DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA

O poder da Aprendizagem Profunda Parte 2: Os polinômios atacam novamente

Felipe Kaminsky Riffel
Universidade Federal de Santa Catarina

22 de abril de 2025

Sumário

Artigo: Power of Deep Learning on Expressing Natural Functions

Introdução

O poder da Aproximação

A ineficiência de redes mais rasas

Como a eficiência melhora com a profundidade

Referências

Artigo: Power of Deep Learning on Expressing Natural Functions

Introdução

O poder da Aproximação

A ineficiência de redes mais rasas

Como a eficiência melhora com a profundidade

Referências

Artigo:
TEGMARK, Max; ROLNICK, David. The Power of Deeper Networks for Expressing Natural Functions. arXiv. 2018. (ROLNICK; TEGMARK, 2018)

Artigo submetido para apresentação na modalidade pôster para o International Conference on Learning Representations (ICLR) 2018.

Artigo: Power of Deep Learning on Expressing Natural Functions

Introdução

O poder da Aproximação

A ineficiência de redes mais rasas

Como a eficiência melhora com a profundidade

Referências

Definição

Consideramos o modelo de redes neurais feedforward ou multilayer perceptron:

$$N(x) = A_k \circ \sigma \circ A_{k-1} \circ \cdots \sigma A_1 \sigma A_0 x \tag{1}$$

onde:

- $A_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_{i+1}}$ são matrizes/operadores afins;
- $\sigma : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_i}$ são funções não lineares aplicados ponto a ponto;

Definição

Consideramos o modelo de redes neurais feedforward ou multilayer perceptron:

$$N(x) = A_k \circ \sigma \circ A_{k-1} \circ \cdots \sigma A_1 \sigma A_0 x \tag{1}$$

onde:

- $A_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_{i+1}}$ são matrizes/operadores afins;
- $\sigma : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_i}$ são funções não lineares aplicados ponto a ponto;

Denominamos:

- k a profundidade da rede;

Definição

Consideramos o modelo de redes neurais feedforward ou multilayer perceptron:

$$N(x) = A_k \circ \sigma \circ A_{k-1} \circ \cdots \sigma A_1 \sigma A_0 x \tag{1}$$

onde:

- $A_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_{i+1}}$ são matrizes/operadores afins;
- $\sigma : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_i}$ são funções não lineares aplicados ponto a ponto;

Denominamos:

- k a profundidade da rede;
- camadas escondidas cada vetor $\sigma A_i \sigma A_{i-1} \cdots A_0 x$;

Definição

Consideramos o modelo de redes neurais feedforward ou multilayer perceptron:

$$N(x) = A_k \circ \sigma \circ A_{k-1} \circ \cdots \sigma A_1 \sigma A_0 x \tag{1}$$

onde:

- $A_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_{i+1}}$ são matrizes/operadores afins;
- $\sigma : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{n_i}$ são funções não lineares aplicados ponto a ponto;

Denominamos:

- k a profundidade da rede;
- camadas escondidas cada vetor $\sigma A_i \sigma A_{i-1} \cdots A_0 x$;
- neurônio as entradas de cada $\sigma A_i \sigma A_{i-1} \cdots A_0 x$.

Definição

Dado $\varepsilon > 0$ e um compacto K, dizemos que uma rede $N(\mathbf{x})$ $\varepsilon-$*aproxima* uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se

$$\sup_{x \in K} |N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

Definição

Dado $\varepsilon > 0$ e um compacto K, dizemos que uma rede $N(\mathbf{x})$ $\varepsilon-$*aproxima* uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se

$$\sup_{x \in K} |N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

Definição

Dizemos que uma rede $N(x)$ *Taylor-aproxima* um polinômio $p(x)$, com $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de grau d, se $p(x)$ é o polinômio de Taylor de grau d de $N(x)$ em torno da origem.

Definição

Dado $\varepsilon > 0$ e um compacto K, dizemos que uma rede $N(\mathbf{x})$ $\varepsilon-$*aproxima* uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se

$$\sup_{x \in K} |N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

Definição

Dizemos que uma rede $N(x)$ *Taylor-aproxima* um polinômio $p(x)$, com $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de grau d, se $p(x)$ é o polinômio de Taylor de grau d de $N(x)$ em torno da origem. I.e.,

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{|\alpha| \leq d} \frac{D^\alpha N(0) x^\alpha}{\alpha!} + \mathcal{O}(x^d) \\ &= p(x) + \mathcal{O}(x^d) \end{aligned}$$

Proposição

Seja $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *polinômio homogêneo e suponha que a rede* N *Taylor-aproxima* p *em um compacto* K*. Então, para cada* $\varepsilon > 0$*, existe uma rede* N_ε *que* $\varepsilon-$*aproxima* p*, tais que* N *e* N_ε *tem o mesmo número de neurônios em cada camada.*

Seja $p(x)$ polinômio de grau d.

