Funções de Várias Variáveis

Conceitos Básicos

Prof. Dr. José Ricardo de Rezende Zeni

UNESP, FEG, Depto de Matemática

Guaratinguetá, outubro de 2017

Funções de Várias Variáveis

Função de n variáveis reais com valor real

Noções Básicas. Aplicações.

Domínio. Imagem. Gráfico.

Curvas e Superfícies de Nível

Referências

Qualquer bom livro de cálculo, volume 2

Thomas, cap 14.

Diomara e Morgado, cap 3.

Stewart; Simmons; Swokwovski; etc.

Noções Básicas

Função de n variáveis reais com valor real

(função escalar)

$$f: \quad R^n \quad \rightarrow \quad R$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

A cada ponto do domínio da função corresponde um único número real – o valor da função no ponto.

Noções Básicas

Função de 2 variáveis reais com valor real

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to z = f(x, y)$$

Função de 3 variáveis reais com valor real

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \to w = f(x, y, z)$$

APLICAÇÕES

Altitude em função da posição no plano (mapa do relevo).

Temperatura em um disco em função da posição, $T(x, y)$.

Pressão em um fluido em função da posição, $P(x,y,z)$.

Potencial elétrico em uma placa, em função da posição na placa e do tempo, $V(x, y, t)$.

Exemplos da economia - comentários

Densidade de um colchão de espuma em função do peso e da altura da pessoa.

Na versão deste arquivo para a homepage, esta imagem foi excluída por ser muito grande (cerca de 1Mb).

Mapa Topográfico
Altitude em função da posição no mapa

Na versão deste arquivo para a homepage,
esta imagem foi excluída por ser
muito grande (cerca de 2Mb).

Fonte: http://pt-br.topographic-map.com/places/Parque-Nacional-do-Itatiaia-9233924/

Tipos de Funções

Usualmente vistas no primeiro ano, CDI e ALCV

$f: \ R \rightarrow R$ (função de uma variável, já estudamos)

$f: \ R^n \rightarrow R$ (função de várias variáveis, estamos começando o estudo)

$f: \ R \rightarrow R^n$ (função vetorial de uma variável, exemplos: curvas parametrizadas)

TIPOS DE FUNÇÕES

Usualmente vistas no segundo ano, CDI

f : $R^2 \rightarrow R^n$ (função vetorial de duas variáveis),

exemplos: superfícies parametrizadas

f : $R^n \rightarrow R^n$ (função vetorial de várias variáveis),

exemplos: campo de forças, gravitacional, elétrico, …,

gradiente de uma função, transformações de coordenadas, …

DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO – dom f

Função de n variáveis: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Definição: o domínio de f é o subconjunto de R^n para os quais a função está definida. Notação: dom f.

Observações usuais:

- não existe divisão por zero,
- argumento da raiz quadrada tem de ser não negativo,
- argumento do logaritmo tem de ser positivo,
- etc.

Domínio de uma função - Geometria

Função de 2 variáveis: f(x, y), o domínio é um subconjunto do R^2, em geral, uma região do plano.

Função de 3 variáveis: f(x, y, z), o domínio é um subconjunto do R^3, em geral, uma região do espaço.

