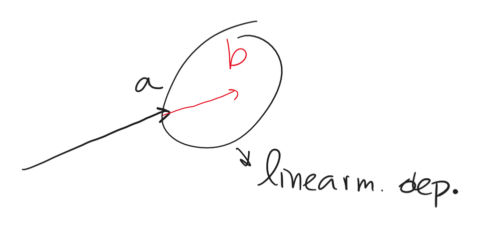
NIVELAMENTO LEGO 2

AULA 2



DEPENDÊNCIA LINEAR

* Um conjunto de vetores é linearmente dependente quando alguma dessas setas não traz uma direção nova em $\mathbb{R}^2$, dois vetores ficam sob a mesma reta.

um vetor é redundante em relação ao outro

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\vec{z} = 2 \cdot \vec{w}}$, então na realidade não vamos para qualquer parte do $\mathbb{R}^3$ a partir desses vetores. A combinação mora no plano, porque apenas 2 dos vetores são independentes entre si.

Nesse caso, o espaço gerado (span) está em $\mathbb{R}^2$

BASE: uma base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram um espaço.

SOLVING TWO EQUATIONS

solve $c\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

This means $\begin{cases} 2c + 2d = 8 \quad (1/2) \\ c - d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + \cancel{d} = 4 \\ c - \cancel{d} = 2 \end{cases}$

$2c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 3}$

$\Rightarrow c - d = 2$

$3 - d = 2 \Rightarrow -d = -1$

$\Rightarrow \boxed{d = 1}$

PROBLEMA: isso é muito ineficiente para problemas em alta dimensão. Para 2 ou 3 variáveis, beleza. Mas passa disso, dá, mas é muito ruim. Podemos usar eliminação.

(daqui a pouco)

Outro exemplo:

$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ -x + 2y = 3 \quad (\times 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{3x} + 4y = 7 \\ \cancel{-3x} + 6y = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow 10y = 16 \Rightarrow y = 1.6$

$\Rightarrow -3x + 6(1.6) = 9 \Rightarrow 3x = -9 + 6(1.6)$

$3x = 0.6 \Rightarrow \underline{x = 0.2}$

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

$c\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 2c + 4d = 8 \\ 3c + d = 2 \end{cases}$

também podemos escrever isso como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}_{\text{vetor de coeficientes}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

multiplica os elementos da primeira linha da matriz pelos elementos correspondentes do vetor de coeficientes

Suponha:

$$\underbrace{\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}} \underset{\vec{x}}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{\vec{b}}{\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix}}}_{A\vec{x} = \vec{b}} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 7 \\ 3x + 7y + 2z = -8 \\ 4x + 2y - 2z = 9 \end{cases}$$

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow$ sistema de equações

Nosso objetivo é resolver $A\vec{x} = \vec{b}$. Como?

Vamos usar eliminação!

$(-2)\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$ representação simplificada, que omite os coeficientes

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \xRightarrow{L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \xRightarrow{(\times 1/4)}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{(\times 1/2)}$ de fato, com isso, $\underline{d = 1}$ $(0 + 1d = 1)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{(L_1 - L_2)} \underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{\text{matriz identidade}} \Rightarrow \underline{c = 2}$ $(1c + 0d = 2)$

ESSE É O MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

(resolver por eliminação)

$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] (\times 3) \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \xRightarrow{L_2 + L_1}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{array}\right] (\times 1/5) \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 7/5 \end{array}\right] \xRightarrow{L_1 - 2L_2}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 4 - 14/5 \\ 1 & 0 & 7/5 \end{array}\right] \xRightarrow{(\div 3)} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2/5 \\ 1 & 0 & 7/5 \end{array}\right]$ $y = 2/5$, $x = 7/5$

$\dfrac{4 - \frac{14}{5}}{3} = \dfrac{\frac{20 - 14}{5}}{3} = \dfrac{\frac{6}{5}}{3} = 2/5$

* Um sistema tem solução quando os vetores são linearmente independentes.

$\begin{cases} 2x + 3x = -102 \\ -x + 4y = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$

se esses vetores são independentes, há solução