Seja $p(x)$ polinômio de grau d.Como N Taylor-aproxima p, se σ for inf. diferenciável:

$$N(x) = p(x) + E(x) \tag{2}$$

com $\sum_{i=d+1}^{\infty} E_i(x)$ e cada E_i homogêneo de grau i.

Seja $p(x)$ polinômio de grau d.Como N Taylor-aproxima p, se σ for inf. diferenciável:

$$N(x) = p(x) + E(x) \tag{2}$$

com $\sum_{i=d+1}^{\infty} E_i(x)$ e cada E_i homogêneo de grau i. Assim,

$$E_i(\delta x) = \delta^i E_i(x), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Seja $p(x)$ polinômio de grau d.Como N Taylor-aproxima p, se σ for inf. diferenciável:

$$N(x) = p(x) + E(x) \tag{2}$$

com $\sum_{i=d+1}^{\infty} E_i(x)$ e cada E_i homogêneo de grau i. Assim,

$$E_i(\delta x) = \delta^i E_i(x), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{i=d+1}^{\infty} E_i(x) < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$, em particular, para $\delta < 1$

$$\sum_{i=d+1}^{\infty} E_i(\delta x) = \sum_{i=d+1}^{\infty} \delta^i E_i(x) < \infty$$

Seja $p(x)$ polinômio de grau d.Como N Taylor-aproxima p, se σ for inf. diferenciável:

$$N(x) = p(x) + E(x) \tag{2}$$

com $\sum_{i=d+1}^{\infty} E_i(x)$ e cada E_i homogêneo de grau i. Assim,

$$E_i(\delta x) = \delta^i E_i(x), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{i=d+1}^{\infty} E_i(x) < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^n$, em particular, para $\delta < 1$

$$\sum_{i=d+1}^{\infty} E_i(\delta x) = \sum_{i=d+1}^{\infty} \delta^i E_i(x) < \infty$$

de modo que

$$\frac{1}{\delta^d} E(\delta x) = \sum_{i=d+1}^{\infty} \delta^{i-d} E_i(x) < \infty$$

Como $i > d$, para δ suficientemente pequeno, cada δ^{i-d} se torna tão pequeno quanto queira, assim como $\frac{1}{\delta^d} E_i(\delta x) = \delta^{i-d} E_i(\delta x)$. Logo, $\frac{E(\delta x)}{\delta^d}$é arbitrariamente pequeno.

Como $i > d$, para δ suficientemente pequeno, cada δ^{i-d} se torna tão pequeno quanto queira, assim como $\frac{1}{\delta^d} E_i(\delta x) = \delta^{i-d} E_i(\delta x)$.
Logo, $\frac{E(\delta x)}{\delta^d}$é arbitrariamente pequeno.
Seja $\varepsilon > 0$ e tome δ t.q.

$$|\frac{E(\delta x)}{\delta^d}| < \varepsilon \tag{3}$$

Defina $A_0' = \delta A_0$, $A_k' = \frac{1}{\delta^d} A_k \cdots A_0(\delta x)$,

Como $i > d$, para δ suficientemente pequeno, cada δ^{i-d} se torna tão pequeno quanto queira, assim como $\frac{1}{\delta^d}E_i(\delta x) = \delta^{i-d}E_i(\delta x)$.
Logo, $\frac{E(\delta x)}{\delta^d}$é arbitrariamente pequeno.
Seja $\varepsilon > 0$ e tome δ t.q.

$$|\frac{E(\delta x)}{\delta^d}| < \varepsilon \tag{3}$$

Defina $A_0' = \delta A_0$, $A_k' = \frac{1}{\delta^d}A_k \cdots A_0(\delta x)$,

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(x) &= A_k'\sigma A_{k-1}\sigma\cdots\sigma A_1\sigma A_0' x && (4)\\ &= \frac{1}{\delta^d}A_k\sigma A_{k-1}\sigma\cdots\sigma A_1\sigma(\delta A_0)x && (5)\\ &= \frac{N(\delta x)}{\delta^d} && (6)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |N_\varepsilon(x) - p(x)| &= |\frac{1}{\delta^d} N(\delta x) - p(x)| \\ &= |\frac{1}{\delta^d}(p(\delta x) + E(\delta x)) - p(x)| \\ &= |\frac{1}{\delta^d} p(\delta x) - p(x) + \frac{1}{\delta^d} E(\delta x)| \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|N_\varepsilon(x) - p(x)| &= |\frac{1}{\delta^d} N(\delta x) - p(x)| \\
&= |\frac{1}{\delta^d}(p(\delta x) + E(\delta x)) - p(x)| \\
&= |\frac{1}{\delta^d} p(\delta x) - p(x) + \frac{1}{\delta^d} E(\delta x)|
\end{aligned}$$

