Algoritmos y Estructuras de Datos

Cursada 2022

Prof. Alejandra Schiavoni (ales@info.unlp.edu.ar)

Prof. Catalina Mostaccio (catty@lifia.info.unlp.edu.ar)

Prof. Laura Fava (lfava@info.unlp.edu.ar)

Prof. Pablo Iuliano (piuliano@info.unlp.edu.ar)

Agenda - Ordenación topológica

- Definición
- Ejemplos de aplicaciones de Grafos dirigidos Acíclicos (DAG)
- Algoritmos
  - Con complejidad $O(|V|^2)$: Implementación con Arreglo (versión 1)
  - Con complejidad $O(|V| + |A|)$
    - Implementación con Pila o Cola (versión 2)
    - DFS (versión 3)

Agenda - Ordenación topológica

- **Definición**
- Ejemplos de aplicaciones de Grafos dirigidos Acíclicos (DAG)
- Algoritmos
  - Con complejidad $O(|V|^2)$: Implementación con Arreglo (versión 1)
  - Con complejidad $O(|V| + |A|)$
    - Implementación con Pila o Cola (versión 2)
    - DFS (versión 3)

Definición

- *La ordenación topológica es una permutación:*

  $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{|V|}$ *de los vértices, tal que si* $(v_i, v_j) \in E$, $v_i \neq v_j$, *entonces* v_i *precede a* v_j *en la permutación.*

- *La ordenación no es posible si G es cíclico.*

- *La ordenación topológica no es única.*

- *Una ordenación topológica es como una ordenación de los vértices a lo largo de una línea horizontal, con los arcos de izquierda a derecha.*

