NumPy

Muitos trabalhos aplicados em empresa envolvem cálculos matemáticos avançados, e por isso precisam se apoiar em alguma biblioteca. Quer trabalhem

No Python, a biblioteca **NumPy** (abreviação para *Numerical Python* [2]) faz esse papel. Ela é uma poderosíssima biblioteca matemática, e é um dos cerne

Os cálculos realizados pelo NumPy são baseados em operações com os chamados Arrays Multidimensionais (em matemática, chamamos de vetores, mat
de mais baixo nível (linguagem C), o que confere a eles enorme velocidade e eficiência. Nós aproveitamos essa eficiência através da interface amigável qu

Quando organizamos nosso código para aproveitar as operações do NumPy, é comum dizermos que nós "vetorizamos" o nosso código. Isso significa que
nosos código.

A esmagadora maioria das bibliotecas de Python para computação científica, processamento de dados e ciência de dados (como por exemplo, SciPy, pan

1. Instalação
2. Introdução ao NumPy
    i. Cuidados iniciais: Como copiar arrays
    ii. Propriedades de ndarrays
    iii. Acessando e modificando elementos (Indexing & Slicing)
    iv. Máscara Booleana e Seleção Avançada
    v. Métodos built-in de criação de arrays O argumento é o formato do ndarray resultante. O argumento é o formato do array resultante.
3. Matemática com NumPy
    i. Broadcasting
    ii. Funções matemáticas
4. Álgebra Linear e Estatística básica
    i. Álgebra Linear
    ii. Estatística

1. Instalação

Como falamos antes, o NumPy nada mais é que uma biblioteca do Python. Dito isso, para instalarmos ele, fazemos de forma semelhante a qualquer outra

Entre as diversas formas de fazer isso, a mais simples é instalar o pacote Anaconda (https://www.anaconda.com/distribution/). Ele já vem com o Python e
através do terminal. ``` $ conda install numpy

```
Caso prefira, você também pode instalar via o gerenciador de pacotes nativo do Python, o `pip`.  Para isso, utilizamos o comando abai
```

$ pip install numpy

```
Para quem for usuário com maior conhecimento de programação e computação científica, recomenda-se uma lida nas [instruções de instala

O maior motivo para isso é o fato de que, por trás dos panos, o NumPy utiliza as chamadas "bibliotecas de álgebra linear aceleradas",

Embora existam questões de performance computacionais para essa escolha, existem também motivos de negócio. A biblioteca Intel MKL nã


## 2. Introdução ao NumPy  <a name="2introducao"></a>

A primeira coisa que precisamos fazer para usar o NumPy em um código, é importar a biblioteca. A importação funciona como qualquer ou
```python
import numpy as np
```

Com esse alias, o nosso código fica bem menor, facilitando para outras pessoas entenderem ele depois. Como o alias é comum na comunidade, ele tambe

Na introdução, comentamos que a estrutura de dados básica do NumPy é um "array multidimensional". Esse objeto do NumPy se chama **ndarray**. Um mr
multidimensionais.

Essa estrutura é semelhante aos arrays de outras linguagens de programação. Pode ser uma lista de valores, uma tabela, ou uma tabela de tabelas. O imp

O mais comum é usarmos ndarrays como listas ou tabelas de valores.
```

No caso de uma lista, nós temos um ndarray de uma dimensão. Matematicamente, esse objeto é equivalente a um vetor.

O método mais comum de criar um ndarray é usando a função `np.array`. Assim, para criar nosso "vetor", usamos o comando abaixo.

```
>>> vetor = np.array([1, 2, 3])
>>> print(vetor)
[1 2 3]
```

Se olharmos o tipo da variável `vetor`, veremos que ela é do tipo `NumPy.ndarray`.

```
>>> print(type(vetor))
<class 'numpy.ndarray'>
```

Podemos criar também uma tabela com duas dimensões. Nesse caso, temos uma matriz.

```
>>> matriz = np.array([[1, 2], [3, 4]])
>>> print(matriz)
[[1 2]
 [3 4]]
```

É possível, também, aumentar o número de dimensões. Nesse caso, se tivermos 3 dimensões, por exemplo, teríamos uma lista de tabelas. Se forem 4 dim
lista de ndarrays de 4 dimensões (ou uma lista de tabelas de tabelas).