$$= |\frac{1}{\delta^d} E(\delta x)| < \varepsilon.$$

Ou seja, N_ε é $\varepsilon-$aproximação de p, como queríamos. $\square$

Teorema

Suponha que $p(x)$ *é um polinômio de grau* d *multivariado e que* $\sigma_i := \sigma^{(i)}(0) \neq 0$*, para cada* $i \leq d$*. Seja* $m_k^{\varepsilon}(p)$ *o número mínimo de neurônios em uma rede de profundidade* k *que* $\varepsilon-$*aproxima* p *em um compacto* K*.*

Teorema

Suponha que $p(x)$ é um polinômio de grau d multivariado e que $\sigma_i := \sigma^{(i)}(0) \neq 0$, para cada $i \leq d$. Seja $m_k^{\varepsilon}(p)$ o número mínimo de neurônios em uma rede de profundidade k que $\varepsilon-$aproxima p em um compacto K. Então, o limite

$\lim_{\varepsilon>0} m_k^{\varepsilon}(p)$ *existe e é finito.*

Mostremos que $\lim_{\varepsilon \to 0} m_1^\varepsilon$ existe e é finito.

Mostremos que $\lim_{\varepsilon \to 0} m_1^{\varepsilon}$ existe e é finito.

Sejam $p_1, \ldots, p_s$ monômios t.q $p(x) = \sum_i^s p_i(x)$. Cada p_i pode ser Taylor-aproximado por uma rede N_i de 1 camada,conforme Teorema 2 de Lin, Tegmark e Rolnick (2017).

Mostremos que $\lim_{\varepsilon \to 0} m_1^{\varepsilon}$ existe e é finito.

Sejam $p_1, \ldots, p_s$ monômios t.q $p(x) = \sum_i^s p_i(x)$. Cada p_i pode ser Taylor-aproximado por uma rede N_i de 1 camada,conforme Teorema 2 de Lin, Tegmark e Rolnick (2017).

Suponha que N^i tem m_i neurônios, tome $\varepsilon > 0$ e seja $\delta = \frac{\varepsilon}{s}$. Pela Prop. 3.3, sendo p_i homogêneo, existe uma rede N_δ^i que $\delta-$aproxima N_i.

Mostremos que $\lim_{\varepsilon \to 0} m_1^{\varepsilon}$ existe e é finito.

Sejam $p_1, \ldots, p_s$ monômios t.q $p(x) = \sum_i^s p_i(x)$. Cada p_i pode ser Taylor-aproximado por uma rede N_i de 1 camada,conforme Teorema 2 de Lin, Tegmark e Rolnick (2017).

Suponha que N^i tem m_i neurônios, tome $\varepsilon > 0$ e seja $\delta = \frac{\varepsilon}{s}$. Pela Prop. 3.3, sendo p_i homogêneo, existe uma rede N_δ^i que $\delta-$aproxima N_i.

Definimos:

$$N_\varepsilon(x) = \sum_i N_\delta^i(x),$$

a qual tem $\sum_i m_i$ neurônios.

Definimos:

$$N_\varepsilon(x) = \sum_i N_\delta^i(x),$$

a qual tem $\sum_i m_i$ neurônios. Então,

$$\begin{aligned}
|N_\varepsilon(x) - p(x)| &= |\sum_i^s N_\delta^i(x) - \sum_i^s p_i(x)| \\
&\leq \sum_i^s |N_\delta^i(x) - p_i(x)| \\
&\leq \sum_i^s \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Definimos:

$$N_\varepsilon(x) = \sum_i N_\delta^i(x),$$

a qual tem $\sum_i m_i$ neurônios. Então,

$$\begin{aligned}
|N_\varepsilon(x) - p(x)| &= |\sum_i^s N_\delta^i(x) - \sum_i^s p_i(x)| \\
&\leq \sum_i^s |N_\delta^i(x) - p_i(x)| \\
&\leq \sum_i^s \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, N_ε é uma $\varepsilon-$aproximação de p com $\sum_m^i$ neurônios.

