Objetivos:

- Calcular o volume de sólidos somando cascas cilíndricas finas que crescem de dentro pra fora do eixo de revolução.

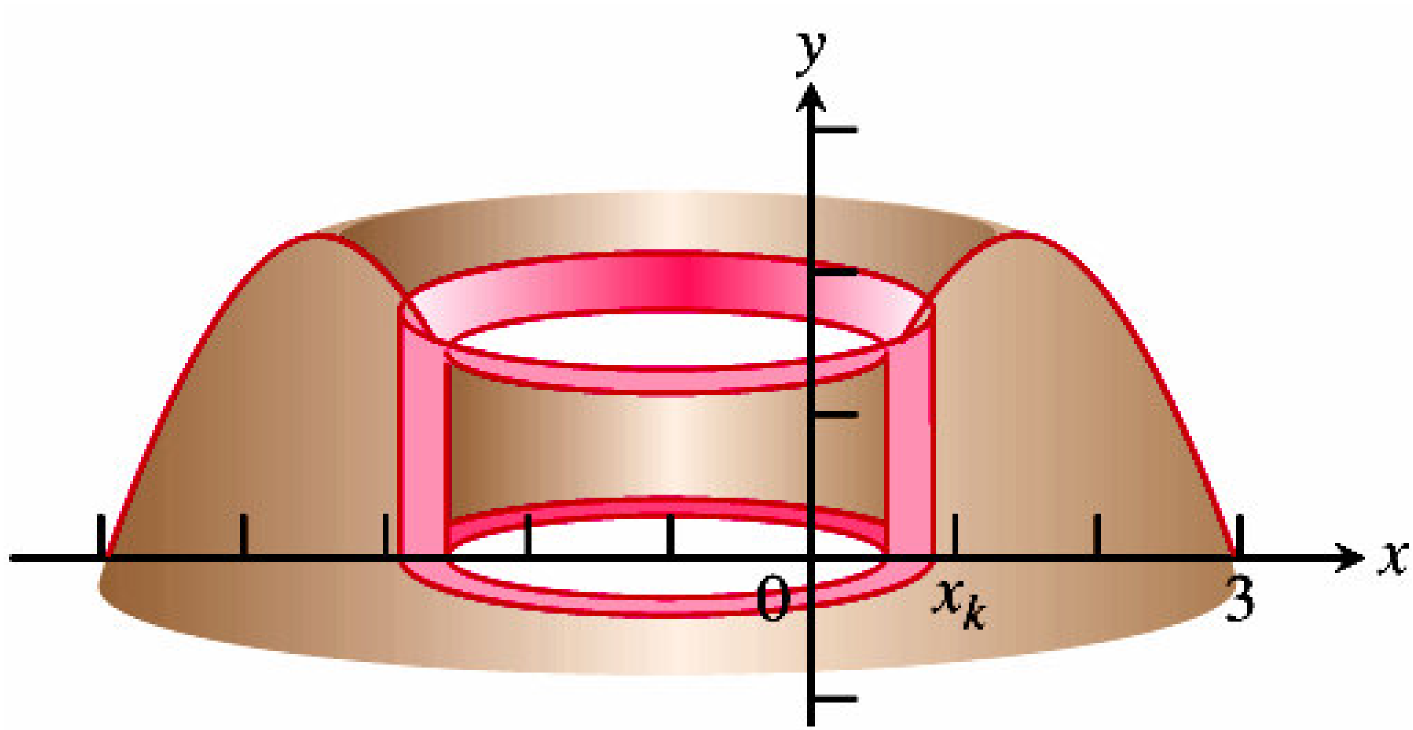
- **Exemplo:**

  A região compreendida pelo eixo x e pela parábola $y = f(x) = 3x - x^2$ gira em torno da reta $x = -1$. Qual o volume do sólido?

