DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O poder da Aprendizagem Profunda

Felipe Kaminsky Riffel
Universidade Federal de Santa Catarina

4 de abril de 2025

Artigo:
LIN, Henry W.; TEGMARK, Max; ROLNICK, David. Why does deep and cheap learning work so well? Journal of Statistical Physics, v. 168, n. 6, p. 1223–1247, 2017.

Três problemas principais da teoria de redes neurais:

- Expressabilidade: que funções podemos expressar?

[1]Traduzido de "Learnability"

Três problemas principais da teoria de redes neurais:

- Expressabilidade: que funções podemos expressar?
- Eficiência: quão complexa a rede tem que ser?

[1] Traduzido de "Learnability"

Três problemas principais da teoria de redes neurais:

- Expressabilidade: que funções podemos expressar?
- Eficiência: quão complexa a rede tem que ser?
- "Aprendibilidade": quão rápido a rede consegue aprender a ajustar os bons parâmetros? [1]

[1] Traduzido de "Learnability"

Três problemas principais da teoria de redes neurais:

- Expressabilidade: que funções podemos expressar?
- Eficiência: quão complexa a rede tem que ser?
- "Aprendibilidade": quão rápido a rede consegue aprender a ajustar os bons parâmetros? [1]

Aqui, focamos nos dois primeiros: **Expressabilidade** e **Eficiência**.

[1] Traduzido de "Learnability"

Problema: ”como redes neurais funcionam bem na prática, se o número de funções possíveis é exponencialmente maior que o número de redes possíveis?”

Exemplo: imagem preta/branca de 1MP vetor de 1000000 entradas com 256 valores possíveis (valor em cada pixel)

Exemplo: imagem preta/branca de 1MP vetor de 1000000 entradas com 256 valores possíveis (valor em cada pixel)

$$\Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{1000000} \end{pmatrix}$$

$$x_i \in I_{256} := \{1, 2, 3, \ldots, 256\}$$

Exemplo: imagem preta/branca de 1MP vetor de 1000000 entradas com 256 valores possíveis (valor em cada pixel)

$$\Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{1000000} \end{pmatrix}$$

$$x_i \in I_{256} := \{1, 2, 3, \dots, 256\}$$

Nº total de imagens possíveis: $256^{1000000}$.

Exemplo: imagem preta/branca de 1MP vetor de 1000000 entradas com 256 valores possíveis (valor em cada pixel)

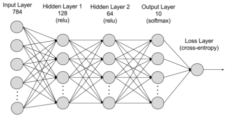
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{1000000} \end{pmatrix}$$

$$x_i \in I_{256} := \{1, 2, 3, \ldots, 256\}$$

Nº total de imagens possíveis: $256^{1000000}$.

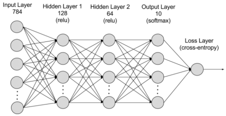
Se existe $p : I_{256} \to (0, 1)$ que associa cada imagem a uma probabilidade, p deve ter uma lista $256^{1000000}$ valores (!!!)

Porém, redes neurais relativamente simples conseguem calcular bem a tarefa.



$$p(\text{Gato}|\mathbf{x}) = \mathbf{83}\%$$

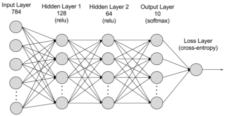
Porém, redes neurais relativamente simples conseguem calcular bem a tarefa.



$$p(\text{Gato}|\mathbf{x}) = \mathbf{83}\%$$

A **matemática** ajuda a explicar: as redes neurais conseguem diminuir drasticamente a explosão combinatória de número de parâmetros em relação ao número de valores;

Porém, redes neurais relativamente simples conseguem calcular bem a tarefa.



$$p(\text{Gato}|\mathbf{x}) = \mathbf{83}\%$$

A **matemática** ajuda a explicar: as redes neurais conseguem diminuir drasticamente a explosão combinatória de número de parâmetros em relação ao número de valores;

A razão também é **física**: as leis sugerem que os datasets de interesse são, em sua maioria, advindos de distribuições simples.