Na construção de N_δ^i, o número de neurônios é o mesmo para cada δ escolhido. Isto é, N_δ tem sempre $\sum_i m_i$ neurônios, independente de δ.

Na construção de N_δ^i, o número de neurônios é o mesmo para cada δ escolhido. Isto é, N_δ tem sempre $\sum_i m_i$ neurônios, independente de δ. Portanto,

$$m_1^\varepsilon(p) \leq \sum_i m_i, \forall \varepsilon > 0.$$

Na construção de N_δ^i, o número de neurônios é o mesmo para cada δ escolhido. Isto é, N_δ tem sempre $\sum_i m_i$ neurônios, independente de δ. Portanto,

$$m_1^\varepsilon(p) \leq \sum_i m_i, \forall \varepsilon > 0.$$

Ou seja, $\lim_{\varepsilon \to 0} m_1^\varepsilon(p) \leq \infty$, como queríamos.

Na construção de N_δ^i, o número de neurônios é o mesmo para cada δ escolhido. Isto é, N_δ tem sempre $\sum_i m_i$ neurônios, independente de δ. Portanto,

$$m_1^\varepsilon(p) \leq \sum_i m_i, \forall \varepsilon > 0.$$

Ou seja, $\lim_{\varepsilon \to 0} m_1^\varepsilon(p) \leq \infty$, como queríamos.
Podemos sempre construir uma rede N_k de profundidade $k > 1$ que aproxima uma rede $N_1(x)$ de uma camada:

$$N_k(x) = A_k \sigma A_{k_1} \sigma \cdots A_2 \sigma N_1(x)$$

onde $A_i \sigma$ é uma camada de passagem, $\forall i > 1$.

Na construção de N_δ^i, o número de neurônios é o mesmo para cada δ escolhido. Isto é, N_δ tem sempre $\sum_i m_i$ neurônios, independente de δ. Portanto,

$$m_1^\varepsilon(p) \leq \sum_i m_i, \forall \varepsilon > 0.$$

Ou seja, $\lim_{\varepsilon \to 0} m_1^\varepsilon(p) \leq \infty$, como queríamos.
Podemos sempre construir uma rede N_k de profundidade $k > 1$ que aproxima uma rede $N_1(x)$ de uma camada:

$$N_k(x) = A_k \sigma A_{k_1} \sigma \cdots A_2 \sigma N_1(x)$$

onde $A_i \sigma$ é uma camada de passagem, $\forall i > 1$.
Logo, $m_k(p) \lesssim m_1(p) < \infty$. $\blacksquare$.

Definição

Seja σ função não linear. Dado p polinômio multivariado, seja $m_k^{uniform}(p)$ o número mínimo de neurônios em uma rede de profundidade k que $\varepsilon-$aproxima p para todo $\varepsilon > 0$.

Definição

Seja σ função não linear. Dado p polinômio multivariado, seja $m_k^{uniform}(p)$ o número mínimo de neurônios em uma rede de profundidade k que $\varepsilon-$aproxima p para todo $\varepsilon > 0$. Denotamos:

$$m^{uniform}(p) = \min_{k \in \mathbb{N}} m_k^{uniform}(p)$$

Definição

Seja σ função não linear. Dado p polinômio multivariado, seja $m_k^{uniform}(p)$ o número mínimo de neurônios em uma rede de profundidade k que $\varepsilon-$aproxima p para todo $\varepsilon > 0$. Denotamos:

$$m^{uniform}(p) = \min_{k \in \mathbb{N}} m_k^{uniform}(p)$$

I.e., é o mínimo de número de neurônios considerando todas as profundidades de redes.

Definição

Seja σ função não linear. Dado p polinômio multivariado, seja $m_k^{uniform}(p)$ o número mínimo de neurônios em uma rede de profundidade k que $\varepsilon-$aproxima p para todo $\varepsilon > 0$. Denotamos:

$$m^{uniform}(p) = \min_{k \in \mathbb{N}} m_k^{uniform}(p)$$

I.e., é o mínimo de número de neurônios considerando todas as profundidades de redes.

Definimos m_k^{Taylor} e m^{Taylor} analogamente.