Volume usando cascas cilíndricas:

1. Corte uma fatia cilíndrica (paralelamente ao eixo de revolução) na parte interna do sólido. Depois corte outra fatia em torno do primeiro corte, e assim por diante. Cada cilindro encontrado terá raio de aproximadamente $1+x_k$, altura $3x_k-x_k^2$ e espessura Δx (fig. 5.17)

Figura 5.17: Cortando o sólido em fatias cilíndricas finas, de dentro para for a. Cada fatia ocorre em algum *xk* entre 0 e 3 e sua espessura é Δx. (Exemplo 1)



Volume usando cascas cilíndricas:

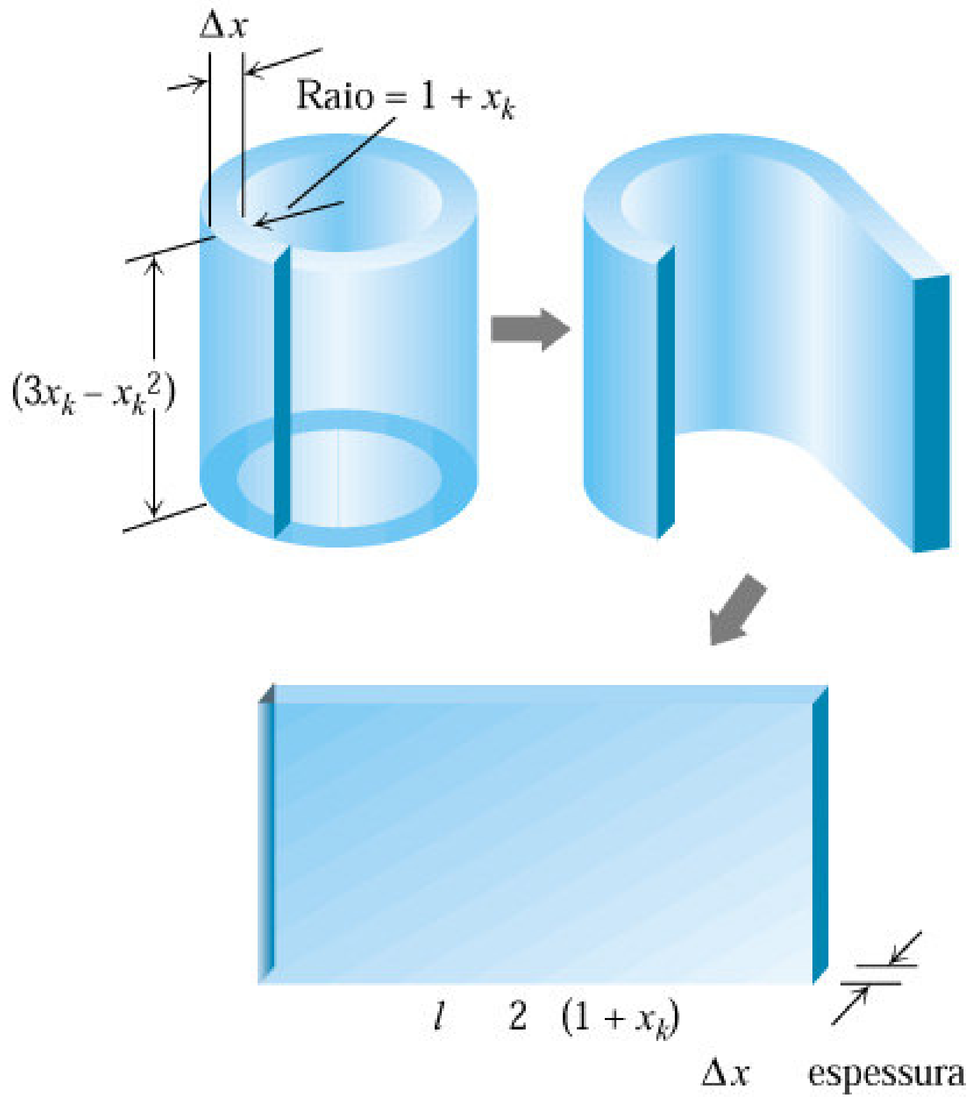
2. Desenrolando o cilindro em x_k teremos uma fatia retangular de espessura Δx. O comprimento da circunferência interna do cilindro será $2\pi.\ raio = 2\ \pi(\ 1+x_k\ )$.

   Portanto, o volume do sólido retangular é:

$$\Delta V \approx \text{largura X altura X espessura}$$

$$\approx 2\ \pi(\ 1+x_k\ ) \text{ X } 3x_k\text{-}x_k^2 \text{ X } \Delta x$$

Figura 5.18: Imagine que está cortando e ‘desenrolando’ uma casca cilíndrica para obter um sólido retangular (aproximadamente) plano. O volume é aproximadamente Δv = largura × altura × espessura.