Considere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Sejam $A_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ operadores afim, i.e.,

$$A_i = W_i - b_i$$

com $W_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ e $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

Considere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Sejam $A_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ operadores afim, i.e.,

$$A_i = W_i - b_i$$

com $W_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ e $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

Dadas $\sigma_i : \mathbb{R}^{m_i} \to \mathbb{R}^{m_i}$ não linear, chamamos de rede neural feedforward uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ da forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sigma_k A_k \ldots \sigma_2 A_2 \sigma_1 A_1 \mathbf{x}. \tag{1}$$

Considere $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Sejam $A_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ operadores afim, i.e.,

$$A_i = W_i - b_i$$

com $W_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$ e $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

Dadas $\sigma_i : \mathbb{R}^{m_i} \to \mathbb{R}^{m_i}$ não linear, chamamos de rede neural feedforward uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ da forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sigma_k A_k \dots \sigma_2 A_2 \sigma_1 A_1 \mathbf{x}. \tag{1}$$

- Aqui, se admite também $\sigma_k = I$;
- Cada composição $\sigma_i A_i$ é chamada de *camada* da rede;
- Cada componente da operação $\sigma_{ij} A_{i,j} x$ (linha da matriz + aplicação de σ_i) é chamado de *neurônio*;

σ_i pode ser qualquer operador não linear. Escolhas comuns são, dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:

- Função local: escolha $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não linear e aplique ponto a ponto $\sigma_i(\mathbf{x}) = (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$;

σ_i pode ser qualquer operador não linear. Escolhas comuns são, dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:

- Função local: escolha $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não linear e aplique ponto a ponto $\sigma_i(\mathbf{x}) = (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$;
- Max-pooling: $\sigma_i(\mathbf{x}) = \max_{j=1,\ldots,n}(x_j)$;

σ_i pode ser qualquer operador não linear. Escolhas comuns são, dado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:

- Função local: escolha $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não linear e aplique ponto a ponto $\sigma_i(\mathbf{x}) = (\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$;
- Max-pooling: $\sigma_i(\mathbf{x}) = \max_{j=1,\ldots,n}(x_j)$;
- Softmax:
$$\sigma_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} e^{x_j}}(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}).$$

Teorema 1 (Aproximação da multiplicação)

Seja $\mathbf{f}$ rede neural da forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A_2 \sigma A_1 \mathbf{x}$, onde σ é aplicação não linear ponto a ponto qualquer. Considere as camadas de entrada, escondida e de saída com tamanhos 2, 4 e 1 respectivamente. Então, $\mathbf{f}$ pode aproximar uma porta de multiplicação arbitrariamente bem.
Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, para qualquer σ não linear (aplicada ponto a ponto), existem $A_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, A_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tais que a rede $f(x) = A_2 \sigma A_1 \mathbf{x}$ é tal que, dado $x = (u\ v)^T$ qualquer

$$|f(x) - uv| < \varepsilon$$

para u, v em um compacto qualquer.

Seja $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não linear qualquer suficientemente suave. Na expansão de Taylor em torno de $x = 0$:

$$\sigma(u) = \sigma(0) + \sigma'(0)u + \frac{u^2}{2}\sigma''(0) + \mathcal{O}(u^3).$$

Sem perda de generalidade, considere $\sigma''(0) \neq 0$ (ou então, ajuste b_1 para que $\sigma''(A_{1,1}x - b_{1,1}), \sigma''(A_{1,2}x - b_{1,2}) \neq 0$, que deve existir dado que é não linear).

Seja $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não linear qualquer suficientemente suave. Na expansão de Taylor em torno de $x = 0$:

$$\sigma(u) = \sigma(0) + \sigma'(0)u + \frac{u^2}{2}\sigma''(0) + \mathcal{O}(u^3).$$

Sem perda de generalidade, considere $\sigma''(0) \neq 0$ (ou então, ajuste b_1 para que $\sigma''(A_{1,1}x - b_{1,1}), \sigma''(A_{1,2}x - b_{1,2}) \neq 0$, que deve existir dado que é não linear).

