

$$[\ \vec{f}_1 \quad \vec{f}_2 \quad \vec{f}_3\ ] = [\ \vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3\ ] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Designando por P a matriz que se encontra mais à direita nesta igualdade, verifica-se que as colunas de P são precisamente os vectores $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$. A matriz P é a matriz procurada pois,

$$\begin{aligned} P^{-1}A_TP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix} = B_T \end{aligned}$$

(c) Uma transformação linear é invertível se o seu núcleo se reduz ao vector nulo. Ora

$$\mathrm{Nuc}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : T(x,y,z) = (0,0,0)\right\}$$

e como

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ,$$

conclui-se que $\text{Nuc}(T) = \{(0,0,0)\}$. Consequentemente, T é injectiva. Recordando a proposição 3.2, tem-se que a determinação de T^{-1} pode fazer-se calculando simplesmente a matriz inversa de A_T, que é a matriz

$$A_T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$T^{-1}(x,y,z) = A_T^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2x - y \\ 6x - 3y - z \end{bmatrix}.$$

5 Exercícios Propostos

1 Das aplicações a seguir definidas indique as que são transformações lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (2x - y, x)$.

(b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = (1, -3)$.

(c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = (2x, x)$.

(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (xy, y, x)$.

(e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (|x|, -y, 0)$.

(f) $T : P_2 \to P_3$ dada por $T(p(x)) = p(0)x^2 + Dp(0)x^3$.

(g) $T : P_3 \to P_4$ dada por $T(p(x)) = 1 + xp(x)$.

(h) $T : M_n \to M_n$ dada por $T(X) = XA - AX$, onde $A \in M_n$ e $A \neq O$.

(i) $T : M_n \to M_n$ dada por $T(X) = (X + A)^2 - (X + 2A)(X - 3A)$, onde $A \in M_n$ e $A \neq O$.

2 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $f(1,0) = (-1,1,2)$ e $f(0,1) = (3,0,1)$. Determine $f(x_1, x_2)$ para qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, utilizando a definição de aplicação linear.

3 Qual a matriz da transformação linear do exercício 2, supondo fixadas:

(a) Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ as bases canónicas.

(b) Em $\mathbb{R}^2$ a base canónica e em $\mathbb{R}^3$ a base $\{(1,0,1), (1,2,1), (0,-1,1)\}$

(c) Em $\mathbb{R}^2$ a base $\{(-1,1),(1,1)\}$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $\{(1,0,1), (1,2,1), (0,-1,1)\}$.

4 Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$ e as bases $\{(1,1,1),(0,1,1), (0,0,1)\}$ e $\{(2,1),(5,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente:

(a) Qual a matriz da transformação linear relativamente às bases canónicas?

(b) Qual a matriz da transformação linear relativamente às bases dadas?

(c) Se $\vec{v} = (3,-4,2)$ (expresso na base canónica) qual o transformado nas bases dadas?

5 Considere a aplicação $T : P_2 \to P_2$ dada por $T(p(x)) = p(x+1)$.

(a) Mostre que T é linear.

(b) Qual a matriz da transformação linear relativamente à base $\{1, x, x^2\}$?

6 Relativamente às bases canónicas, determine as matrizes das transformações lineares $T \circ f$ e $f \circ T$, em que T e f estão definidas nos exercícios 4 e 2, respectivamente.

7 Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (2x + y, x + y + z)$.

(a) Verifique que f é uma transformação linear.

(b) Determine uma base para $\text{Nuc}(f)$ e justifique que f não é injectiva.

(c) Caracterize $f(\mathbb{R}^3)$. Será f sobrejectiva? Justifique.

8 Considere a aplicação $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $P(x, y, z) = (x, y, 0)$.

(a) Verifique que P é uma transformação linear e interprete-a geometricamente.

(b) Mostre que $P^2 = P$ $(P^2 = P \circ P)$.

(c) Determine $\text{Nuc}(P)$ e $P(\mathbb{R}^3)$. Situe esses espaços na interpretação geométrica anterior e indique uma base para cada um deles.

9 Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada pelas equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \varphi(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \end{array} \right. ,$$

sendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine as dimensões de $\text{Nuc}(\varphi)$ e $\varphi(\mathbb{R}^3)$.

(b) Verifique se o subespaço gerado por $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ é invariante para a aplicação dada. E $\langle \vec{e}_3 \rangle$?

10 Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (u, v, w)$, em que

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x - y + z \\ v = 5x + 2y - z \\ w = -3x - 4y + 3z \end{array} \right.$$

Determine bases para $\text{Nuc}(T)$ e $T(\mathbb{R}^3)$. Será T um automorfismo? Justifique.