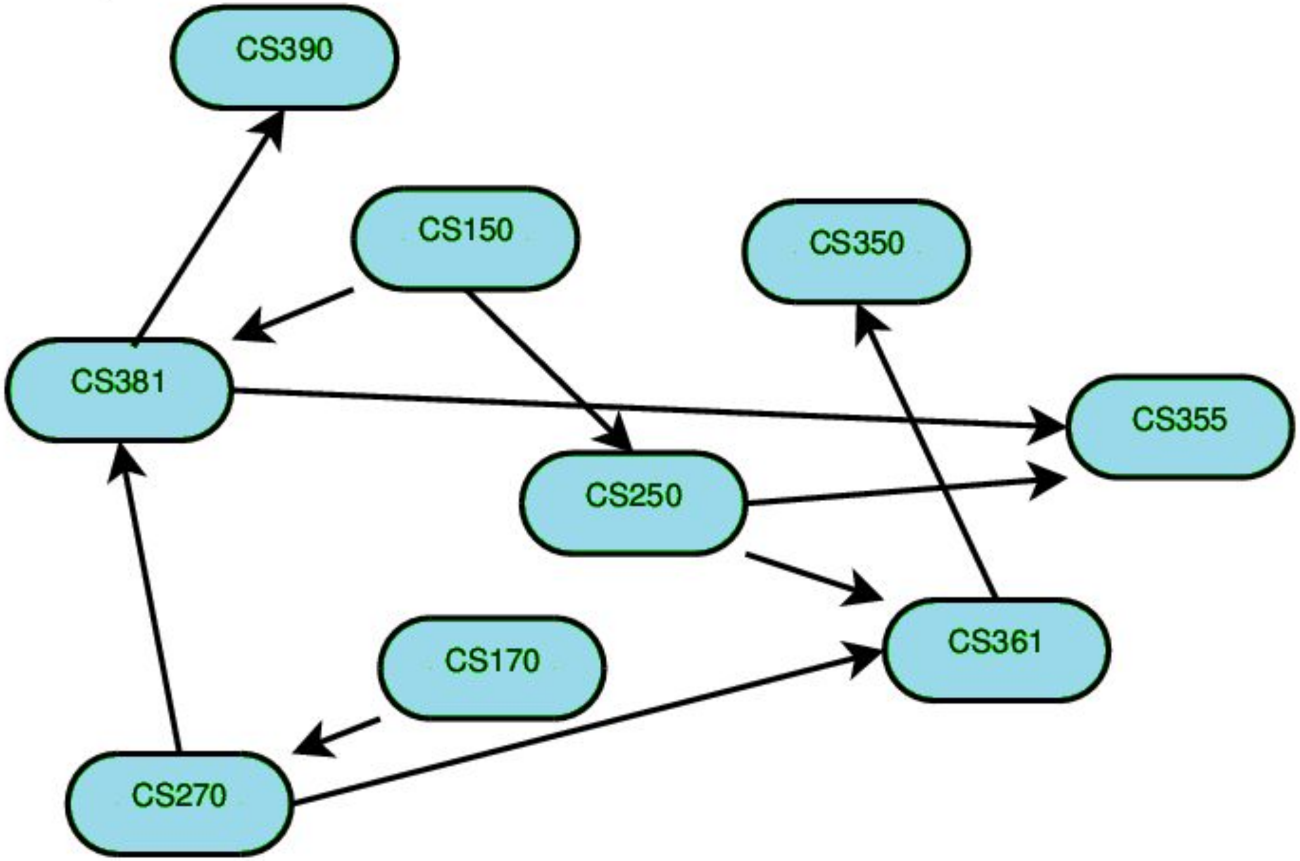
Agenda - Ordenación topológica

- Definición
- **Ejemplos de aplicaciones de Grafos dirigidos Acíclicos (DAG)**
- Algoritmos
  - Con complejidad $O(|V|^2)$: Implementación con Arreglo (versión 1)
  - Con complejidad $O(|V| + |A|)$
    - Implementación con Pila o Cola (versión 2)
    - DFS (versión 3)

Aplicaciones

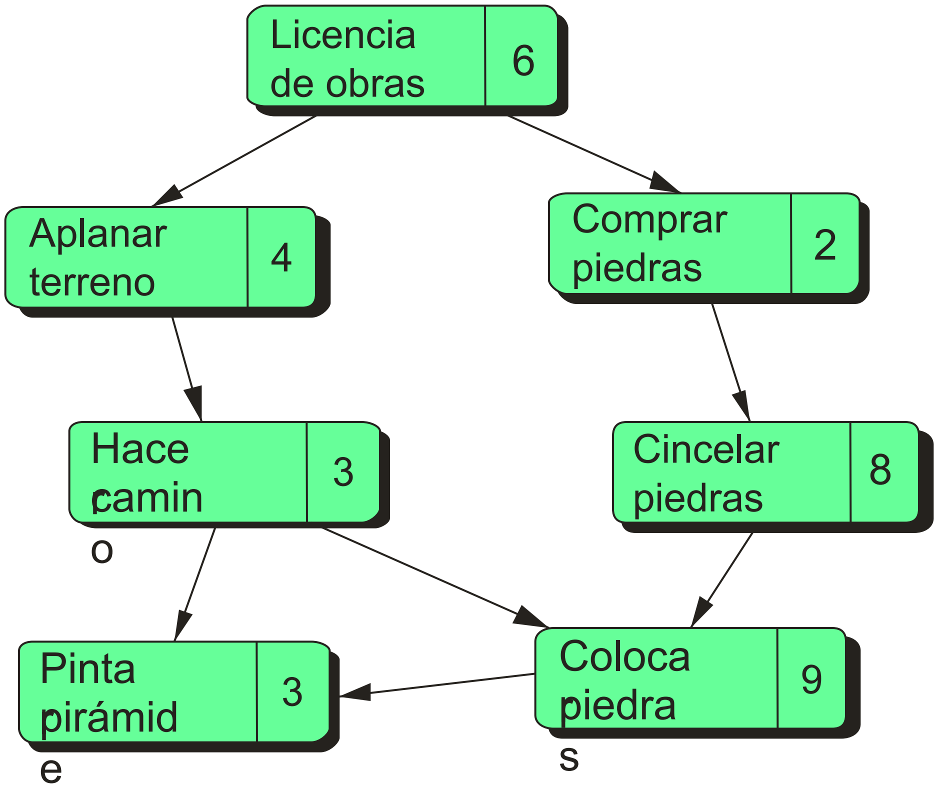
- *Para indicar la precedencia entre eventos*
- *Para planificación de tareas*
- *Organización curricular*