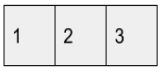
Matematicamente, quando temos 3 dimensões ou mais, nós chamamos esse objeto de um tensor.

```
>>> tensor = np.array([[[1, 2], [3, 4]], [[1, 0],[0, 1]]])
>>> print(tensor)
[[[1 2]
  [3 4]]

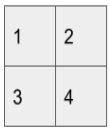
 [[1 0]
  [0 1]]]
```

Note que a variável `tensor` nada mais é que duas tabelas.

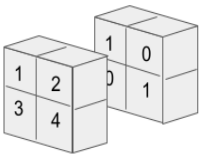
Uma representação visual de ndarrays podem ajudar a entender melhor o que está acontecendo.



ndarray com 1 dimensão



ndarray com 2 dimensões



ndarray com 3 dimensões

(**Fonte:** Imagem adaptada da original, disponível pela ABRACD [5])

O *ndarray* é a estrutura de dados básica do NumPy, e a que usaremos sempre. A partir dela que toda a "matemágica" acontece. Todo o poder do NumPy v

Esses objetos também são muito comuns em matemática, pois representam basicamente vetores e matrizes. Assim, é bem direto "vetorizar" nosso códig

Obs: Falamos antes também de tensores. Não é importante entender o que eles são para poder usar o NumPy. Apenas cálculos muito específicos se utili
ser uma lista de tabelas, uma tabela de tabelas, uma lista de tabelas de tabelas, uma tabela de tabelas de tabelas, e por aí vai...

2.1. Cuidados iniciais: Como copiar arrays

Antes de começar a ver as propriedades básicas de um ndarray, é importante ter uma questão muito importante em mente. Assim como os arrays nativo

```
>>> a = np.array([1, 2, 3])
>>> b = a
>>> b
array([1, 2, 3])
>>> b[0] = 100
>>> b
array([100,   2,   3])
>>> a
array([100,   2,   3])
```

Note que no bloco de código, a variável `a` foi modificada depois que alteramos a variável `b`! Isso acontece porque ambas as variáveis apontam para o mes vai passar a ver o valor novo. Logo, teremos que seu valor será `100`.

Por este motivo, sempre que queremos copiar um array de uma variável para outra, usamos o método `copy()`.

```
>>> a = np.array([1, 2, 3])
>>> b = a.copy()
>>> b
array([1, 2, 3])
>>> b[0] = 100
>>> b
array([100,   2,   3])
>>> a
array([1, 2, 3])
```

O método `copy()` copia todos os valores do array para um novo endereço de memória. Assim, a variável `b` passa a apontar para esse novo endereço, e ev

2.2. Propriedades de ndarrays

Dimensão e formato

Como vimos antes, é possível criar um ndarray com diferentes dimensões e formatos. Cada ndarray tem os atributos `ndim` e `shape` que guardam estas inf

```
>>> print(vetor.ndim)
>>> print(vetor.shape)
1
(3,)
>>> print(matriz.ndim)
>>> print(matriz.shape)
2
(2,2)
>>> print(tensor.ndim)
>>> print(tensor.shape)
3
(2,2,2)
```

Isso é extremamente importante para nos ajudar quando temos um ndarray muito grande, e precisamos relembrar o quão grande. Além disso, esses atril

A partir do formato do array, podemos obter também o número de elementos. Porém, objetos ndarray já têm o atributo `size` para facilitar.

```
>>> print(vetor.size)
3
>>> print(matriz.size)
4
>>> print(tensor.size)
8
```

Muitas vezes queremos mudar o formato de um array. Por exemplo, podemos querer transformar um vetor de 4 elementos em uma matriz 2x2. Para issc

```
>>> before = np.array([[1,2,3,4],[5,6,7,8]])
>>> print(before.shape)
(2, 4)
>>> after = before.reshape((8)) # o novo array deve ter a mesma quantidade de elementos
>>> after
```

```
array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])
>>> after = before.reshape((8, 1))
>>> after
array([[1],
       [2],
       [3],
       [4],
       [5],
       [6],
       [7],
       [8]])
>>> after = before.reshape(2, 2, 2)
>>> after
array([[[1, 2],
        [3, 4]],

       [[5, 6],
        [7, 8]]])
```

