Álgebra Linear I
Soma de Subespaços Vetoriais

Prof. Jairo

Definição

Definição

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. O subconjunto

$$U + W = \{u + w\,;\; u \in U \text{ e } w \in W\}$$

de V é chamado de soma de U e W.

Definição

Definição

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. O subconjunto

$$U + W = \{u + w\,;\; u \in U \text{ e } w \in W\}$$

de V é chamado de soma de U e W.

Proposição (1)

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. O subconjunto $U + W$ também é um subespaço de V.

Definição

Definição

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. O subconjunto

$$U + W = \{u + w\,;\; u \in U \text{ e } w \in W\}$$

de V é chamado de soma de U e W.

Proposição (1)

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V. O subconjunto $U + W$ também é um subespaço de V.

Demonstração.

A cargo do leitor. □

Exemplo (1)

Considere os subespaços $U = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tem-se que $U + W = \mathbb{R}^2$.

Exemplo (1)

Considere os subespaços $U = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\, ;\ x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\, ;\ y \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. Tem-se que $U + W = \mathbb{R}^2$.

Prova.

Com efeito, por definição, $U + W \subset \mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que $\mathbb{R}^2 \subset U + W$. De fato, dado $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, tomemos $u = (x, x)$ e $w = (0, y - x)$. Note que $u \in U$, $w \in W$ e $u + w = (x + 0, x + y - x) = (x, y) = v$. Isto é $v \in U + W$. Segue-se que $U + W = \mathbb{R}^2$. $\square$

Soma direta

Definição

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V, tais que $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Neste caso, o subespaço $U + W$ é dito ser *soma direta de U e W* e denotado por $U \oplus W$.

Soma direta

Definição

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V, tais que $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Neste caso, o subespaço $U + W$ é dito ser *soma direta de U e W* e denotado por $U \oplus W$.

Exemplo (2)

Os subespaços U e W do exemplo 1 acima, é soma direta de $\mathbb{R}^2$.

Soma direta

Definição

Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V, tais que $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Neste caso, o subespaço $U + W$ é dito ser *soma direta de* U *e* W e denotado por $U \oplus W$.

Exemplo (2)

Os subespaços U e W do exemplo 1 acima, é soma direta de $\mathbb{R}^2$.

Prova.

Com efeito, pelo exemplo 1, $U + W = \mathbb{R}^2$. Além disso, se $u = (x, y) \in \; U \cap W$ então, por um lado, $u \in U \Rightarrow x = y$, por outro lado, $u \in W \Rightarrow x = 0$. Logo, $x = y = 0$. Segue-se que $u = (0, 0)$. Assim, $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. $\square$

Teorema

Sejam U_1, U_2, U subespaços de um espaço vetorial V. Então $U_1 \oplus U_2 = U$ se, e somente se, cada vetor $u \in U$ se escreve de modo único como soma $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$.

Teorema

Sejam U_1, U_2, U subespaços de um espaço vetorial V. Então $U_1 \oplus U_2 = U$ se, e somente se, cada vetor $u \in U$ se escreve de modo único como soma $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$.

Demonstração

Exercício.

Exercícios

1. Exiba dois subespaços (diferentes dos subespaços triviais) U e W de $\mathbb{R}^4$ tais que $U \oplus W = \mathbb{R}^4$. Um seguida, exiba mais dois subespaços U' e W' de $\mathbb{R}^4$ tais que $U' + W' = \mathbb{R}^4$ e $U' \cap W' \neq \{\mathbf{0}\}$.
2. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ser *par* (respectivamente *ímpar*) quando $f(-x) = f(x)$ (respectivamente $f(-x) = -f(x)$), para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que:
   a) o conjunto U de todas as funções pares e o conjunto W de todas as funções ímpares são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$;
   b) $U \oplus W = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
3. Encontre um subespaço E de $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $D \oplus E = \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, onde $D \subset \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as matrizes diagonais de ordem 3.

Desafios

1. Generalize o Exemplo (4) do material sobre espaços vetoriais. Mais precisamente mostre que, se X é um conjunto qualquer e $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial, então com as definições naturais, o conjunto $\mathcal{F}(X; V) = \{f : X \to V\}$ de todas as funções de X em V é um espaço vetorial.
   Sugestão: A única mudança será substituir a soma "$+$" de números reais pela soma "$+$" de vetores de V.
2. Admitindo que o Desafio 1 foi provado, então pondo $X = U$, onde U é um espaço vetorial, $\mathcal{F}(U; V)$ é um espaço vetorial:
   a) generalize as definições de função par e função ímpar (para funções $f : U \to V$) do exercício 2;
   b) mostre que o conjunto U de todas as funções pares e o conjunto W de todas as funções ímpares são subespaços de $\mathcal{F}(U; V)$;
   c) $U \oplus W = \mathcal{F}(U; V)$.