Artigo: Power of Deep Learning on Expressing Natural Functions

Introdução

O poder da Aproximação

A ineficiência de redes mais rasas

Como a eficiência melhora com a profundidade

Referências

Teorema

Seja $p(x)$ *o monômio* $p(x) = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$*, com* $d = \sum_{i=1}^{n} r_i$ *e* σ *função não linear qualquer. Suponha que* $\sigma_i \neq 0$*, para todo* $i \leq 2d$*. Então,*

(i) $m_1^{uniform}(p) = \prod_{i=1}^{n}(r_i + 1)$,

(ii) $m^{uniform}(p) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(7d\lceil \log_2(r_i)\rceil + 4\right)$,

onde $\lceil x \rceil$ *denota o menor inteiro maior ou igual a* x*.*

Teorema

Seja $p(x)$ *o monômio* $p(x) = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$*, com* $d = \sum_{i=1}^{n} r_i$*. e* σ *função não linear qualquer. Suponha que* $\sigma_i \neq 0$*, para todo* $i \leq d$*. Então,*

(i) $m_1^{Taylor}(p) = \prod_{i=1}^{n}(r_i + 1)$,

(ii) $m^{Taylor}(p) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(7d\lceil \log_2(r_i) \rceil + 4\right)$.

Teorema

Seja $p(x)$ um polinômio multivariado de grau d e esparsidade c, com monômios $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_c(x)$. Seja σ não linear e suponha que $\sigma_i \neq 0$, para todo $i \leq 2d$. Então, temos:

(i) $m_1^{uniform}(p) \geq \frac{1}{c} \max_j m_1^{uniform}(q_j)$,

(ii) $m^{uniform}(p) \leq \sum_j m^{uniform}(q_j)$.

Teorema

Seja $p(x)$ um polinômio multivariado de grau d e esparsidade c, com monômios $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_c(x)$. Seja σ não linear e suponha que $\sigma_i \neq 0$, para todo $i \leq 2d$. Então, temos:

(i) $m_1^{uniform}(p) \geq \frac{1}{c} \max_j m_1^{uniform}(q_j)$,

(ii) $m^{uniform}(p) \leq \sum_j m^{uniform}(q_j)$.

Obs: Dizemos que p tem esparsidade c se pode ser representado como a soma de c monômios.

Teorema

Seja $p(x)$ um polinômio multivariado de grau d e esparsidade c, com monômios $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_c(x)$. Seja σ não linear e suponha que $\sigma_i \neq 0$, para todo $i \leq 2d$. Então, temos:

(i) $m_1^{uniform}(p) \geq \frac{1}{c} \max_j m_1^{uniform}(q_j)$,

(ii) $m^{uniform}(p) \leq \sum_j m^{uniform}(q_j)$.

Obs: Dizemos que p tem esparsidade c se pode ser representado como a soma de c monômios.

Obs2: O resultado também é válido trocando $m^{uniform}$ para m^{Taylor}.

Teorema

Seja $p(x)$ o monômio $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$, com $d = \sum_{i=1}^{n} r_i$. Suponha que $\sigma_d \neq 0$ (os outros coeficientes de Taylor podem ser nulos). Então, $m_1^{uniform}(p)$ e $m_1^{Taylor}(p)$ são no mínimo $\frac{1}{d} \prod_{i=1}^{n} (r_i + 1)$. (Um limite inferior ainda melhor é o maior coeficiente no polinômio $\prod_i (1 + y + \cdots + y^{r_i})$.)

Teorema

Suponha que $\sigma_i \neq 0$ *para cada* $i \leq d$. *Então, para cada polinômio* $p(x)$ *em uma variável de grau* d,*:*

$$m_1^{Taylor}(p) \leq d + 1$$

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distintos.

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distintos. Considere $A \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$ dada por

$$A_{ij} = a_i^j$$

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distintos. Considere $A \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$ dada por

$$A_{ij} = a_i^j$$

Sabemos que $\det A \neq 0$ (matriz de Vandermond). Logo, A é inversível.

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distintos. Considere $A \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$ dada por

$$A_{ij} = a_i^j$$

Sabemos que $\det A \neq 0$ (matriz de Vandermond). Logo, A é inversível. Portanto, multiplicando as linhas de A por um $b_i \neq 0$ produz outra inversível.

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distintos. Considere $A \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$ dada por

$$A_{ij} = a_i^j$$

Sabemos que $\det A \neq 0$ (matriz de Vandermond). Logo, A é inversível. Portanto, multiplicando as linhas de A por um $b_i \neq 0$ produz outra inversível.

