Slibs2

2 de junho de 2010

1 Determinação de L_i do triângulo no espaço 3D

Suponha que o triângulo esteja no plano $Ux + Vy + Wz + D = 0$. Se (x_i, y_i, z_i), i=1,2,3, são os vértices do triângulo, então:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Em C++ (índice começando de 0):

$$\boxed{\begin{aligned} U =&((y1 - y0) * z2 + (y0 - y2) * z1 + (y2 - y1) * z0); \\ V =&((x0 - x1) * z2 + (x2 - x0) * z1 + (x1 - x2) * z0); \\ W =&((x1 - x0) * y2 + (x0 - x2) * y1 + (x2 - x1) * y0); \\ D =&(x1 * y0 - x0 * y1) * z2 + (x0 * y2 - x2 * y0) * z1 + (x2 * y1 - x1 * y2) * z0; \end{aligned}}$$

Suponha que as funções L_i do triângulo sejam das por

$$L_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z = a'_i + b'_i x' + c'_i y'$$

onde x' e y' são as coordendas quando se roda o eixo $\hat{z}$ até que este fique paralelo ao vetor normal do plano em que o triângulo está contido. Para encontrar os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i, deve-se condisedar dos fatos:

- propriedade delta de kronecker: $L_i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$
- a variação de L_i ao longo da normal da superfície do triângulo é nula, i.e., $\nabla L_i \cdot (A, B, C) = 0$.

Considere o vetor unitário: $\hat{\boldsymbol{n}} = (u, v, w) = (U, V, W) / \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$. Com isso, é fácil verificar o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 0 & u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notar que $\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$ é duas vezes a área do elementos, que é o jacobiano $|J|$ na integral. Resolvendo o sistema acima, tem-se que os coeficientes são dados por (em C++):

$$
\begin{aligned}
a[0] &= (u*(y1*z2-y2*z1)+v*(x2*z1-x1*z2)+w*(x1*y2-x2*y1))\,/\,|J|\\
a[1] &= (u*(y0*z2-y2*z0)+v*(x2*z0-x0*z2)+w*(x0*y2-x2*y0))\,/\,|J|\\
a[2] &= (u*(y0*z1-y1*z0)+v*(x1*z0-x0*z1)+w*(x0*y1-x1*y0))\,/\,|J|\\
\\
b[0] &= (v*(z1-z2)+w*(y2-y1))\,/\,|J|\\
b[1] &= (v*(z0-z2)+w*(y2-y0))\,/\,|J|\\
b[2] &= (v*(z0-z1)+w*(y1-y0))\,/\,|J|\\
\\
c[0] &= (u*(z1-z2)+w*(x2-x1))\,/\,|J|\\
c[1] &= (u*(z0-z2)+w*(x2-x0))\,/\,|J|\\
c[2] &= (u*(z0-z1)+w*(x1-x0))\,/\,|J|\\
\\
d[0] &= (u*(y1-y2)+v*(x2-x1))\,/\,|J|\\
d[1] &= (u*(y0-y2)+v*(x2-x0))\,/\,|J|\\
d[2] &= (u*(y0-y1)+v*(x1-x0))\,/\,|J|
\end{aligned}
$$

Matriz de rotação

Para encontrar a'_i, b'_i e c'_i, precisa-se rodar o eixo de coordendas (x,y,z) para um $(x',y',z')_R$ de modo que o elemento fique no plano $x'y'$. Uma maneira possível de se fazer isso é rotacionar o versor $\hat{\boldsymbol{z}}$ de modo que este fique paralelo a normal do elemento $\hat{\boldsymbol{n}}$.

No link http://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix há uma matriz que faz esse trabalho. Os parâmetros dessa matriz é o ângulo θ que se vai deslocar e o vetor $\hat{\boldsymbol{r}}$ paralelo ao eixo de rotação. A rotação segue a regra da mão direita.

- Para determinar $\hat{\boldsymbol{r}}$: $\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\hat{\boldsymbol{z}} \times (U,V,W)}{|\hat{\boldsymbol{z}} \times (U,V,W)|} = \dfrac{(-V,U,0)}{\sqrt{V^2+U^2}}$
- Para determinar θ: $\cos(\theta) = \dfrac{\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (U,V,W)}{|J|}$ e $\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)}$
  Observar que $\sin(\theta) \geqslant 0$, pois só é possível rodar até 180°.

A matriz tal que multiplica um ponto na base canônica e retorna o ponto na nova base é a tranposta da definida no link do Wikipedia, e é dada por:

$$
R = \begin{bmatrix}
\dfrac{w+1-u^2}{w+1} & \dfrac{-uv}{w+1} & -u \\[2ex]
\dfrac{-uv}{w+1} & \dfrac{w+1-v^2}{w+1} & -v \\[2ex]
u & v & w
\end{bmatrix}
$$

Observar que há uma singularidade quando $w=-1$ ($\theta = 180°$). Na realidade, dependendo por qual caminho $w,\theta \longrightarrow -1, 180°$, a matrix R toma um valor diferente. Isso porque o versor $\hat{\boldsymbol{z}}$ pode ser orientar para o $-\hat{\boldsymbol{z}}$ de infinitas maneiras.