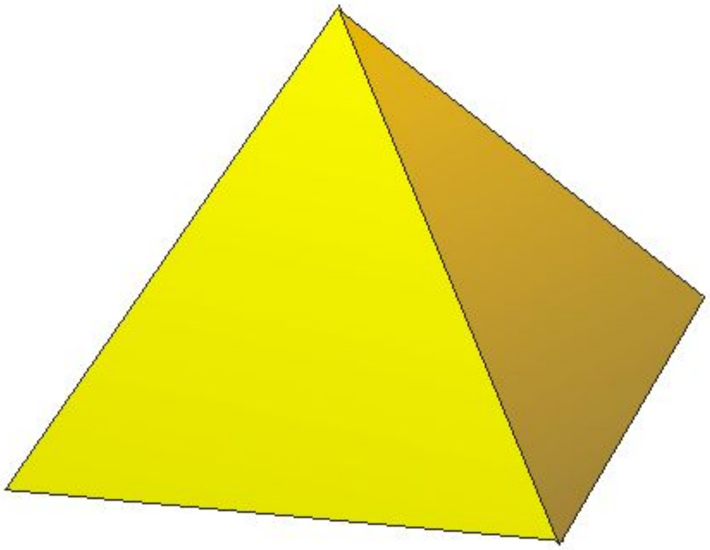
Ejemplo 1: prerrequisito



Cursos **conectados por aristas que representan la** ***relación*** **de "prerrequisito"**

Ejemplo 2: Planificación de tareas





Agenda - Ordenación topológica

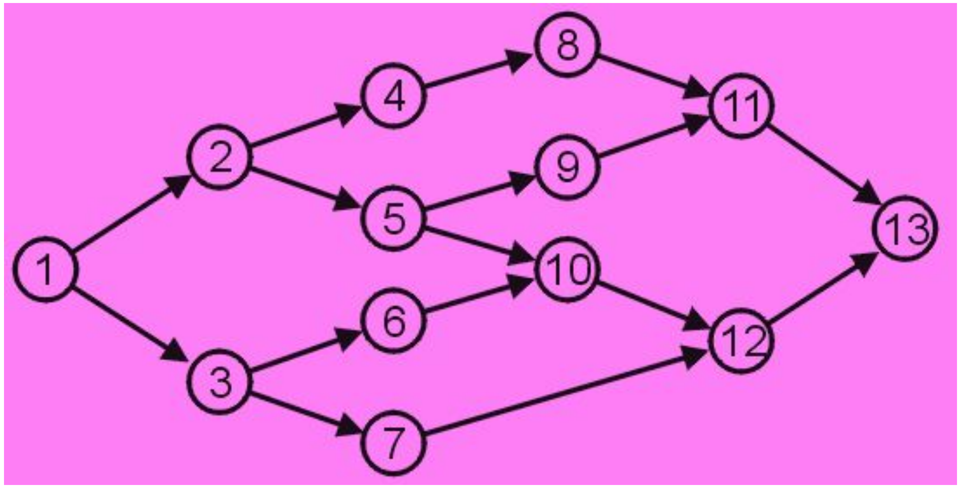
- Definición
- Ejemplos de aplicaciones de Grafos dirigidos Acíclicos (DAG)
- **Algoritmos**
  - Con complejidad $O(\ |V|^2)$: Implementación con Arreglo (versión 1)
  - Con complejidad $O(\ |V| + |A|\ )$
    - Implementación con Pila o Cola (versión 2)
    - DFS (versión 3)

Ordenación topológica

Dos ordenaciones válidas para el siguiente grafo:

1, 3, 2, 7, 6, 5, 4, 10, 9, 8, 12, 11, 13

1, 2, 4, 8, 5, 9, 11, 3, 6, 10, 7, 12, 13



Y hay muchas más……

Ordenación topológica - (versión 1)

- *En esta versión el algoritmo utiliza un arreglo Grado_in en el que se almacenan los grados de entradas de los vértices y en cada paso se toma de allí un vértice con grado_in = 0.*

Ordenación topológica - (versión 1)

Pasos generales:

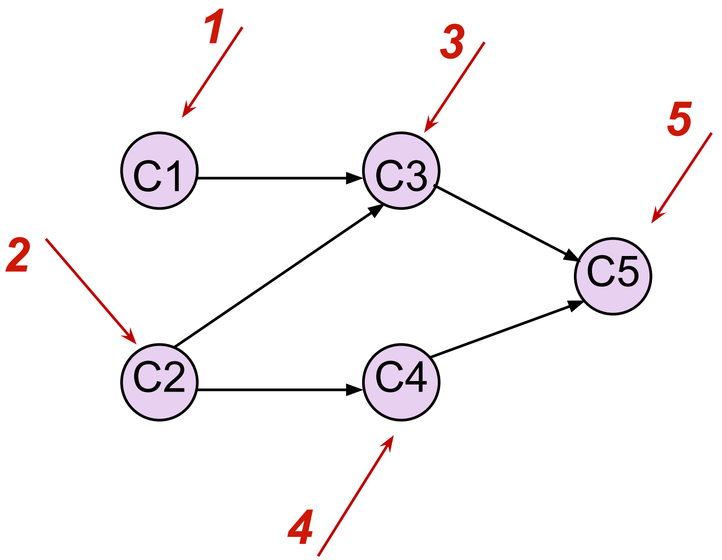
1. Seleccionar un vértice *v* con grado de entrada cero
2. Visitar *v*
3. "Eliminar" *v*, junto con sus aristas salientes
4. Repetir el paso 1 hasta seleccionar todos los vértices