11 Considere um espaço vectorial E de dimensão 3. Seja φ um endomorfismo de E cuja matriz relativamente à base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que φ é um automorfismo.

(b) Considere o conjunto de vectores $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \bar{e}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \bar{e}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3. \end{array} \right.$$

i. Verifique que se trata de uma nova base de E.

ii. Determine a matriz associada a φ na nova base.

iii. Determine as coordenadas do vector $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ na nova base.

$\boxed{12}$ Considere a aplicação linear $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja representação matricial em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ é dada pela matriz

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda^2+2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores de λ para os quais T_λ é injectiva.

(b) Determine o conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$ cuja imagem por T_1 é $(6,5,5,7)$.

(c) Diga qual a matriz que representa a aplicação T_1 relativamente às bases $\{(1,1,0), (-1,2,1), (0,-1,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{13}$ Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de matriz $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ relativamente às bases $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ e $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$. Sejam $\{\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,'\}$ e $\{\vec{f}_1\,', \vec{f}_2\,', \vec{f}_3\,'\}$ novas bases fixadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{cases} \vec{e}_1\,' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2\,' = \vec{e}_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \vec{f}_1\,' = \vec{f}_1 + 2\vec{f}_3 \\ \vec{f}_2\,' = \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3\,' = -\vec{f}_1, \end{cases}.$$

(a) Determine a matriz A'_T de T relativamente às novas bases.

(b) Determine na base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ o original de $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{f}_1\,' + \frac{3}{2}\vec{f}_3\,'$.

$\boxed{14}$ Considere a aplicação $f : P_2 \to M_2$ dada por

$$f(c + bx + ax^2) = \begin{bmatrix} b+a & c \\ b & a \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que f é linear.

(b) Determine a matriz representativa de f relativamente às bases $\{1, x, 1+x^2\}$ de P_2 e

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de M_2.

(c) Descreva os subespaços $\mathrm{Nuc}(f)$ e $f(P_2)$ e indique as respectivas dimensões.

$\boxed{15}$ Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z)$. Mostre que T é invertível e dertermine a sua inversa.

6 Soluções dos Exercícios Propostos

1. Sim, não, sim, não, não, sim, não, sim $\forall A$, sim sse $A^2 = O$.
2. $f(x_1, x_2) = (-x_1 + 3x_2, x_1, 2x_1 + x_2)$.
3. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$; (c) $(31, -10)$.

5. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. (b) $\{(1, -2, 1)\}$; f não é injectiva pois $\mathrm{Nuc}(f)$ não se reduz ao vector nulo; (c) $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$, pelo que f é sobrejectiva.

8. (a) Interpretação geométrica: projecção de um ponto do espaço $\mathbb{R}^3$ no plano XOY; (c) $\mathrm{Nuc}(P) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ (eixo dos ZZ), base: $\{(0, 0, 1)\}$; $P(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ (plano XOY), base: $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

9. (a) 0, 3; (b) Não, sim.

10. $\{(-1, 6, 7)\}$; $\{(1, 5, -3), (-1, 2, -4)\}$. Não, porque não é isomorfismo.

11. (b-ii) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 1 & -14 & 26 \\ 0 & -7 & 13 \end{bmatrix}$;(b-iii) $(b, -2a + 2b + c, -a + b + c)$.

12. (a) $\lambda \neq \pm 1$; (b) $\{(2, 1, 0) + z\,(-1, -1, 1) : z \in \mathbb{R}\}$; (c) $\begin{bmatrix} 5 & 12 & 11 \\ 1 & -9 & 6 \\ 3 & 3 & 8 \\ 3 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $-\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

14. (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\mathrm{Nuc}(f) = \{\text{polinómio nulo}\}$, $\dim \mathrm{Nuc}(F) = 0$, $f(P_2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim f(P_2) = 3$.

15. $T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x, 2x - y, 7x - 3y - z\right)$.

Referências

[1] Agudo, F. R. D., *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Livraria Escolar Editora, 1996.

[2] Apostol, T., *Calculus*, Vol 2, Editorial Reverté, 1975.

[3] Giraldes, E., Fernandes, V. H. e Smith, M. P. M, *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Editora McGraw-Hill de Portugal, 1995.

[4] Luz, C., Matos, A. e Nunes, S., *Álgebra Linear (Volume I)*, 2^a edição, EST Setúbal, 2003.

[5] Magalhães, L. T., *Álgebra Linear como Introdução a Matemática Aplicada*, Texto Editora, 1991.

[6] Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York, 1980.