Álgebra Linear I
Espaços Vetoriais

Prof. Jairo

Definição

Definição

Um **espaço vetorial** *real* é uma estrutura algébrica formada por um conjunto $V \neq \emptyset$ (cujos elementos são chamados vetores) e duas operações sobre V:

$$\begin{array}{rcl} + : V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u+v \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha \cdot u \end{array}$$

chamadas, respectivamente, de *soma de vetores* e *multiplicação por escalar*, as quais satisfazem, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes condições (que chamamos de *axiomas* de espaço vetorial):

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v$, $\forall v \in V$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v$, $\forall v \in V$;

A4. **inderso aditivo:** para cada vetor $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, chamado *inverso aditivo* ou *simétrico*, ou ainda *oposto* de v, tal que $-v + v = \mathbf{0}$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v, \forall v \in V$;

A4. **inderso aditivo:** para cada vetor $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, chamado *inverso aditivo* ou *simétrico*, ou ainda *oposto* de v, tal que $-v + v = \mathbf{0}$;

A5. **distributividade:** $(\alpha + \beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$ e $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$;

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v$, $\forall v \in V$;

A4. **inderso aditivo:** para cada vetor $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, chamado *inverso aditivo* ou *simétrico*, ou ainda *oposto* de v, tal que $-v + v = \mathbf{0}$;

A5. **distributividade:** $(\alpha + \beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$ e $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$;

A6. **multiplicação pela unidade:** $1\cdot u = u$.

Definição: cont.

A1. **comutatividade:** $u+v = v+u$;

A2. **associatividade:** $(u+v)+w = u+(v+w)$ e $(\alpha \cdot \beta)\cdot u = \alpha\cdot(\beta\cdot u)$;

A3. **vetor nulo:** existe o vetor $\mathbf{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que $\mathbf{0} + v = v$, $\forall v \in V$;

A4. **inderso aditivo:** para cada vetor $v \in V$, existe um vetor $-v \in V$, chamado *inverso aditivo* ou *simétrico*, ou ainda *oposto* de v, tal que $-v + v = \mathbf{0}$;

A5. **distributividade:** $(\alpha + \beta)\cdot u = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$ e $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u+\beta\cdot u$;

A6. **multiplicação pela unidade:** $1\cdot u = u$.

Onde $+$ e $\cdot$ são, respectivamente, as operações de soma e multiplicação usuais de $\mathbb{R}$.

Comentários sobre a definição

- Como $+$ é uma **função de** $V \times V$ **em** V, então para cada par de vetores $u, v \in V$, é **único** o vetor $u+v$ o qual **pertence a** V; analogamente, como $\cdot$ é uma **função de** $\mathbb{R} \times V$ **em** V então, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ é **único** o vetor $\alpha \cdot v$, o qual **pertence a** V.

Comentários sobre a definição

- Como $+$ é uma **função de** $V \times V$ **em** V, então para cada par de vetores $u, v \in V$, é **único** o vetor $u+v$ o qual **pertence a** V; analogamente, como $\cdot$ é uma **função de** $\mathbb{R} \times V$ **em** V então, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ é **único** o vetor $\alpha \cdot v$, o qual **pertence a** V.
- A definição mais geral de espaço vetorial consiste apenas em trocar $\mathbb{R}$ por um *corpo* $\mathbb{K}$ qualquer na definição acima. Neste caso, dizemos que V é um espaço vetorial *sobre o corpo* $\mathbb{K}$. Por exemplo, se pormos $\mathbb{C}$ no lugar de $\mathbb{R}$ teremos um *espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$, ou um *espaço vetorial complexo*.

Comentários sobre a definição

- Como $+$ é uma **função de** $V \times V$ **em** V, então para cada par de vetores $u, v \in V$, é **único** o vetor $u+v$ o qual **pertence a** V; analogamente, como $\cdot$ é uma **função de** $\mathbb{R} \times V$ **em** V então, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ é **único** o vetor $\alpha \cdot v$, o qual **pertence a** V.
- A definição mais geral de espaço vetorial consiste apenas em trocar $\mathbb{R}$ por um *corpo* $\mathbb{K}$ qualquer na definição acima. Neste caso, dizemos que V é um espaço vetorial *sobre o corpo* $\mathbb{K}$. Por exemplo, se pormos $\mathbb{C}$ no lugar de $\mathbb{R}$ teremos um *espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$, ou um *espaço vetorial complexo*.
- Quase todas as propriedades dos espaços vetoriais reais (que veremos aqui) valem para espaços vetoriais complexos.

