UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR
PROF.: JAIRO
ALUNO: FELIPE DERKIAN DE SOUSA FREITAS

LISTA 6

BOA VISTA, 02 DE OUTUBRO DE 2020

Universidade Federal de Roraima
Álgebra Linear I - Lista 6
Prof. Jairo S. Araujo Costa

Data: 24/09/2020
MB202
Turma 1

Questão 1. Dados V um espaço vetorial e $v \in V$, com v 6=0, mostre que o conjunto $U = \{\lambda v \; ; \; \lambda \in \mathrm{R}\}$ é um subespaço de V.

Questão 2. Dados $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ vetores não nulos de $\in \mathrm{R}^2$. Mostre que $U \oplus V = \mathrm{R}^2$, onde $U = \{\lambda u \; ; \; \lambda \in \mathrm{R}\}$ e $V = \{\lambda v \; ; \; \lambda \in \mathrm{R}\}$.

Questão 3. Considere os seguintes subespaços de R^3

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \; ; \quad x + y + z = 0\}, \\ V &= \{(x, y, z) \; ; \quad x = z = 0\} \quad \text{e} \\ W &= \{(x, y, z) \; ; \quad y = z\}. \end{aligned}$$

Verique que: $U + V = \mathrm{R}^3$, $U + W = \mathrm{R}^3$ e $V + W = \mathrm{R}^3$. Em quais dos casos a soma é direta?

Observações:

i) Resolva as questões (escreva as soluções em uma folha branca, de preferência papel A4, para facilitar a visibilidade), em seguida digitalize as folhas com as soluções e rena-as em um (único) arquivo no formato PDF. O envio desse arquivo será utilizado para atestar sua frequência na aula do dia 24/09/2020. As soluções contidas no referido arquivo serão corrigidas para, com as demais listas de exercícios, formar a nota N_4 (ver plano de ensino do curso);

ii) assine em todas as folhas.

Lista 6 - Álgebra Linear - Felipe Wertian

(Q1) Dados V um espaço vetorial e $v \in V$, com $v \neq 0$, mostre que o conjunto $U = \{\lambda v;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de V.

De fato, o vetor nulo de V pertence a U, basta por $\lambda = 0$. tem-se $0 = 0 \cdot v \in U$. Além disso, se u e $w \in U$ então existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $u = \lambda_1 v$ e $w = \lambda_2 v$. Assim, $u + w = \lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v \in U$. Por fim, dado $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$. Segue-se que $\alpha u = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda) \cdot v \in U$. portanto U é subespaço de V.

Q2 Felipe Werner

Dado $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ vetores não nulos de $\mathbb{R}^2$. Mostre que $U \oplus V = \mathbb{R}^2$, onde $U = \{\lambda u \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ e $V = \{\lambda v \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

$\lambda_1 u$ tal que $\lambda_1 = 0$ então $\lambda_1 (a, b) \Rightarrow 0 \cdot (a, b) \Rightarrow (0, 0)$

$\lambda_2 v$ tal que $\lambda_2 = 0$ então $\lambda_2 (c, d) \Rightarrow 0 (c, d) \Rightarrow (0, 0)$

logo tem o vetor nulo.

Dado $v \in U \cap V$ então $v \in U$ e $v \in V$ logo $u + v$

$\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\lambda'} \cdot v \Rightarrow \lambda' \cdot v \Rightarrow \lambda' = 0 \cdot v$ logo

$v = 0$. portanto $U, V \in \mathbb{R}^2$ e $v \in U \cap V$ logo $v = 0$ e é soma direta dos subespaços.

Felipe Werton

(Q3) considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x,y,z);\ x+y+z=0\},\quad V = \{(x,y,z);\ x=z=0\} \text{ e } W = \{(x,y,z);\ y=z\}$$

Verifique que: $U+V=\mathbb{R}^3$, $U+W=\mathbb{R}^3$ e $V+W=\mathbb{R}^3$. Em quais dos casos a soma é direta?

$U+V=\mathbb{R}^3$:

Dado $w=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, pondo $u=(x,-x-z,z)$ e $v=(0,x+y+z,0)$, tem-se que $u\in U$, pois $(x+(-x-z)+z=0)$, $v\in V$ e $u+v=$ $(0+x, (-x-z)+(x+y+z), 0+z) = (x,y,z) = w$. Isto é $w\in U+V$. Logo, $\mathbb{R}^3\subset U+V$, e portanto, $U+V=\mathbb{R}^3$. Além disso, dado $w=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tem-se: $w\in U\cap V \Rightarrow w\in U$ e $w\in V$. Mas $w\in U\Rightarrow x+y+z=0$ e $w\in V\Rightarrow x=z=0$. Segue-se que $0+y+0=0\Rightarrow y=0$. Logo, $w=(0,0,0)$. Isto é $U\cap V=\{0\}$. Portanto $U\oplus V=\mathbb{R}^3$.

(3)

Felipe Newton

$V+W=\mathbb{R}^3$ $\quad V=\{(x,y,z);x=z=0\}$.

$W=\{(x,y,z);y=z\}$ $\quad (0,y-z,0)$

(x,z,z)

Dado $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, sendo $v=(0,y-z,0)$ e $w=(x,z,z)$ tem-se que $v\in V$ e $w\in W$ e $v+w=(0+x,\ y-\cancel{z}+z,\ 0+z)=(x,y,z)$ $=u$. Isto é $u\in V+W$. Logo, $\mathbb{R}^3\subset V+W$, e portanto, $V+W=\mathbb{R}^3$.

Além disso, dado $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tem-se:

$u\in V\cap W\Rightarrow u\in V$ e $u\in W$. Mas, $u\in V\Rightarrow x=z=0$ e $u\in W\Rightarrow$ $y=z$; Segue-se que $x=0$ e $z=0$ e como $y=z$ logo $y=0$.

Logo, $u=(0,0,0)$. Isto é $V\cap W=\{0\}$. Portanto $V\oplus W=\mathbb{R}^3$.

③ $U + W = \mathbb{R}^3$ $\quad U = \{(x,y,z);\ x+y+z=0\}$. Felipe Verkian

$W = \{(x,y,z);\ y=z\}$.

dado $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, pondo $u = (-y-z, -x-z, -x-y) \in U$ e $w = (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \in W$, logo $u+v =$

$(-\cancel{y}-\cancel{z}+x+\cancel{y}+\cancel{z}, \cancel{x}+y+\cancel{z}-\cancel{x}-\cancel{z}, -\cancel{x}-\cancel{y}+\cancel{x}+\cancel{y}+z) = (x,y,z) \in v$, portanto $u+v \in \mathbb{R}^3$. Além disso, dado $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tem-se:

$v \in U \cap W \Rightarrow v \in U$ e $v \in W$. Mas $v \in U \Rightarrow x+y+z=0$ e $v \in V \Rightarrow y = z$. Segue-se que $x+y+y=0 \Rightarrow x = -2y$ portanto a interseção é diferente de 0.