UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Departamento de Matemática
Prof. Felipe C. Minuzzi
Lista de exercícios 4
MTM 1133 - Equações Diferenciais Parciais A

Questão 1. Mostre que, se f e g forem funções de período T, então $f+g$ e fg serão também funções periódicas de período T.

Questão 2. Demonstre as relações de ortogonalidades usadas para o cálculo dos coeficientes de Fourier, isto é,

i) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0, \quad \text{se } n,m \geq 1;$

ii) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} L, & n=m\geq 1, \\ 0, & n\neq m,\, n,m\geq 1 \end{cases}$

iii) $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} L, & n=m\geq 1, \\ 0, & n\neq m,\, n,m\geq 1. \end{cases}.$

Questão 3. Encontre a série de Fourier das funções abaixo:

a) $f(x) = \sin^2(x)$.

b) $f(x) = \cos^5(x)$.

c) $f(x) = 2x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, periódica de período 2π.

d) $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2\leq x<0 \\ 2-2x, & 0\leq x<2. \end{cases}$ periódica de período $T=4$.

e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2\leq x<0 \\ 2x-\frac{1}{2}x^2, & 0\leq x<2. \end{cases}$ periódica de período $T=4$.

f) $f(x) = 2-x^2$, $0<x<2$, periódica de período $T=4$.

Questão 4. Suponha que f tem uma série de Fourier em senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0\leq x\leq L.$$

Mostre, formalmente, que

$$\frac{2}{L}\int_0^L [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$