Domínio de uma função - Exemplo

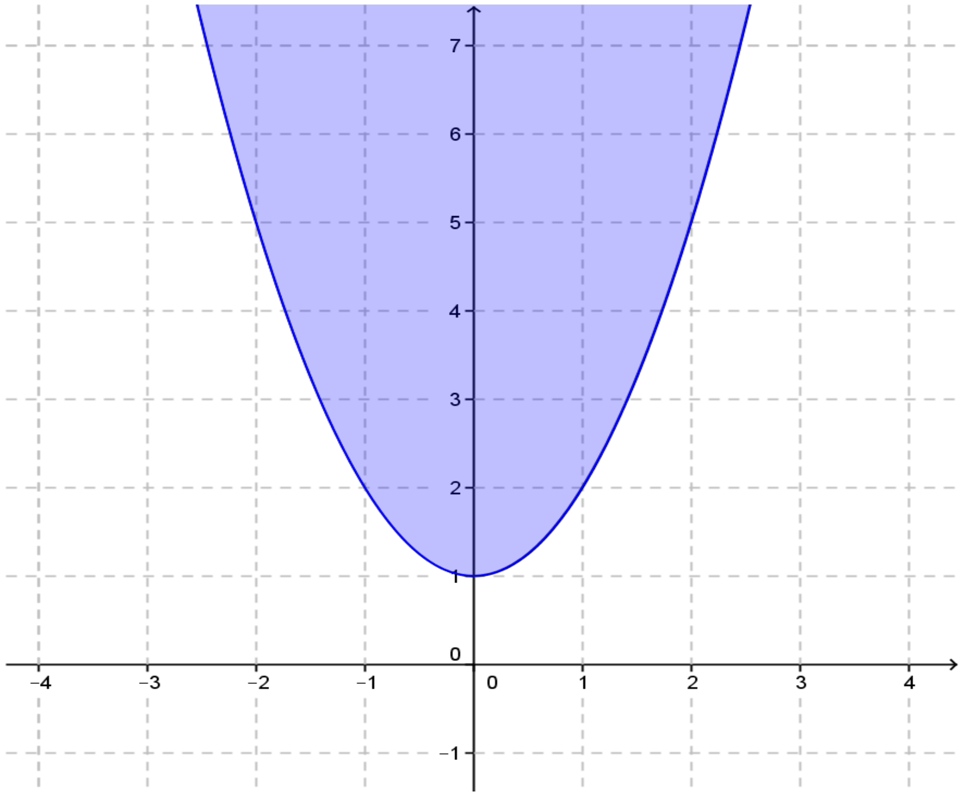
Ilustração - Região do plano xy correspondente ao domínio da função do exercício 1b, $f(x, y) = \sqrt{(y - 1 - x^2)}$

Dom f = $\{ y \geq 1 + x^2 \}$

Fronteira da região é

a parábola $y = 1 + x^2$

Construído no Geogebra



Domínio de uma função - Exercícios

§3.2 Exercícios

1. Descreva o domínio das seguintes funções:

a) $z = \sqrt{x + y - 4}$.

b) $z = \sqrt{y - 1 - x^2}$.

c) $z = \dfrac{5\ln(x + y)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

d) $z = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$.

Domínio de uma função - Geometria

Resolução na lousa

Região do plano xy correspondente ao domínio da função do exercício 1a, $f(x, y) = \sqrt{(x + y - 4)}$

Imagem de uma Função - Im f

- Notação Im f

Gráfico de uma Função de Várias Variáveis

Função de n variáveis

$f: \quad R^n \quad \rightarrow \quad R$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\rightarrow\; w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Gráfico de f é o subconjunto de R^{n+1} formado pelos pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ tal que $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Para funções de 3 ou mais variáveis não há visualização do gráfico (seria uma hipersuperfície em 4 ou mais dimensões).

Gráfico de funções de 2 variáveis

Função de 2 variáveis: o valor da função em cada ponto (x, y) é representado pela altura $z = f(x, y)$ em relação ao plano xy.

O gráfico de f é uma superfície do R^3 formada pelos pontos $(x, y, z = f(x, y))$, com (x, y) no dom f.

A projeção do gráfico de f no plano xy é o dom f.

Diomara Exemplo 4. $f(x, y) = 4 – x^2 – y$. (para casa)

Gráfico de funções de 2 variáveis

Ilustração – gráfico da função do exercício 1b

$f(x, y) = \sqrt{(y - 1 - x^2)}$

Observação

equivalente à

$y = 1 + x^2 + z^2$

e $z \geq 0$.

Parabolóide com

eixo em Oy e

vértice em (0, 1, 0)