Então,

$$\begin{aligned} m(u,v) &:= \frac{\sigma(u+v) + \sigma(-u-v) - \sigma(u-v) - \sigma(v-u)}{4\sigma''(0)} \\ &= \sigma''(0)\frac{(u+v)^2 + (-u-v)^2 - (u-v)^2 - (v-u)^2 + \mathcal{O}((u+v)^3)}{4\sigma''(0)} \\ &= uv + \mathcal{O}((u+v)^3) \end{aligned}$$

Ou seja, $m(u,v) = uv + \mathcal{O}((u+v)^3)$, de modo que $\lim_{u^2+v^2 \to 0} \frac{m(u,v)-uv}{u^2+v^2} = 0$.

Ou seja, $m(u,v) = uv + \mathcal{O}((u+v)^3)$, de modo que $\lim_{u^2+v^2\to 0} \frac{m(u,v)-uv}{u^2+v^2} = 0$.
Veja que, $m(u,v) = A_2\sigma A_1(u\ v)^T$, onde:

$$A_1 = W_1 - b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - b_1,$$

$$A_2 = W_2 = (4\sigma''(0))^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - b_2.$$

Ou seja, $m(u,v) = uv + \mathcal{O}((u+v)^3)$, de modo que $\lim_{u^2+v^2 \to 0} \frac{m(u,v)-uv}{u^2+v^2} = 0$.
Veja que, $m(u,v) = A_2 \sigma A_1 (u \; v)^T$, onde:

$$A_1 = W_1 - b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - b_1,$$

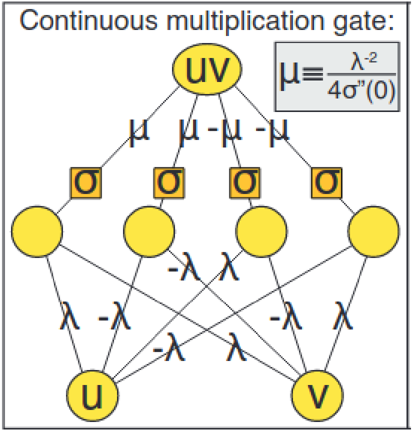
$$A_2 = W_2 = (4\sigma''(0))^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - b_2.$$

Taylor fornece uma estimativa local, sendo boa para $u, v \approx 0$. Para u, v num compacto de raio qualquer, tome $A_1 = \lambda W_1 - b_1$ e $A_2 = \lambda^{-2} W_2 - b_2$ na definição de $\mathbf{f}$, de modo a obter

$$f(x) = (\lambda^{-2} A_2)\sigma(\lambda A_1)x = \lambda^{-2}(\lambda u \lambda v) = uv,$$

tornando a estimativa tão boa quanto se queira. $\square$

Figura: Ilustração da arquitetura da rede no teorema anterior



Fonte: Lin, et.al. (2017)

Corolário: Para cada polinômio multivariado e qualquer tolerância $\varepsilon > 0$ existe uma rede neural de tamanho finito N (independente de ε) que aproxima o polinômio a uma precisão melhor que ε. Além disso, N é limitado pela complexidade do polinômio, escalando conforme o número de multiplicações requeridas vezes um fator ligeiramente maior que 4.

Ideia: montamos uma rede neural em "blocos", onde cada produto pode ser representado por uma rede neural descrita no teorema anterior.

Cada produto necessita de 4 neurônios de camada escondida (a saída de um neurônio corresponde à entrada do seguinte). Ainda, temos neurônios a mais para os termos remanescentes, fazendo a passagem de uma camada para a outra, sem alterar o valor. O número de passagens é

Ideia: montamos uma rede neural em "blocos", onde cada produto pode ser representado por uma rede neural descrita no teorema anterior.