Comentários sobre a definição

- Como $+$ é uma **função de** $V \times V$ **em** V, então para cada par de vetores $u, v \in V$, é **único** o vetor $u+v$ o qual **pertence a** V; analogamente, como $\cdot$ é uma **função de** $\mathbb{R} \times V$ **em** V então, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ é **único** o vetor $\alpha \cdot v$, o qual **pertence a** V.
- A definição mais geral de espaço vetorial consiste apenas em trocar $\mathbb{R}$ por um *corpo* $\mathbb{K}$ qualquer na definição acima. Neste caso, dizemos que V é um espaço vetorial *sobre o corpo* $\mathbb{K}$. Por exemplo, se pormos $\mathbb{C}$ no lugar de $\mathbb{R}$ teremos um *espaço vetorial sobre* $\mathbb{C}$, ou um *espaço vetorial complexo*.
- Quase todas as propriedades dos espaços vetoriais reais (que veremos aqui) valem para espaços vetoriais complexos.
- Em nosso texto, quando escrevermos "espaço vetorial", estaremos nos referindo a espaços vetoriais reais.

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.
- Na maioria dos casos porém, nos referiremos ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como "*o espaço vetorial V*" sem se referir às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar (as quais estarão implícitas).

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.
- Na maioria dos casos porém, nos referiremos ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como "*o espaço vetorial V*" sem se referir às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar (as quais estarão implícitas).
- Normalmente o mesmo símbolo "$+$" será (por simplicidade) utilizado para representar, tanto a *soma de vetores* quanto a *soma usual de números reais*. Além disso, escreveremos αu ao invés de $\alpha \cdot u$. A distinção ficará implícita pelo contexto.

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.
- Na maioria dos casos porém, nos referiremos ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como "*o espaço vetorial V*" sem se referir às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar (as quais estarão implícitas).
- Normalmente o mesmo símbolo "$+$" será (por simplicidade) utilizado para representar, tanto a *soma de vetores* quanto a *soma usual de números reais*. Além disso, escreveremos αu ao invés de $\alpha \cdot u$. A distinção ficará implícita pelo contexto.
- Em alguns livros, o mesmo símbolo 0 é utilizado para representar, tanto o vetor nulo do espaço vetorial, quanto o número real zero.

Observações

- Denotaremos por $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial definido acima.
- Na maioria dos casos porém, nos referiremos ao espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ simplesmente como "*o espaço vetorial V*" sem se referir às operações de soma de vetores e multiplicação por escalar (as quais estarão implícitas).
- Normalmente o mesmo símbolo "$+$" será (por simplicidade) utilizado para representar, tanto a *soma de vetores* quanto a *soma usual de números reais*. Além disso, escreveremos αu ao invés de $\alpha \cdot u$. A distinção ficará implícita pelo contexto.
- Em alguns livros, o mesmo símbolo 0 é utilizado para representar, tanto o vetor nulo do espaço vetorial, quanto o número real zero.
- Às vezes escreveremos a expressão $u - v$ para nos referirmos à soma $u + (-v)$.

Exemplo (1)

O conjunto $\mathbb{R}$ munido das operações usuais de soma e multiplicação é um espaço vetorial real.

Exemplo (1)

O conjunto $\mathbb{R}$ munido das operações usuais de soma e multiplicação é um espaço vetorial real.

Exemplo (2)

Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definirmos a soma de elementos de $\mathbb{R}^n$ e a multiplicação por escalar pondo

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e

$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \ldots, \alpha \cdot x_n)$$

tem-se que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.
O vetor nulo é $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ e o simétrico de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é o vetor $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Exemplo (3)

Dados $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Definamos a *soma de matrizes* e a *multiplicação por escalar* pondo

$$A+B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

e

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

Essas operações dão ao conjunto $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem $m \times n$ com coeficientes reais, a estrutura de espaço vetorial.