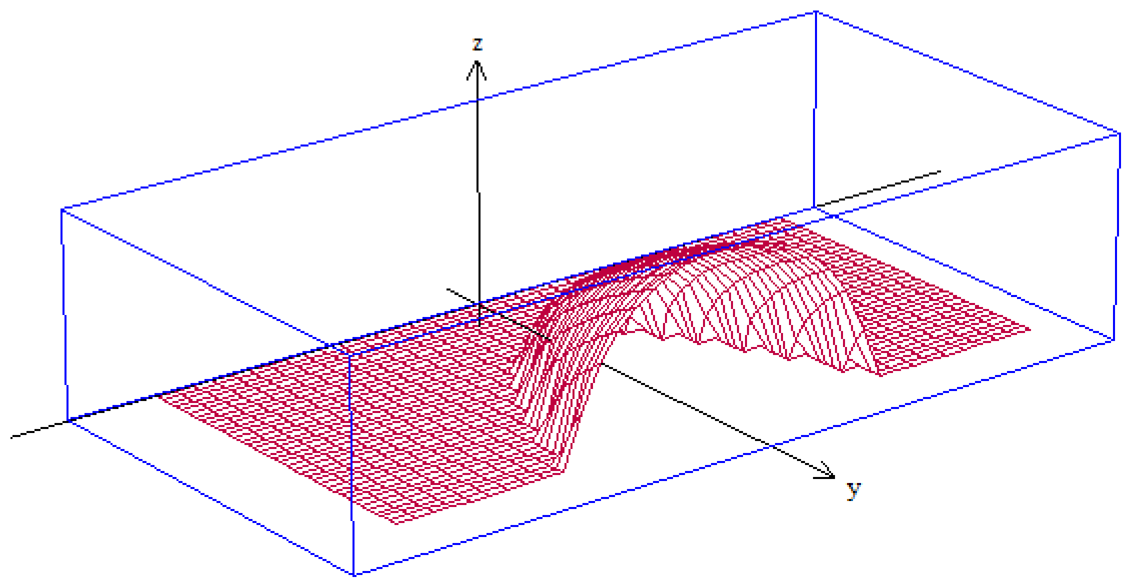


Gráfico de funções de 2 variáveis

Resolução na lousa.

Exercício, Diomara, cap 3, seção 2.

3. Seja S a superfície definida por $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

   a) Identifique a interseção de S com o plano $z = k$,

   quando $k < 2$, $k = 2$ e $k > 2$.

   b) Identifique as interseções de S com os planos xz e yz.

   c) Faça um esboço de S.

Gráfico de funções de 2 variáveis

Obs: nem toda superfície é o gráfico de uma função.

Uma reta vertical (ortogonal ao plano xy) intercepta o gráfico de f em apenas um ponto (ou não intercepta).

Exemplo: uma esfera não é o gráfico de uma função de duas variáveis. A esfera pode ser associada a duas funções: uma função que descreve o hemisfério superior e outra função que descreve o hemisfério inferior. Em particular, a esfera descrita pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ é associada com as funções

$$f_s(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad f_i(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Gráfico de funções de 2 variáveis

Exercícios. Esboce o domínio e o gráfico da função.

4. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$

6. $f(x, y) = sqrt(10 – x – y^2)$

10.

$$z = f(x,y) = \begin{cases} 7 - \sqrt{x^2+y^2} & , \ 0 \le x^2+y^2 \le 16, \\ \sqrt{25-x^2-y^2} & , \ 16 \le x^2+y^2 \le 25. \end{cases}$$

Gráficos Congruentes

- O gráfico de g(x) = f(x) + c é uma translação na vertical do gráfico de f (por c unidades).

  Exemplo: $g(x) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$

- O gráfico de g(x) = - f(x) é obtido refletindo o gráfico de f no plano xy (z = 0).

  Exemplo: $g(x) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

Curvas de Nível - Funções de 2 Variáveis

O conjunto solução da equação $f(x, y) = k$ (k é um número real) é dita a curva de nível k da função f, isto é, o valor da função é constante ao longo de uma curva de nível.

Observações:

1) as curvas de nível são curvas no domínio da função.

2) k deve pertencer a imagem da função, caso contrário o conjunto solução será o vazio.

3) uma curva de nível se reduzir a um ponto (caso degenerado).

4) uma curva de nível pode ter vários ramos (não conexa).

Curvas de Nível - Exemplo

Curvas de nível para a função do exercício 8c:

$$f(x, y) = \sqrt{(2y - y^2 - x^2)}$$

equação curva de nível $k \geq 0$

$k^2 = 2y - y^2 - x^2$

$x^2 + (y - 1)^2 = 1 - k^2$

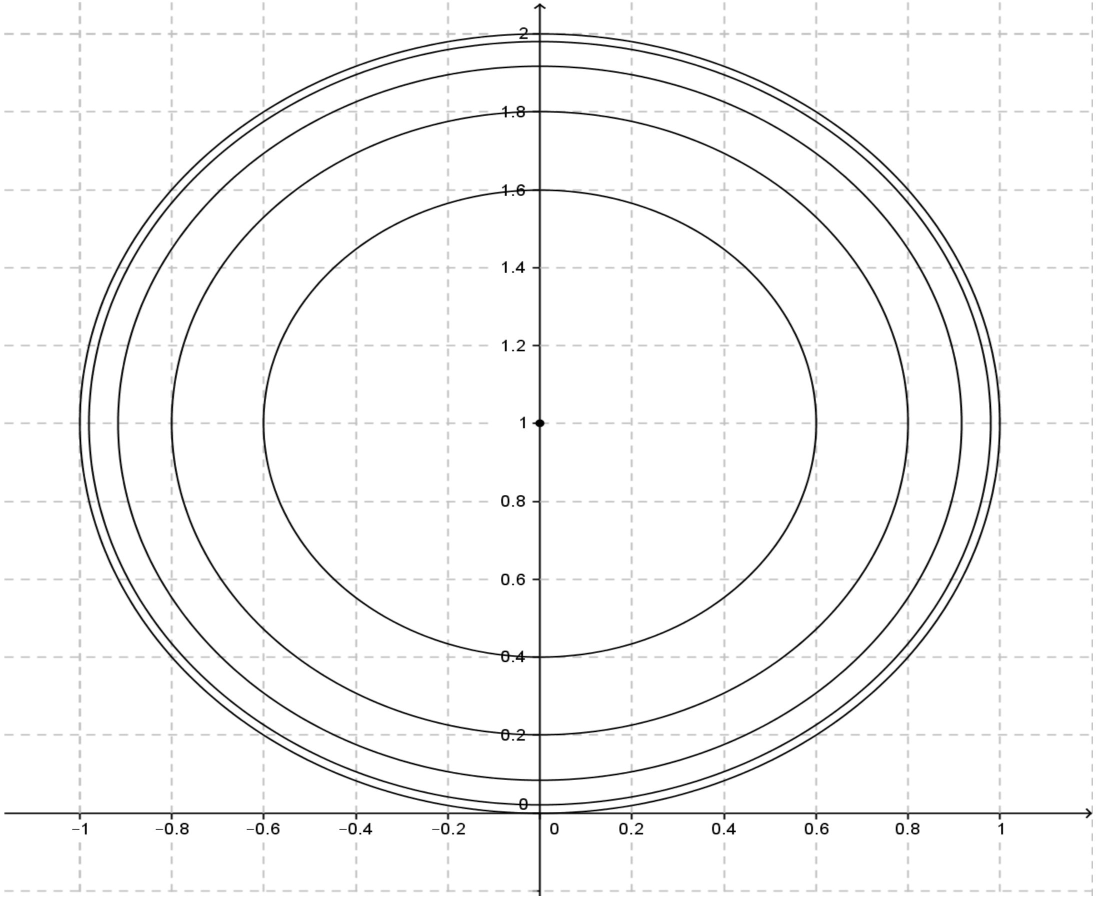
$k < 1$ => circunferência

$k = 1$ => ponto (0,1)

$k > 1$ => vazio

Construído no Geogebra

$k = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ e 1.



Curvas de Nível - Aplicações

- Função Temperatura, $T(x, y)$, as curvas de nível são ditas isotermas.

- Função Potencial, $V(x, y)$, as curvas de nível são ditas equipotenciais.

Curvas de Nível - Função Altitude

use o zoom para aumentar

Na versão deste arquivo para a homepage, esta imagem foi excluída por ser muito grande (cerca de 13Mb).

Fonte: http://www.extremos.com.br/download/2015/0616_itatiaia/

Curvas de Nível - Exercícios

8. Esboce o mapa de contorno e o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x, y) = x + y^2$.

b) $f(x, y) = \sqrt{y - 1 - x^2}$.

c) $f(x, y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$.

d) $$f(x, y) = \begin{cases} 6 - x^2 - y^2 & , \quad x^2 + y^2 \leq 4, \\ 4 - \sqrt{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 \geq 4. \end{cases}$$

Curvas de Nível - Exemplos

Resolução na lousa.

Curvas de nível da função do exercício 1b

$$f(x, y) = \sqrt{(y - 1 - x^2)}$$

Superfícies de Nível - Funções de 3 Variáveis

Definição: o conjunto solução da equação

$$f(x, y, z) = k \quad \text{(k é um número real)}$$

é dita a superfície de nível k da função f.

O valor da função f é constante ao longo da superfície de nível.

SUPERFÍCIES DE NÍVEL

Resolução na lousa

11. A temperatura num ponto (x, y, z) é dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2+3z^2}$ graus. Identifique a superfície do $\mathbb{R}^3$ cujos pontos possuem temperatura igual à temperatura do ponto $(-1, -1, 1)$.

SUPERFÍCIES DE NÍVEL

Exercícios

12. Descreva o domínio e as superfícies de nível das funções abaixo.

a) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

b) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - (z-1)^2$.

d) $f(x,y,z) = x^2 + z^2 - e^{2y}$.