Sejam A_i as colunas de A e $\sigma(x) = \sum_j \sigma_j x_j$ expansão de Taylor de σ em 0. Defina

$$A' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \sigma_0 A_0 & \sigma_1 A_1 & \cdots & \sigma_d A_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_1 a_1 & \cdots & \sigma_d a_1^n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \sigma_1 a_d & \cdots & \sigma_d a_d^n \end{bmatrix}$$

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distintos. Considere $A \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$ dada por

$$A_{ij} = a_i^j$$

Sabemos que $\det A \neq 0$ (matriz de Vandermond). Logo, A é inversível. Portanto, multiplicando as linhas de A por um $b_i \neq 0$ produz outra inversível.

Sejam A_i as colunas de A e $\sigma(x) = \sum_j \sigma_j x_j$ expansão de Taylor de σ em 0. Defina

$$A' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \sigma_0 A_0 & \sigma_1 A_1 & \cdots & \sigma_d A_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_1 a_1 & \cdots & \sigma_d a_1^n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \sigma_1 a_d & \cdots & \sigma_d a_d^n \end{bmatrix}$$

Por hipótese, $\sigma_i \neq 0$, portanto A' é inversível.

$$A' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \sigma_0 A_0 & \sigma_1 A_1 & \cdots & \sigma_d A_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_1 a_1 & \cdots & \sigma_d a_1^n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \sigma_1 a_d & \cdots & \sigma_d a_d^n \end{bmatrix} \tag{7}$$

Note que cada linha i de A corresponde os coeficientes da expansão de Taylor de $\sigma(a_i x)$:

$$\sigma(a_i x) = \sum_j^d \sigma_j (a_i x)^j = \sum_j^d \sigma_j a_i^j x^j.$$

$$A' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \sigma_0 A_0 & \sigma_1 A_1 & \cdots & \sigma_d A_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_1 a_1 & \cdots & \sigma_d a_1^n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \sigma_1 a_d & \cdots & \sigma_d a_d^n \end{bmatrix} \tag{7}$$

Note que cada linha i de A corresponde os coeficientes da expansão de Taylor de $\sigma(a_i x)$:

$$\sigma(a_i x) = \sum_j^d \sigma_j (a_i x)^j = \sum_j^d \sigma_j a_i^j x^j.$$

Sendo as linhas L.I., os polinômios:

$$p_i(x) = \sum_j^d \sigma_i a_i^j x^j$$

são L.I.

$$A' = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \sigma_0 A_0 & \sigma_1 A_1 & \cdots & \sigma_d A_d \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_1 a_1 & \cdots & \sigma_d a_1^n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \sigma_1 a_d & \cdots & \sigma_d a_d^n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Note que cada linha i de A corresponde os coeficientes da expansão de Taylor de $\sigma(a_i x)$:

$$\sigma(a_i x) = \sum_j^d \sigma_j (a_i x)^j = \sum_j^d \sigma_j a_i^j x^j.$$

Sendo as linhas L.I., os polinômios:

$$p_i(x) = \sum_j^d \sigma_i a_i^j x^j$$

são L.I. Tendo $\dim P_d(\mathbb{R}) = d + 1$ e $\{p_i\}$ conjunto L.I., segue que $\{p_i\}$ forma uma base para esse espaço.

A rede de uma camada com uma variável tem representação

$$N(x) = \sum_{i}^{m} w_i \sigma(a_i x)$$

A rede de uma camada com uma variável tem representação

$$N(x) = \sum_{i}^{m} w_i \sigma(a_i x)$$

Com isso,

$$N^{(j)}(0) = \sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j$$

A rede de uma camada com uma variável tem representação

$$N(x) = \sum_{i}^{m} w_i \sigma(a_i x)$$

Com isso,

$$N^{(j)}(0) = \sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j$$

Logo,

$$\begin{aligned} N(x) &= \sum_{j}^{d} \frac{N^{(j)}}{j!} x^j + \mathcal{O}(x^{d+1}) \\ &= \sum_{j}^{d} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j\right)}{j!} x^j + \mathcal{O}(x^{d+1}) \end{aligned}$$

Se $p(x) = \sum_{j=0}^{d} b_j x^j$ é polinômio de grau d qualquer, queremos que:

$$N(x) = p(x) + \mathcal{O}(x^{d+1}) = \sum_{j}^{d} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j\right)}{j!} x^j + \mathcal{O}(x^{d+1}),$$

