Fast Notes

16 de janeiro de 2011

0.1 Shape Functions

Dada a ordem n:

	Triangle	Tetrahedron	Quadrangle	Hexahedron
num de pontos	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$	$(n+1)^2$	$(n+1)^3$
num de bolhas	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$	$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$	$(n-1)^2$	$(n-1)^3$
num de pontos nas arestas	$3n$	$2n^2+2$	$4n$	$6n^2+2$
num de subdivi-sões	n^2	n^3	n^2	n^3

0.1.1 Posição do nó

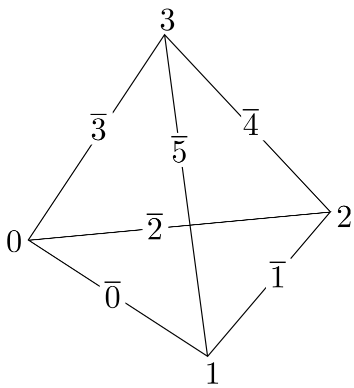
Seja um triângulo de ordem n, seu nó i e sua aresta a (com os índices começando com 0).

- Se $i < 3$: O nó i está na intersecção das arestas $a = i$ e $a = (i+2)\%3$.
- Se $3 \leq i < 3n$: O nó i está na aresta $a = \lfloor (i-3)/(n-1) \rfloor$ no $(i-3)\%(n-1)+2$ -ésimo nó desta aresta.
- Se $3n \leq i$: O nó i está na $(i-3n)$-ésima bolha.

Para um quadrângulo

- Se $i < 4$: O nó i está na intersecção das arestas $a = i$ e $a = (i+3)\%4$
- Se $4 \leq i < 4n$: O nó i está na aresta $a = \lfloor (i-4)/(n-1) \rfloor$ no $(i-4)\%(n-1)+2$ -ésimo nó desta aresta.
- Se $4n \leq i$: O nó i está na $(i-4n)$ -ésima bolha.

0.1.2 numeração REFAZER: DESATUALIZADO



(a)

face 0: $(\overline{0}, \overline{1}, \overline{2})$

face 1: $(\overline{0}, \overline{5}, \overline{3})$

face 2: $(\overline{4}, \overline{3}, \overline{2})$

face 3: $(\overline{1}, \overline{4}, \overline{5})$

Figura 0.1.1

0.1.3 pseudocódigo DESATUALIZADO

```
create_face(pontos, VolumeiD, labelV):
    edge0 = create_edge
    edge1 = create_edge
    edge2 = create_edge
    verifica se já existe triangulos com essas edges:
        se sim: verifica sinal
                    se +1 => face.set_volume(0, esse volume); if(face.label==0)
face.set_label(label)
           se -1 => face.set_volume(1, esse volume); if(face.label==0) face.set_label(label)
        se não:
             cria face;
             face.set_edges(edge0, edge1, edge2);
             face.set_label = label
             poe na lista: sMesh::add_face (nova face);
```

0.2 Cálculo de funções de lagrange $\mathcal{N}^i$ de ordem arbitrária

0.2.1 Triângulo

Seja $\boldsymbol{x}^i$ a coordenada do nó i. As funções de lagrange de grau n para um triângulo são dadas por

$$\mathcal{N}_i = \left[\prod_{k=0}^{n\cdot L_0(\boldsymbol{x}^i)-1} \frac{L_0 - k/n}{L_0(x_i) - k/n}\right]\left[\prod_{k=0}^{n\cdot L_1(\boldsymbol{x}^i)-1} \frac{L_1 - k/n}{L_1(x_i) - k/n}\right]\left[\prod_{k=0}^{n\cdot L_2(\boldsymbol{x}^i)-1} \frac{L_2 - k/n}{L_2(x_i) - k/n}\right];$$

$$i = 0, ..., (n+1)(n+2)/2 - 1.$$

onde $L_0 = 1 - L_1 - L_2$. Note que $0 \leqslant n \cdot L_j(\boldsymbol{x}^i) \leqslant n$ é um número inteiro, pois $L_j(\boldsymbol{x}^i)$ é sempre a razão de um número inteiro por n . Definindo $Q_j^i \equiv n \cdot L_j(\boldsymbol{x}^i)$ e multiplicando o numerador e o denominador dos produtórios por n, obtém-se

$$\mathcal{N}_i(L_1, L_2) = C_i \left[\prod_{k=0}^{Q_0^i-1} n\cdot L_0 - k\right]\left[\prod_{k=0}^{Q_1^i-1} n\cdot L_1 - k\right]\left[\prod_{k=0}^{Q_2^i-1} n\cdot L_2 - k\right], \quad (0.2.1)$$

onde $Q_0^i = n - Q_1^i - Q_2^i$ e

$$C_i = \left[\prod_{k=0}^{Q_0^i-1} \frac{1}{Q_0^i - k}\right]\left[\prod_{k=0}^{Q_1^i-1} \frac{1}{Q_1^i - k}\right]\left[\prod_{k=0}^{Q_2^i-1} \frac{1}{Q_2^i - k}\right].$$

Para o cálculo do gradiente, é conveniente fazer a seguinte definição:

$$\omega_Q(x) = \prod_{k=0}^{Q-1} n\cdot x - k$$

Esta definição pode ser escrita em uma forma recursiva:

$$\begin{cases} \omega_Q(x) = (nx - Q + 1)\,\omega_{Q-1}(x), \\ \omega_0(x) = 1 \end{cases},$$

e então sua derivada é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\omega_Q(x)}{\mathrm{d}x} = (nx - Q + 1)\dfrac{\mathrm{d}\omega_{Q-1}(x)}{\mathrm{d}x} + n\,\omega_{Q-1}(x) \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega_0(x)}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$$

