Álgebra Linear I
Subespaços Vetoriais

Prof. Jairo

Definição

Em muitos casos é conveniente obtermos espaços vetoriais a partir de outros (ou seja, herdando suas operações). Esses espaços “derivados” de outros são chamados de subespaços vetoriais. Mais precisamente,

Definição

Seja V um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto $W \subset V$ de V é um *subespaço vetorial* (ou simplesmente um *subespaço*) de V quando a restrição das operações de V a W tornam W um espaço vetorial.

Exemplo (Subespaços triviais)

Dado um espaço vetorial V são subespaços de V:

Exemplo (Subespaços triviais)

Dado um espaço vetorial V são subespaços de V:

- o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado apenas pelo vetor nulo de V;

Exemplo (Subespaços triviais)

Dado um espaço vetorial V são subespaços de V:

- o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado apenas pelo vetor nulo de V;
- O próprio V.

Exemplo (Subespaços triviais)

Dado um espaço vetorial V são subespaços de V:

- o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado apenas pelo vetor nulo de V;
- O próprio V.

Exemplo

Considere o subconjunto $P_n \subset \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ formado pelos polinômios de grau menor ou igual a n. A restrição a P_n das operações de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$, tornam P_n um espaço vetorial (verifique). Logo, P_n é um subespaço de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Exemplo (Subespaços triviais)

Dado um espaço vetorial V são subespaços de V:

- o conjunto $\{\mathbf{0}\}$ formado apenas pelo vetor nulo de V;
- O próprio V.

Exemplo

Considere o subconjunto $P_n \subset \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ formado pelos polinômios de grau menor ou igual a n. A restrição a P_n das operações de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$, tornam P_n um espaço vetorial (verifique). Logo, P_n é um subespaço de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Exemplo

Seja $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. A restrição das operações do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ a W fazem de W um espaço vetorial (verifique).

Caracterização dos subespaços vetoriais

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

Caracterização dos subespaços vetoriais

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, para cada par de vetores $(u, v) \in W \times W$, o vetor $u + v$ é *único* e *pertence* a W; para cada par $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times W$ o vetor αu é único e pertence a W).

Caracterização dos subespaços vetoriais

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, para cada par de vetores $(u, v) \in W \times W$, o vetor $u + v$ é *único* e *pertence* a W; para cada par $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times W$ o vetor αu é único e pertence a W).

Ora, A unicidade é garantida pelo fato de que W é um subconjunto de V, e em V isso já é verdade.

Caracterização dos subespaços vetoriais

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, para cada par de vetores $(u, v) \in W \times W$, o vetor $u + v$ é *único* e *pertence* a W; para cada par $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times W$ o vetor αu é único e pertence a W).
Ora, A unicidade é garantida pelo fato de que W é um subconjunto de V, e em V isso já é verdade.
Assim, precisamos mostrar apenas que a soma de vetores de W e a multiplicação de vetores de W ainda são vetores de W.

Caracterização dos subespaços vetoriais

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, para cada par de vetores $(u, v) \in W \times W$, o vetor $u + v$ é *único* e *pertence* a W; para cada par $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times W$ o vetor αu é único e pertence a W).
   Ora, A unicidade é garantida pelo fato de que W é um subconjunto de V, e em V isso já é verdade.
   Assim, precisamos mostrar apenas que a soma de vetores de W e a multiplicação de vetores de W ainda são vetores de W.

ii. As operações continuam satisfazendo os axiomas de espaço vetorial.

Caracterização dos subespaços vetoriais

Note que, a rigor, para mostrar que um determinado subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço de V, deve-se mostrar:

i. que a restrição das operações de V a W estão bem definidas (ou seja, para cada par de vetores $(u, v) \in W \times W$, o vetor $u + v$ é *único* e *pertence* a W; para cada par $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times W$ o vetor αu é único e pertence a W).
   Ora, A unicidade é garantida pelo fato de que W é um subconjunto de V, e em V isso já é verdade.
   Assim, precisamos mostrar apenas que a soma de vetores de W e a multiplicação de vetores de W ainda são vetores de W.

ii. As operações continuam satisfazendo os axiomas de espaço vetorial.
   Para isso, basta verificar que o elemento neutro pertence a W (por quê?)

Isso nos leva à seguinte

Isso nos leva à seguinte

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *tiver as seguintes propriedades:*

Isso nos leva à seguinte

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *tiver as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{0} \in W$;

Isso nos leva à seguinte

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *tiver as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{0} \in W$;
2. *se* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$;

Isso nos leva à seguinte

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *tiver as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{0} \in W$;
2. *se* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$;
3. *se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $v \in W$, *então* $\lambda v \in W$.

Isso nos leva à seguinte

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *tiver as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{0} \in W$;
2. *se* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$;
3. *se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $v \in W$, *então* $\lambda v \in W$.

Demonstração.

A cargo do leitor. □

Isso nos leva à seguinte

Proposição (Caracterização de subespaços)

Sejam V um espaço vetorial e $W \subset V$. Então W é um subespaço vetorial de V **se, e somente se**, *tiver as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{0} \in W$;
2. *se* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$;
3. *se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $v \in W$, *então* $\lambda v \in W$.

Demonstração.

A cargo do leitor. □

Observação: Poderíamos ter escolhido a proposição acima como definição (neste caso, o que adotamos como definição seria um teorema de caracterização, ou seja, do tipo "se e somente se").

Exercícios

1. Faça o que ficou como exercício no texto.
2. Prove que a interseção de subespaços vetoriais ainda é um subespaço vetorial.
3. Prove que a união de dois subespaços ainda é um subespaço se, e somente se, um deles está contido no outro.
4. Verifique se o conjunto $D \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ das matrizes diagonais de ordem 3 é um subespaço de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.