Exemplo (4)

Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Denotamos por $\mathcal{F}(X;\mathbb{R}) = \{f \mid f : X \to \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as funções f definidas em X e tomando valores reais. Definamos a *a soma de elementos de* $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e a *multiplicação por escalar* do seguinte modo: dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definamos

$$f+g : X \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha \cdot f : X \to \mathbb{R}$$

pondo

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in X$$

e

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in X.$$

O conjunto $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ munido dessas operações é um espaço vetorial.

Prova (do exemplo 4).

Inicialmente note que $+$ está bem definida. Com efeito, para par (f, g) de funções de X em $\mathbb{R}$, a soma $f+g$ é uma (única) função de X em $\mathbb{R}$ (verifique). A mesma observação vale para $\cdot$. Posto isso, provaremos que as referidas operações satisfazem os axiomas de espaço vetorial.

Antes porém, lembremos que duas funções são iguais quando possuem o mesmo domínio, mesmo contradomínio e as imagens de cada elemento do domínio por essas funções são iguais. Assim, para provar as igualdades de funções que aparecerão na demonstração abaixo, só precisaremos verificar que a imagem de cada elemento $x \in X$ por essas funções são iguais (pois em todos os casos ter-se-á funções com domínio X e contradomínio $\mathbb{R}$). $\square$

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X \\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Segue-se que $f+g = g+f$.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

  $$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X \\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

  Segue-se que $f+g = g+f$.
  Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

  Segue-se que $f+g = g+f$.
  Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X \\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

  Segue-se que $f+g = g+f$.
  Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
  $$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X \\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X \\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$
  Segue-se que $f+g = g+f$.
  Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
  Com efeito, dado $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$,

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $f+g = g+f$.
Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
Com efeito, dado $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned}(\mathbf{0}+f)(x) &= \mathbf{0}(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= 0+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= f(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $f+g = g+f$.
Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
Com efeito, dado $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned}(\mathbf{0}+f)(x) &= \mathbf{0}(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= 0+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= f(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
Segue-se que $\mathbf{0}+f = f$.

Prova do exemplo 4 cont.

- Para $A1$, dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:
  $$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X\\ &= g(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= (g+f)(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
  Segue-se que $f+g = g+f$.
  Portanto, $f+g = g+f, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
- A prova do $A2$ é análoga e será deixada como exercício.
- $A3$. A função $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{0}(x) = 0, \quad \forall x \in X$ é o vetor nulo de $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.
  Com efeito, dado $f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$,
  $$\begin{aligned}(\mathbf{0}+f)(x) &= \mathbf{0}(x)+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= 0+f(x), \quad \forall x \in X\\ &= f(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$
  Segue-se que $\mathbf{0}+f = f$.
  Portanto $\mathbf{0}+f = f, \quad \forall f \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Prova do exemplo 4 cont.

- $A4$. Fica como exercício.

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4*. Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte)*. Dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4.* Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte).* Dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
[\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha\cdot[(f+g)(x)], \quad \forall x \in X \\
&= \alpha\cdot[(f(x)+g(x)], \quad \forall x \in X \\
&= \alpha\cdot f(x)+\alpha\cdot g(x), \quad \forall x \in X \\
&= (\alpha\cdot f)(x)+(\alpha\cdot g)(x), \quad \forall x \in X \\
&= [(\alpha\cdot f)+(\alpha\cdot g)](x), \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4.* Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte).* Dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
[\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha\cdot[(f+g)(x)], \quad \forall x \in X \\
&= \alpha\cdot[(f(x)+g(x)], \quad \forall x \in X \\
&= \alpha\cdot f(x)+\alpha\cdot g(x), \quad \forall x \in X \\
&= (\alpha\cdot f)(x)+(\alpha\cdot g)(x), \quad \forall x \in X \\
&= [(\alpha\cdot f)+(\alpha\cdot g)](x), \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

Logo, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g$.

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4.* Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte).* Dados $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
[\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha \cdot [(f+g)(x)], \quad \forall x \in X \\
&= \alpha \cdot [(f(x) + g(x)], \quad \forall x \in X \\
&= \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x), \quad \forall x \in X \\
&= (\alpha\cdot f)(x) + (\alpha\cdot g)(x), \quad \forall x \in X \\
&= [(\alpha\cdot f)+(\alpha\cdot g)](x), \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

Logo, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g$.

