O que vou estudando ...

29 de outubro de 2010

Capítulo 1

G.D. e elementos isoparamétricos

1.1 Ferramentas de geometria diferencial

1.1.1 Notações e definições

Segue algumas notações que eventualmente são adotadas no decorrer deste relatório. Seja $\{x_i\}$, $i = 1, ..., d$ (dimensão) um sistema de coordenadas canônica e ψ um campo escalar. Então

$$\boldsymbol{\nabla}\psi|_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \partial_i \psi = \psi_{,i} \quad i = 1, ..., d;$$

Seja agora $\{\xi_i\}$, $i = 1, ..., d$ (dimensão) um sistema de coordenadas curvilíneas. Então

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}}\psi|_i = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = \partial_i^{\xi} \psi = \psi_{,(i)} \quad i = 1, ..., d;$$

1.1.2 O gradiente de superfície

Seja uma superfície contínua S na qual sobre esta esteja definida um vetor unitário normal $\boldsymbol{n}$ que aponta para o exterior da superfície. O gradiente de superfície em um ponto $\boldsymbol{x_s}$ de S de uma função escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, denotado por $\boldsymbol{\nabla_s} f$, é definido como um vetor cuja a direção indica a direção na qual $f(\boldsymbol{x})$ aumenta mais rapidamente na superfície, enquanto o módulo é o valor absoluto da taxa de variação de $f(\boldsymbol{x})$ naquela direção.

Teorema 1.1. *O gradiente de superfície da função f é dado por*

$$\boldsymbol{\nabla_s} f = \mathbb{P} \cdot \boldsymbol{\nabla} f$$

onde $\mathbb{P}$ é uma matriz de projeção data por $\mathbb{P} = \mathbb{1} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$.

prova (informal). Sem perda de generalidade, para calcular $\boldsymbol{\nabla_s} f$ em um ponto $\boldsymbol{x_s} \in S$, pode-se considerar que o sistema de coordenadas esteja posicionado de forma que $\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{n}$ em $\boldsymbol{x_s}$. Com isso, o plano tangente à superfície em $\boldsymbol{x_s}$ será o plano $x_1 x_2$, resultando da definição de gradiente que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla_s} f = (\partial_1 f,\, \partial_2 f,\, 0) &= (\partial_1 f,\, \partial_2 f,\, \partial_3 f) - \boldsymbol{e_3}\,(\boldsymbol{e_3} \cdot \boldsymbol{\nabla} f) \\
&= \boldsymbol{\nabla} f - (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\nabla} f \\
&= (\mathbb{1} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{\nabla} f \\
&= \mathbb{P} \cdot \boldsymbol{\nabla} f
\end{aligned}$$

$\square$

O teorema 1.1 pode ser usado para extender o conceito de gradiente de superfície para vetores, tensores, etc.. Por exemplo, seja um vetor $\boldsymbol{v}$, como

$$\boldsymbol{\nabla_s} f \Big|_j = \partial_j^s f = \mathbb{P}_{jk}\, \partial_j f = \mathbb{P} \cdot \boldsymbol{\nabla} f \Big|_j$$

então

$$\boldsymbol{\nabla_s v} \Big|_{ij} = \partial_j^s v_i = \mathbb{P}_{jk}\, \partial_j v_i = \boldsymbol{\nabla v} \cdot \mathbb{P} \Big|_{ij}$$

1.1.3 Extensão de funções espaciais

Seja o subconjunto $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3$ (pontos, curvas, superfícies, volumes, etc.) e uma função espacial $g : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^d$, onde d é um inteiro positivo que indica se g é um função escalar ($d = 1$), vetorial ($d = 2$), tensorial ($d = 3$), etc.. A extensão de g, denotada por $\hat{g}$, é definida como:

$$\hat{g}(\boldsymbol{x}) \equiv g(\boldsymbol{x_s}), \qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \\ &\boldsymbol{x_s} = \boldsymbol{y} \in S \text{ tal que } \min_{\boldsymbol{y}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|\,; \end{aligned}$$

Ou seja, a extensão de g é uma função que extende os valores de g em $\mathcal{K}$ para $\mathbb{R}^3$. Notar que a extensão de uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^d$ é ela mesma. Nos pontos em S, não é difícil provar a igualdade

$$\boldsymbol{\nabla_s} g = \boldsymbol{\nabla} \hat{g}$$

1.1.4 "Função distância"[1]

Seja uma superfície contínua S na qual sobre esta esteja definida o vetor unitário normal $\boldsymbol{n}$ que aponta para o exterior da superfície. A "função distância" $\phi(\boldsymbol{x}; S)$ é definida por

$$\phi(\boldsymbol{x}; S) = \begin{cases} +\min\limits_{\boldsymbol{y} \in S} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, & \text{se } \boldsymbol{x} \text{ é exterior à } S; \\ -\min\limits_{\boldsymbol{y} \in S} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, & \text{se } \boldsymbol{x} \text{ é interior à } S; \end{cases}$$