Ordenación topológica - (versión 1)

→ *Tomando vértice con grado_in = 0 del vector Grado_in*

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	0	2	1	2
0	**0**	**1**	1	2
0	0	**0**	**0**	2
0	0	0	**0**	**1**
0	0	0	0	**0**



Sort Topológico :

C1 C2 C3 C4 C5

Ordenación topológica - (versión 1)

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
            break;
        else{
         seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
         visitar v; //mandar a la salida
         numVerticesVisitados++;
         "borrar" v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

   return numVerticesVisitados;
}
```

Ordenación topológica - (versión 1)

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
             break;
        else{
         seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
         visitar v; //mandar a la salida
         numVerticesVisitados++;
         "borrar" v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

   return numVerticesVisitados;
}
```

Búsqueda secuencial en el arreglo

Decrementar el grado de entrada de los adyacentes de v

Ordenación topológica - (versión 1)

El tiempo total del algoritmo es:

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
             break;
        else{
         seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
         visitar v; //mandar a la salida
         numVerticesVisitados++;
         "borrar" v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

  return numVerticesVisitados;
}
```

O(|V|)

Orden del número de aristas de *v*

Ordenación topológica - (versión 1)

El tiempo total del algoritmo es:

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
            break;
        else{
         seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
         visitar v; //mandar a la salida
         numVerticesVisitados++;
         "borrar" v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

   return numVerticesVisitados;
}
```

O(|V|)

Orden del número de aristas de *v*

$O(|V|^2+|E|)$

Ordenación topológica - (versión 2)

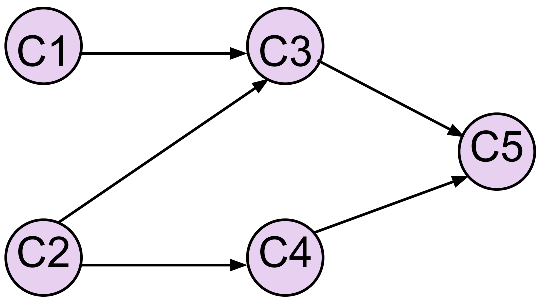
- *En esta versión el algoritmo utiliza un arreglo Grado_in en el que se almacenan los grados de entradas de los vértices y una pila P (o una cola Q) en donde se almacenan los vértices con grados de entrada igual a cero.*

Ordenación topológica - (versión 2)

→ *Tomando los vértices con grado_in = 0 de una Pila (o Cola)*

Grado_in

C1	C2	C3	C4	C5
0	**0**	2	1	2
0	0	**1**	**0**	2
0	0	1	0	**1**
0	0	**0**	0	**1**
0	0	0	0	**0**



Pila ***P*** : **C1** – **C2**

: C1 // C1 – **C4**

: C1 // C1

: // **C3**

: // **C5**

Sort Topológico :

C2 C4 C1 C3 C5

Ordenación topológica - (versión 2)

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
             break;
        else{
         seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
         visitar v; //mandar a la salida
         numVerticesVisitados++;
         "borrar" v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

   return numVerticesVisitados;
}
```

Ordenación topológica - (versión 2)

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
            break;
        else{
         seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
         visitar v; //mandar a la salida
         numVerticesVisitados++;
         "borrar" v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

   return numVerticesVisitados;
}
```

Tomar el vértice de la cola

Decrementar el grado de entrada de los adyacentes de v. Si llegó a 0, encolarlo

Ordenación topológica - (versión 2)

El tiempo total del algoritmo es:

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
             break;
        else{
         seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
         visitar v; //mandar a la salida
         numVerticesVisitados++;
         "borrar" v y todas sus aristas salientes;
       }
    }

   return numVerticesVisitados;
}
```

O(1)

Orden del número de aristas de *v*

Ordenación topológica - (versión 2)

El tiempo total del algoritmo es:

```
int sortTopologico( ){
    int numVerticesVisitados = 0;
    while(haya vertices para visitar){
        if(no existe vertice con grado_in = 0)
            break;
        else{
         seleccionar un vertice v con grado_in = 0;
         visitar v; //mandar a la salida
         numVerticesVisitados++;
         "borrar" v y todas sus aristas salientes;
        }
    }

  return numVerticesVisitados;
}
```

O(1)

O(|V|+|E|)

Orden del número de aristas de *v*

Ordenación topológica - (versión 3)

→ *En esta versión se aplica el recorrido en profundidad.*

- *Se realiza un recorrido DFS, marcando cada vértice en post-orden, es decir, una vez visitados todos los vértices a partir de uno dado, el marcado de los vértices en post-orden puede implementarse según una de las sig. opciones:*

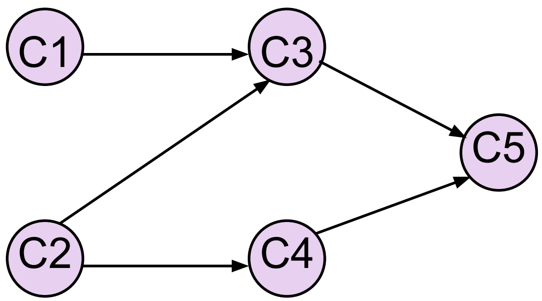
    a) numerándolos antes de retroceder en el recorrido; luego se listan los vértices según sus números de post-orden de mayor a menor.

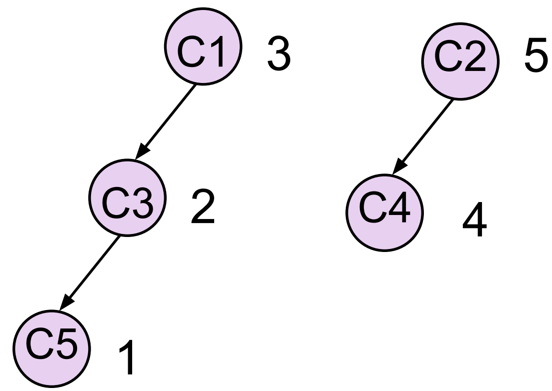
    b) colocándolos en una pila P, luego se listan empezando por el tope.

Ordenación topológica - (versión 3)

→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **a)** - numerando los vértices*





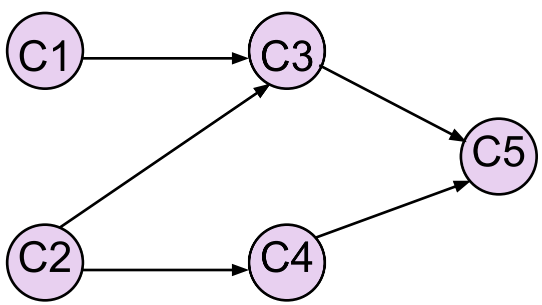
Grafo dirigido acíclico   Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1

Ordenación Topológica: C2 C4 C1 C3 C5

Ordenación topológica - (versión 3)

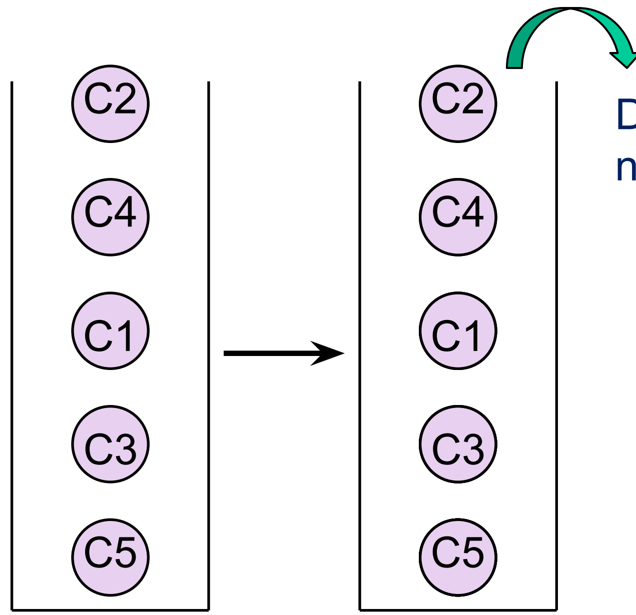
→ *Aplicando el recorrido en profundidad.*

*Opción **b)** - apilando los vértices*



Grafo dirigido acíclico

Pila P:



Desapilar los nodos

1.- Aplico DFS a partir de un vértice cualquiera, por ejemplo C1, y apilo los vértice en post-orden.
2.- Listo los vértices a medida que los desapilo.

Ordenación Topológica: ***C2 C4 C1 C3 C5***