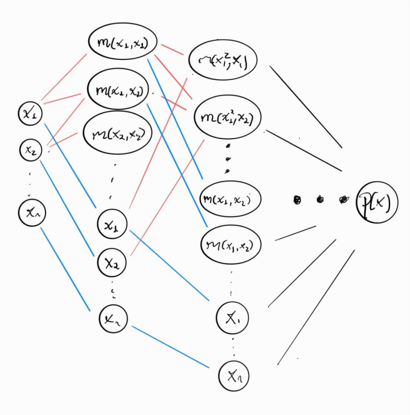
Cada produto necessita de 4 neurônios de camada escondida (a saída de um neurônio corresponde à entrada do seguinte). Ainda, temos neurônios a mais para os termos remanescentes, fazendo a passagem de uma camada para a outra, sem alterar o valor. O número de passagens é

Para os termos remanescentes, podemos construir uma "camada de passagem" $u \mapsto u$ com 1 neurônio, dado que:

$$u \approx \frac{\sigma(u) - \sigma(0)}{\sigma'(0)}$$

Corolário 1 - Demonstração (ideia)

Figura: Ilustração da rede construída: em vermelho, conexões de produto (4 neurônios); em azul, camadas de passagem (1 neurônio)



.

Fonte: Autor.

Dadas n variáveis, conseguimos aproveitar cada camada anterior , pois para obter um polinômio:

- de grau 2, multiplicamos cada variável entre si e passamos as demais adiante, nos dando $4n^2 + n \leq 5n^2$ neurônios;

Dadas n variáveis, conseguimos aproveitar cada camada anterior , pois para obter um polinômio:

- de grau 2, multiplicamos cada variável entre si e passamos as demais adiante, nos dando $4n^2 + n \leq 5n^2$ neurônios;
- de grau 3, multiplicamos os n^2 termos de grau 2 por cada variável e passamos os termos restantes, nos dando $4n^3+$;

Dadas n variáveis, conseguimos aproveitar cada camada anterior , pois para obter um polinômio:

- de grau 2, multiplicamos cada variável entre si e passamos as demais adiante, nos dando $4n^2 + n \leq 5n^2$ neurônios;
- de grau 3, multiplicamos os n^2 termos de grau 2 por cada variável e passamos os termos restantes, nos dando $4n^3+$;
- $\vdots$;
- de grau d, mutiplicamos os n^{d-1} termos de grau $d-1$ entre as n variáveis e passamos os demais adiante, tendo $4n^d + n^{d-1} + \cdots + n \leq 5n^d$ neurônios;

Dadas n variáveis, conseguimos aproveitar cada camada anterior , pois para obter um polinômio:

- de grau 2, multiplicamos cada variável entre si e passamos as demais adiante, nos dando $4n^2 + n \leq 5n^2$ neurônios;
- de grau 3, multiplicamos os n^2 termos de grau 2 por cada variável e passamos os termos restantes, nos dando $4n^3+$;
- $\vdots$;
- de grau d, mutiplicamos os n^{d-1} termos de grau $d-1$ entre as n variáveis e passamos os demais adiante, tendo $4n^d + n^{d-1} + \cdots + n \leq 5n^d$ neurônios;

No final, temos um número de neurônios da ordem de:

$$5n^2 + 5n^3 + \cdots + 5n^d = \mathcal{O}(5n^d).$$

Se $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$, temos $x_i^2 = x_i$, de modo que todo polinômio assume a forma

$$p(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i<j<k} a_{ijk} x_i x_j x_k \cdots$$

No total, temos 2^n termos distintos.

Ainda, qualquer produto de binários pode ser representado com um único neurônio na camada escondida com $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$:

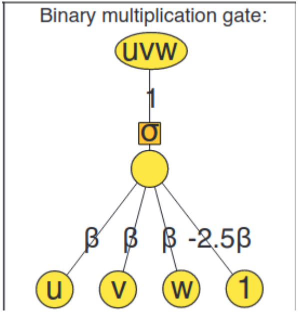
$$\prod_{i \in K} x_i = \lim_{\beta \to \infty} \sigma \left[-\beta \left(k - \frac{1}{2} - \sum_{i \in K} x_i \right) \right],$$

pois $\sigma(x) \to 0$ se $x \to -\infty$ e $\sigma(x) \to 1$ se $x \to \infty$.

