Universidade Federal de Roraima
Departamento de Matemática
Álgebra Linear I - Prova 2

Data: 19/11/2020
Semestre 2020.1
Turma 1
Prof. Jairo

Responda **três**, dentre as seis questões abaixo.

Questão 1. (2,5 Pontos) Sejam $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ dada por $T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 2x & y+x \\ z & t \end{pmatrix}$ e $S : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ definida por $S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b, c, 2c)$.

a) Determine $P = S \circ T$;

b) Determine o posto e a nulidade de T;

c) T é isomorfismo? Justifique.

d) Determine o posto e a nulidade de P;

e) P é isomorfismo? Justifique.

Questão 2. (2,5 Pontos) Sejam u e v vetores num espaço euclidiano tais que $\|u\| = 3$, $\|v\| = 4$ e $\|u - v\| = 5$. Determine $\langle 5u, v\rangle$.

Questão 3. (2,5 Pontos) Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, \langle\, , \rangle)$, onde $\langle\, , \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$. Obtenha uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir da base
$B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Questão 4. (2,5 Pontos) Seja $\langle\, , \rangle$ um produto interno num espaço vetorial V. Dado $\alpha \in \mathbb{R}^*$, mostre que a função $\langle\, , \rangle_0 : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v\rangle_0 = \alpha\langle u, v\rangle, \qquad \forall u, v \in V$$

é um produto interno em V.

Questão 5. (2,5 Pontos) Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $(V, \langle\, , \rangle)$. Suponha que para todo $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$ tenha-se $\|v\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$. Prove que B é ortonormal.

Questão 6. (2,5 Pontos) Seja $T : V \to V$ um operador linear num espaço vetorial de dimensão finita. Prove que $V = Nuc\,T \oplus Im\,T$ se, e somente se, $Nuc\,T = Nuc\,(T \circ T)$.

Observações:

i) Resolva as questões (escreva as soluções em uma folha branca, de preferência papel A4, para facilitar a visibilidade), em seguida digitalize as folhas com as soluções e rena-as em um (único) arquivo no formato PDF.

ii) **assine em todas as folhas**.

iii) o arquivo com as soluções deve ser enviado até às 17hs.