

Questão 1. Resolva o problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (3)$$

onde A e B são constantes, reduzindo-o, através de uma mudança de variável dependente u , a um problema da equação da onda com condições de contorno homogêneas.

Questão 2. Usando a mesma estratégia do exercício anterior, resolva o problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$u(0, t) = A + Bt, \quad u(L, t) = C + Dt, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L. \quad (6)$$

onde A , B , C e D são constantes.

Questão 3. Use o método de Fourier para resolver os problemas

a)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}, \quad (7)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (9)$$

b)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad \text{em } \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (12)$$

c)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \alpha u, \quad \text{em } \mathbb{R}, \quad \alpha > 0 \quad (13)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (15)$$

Questão 4. Escreva a solução da equação da onda com condições de contorno homogêneas no caso em que $g(x) = 0$ e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{a}, & \text{para } 0 \leq x \leq a, \\ \frac{a}{h(x-L)}, & \text{para } a \leq x \leq L, \end{cases} \quad (16)$$

onde $0 < a < L$ e $h > 0$.

Questão 5. Resolva os outros três casos da solução da equação de Laplace em um retângulo, isto é, com as seguintes condições de contorno:

(i) $u(x, b) = f_0(x), u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0;$

(ii) $u(0, y) = f_1(x), u(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = 0;$

(iii) $u(a, y) = f_2(x), u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = 0.$

Questão 6. Encontre a solução, via separação de variáveis, do PVIF abaixo

$$u_t = 100u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (17)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (19)$$

Questão 7. Encontre a solução, via separação de variáveis, do PVIF abaixo

$$u_t = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2, \quad (20)$$

$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t > 0, \quad (21)$$

$$u(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin(\pi x) + 4 \sin(2\pi x) \quad 0 \leq x \leq 2, \quad (22)$$

Questão 8. Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com $50cm$ de comprimento, isolada nos lados, inicialmente a uma temperatura de $20^\circ C$ em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a zero grau para todo tempo.