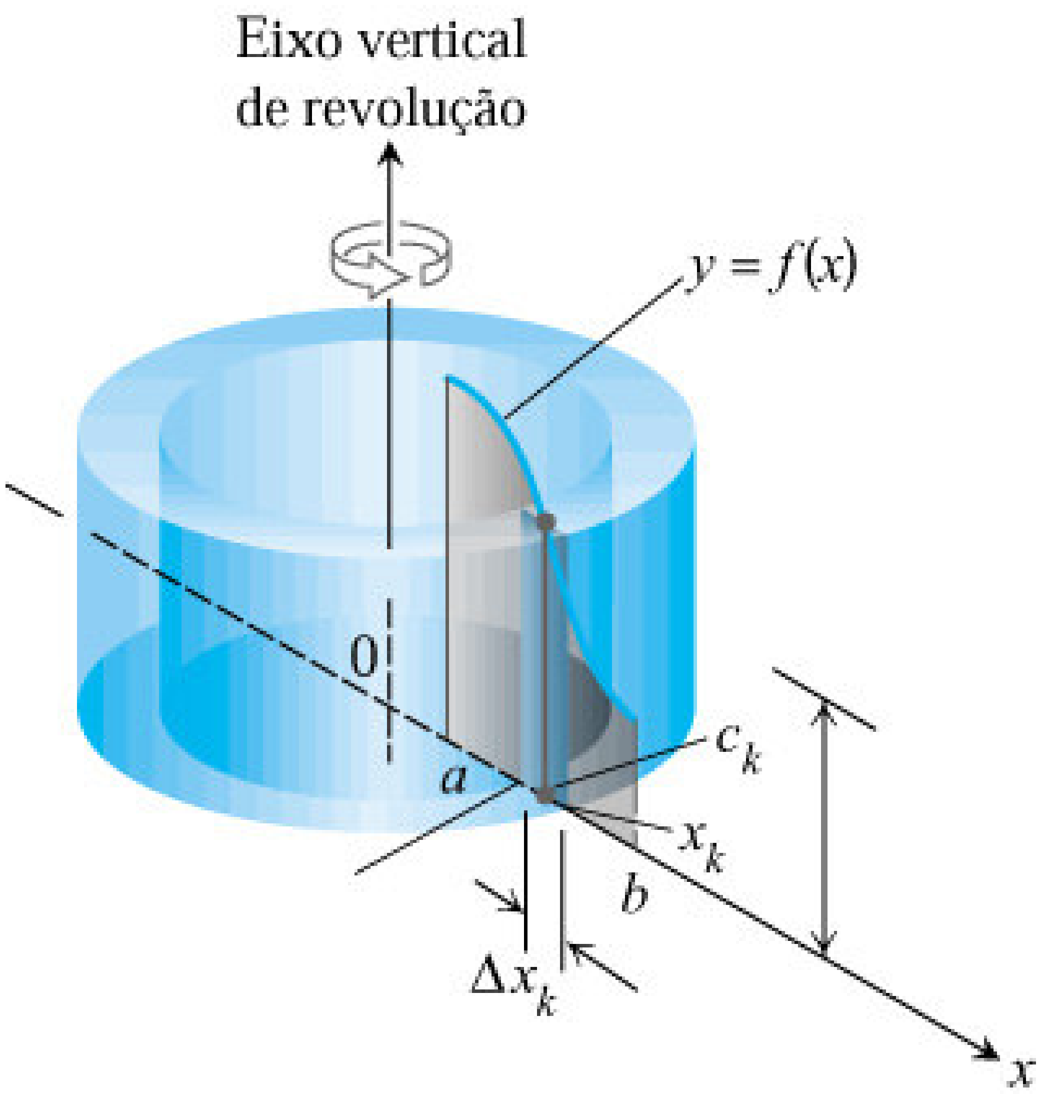


Volume usando casca cilíndrica:

3. Somando todos os volumes ao longo de todo o intervalo de x obtemos uma soma de Riemann. Basta então aplicar o limite para Δx tendendo a zero e obtemos a integral:

$$V = \int_0^3 2\pi(x+1)\left(3x - x^2\right)dx$$

Figura 5.19: A casca gerada pelo *k*-ésimo retângulo.