Ainda, qualquer produto de binários pode ser representado com um único neurônio na camada escondida com $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$:

$$\prod_{i \in K} x_i = \lim_{\beta \to \infty} \sigma \left[-\beta \left(k - \frac{1}{2} - \sum_{i \in K} x_i \right) \right],$$

pois $\sigma(x) \to 0$ se $x \to -\infty$ e $\sigma(x) \to 1$ se $x \to \infty$.



Assim, qualquer polinômio de n variáveis binárias pode ser representado por uma rede com:

- Uma camada de entrada, com $n+1$ neurônios;
- Uma camada escondida, com 2^n neurônios (um para cada produto e termo livre);
- Uma camada de saída.

Teorema: Dados $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in C^\infty$, o monômio $\Pi_{i=1}^n x_i$ pode ser aproximado por uma rede neural de 1 camada com 2^n neurônios, seguindo a fórmula

$$\Pi_{i=1}^n x_i \approx \frac{1}{2^n} \sum_{\{s\}} s_1 \cdots s_n \sigma(s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n),$$

onde $s_i \in \{-1, 1\}$, para cada $i = 1, \ldots, k$, e a soma é tomada sobre todas as 2^n configurações possíveis de $s_1 \cdots s_n$.

Teorema: Dados $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in C^\infty$, o monômio $\Pi_{i=1}^n x_i$ pode ser aproximado por uma rede neural de 1 camada com 2^n neurônios, seguindo a fórmula

$$\Pi_{i=1}^n x_i \approx \frac{1}{2^n} \sum_{\{s\}} s_1 \cdots s_n \sigma(s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n),$$

onde $s_i \in \{-1, 1\}$, para cada $i = 1, \ldots, k$, e a soma é tomada sobre todas as 2^n configurações possíveis de $s_1 \cdots s_n$.
Além disso, essa é a menor rede de 1 camada capaz de fazer tal aproximação.

Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, uma rede N de 1 camada escondida é da forma

$$N(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \sigma \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)$$

Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, uma rede N de 1 camada escondida é da forma

$$N(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \sigma \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)$$

Queremos uma rede de tamanho m com pesos w_j e a_{ij} tal que, denotando $\sigma_k = \sigma^(k)(0)$:

$$\sigma_n \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^n = \prod_{i=1}^{n} x_i, \tag{2}$$

$$\sigma_k \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^k = 0, \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \tag{3}$$

Dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, uma rede N de 1 camada escondida é da forma

$$N(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \sigma \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)$$

Queremos uma rede de tamanho m com pesos w_j e a_{ij} tal que, denotando $\sigma_k = \sigma^(k)(0)$:

$$\sigma_n \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^n = \prod_{i=1}^{n} x_i, \tag{2}$$

$$\sigma_k \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^k = 0, \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \tag{3}$$

Mostremos que $m = 2^n$ é necessário e suficiente.

2^n **Suficiente** Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_m$ subconjutos de $\{1, \ldots, n\}$. Defina p/ cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$s_i(S) = \begin{cases} -1, i \in S, \\ 1, i \notin S. \end{cases}$$

2^n **Suficiente** Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_m$ subconjutos de $\{1, \ldots, n\}$. Defina p/ cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$s_i(S) = \begin{cases} -1, i \in S, \\ 1, i \notin S. \end{cases}$$

Defina $a_{ij} = s_i(S_j)$

$$w_j = x \frac{1}{2^n n! \sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{ij} = \frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n}.$$

Considere $p(x) = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_1^{r_1}, r_1 + \cdots + r_n = r \leq n$. Vamos verificar que no desenvolvimento de

$$\sigma_r \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^r$$

se $p(x) \neq \prod_i^n x_i$, seu coeficiente é 0.