Tal fórmula pode ser usada para derivar (0.2.1) facilmente, basta escrever $\mathcal{N}_i$ como

$$\mathcal{N}_i\left(L_1, L_2\right) = C_i\, \omega_{Q_0^i}\left(L_0\left(L_1, L_2\right)\right)\, \omega_{Q_1^i}\left(L_1\right)\, \omega_{Q_2^i}\left(L_2\right)$$

e então as derivadas com respeito a L_1 e L_2 ficam, reespectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial L_1} =& C_i\left(-\left.\frac{\mathrm{d}\omega_{Q_0^i}}{\mathrm{d}x}\right|_{L_0} \omega_{Q_1^i}\left(L_1\right)\, \omega_{Q_2^i}\left(L_2\right) + \omega_{Q_0^i}\left(L_0\right) \left.\frac{\mathrm{d}\omega_{Q_1^i}}{\mathrm{d}x}\right|_{L_1} \omega_{Q_2^i}\left(L_2\right)\right) \\
\frac{\partial \mathcal{N}_i}{\partial L_2} =& C_i\left(-\left.\frac{\mathrm{d}\omega_{Q_0^i}}{\mathrm{d}x}\right|_{L_0} \omega_{Q_1^i}\left(L_1\right)\, \omega_{Q_2^i}\left(L_2\right) + \omega_{Q_0^i}\left(L_0\right) \omega_{Q_1^i}\left(L_1\right) \left.\frac{\mathrm{d}\omega_{Q_2^i}}{\mathrm{d}x}\right|_{L_2}\right)
\end{aligned}$$

O enriquecimento das funções de lagrange com com uma função bolha tem a forma

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{N}_i} =& \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_i\left(\boldsymbol{x}_{CM}\right) \mathcal{B} = \mathcal{N}_i - \lambda_i L_0 L_1 L_2 \\
\mathcal{B} =& 27 L_0 L_1 L_2
\end{aligned}$$

onde o coeficiente λ_i é dado por

$$\lambda_i = C_i 3^{3-n} \prod_{k=0}^{Q_0^i - 1} (n - 3k) \prod_{k=0}^{Q_1^i - 1} (n - 3k) \prod_{k=0}^{Q_2^i - 1} (n - 3k)$$

0.3 Cálculos dos Jacobianos

Integral em um elemento

$$\int_\Omega \nabla \mathcal{N}_i \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\Omega \tag{0.3.1}$$

pode ser computada como

$$\int_{\hat{\Omega}} \left(\mathbb{B} \cdot \hat{\nabla} \mathcal{N}_i\right) \cdot \left(\mathbb{B} \cdot \hat{\nabla} u\right)\, J \mathrm{d}\hat{\Omega}$$

onde

$$J = det(\mathbb{J}) = det\left(\left[\frac{\partial x_j}{\partial L_i}\right]\right); \qquad \mathbb{B} = \mathbb{J}^{-1};$$

O jacobiano $\mathbb{J}$ pode ser computado como

$$\mathbb{J} = \left[\frac{\partial x_j}{\partial L_i}\right] = \left[\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial L_i} x_j^{(k)}\right] = \mathbb{D} \cdot \mathbb{X}$$

onde

$$\mathbb{D} = \left[\frac{\partial N_j}{\partial L_i}\right]; \qquad \mathbb{X} = \left[x_j^{(i)}\right]$$

onde o índice k corresponde ao k-ésimo nó do elemento. Note que se o elemento é curvilíneo, o jacobiano depende de $\boldsymbol{x}$, e então

$$\mathbb{J}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{D}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbb{X}$$

Note que

$$\nabla u = \mathbb{B} \cdot \hat{\nabla} u = \mathbb{B} \cdot \sum_k u^{(k)} \hat{\nabla} N_k,$$

mas $\hat{\nabla} N_k$ a é a k-ésima coluna de $\mathbb{D}$. Então

$$\nabla u = \mathbb{B} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{u}$$

onde

$$\mathbb{u} = \left[u^{(i)}\right] \quad \text{(vetor com valor de } u \text{no nó i)}$$

Em geral, seja T um tensor de ordem n (ver definição no wikipedia), então, se o gradiente for definido como (ATENÇÃO)

$$\nabla T|_{ijk\ldots\sigma} = \frac{\partial T_{jklm\ldots\sigma}}{\partial x_i}$$

então vale a fórmula

$$\nabla T = \mathbb{B} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{T}$$

onde

$$\mathbb{T} = [T^{(i)}_{jklm\ldots\sigma}]$$

lembrando que i corresponde ao nós e $j, k, l\ldots$, são as componentes de T. Logo, a integral em (0.3.1) calculada como

$$\int_{\hat{\Omega}} \left(\mathbb{B} \cdot \hat{\nabla} \mathcal{N}_i\right) \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{u}) \; J \mathrm{d}\hat{\Omega}$$

OBS: A matriz $\mathbb{D}$ deve corresponder à incógnita em questão, i.e., deve-se usar as $\mathcal{N}^{(i)}$ corretas. É facil verificar que

$$\boldsymbol{x} = \mathbb{X}^T \cdot \boldsymbol{\mathcal{N}}$$

onde $\boldsymbol{\mathcal{N}}_i = \mathcal{N}^{(i)}$