Parra corrigir este problema, pode-se fazer um processo limite (ruim para programação) ou adotar outro referencial quando $w < 0$. É descrito aqui o último caso.

Quando $w < 0$, podemos adotar o referêncial $\overline{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}}$, $\overline{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{x}}$ e $\overline{\boldsymbol{z}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$ por exemplo. A matriz Q que leva da base canônica $(\cdot,\cdot,\cdot)$ para essa nova base $\mathcal{Q}$ $(\cdot,\cdot,\cdot)_{\mathcal{Q}}$, pode ser obtida a partir da transposta matriz definida no Wikipedia, e é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Agora para encontrar a matriz P que gira $\overline{\boldsymbol{z}}$ para a normal do elemento, deve-se fazer os memos procedimentos para encontrar R quando $w \geqslant 0$, só que trocando $(\cdot,\cdot,\cdot)$ por $(\cdot,\cdot,\cdot)_{\mathcal{Q}}$.

Ou seja,

$$\overline{\boldsymbol{r}} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}} \times \left(\overline{U},\overline{V},\overline{W}\right)_{\mathcal{Q}}}{\left|\overline{\boldsymbol{z}} \times \left(\overline{U},\overline{V},\overline{W}\right)_{\mathcal{Q}}\right|} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}} \times (V,U,-W)_{\mathcal{Q}}}{\left|\overline{\boldsymbol{z}} \times (V,U,-W)_{\mathcal{Q}}\right|} = \frac{(-U,V,0)_{\mathcal{Q}}}{\sqrt{V^2+U^2}};$$

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{\boldsymbol{z}} \cdot (V,U,-W)_{\mathcal{Q}}}{|J|} = \frac{-W}{|J|}$$

$$\begin{tikzcd} \text{canônica} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Q}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{R}"'] & \mathcal{Q} \arrow[r, bend left, "\mathrm{P}"] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

Figura 1: Diagrama.

Com isso, P é dado por:

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{-w+1-v^2}{-w+1} & \dfrac{-uv}{-w+1} & -v \\[2ex] \dfrac{-uv}{-w+1} & \dfrac{-w+1-u^2}{-w+1} & -u \\[2ex] v & u & -w \end{bmatrix}$$

Em código Wxmaxima:

```
P: matrix([(-w-v^2+1)/(-w+1),-(u*v)/(-w+1) ,-v], [-(u*v)/(-w+1) ,(-w-u^2+1)/(-w+1),-u], [v ,u ,-w]);
```

De acordo com o diagrama da figura 1 a matriz R quando $w < 0$ é dada por $R = PQ$. Observe que aplicar PQ em um vetor é o mesmo que fazer DUAS rotações, por isso o resultado em geral não será igual a fazer apenas uma rotação.

$$\boxed{\underset{\text{quando } w \geqslant 0}{R = \begin{bmatrix} \dfrac{w+1-u^2}{w+1} & \dfrac{-uv}{w+1} & -u \\[2ex] \dfrac{-uv}{w+1} & \dfrac{w+1-v^2}{w+1} & -v \\[2ex] u & v & w \end{bmatrix}}; \quad \underset{\text{quando } w < 0}{R = \begin{bmatrix} \dfrac{-uv}{1-w} & \dfrac{1-w-v^2}{1-w} & v \\[2ex] \dfrac{1-w-u^2}{1-w} & \dfrac{-uv}{1-w} & u \\[2ex] u & v & w \end{bmatrix}}}$$

Em código do WxMaxima, respectivamente:

```
R: matrix([(w-u^2+1)/(w+1),-(u*v)/(w+1) ,-u], [-(u*v)/(w+1) ,(w-v^2+1)/(w+1),-v],
[u ,v ,w]);
```

```
R:matrix([-(u*v)/(1-w), (-w-v^2+1)/(1-w),v],[(-w-u^2+1)/(1-w),-(u*v) / (1-w),u],
[u, v, w]);
```

Coeficientes b_i' e c_i' de $L_i\,(x', y')$

É facil verifica a seguinte relação:

$$b_i' = \frac{\partial L_i}{\partial x'} = \frac{\partial L_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial L_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial L_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}$$

$$c_i' = \frac{\partial L_i}{\partial y'} = \frac{\partial L_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial L_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial L_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y'}$$

Mas $\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}$, então $\boldsymbol{x} = R^T\boldsymbol{x}'$ pela propriedade $R^TR = I$. Com isso,

$$\begin{bmatrix} b_i' \\ c_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix},\ i = 1, 2, 3$$