Se $p(x) = \sum_{j=0}^{d} b_j x^j$ é polinômio de grau d qualquer, queremos que:

$$N(x) = p(x) + \mathcal{O}(x^{d+1}) = \sum_{j}^{d} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j\right)}{j!} x^j + \mathcal{O}(x^{d+1}),$$

de modo que,

$$p(x) = \sum_{j}^{d} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j\right)}{j!} x^j$$

$$p(x) = \sum_{j}^{d} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j\right)}{j!} x^j \quad \iff \quad j! b_j = \sum_{i=0}^{d} w_i a_i^j \sigma_j, \forall j.$$

$$p(x) = \sum_{j}^{d} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j\right)}{j!} x^j \iff j! b_j = \sum_{i=0}^{d} w_i a_i^j \sigma_j, \forall j.$$

$$\iff \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 & \cdots & \sigma_0 \\ \sigma_1 a_0 & \sigma_1 a_1 & \cdots & \sigma_1 a_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_d a_0^d & \sigma_d a_1^d & \cdots & \sigma_d a_d^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 0! \\ b_1 1! \\ \vdots \\ b_d d! \end{bmatrix}$$

$$p(x) = \sum_{j}^{d} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j\right)}{j!} x^j \iff j! b_j = \sum_{i=0}^{d} w_i a_i^j \sigma_j, \forall j.$$

$$\iff \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 & \cdots & \sigma_0 \\ \sigma_1 a_0 & \sigma_1 a_1 & \cdots & \sigma_1 a_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_d a_0^d & \sigma_d a_1^d & \cdots & \sigma_d a_d^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 0! \\ b_1 1! \\ \vdots \\ b_d d! \end{bmatrix}$$

Isto é, $(A')^T w = b$. Como A' é inversível, $(A')^T$ também, de modo que o sistema tem solução.

$$p(x) = \sum_{j}^{d} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} w_i a_i^j \sigma_j\right)}{j!} x^j \iff j! b_j = \sum_{i=0}^{d} w_i a_i^j \sigma_j, \forall j.$$

$$\iff \begin{bmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 & \cdots & \sigma_0 \\ \sigma_1 a_0 & \sigma_1 a_1 & \cdots & \sigma_1 a_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_d a_0^d & \sigma_d a_1^d & \cdots & \sigma_d a_d^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 0! \\ b_1 1! \\ \vdots \\ b_d d! \end{bmatrix}$$

Isto é, $(A')^T w = b$. Como A' é inversível, $(A')^T$ também, de modo que o sistema tem solução.

Assim, para $W = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots w_d \end{bmatrix}$ que resolve $(A')^T w = b$, temos $N(x) = p(x) + \mathcal{O}(x^{d+1})$, como queríamos. $\blacksquare$

Teorema

Seja $p(x) = x^d$*, e suponha que* $\sigma_i \neq 0$ *para* $i \leq 2d$*. Então:*

(i) $m_1^{uniform}(p) = d + 1$,

(ii) $m^{uniform}(p) \leq 7d\lceil \log_2(d) \rceil$.

Essas afirmações também são válidas se $m^{uniform}$ *for substituído por* m^{Taylor}.

A parte (i) segue dos Teo. 4.1 e 4.2, com $n = 1$ e $r_1 = 1$.

A parte (i) segue dos Teo. 4.1 e 4.2, com $n = 1$ e $r_1 = 1$. Para a parte (ii):

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3 + x^4 + x^5 \cdots)$$
$$\sigma(-x) = \sigma_0 - \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \mathcal{O}(-x^3 + x^4 - x^5 \cdots)$$

A parte (i) segue dos Teo. 4.1 e 4.2, com $n = 1$ e $r_1 = 1$. Para a parte (ii):

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3 + x^4 + x^5 \cdots)$$
$$\sigma(-x) = \sigma_0 - \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \mathcal{O}(-x^3 + x^4 - x^5 \cdots)$$

Logo,

$$\frac{\sigma(x) + \sigma(-x) - 2\sigma_0}{2\sigma_2} = x^2 + \mathcal{O}(x^4 + x^6 + \cdots)$$

A parte (i) segue dos Teo. 4.1 e 4.2, com $n = 1$ e $r_1 = 1$. Para a parte (ii):

$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3 + x^4 + x^5 \cdots)$$
$$\sigma(-x) = \sigma_0 - \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \mathcal{O}(-x^3 + x^4 - x^5 \cdots)$$

Logo,

$$\frac{\sigma(x) + \sigma(-x) - 2\sigma_0}{2\sigma_2} = x^2 + \mathcal{O}(x^4 + x^6 + \cdots)$$

I.e., podemos aproximar um quadrado usando 3 neurônios.

Escreva $d = d_0 2^0 + d_1 2^1 + \cdots + d_k 2^k$, com $d_i \in \{0, 1\}$.