A Fórmula da Casca:

- O volume do sólido obtido com a rotação, em torno de uma reta vertical, da região compreendida entre o eixo-x e o gráfico de uma função contínua $y = f(x) \geq 0$, $0 \leq a \leq x \leq b$, é

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix} \text{raio} \\ \text{da casca} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{altura} \\ \text{da casca} \end{pmatrix} dx$$

Figura 5.20: A região, as dimensões da casca e o intervalo de integração do Exemplo 2.

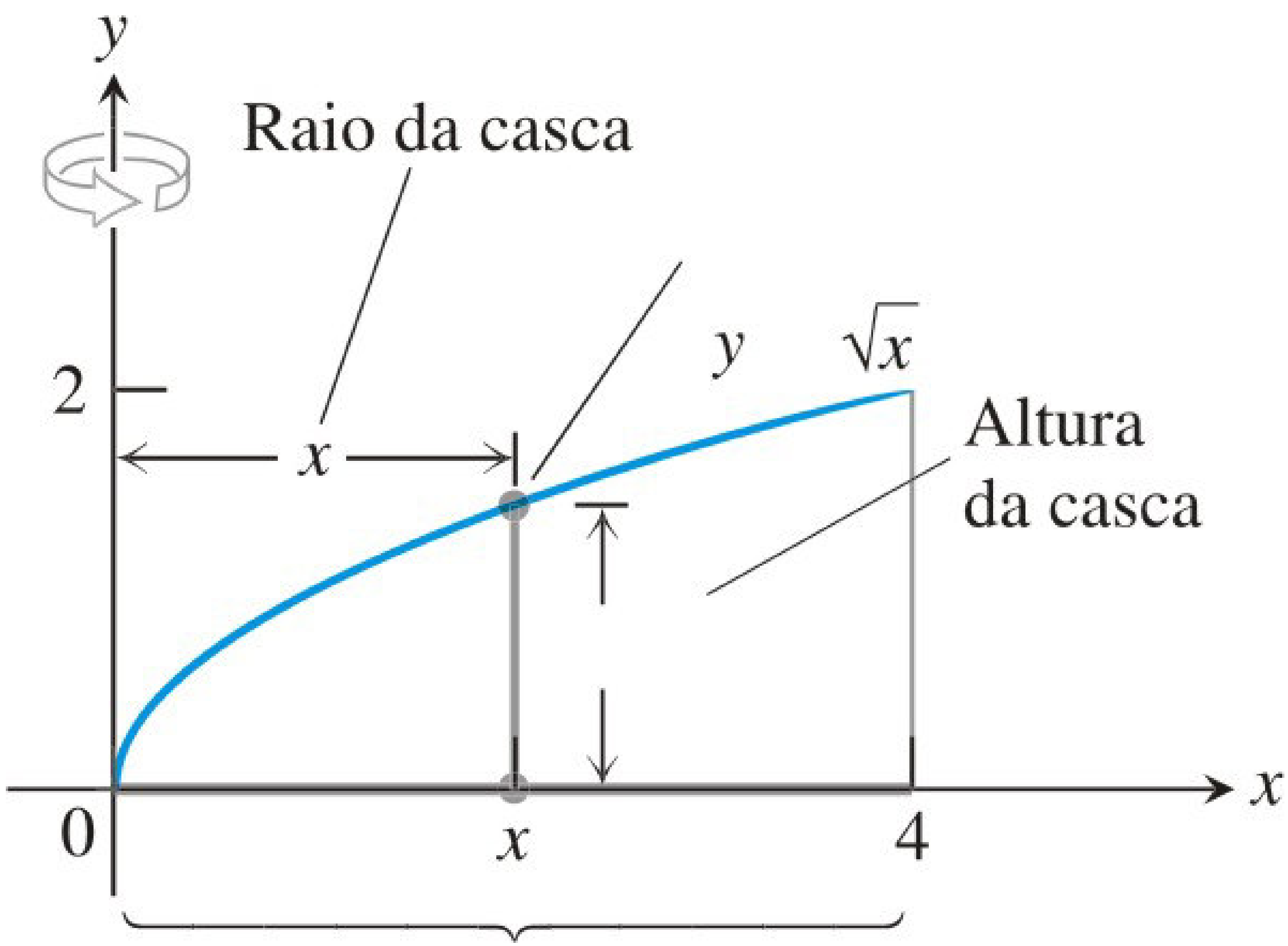


Figura 5.21: A casca gerada pelo segmento de reta da Figura 5.20.