Desse modo, a função $\phi(\boldsymbol{x}; S)$ representa a distância entre $\boldsymbol{x}$ e um ponto $\boldsymbol{y} \in S$ que está mais próximo de $\boldsymbol{x}$, a menos de um sinal. Se $\boldsymbol{x_s}$ for o ponto da superfície mais próximo de $\boldsymbol{x}$ e nela estiver definida uma normal $\boldsymbol{n}$, não é difícil verifica que

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_s} = \phi(\boldsymbol{x}; S)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x_s})$$

Teorema 1.2. *Seja $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{y} \mid \exists\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y_s})$, onde $\boldsymbol{y_s} \in S$ é o ponto mais próximo de $\boldsymbol{y}\}$. O gradiente de $\phi(\boldsymbol{x}; S)$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ é dado por*

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}; S) = \hat{\boldsymbol{n}}$$

onde $\hat{\boldsymbol{n}}$ é a extensão da normal $\boldsymbol{n}$.

Prova. Seja $\boldsymbol{x_s} \in S$ o ponto mais próximo de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{n}$ a normal em $\boldsymbol{x_s}$. Sem perda de generalidade, considera-se que o sistema de coordenadas esteja posicionado de forma que $\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{n}$ e que $\boldsymbol{x_s} = \boldsymbol{0}$. Como $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_s} = \phi(\boldsymbol{x}; S)\boldsymbol{n}$, então $\phi(\boldsymbol{x}; S) = x_3$, segue que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}; S) = \boldsymbol{e_i}\partial_i x_3 &= \boldsymbol{e_3} \\ &= \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x_s}) \\ &= \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

□

1.2 Elementos isoparamétricos

1.2.1 Motivação

Calcular uma integral do tipo

$$\int_{\mathcal{T}} \boldsymbol{\nabla}_\Gamma \mathcal{N} \cdot \boldsymbol{\nabla}_\Gamma u \, \mathrm{d}S$$

[1] aspas pois a função em questão não segue a definição de função distância de fato. Qual será o termo correto ???

onde $\mathcal{T}$ é um triângulo (que pode ser linear, quadrático, etc.), $\mathrm{d}S$ o diferencial de superfície no espaço tridimensional e $\boldsymbol{\nabla}_\Gamma$ é o gradiente na superfície.

1.2.2 Jacobiano da transformação

Sejam ξ_j, $j = 1, 2$, as coordenadas do triângulo de referência e $\boldsymbol{n}$ a normal exterior da superfície. O incremento na posição $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ associado ao um incremento de ξ_j é dado por

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(j)} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_j} \mathrm{d}\xi_i \qquad \text{(não há soma em } j\text{)}$$

Segue que o diferencial de área $\mathrm{d}S$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S = \left|\breve{\boldsymbol{n}} \cdot \left(\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(1)} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(2)}\right)\right| &= \left|\breve{\boldsymbol{n}} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_2}\right)\right| \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \\ &= J\, \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \end{aligned}$$

Onde J é o jacobiano da transformação. Como os termos $\partial \boldsymbol{x}/\partial \xi_i$ são perpendiculares à normal, então o jacobiano pode ser reduzido:

$$J = \left|\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_2}\right)\right|$$

ou escrito como o determinante de uma matriz:

$$J = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

A normal pode ser encontrada a partir da expressão:

$$\breve{\boldsymbol{n}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_2}\right) / J$$

1.2.3 Cálculo do gradiente

Suponha que a função u esteja definida apenas na superfície. Então

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{s}} u = \mathbb{P} \cdot \boldsymbol{\nabla} \hat{u} = \boldsymbol{\nabla} \hat{u}$$

Para calcular $\boldsymbol{\nabla}\hat{u}$ em função das coordenadas do triângulo, faz-se a seguinte transformação:

$$\hat{u}_{,i} = \hat{u}_{,(j)}\xi_{j,i} \qquad i = 1, 2, 3$$

Onde foi somado de $j = 1$ até 2. Para calcular os termos $\xi_{j,i}$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$, pode-se completar a base $\{\xi_i\}$ acrescentando uma coordenada ξ_3 qualquer que satisfaça

$$\boldsymbol{\nabla}_\Gamma \xi_3 = \mathbf{0}; \qquad \breve{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\xi_3 \neq \mathbf{0};$$

e assim calcular o inverso da matrix $\left[x_{i,(j)}\right]$. O ξ_3 pode ser a "função distância" ou pode ser a coordenada baricêntrica de um 4º de um tetraedro que não esteja na superfície do triângulo.

Referências Bibliográficas