Escreva $d = d_0 2^0 + d_1 2^1 + \cdots + d_k 2^k$, com $d_i \in \{0, 1\}$.
Em cada camada $l \in \{1, \cdots k\}$, faça:

- Uma porta de produto (4 neurônios) para produzir x^{2^l} a partir de $x^{2^{l-1}}$;
- Uma porta de:

Escreva $d = d_0 2^0 + d_1 2^1 + \cdots + d_k 2^k$, com $d_i \in \{0, 1\}$.
Em cada camada $l \in \{1, \cdots k\}$, faça:

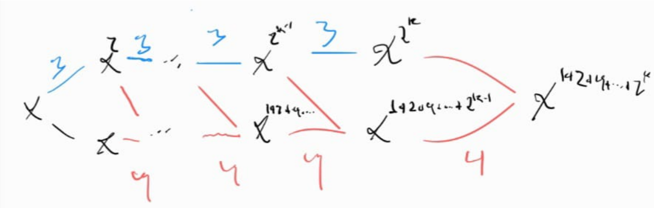
- Uma porta de produto (4 neurônios) para produzir x^{2^l} a partir de $x^{2^{l-1}}$;
- Uma porta de:
  - produto, se $d_l = 1$ (3 neurônios);
  - passagem, se $d_l = 0$ (1 neurônio);

Cada camada produz uma Taylor-aproximação de $x^{d_0 2^0 + d_1 2^1 + \cdots + d_l 2^l}$.

Escreva $d = d_0 2^0 + d_1 2^1 + \cdots + d_k 2^k$, com $d_i \in \{0, 1\}$.
Em cada camada $l \in \{1, \cdots k\}$, faça:

- Uma porta de produto (4 neurônios) para produzir x^{2^l} a partir de $x^{2^{l-1}}$;
- Uma porta de:
  - produto, se $d_l = 1$ (3 neurônios);
  - passagem, se $d_l = 0$ (1 neurônio);

Cada camada produz uma Taylor-aproximação de $x^{d_0 2^0 + d_1 2^1 + \cdots + d_l 2^l}$.



Essa construção leva $\lceil \log_2 d \rceil$ camadas e, no pior caso, $3 + 4 = 7$ neurônios por camada.

Essa construção leva $\lceil \log_2 d \rceil$ camadas e, no pior caso, $3 + 4 = 7$ neurônios por camada.

Logo, $m^{\text{Taylor}}(x^d) \leq 7\lceil \log_2 d \rceil$

Essa construção leva $\lceil \log_2 d \rceil$ camadas e, no pior caso, $3 + 4 = 7$ neurônios por camada.

Logo, $m^{\text{Taylor}}(x^d) \leq 7\lceil \log_2 d \rceil$

Pela Prop. 3.3, sendo x^d homogêneo, segue que $m^{\text{uniform}}(x^d) \leq m^{\text{Taylor}}(x^d)$.$\blacksquare$

Artigo: Power of Deep Learning on Expressing Natural Functions

Introdução

O poder da Aproximação

A ineficiência de redes mais rasas

Como a eficiência melhora com a profundidade

Referências

Teorema

Seja $p(x) = x_1 x_2 \dots x_n$ *e suponha que* $\sigma_i \neq 0$*, para* $i \leq n$*.*
Então,

$$m_k^{uniform}(p) = \mathcal{O}(n^{\frac{k-1}{k}} 2^{n^{\frac{1}{k}}})$$

Seja $p(x) = x_1 x_2 \dots x_n$ e suponha que $\sigma_i \neq 0$, para $i \leq n$. Então,

$$m_k^{uniform}(p) = 2^{\Theta(n^{\frac{1}{k}})},$$

i.e., o expoente cresce na ordem de $n^{\frac{1}{k}}$.

Artigo: Power of Deep Learning on Expressing Natural Functions

Introdução

O poder da Aproximação

A ineficiência de redes mais rasas

Como a eficiência melhora com a profundidade

Referências

LIN, H. W.; TEGMARK, M.; ROLNICK, D. Why does deep and cheap learning work so well? *Journal of Statistical Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 168, n. 6, p. 1223–1247, jul. 2017. ISSN 1572-9613. Disponível em: ⟨http://dx.doi.org/10.1007/s10955-017-1836-5⟩.

ROLNICK, D.; TEGMARK, M. *The power of deeper networks for expressing natural functions*. 2018. Disponível em: ⟨https://arxiv.org/abs/1705.05502⟩.

Obrigado!

Contato: riffel.felipe@grad.ufsc.br

Repositório com os experimentos desenvolvidos:
https://github.com/felipekriffel/TCC-Regularizacao-EIT