MTM

Se $p(x) \neq \prod_i^n x_i$, existe $r_{i_0} = 0$.

$$\begin{aligned} & \sigma_r \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^r && (4) \\ = {} & \sigma_r \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j) x_i \right)^r && (5) \end{aligned}$$

Se $p(x) \neq \prod_i^n x_i$, existe $r_{i_0} = 0$.

$$\sigma_r \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^r \tag{4}$$

$$= \sigma_r \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j) x_i \right)^r \tag{5}$$

$$= \sigma_r \sum_{S_j \not\ni i_0}^{m} \left[\frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j) x_i \right)^r + \frac{(-1)^{|S_j \cup \{i_0\}|}}{2^n n! \sigma_n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j \cup \{i_0\}) x_i \right)^r \right]$$

Se $p(x) \neq \prod_i^n x_i$, existe $r_{i_0} = 0$.

$$\sigma_r \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^r \tag{4}$$

$$= \sigma_r \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j) x_i \right)^r \tag{5}$$

$$= \sigma_r \sum_{S_j \not\ni i_0}^{m} \left[\frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j) x_i \right)^r + \frac{(-1)^{|S_j \cup \{i_0\}|}}{2^n n! \sigma_n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j \cup \{i_0\}) x_i \right)^r \right]$$

$$= \sigma_r \frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n} \sum_{S_j \not\ni i_0}^{m} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j) x_i \right)^r - \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j \cup \{i_0\}) x_i \right)^r \right]$$

Veja que $s_i(S_j) = s_i(S_j \cup \{i_0\}), \forall i \neq i_0$. Logo, se $r_{i_0} = 0$ em $p(x)$, os coeficientes são iguais, portanto, se cancelam em

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j)x_i\right)^r - \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j \cup \{i_0\})x_i\right)^r$$

Veja que $s_i(S_j) = s_i(S_j \cup \{i_0\}), \forall i \neq i_0$. Logo, se $r_{i_0} = 0$ em $p(x)$, os coeficientes são iguais, portanto, se cancelam em

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j)x_i\right)^r - \left(\sum_{i=1}^{n} s_i(S_j \cup \{i_0\})x_i\right)^r$$

Isso vale para cada i_0. Em particular, para cada $r < n$, vale que:

$$\sigma_r \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)^k = 0,$$

como queríamos;

Se $p(x) = \prod x_i$, o coeficiente na expansão de $\left(\sum a_{ij} x_i\right)^n$ é

$$n! \prod_i a_{ij} = n!(-1)^{|S_j|}$$

Se $p(x) = \prod x_i$, o coeficiente na expansão de $\left(\sum a_{ij}x_i\right)^n$ é

$$n! \prod_i a_{ij} = n!(-1)^{|S_j|}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\sigma_n \sum_j^m w_j \left(\sum a_{ij}x_i\right)^n \\ &= \sigma_n \sum_j^{2^n} \frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n} \left(\sum a_{ij}x_i\right)^n \\ &= \sigma_n \sum_j^{2^n} \frac{(-1)^{|S_j|}}{2^n n! \sigma_n} n!(-1)^{|S_j|} = \prod_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

como queríamos.

2^n **é Necessário:** Suponha que existe uma rede de uma camada escondida com m neurônios e pesos w_j, a_{ij} que satisfaz as condições desejadas:

$$\sigma_n \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^n = \prod_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\sigma_k \sum_{j=1}^{m} w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^k = 0, \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Mostremos que $m \geq 2^n$.

Seja $S \subset \{1, \ldots, n\}$. Tomando todas as parciais $\frac{\partial}{\partial x_h}$ para $h \in S$ nas duas equações:

$$\frac{n!\,\sigma_n}{|n - S|!} \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h \in S} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{n-|S|} = \prod_{h \notin S} x_h, \tag{6}$$

$$\frac{k!\,\sigma_k}{|k - S|!} \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h \in S} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{k-|S|} = 0, k \geq |S| \tag{7}$$

Sejam $S_1, \ldots, S_{2^n}$ os subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ e defina $A \in \mathbb{R}^{2^n \times m}$ por

$$A_{ij} = \prod_{h \in S_i} a_{hj}.$$

Ideia: mostrar que A tem posto linha completo.

Sejam $S_1, \ldots, S_{2^n}$ os subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ e defina $A \in \mathbb{R}^{2^n \times m}$ por

$$A_{ij} = \prod_{h \in S_i} a_{hj}.$$

Ideia: mostrar que A tem posto linha completo.
Suponha por contradição que exista uma dependência linear nas linhas de A:

$$c^T A = \sum_{l}^{r} c_l A_l = 0$$

com cada S_l distinto entre si e $c_l \neq 0$, para cada l. Seja $s = \max_{\ell | \sum_l^r c_l A_l = 0} |S_\ell|$.