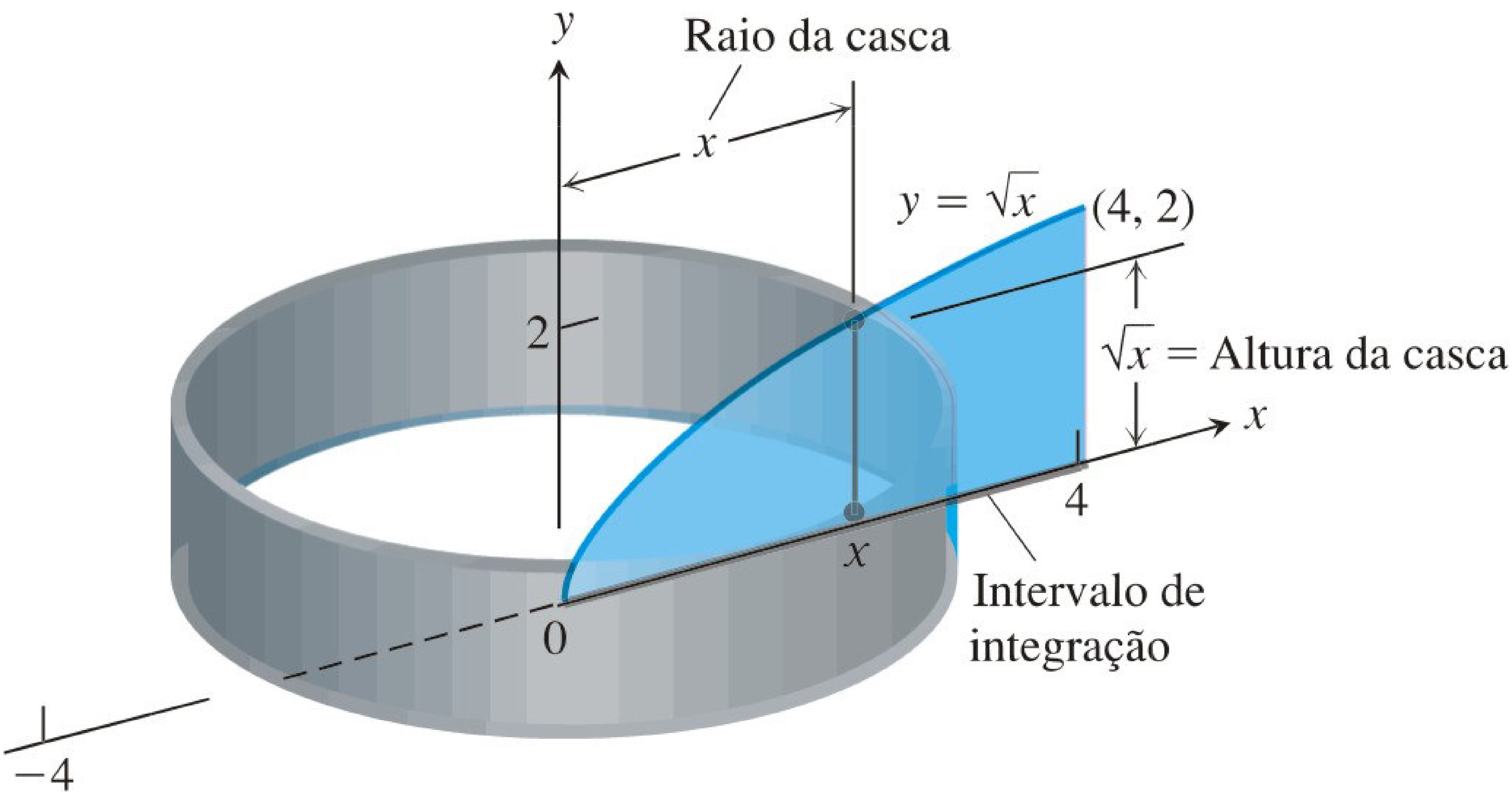


Figura 5.22: A região, as dimensões da casca e o intervalo de integração do Exemplo 3.