Portanto, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4.* Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte).* Dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
[\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha\cdot[(f+g)(x)], \quad \forall x \in X\\
&= \alpha\cdot[(f(x)+g(x)], \quad \forall x \in X\\
&= \alpha\cdot f(x)+\alpha\cdot g(x), \quad \forall x \in X\\
&= (\alpha\cdot f)(x)+(\alpha\cdot g)(x), \quad \forall x \in X\\
&= [(\alpha\cdot f)+(\alpha\cdot g)](x), \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

  Logo, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g$.

  Portanto, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- *A5.(segunda parte).* Fica como exercício.

Prova do exemplo 4 cont.

- *A4.* Fica como exercício.
- *A5.(primeira parte).* Dados $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
[\alpha\cdot(f+g)](x) &= \alpha\cdot[(f+g)(x)], \quad \forall x \in X\\
&= \alpha\cdot[(f(x)+g(x)], \quad \forall x \in X\\
&= \alpha\cdot f(x)+\alpha\cdot g(x), \quad \forall x \in X\\
&= (\alpha\cdot f)(x)+(\alpha\cdot g)(x), \quad \forall x \in X\\
&= [(\alpha\cdot f)+(\alpha\cdot g)](x), \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

  Logo, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g$.

  Portanto, $\alpha\cdot(f+g) = \alpha\cdot f+\alpha\cdot g, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- *A5.(segunda parte).* Fica como exercício.
- *A6.* Fica como exercício.

Observação

Exceto em casos excepcionais, sempre que nos referirmos a espaços vetoriais **envolvendo os conjuntos dos exemplos acima**, ficará implícito que as operações que estamos considerando são aquelas ali definidas. De modo que tomaremos liberdade de escrever, por exemplo, "*o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$", sem mencionar as operações (ficará implícito que estamos considerando as operações definidas no exemplo 2, pondo $n = 3$).

Propriedades

Nos enunciados abaixo, V é um espaço vetorial, $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriedades

Nos enunciados abaixo, V é um espaço vetorial, $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

P_1 (lei do cancelamento)

Se $u + v = u + w$, então $v = w$.

Propriedades

Nos enunciados abaixo, V é um espaço vetorial, $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

P_1 (lei do cancelamento)

Se $u + v = u + w$, então $v = w$.

Prova.

Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{0} + v && \text{(por } A3\text{)} \\ &= (-u + u) + v && \text{(por } A4\text{)} \\ &= -u + (u + v) && \text{(por } A2\text{)} \\ &= -u + (u + w) && \text{(por hipótese)} \\ &= (-u + u) + w && \text{(por } A2\text{)} \\ &= \mathbf{0} + w && \text{(por } A4\text{)} \\ &= w && \text{(por } A3\text{)} \end{aligned}$$

$\square$

Propriedades

P_2. Dados $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $0 \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Propriedades

P_2. Dados $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $0 \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

P_3. Se $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $v = \mathbf{0}$.

Propriedades

P_2. Dados $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $0 \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

P_3. Se $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $v = \mathbf{0}$.

P_4. $(-1) \cdot v = -v$.

Propriedades

P_2. Dados $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $0 \cdot v = \mathbf{0}$ e $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

P_3. Se $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$, então $\alpha = 0$ ou $v = \mathbf{0}$.

P_4. $(-1) \cdot v = -v$.

P_5. Dados $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$, tem-se

$$\beta \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\beta \alpha_i) v_i.$$

Exercícios

Nos enunciados abaixo, V é um espaço vetorial, $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. O vetor nulo de V e o simétrico de cada elemento v de V são únicos.
2. $-(-u) = u$ e $(-\alpha) \cdot u = \alpha(-u) = -(\alpha \cdot u)$.
3. Dados $u, v \in V$, existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.
4. Use P_1 para mostrar as seguintes implicações:

$$u + v = \mathbf{0} \Rightarrow u = -v$$

$$u + v = v \Rightarrow u = \mathbf{0}.$$

5. Prove que as operações definidas nos exemplos 2 e 3, respectivamente, dão aos conjuntos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, respectivamente, a estrutura de espaço vetorial. Complete a prova do exemplo 4 e prove as propriedades P_2 a P_5 do texto.