Sejam $S_1, \dots, S_{2^n}$ os subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$ e defina $A \in \mathbb{R}^{2^n \times m}$ por

$$A_{ij} = \prod_{h \in S_i} a_{hj}.$$

Ideia: mostrar que A tem posto linha completo.
Suponha por contradição que exista uma dependência linear nas linhas de A:

$$c^T A = \sum_{l}^{r} c_l A_l = 0$$

com cada S_l distinto entre si e $c_l \neq 0$, para cada l. Seja $s = \max_{\ell | \sum_l^r c_l A_l = 0} |S_\ell|$. Defina $d \in \mathbb{R}^m$ por

$$d_j = w_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{n-s}.$$

Então,

$$0 \;=\; \mathbf{c}^t\mathbf{A}\mathbf{d} = \sum_{\ell=1}^{r} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h\in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)^{n-s}$$

MTM

Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{c}^t\mathbf{A}\mathbf{d} = \sum_{\ell=1}^{r} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h\in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)^{n-s} \\ &= \sum_{\ell \ \mid \ (|S_\ell|=s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h\in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)^{n-|S_\ell|} \end{aligned}$$

Então,

$$0 \;=\; \mathbf{c}^t\mathbf{A}\mathbf{d} = \sum_{\ell=1}^{r} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h\in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)^{n-s}$$

$$= \sum_{\ell \;|\; (|S_\ell|=s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h\in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)^{n-|S_\ell|}$$

$$+ \sum_{\ell \;|\; (|S_\ell|<s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h\in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i\right)^{(n+|S_\ell|-s)-|S_\ell|} .$$

Isto é,

$$0 = \sum_{\ell \ | \ (|S_\ell|=s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h \in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{n-|S_\ell|}$$

$$+ \sum_{\ell \ | \ (|S_\ell|<s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h \in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{(n+|S_\ell|-s)-|S_\ell|} .$$

Isto é,

$$0 = \sum_{\ell \mid (|S_\ell| = s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h \in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{n - |S_\ell|}$$
$$+ \sum_{\ell \mid (|S_\ell| < s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h \in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{(n + |S_\ell| - s) - |S_\ell|} .$$

Agora, aplicando (7), i.e., com $k = (n + |S_\ell| - s) - |S_\ell|$, temos que a segunda parte da soma é igual a 0.

Por outro lado, substituindo (6) acima, temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{\ell \ | \ (|S_\ell| = s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h \in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{n-|S_\ell|} \\
&= \sum_{\ell \ | \ (|S_\ell| = s)} c_\ell \frac{|n - S_\ell|!}{n! \sigma_n} \prod_{h \notin S_\ell} x_h
\end{aligned}
$$

Por outro lado, substituindo (6) acima, temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{\ell \ | \ (|S_\ell|=s)} c_\ell \sum_{j=1}^{m} w_j \prod_{h\in S_\ell} a_{hj} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right)^{n-|S_\ell|} \\
&= \sum_{\ell \ | \ (|S_\ell|=s)} c_\ell \frac{|n-S_\ell|!}{n!\sigma_n} \prod_{h\notin S_\ell} x_h
\end{aligned}
$$

Ou seja, temos uma soma não trivial de monômios linearmente independentes igual a zero. Portanto, $A \in \mathbb{R}^{2^n \times m}$ tem posto linha cheio, e $m \geq 2^n$. $\square$

O teorema ilustra como reduzir o número de camadas pode não ser eficiente.

Exemplo: para fazer o produto de $n = 8$ variáveis distintas, uma rede de 1 camada escondida precisaria de $2^8 = 256$ neurônios. Porém, podemos aproximar por uma rede de 3 camadas escondidas, totalizando 28 neurônios.

Obrigado!

Contato: riffel.felipe@grad.ufsc.br

Repositório com os experimentos desenvolvidos:
https://github.com/felipekriffel/TCC-Regularizacao-EIT