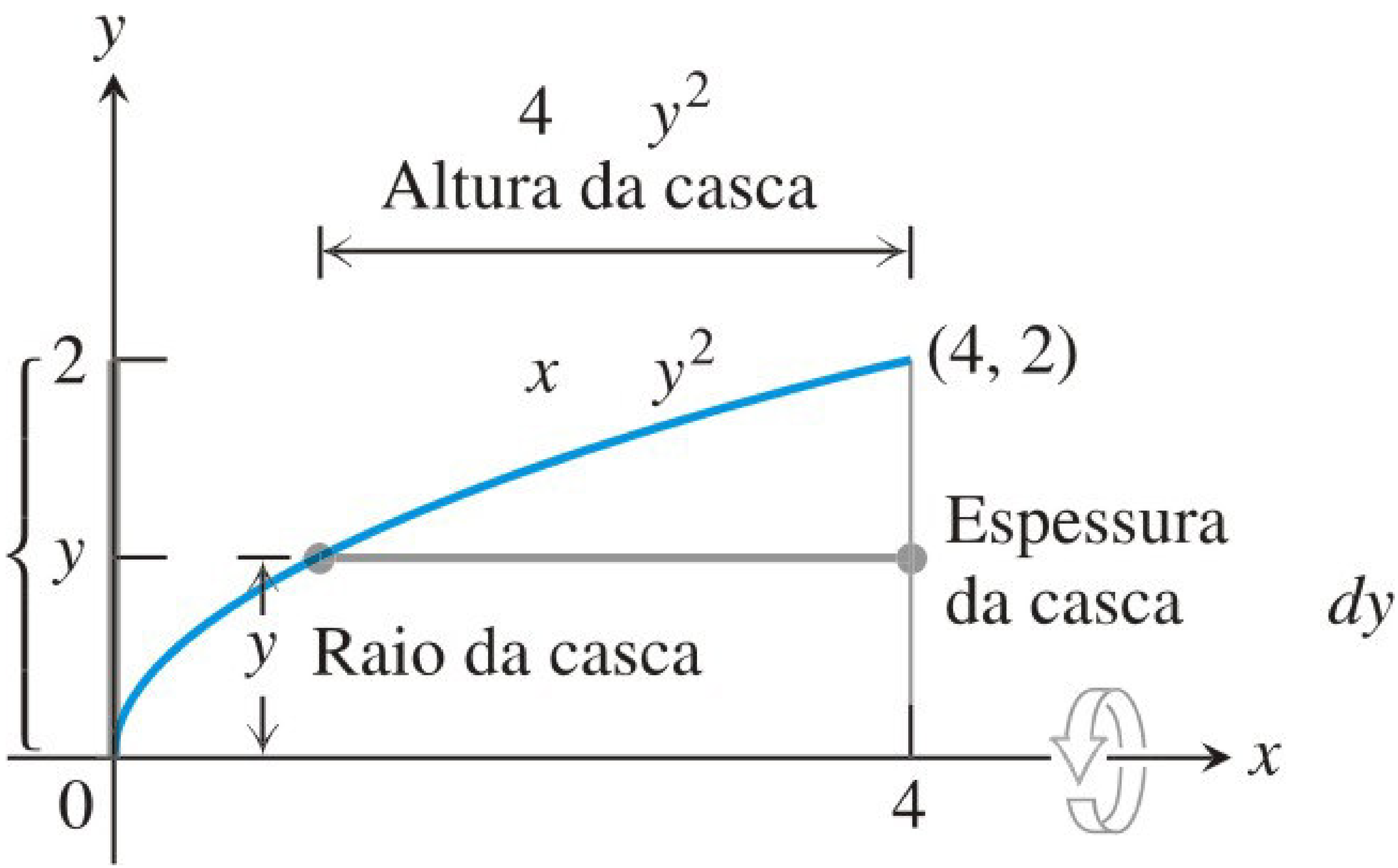
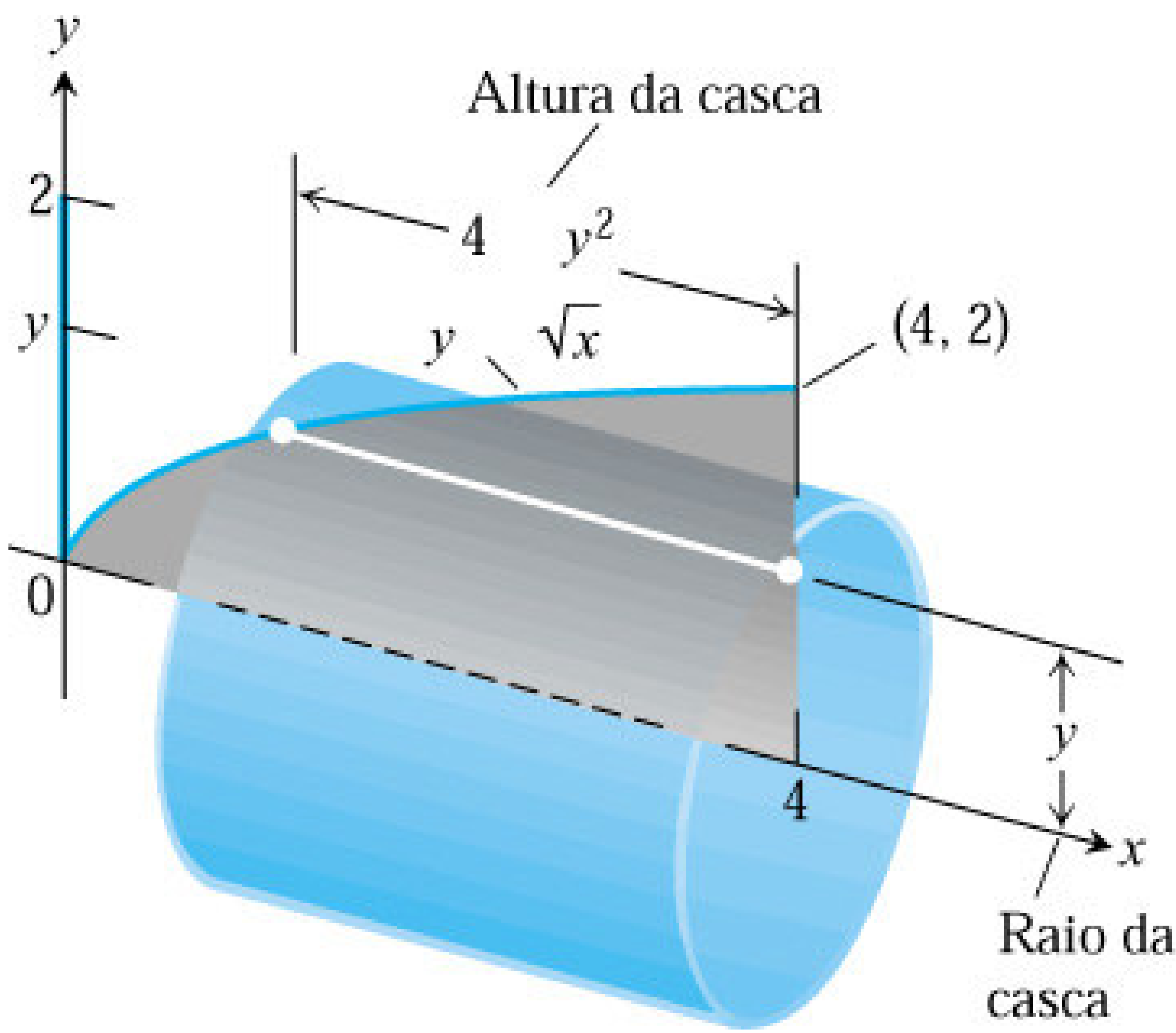


Figura 5.23: A casca gerada pelo segmento de reta da Figura 5.22.



Como usar o método da casca:

1. Desenhe a região e esboce um segmento de reta identificando o corte paralelo ao eixo de rotação. Encontre o raio e altura da casca cilíndrica.
2. Determine os limites de integração para a variável em questão.
3. Integre o produto de $2\pi \cdot$ raio $\cdot$ altura em relação a variável do problema.