Outra forma de obter arrays com dimensões ou formatos diferentes é juntar e empilhar arrays. Podemos tanto empilhar um array em cima do outro (um

```
>>> v1 = np.array([1,2,3,4])
>>> v2 = np.array([5,6,7,8])
>>> np.vstack([v1, v2])
array([[1, 2, 3, 4],
       [5, 6, 7, 8]])
>>> np.vstack([v1, v2, v2, v2])
array([[1, 2, 3, 4],
       [5, 6, 7, 8],
       [5, 6, 7, 8],
       [5, 6, 7, 8]])


>>> h1 = np.array([[1, 1, 1, 1],
                   [1, 1, 1, 1]])
>>> h2 = np.zeros([[0,0],
                   [0,0]])
>>> np.hstack((h1, h2))
array([[1, 1, 1, 1, 0, 0],
       [1, 1, 1, 1, 0, 0]])
```

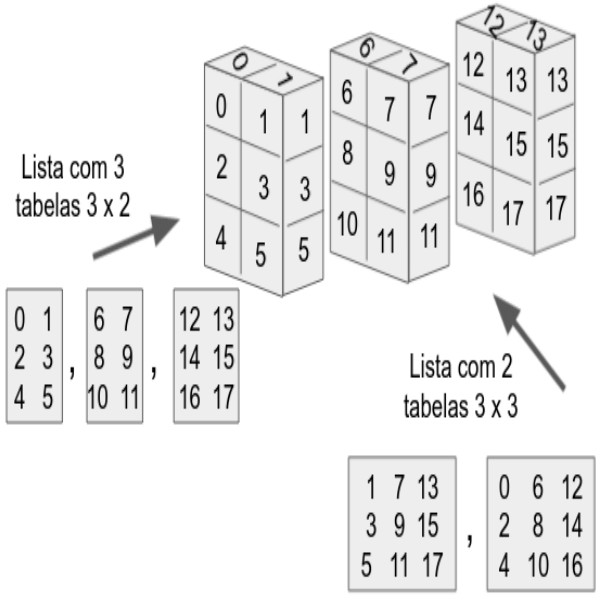
É comum falarmos de cada dimensão de um ndarray como um "eixo". Assim, se um ndarray tem 3 dimensões, nós podemos falar da "1ª dimensão do array eixo (eixo 0). Essa lista seria composta por 3 matrizes de tamanho 3 x 2. De forma totalmente equivalente, a gente poderia pensar que ele é uma lista con

```
>>> a = np.array(range(18))
>>> b = a.reshape((3, 3, 2)).copy()
>>> b
array([[[ 0,  1],
        [ 2,  3],
        [ 4,  5]],

       [[ 6,  7],
        [ 8,  9],
        [10, 11]],

       [[12, 13],
        [14, 15],
        [16, 17]]])
```

A variável `b` vai ser um "cubo" de valores, invés de uma tabela. Assim, o que muda é só qual eixo a gente está olhando.



(**Fonte:** Imagem original Ada)

Tipos de dados e tamanho em memória

Um array do NumPy tem a propriedade `dtype`, que nos dá o tipo dos seus elementos mais básicos.

```
>>> vetor = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])
>>> vetor.dtype
dtype('int64')
```

Quando nós construímos o ndarray, se não passarmos explicitamente qual é o `dtype`, ele infere a partir dos valores que passamos.

```
>>> vetor = np.array([1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0])
>>> vetor.dtype
dtype('float64')
```

Para passar esse parâmetro explicitamente, basta utilizar um segundo argumento na função `np.array`.

```
>>> vetor = np.array([1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0], dtype=np.int32)
>>> vetor.dtype
dtype('int32')
```

Para esses arrays, nós dizemos que a consistência dos dados é **forte**. Isso significa que, se criarmos um vetor de números inteiros, por exemplo, então tod

Se tentarmos colocar um valor numérico de ponto flutuante, o NumPy vai automaticamente converter para um valor inteiro.

```
>>> a = np.array([1, 2, 3])
>>> a[0] = 10
>>> a
array([10,  2,  3])
>>> a[0] = 1.23
>>> a
array([1, 2, 3])
```

O valor padrão de *dtype* depende do Python instalado. Se o Python instalado for de 64 bits, o padrão será tipos `int` ou `float` de 64 bits de memória (`int`

Essa diferença afeta a precisão dos cálculos. Quanto mais espaço em memória utilizado (maior o número de bits), maior a precisão.

Como o NumPy é feito para cálculos numéricos, ele precisa de grande controle sobre essa precisão. De fato, ele precisa de mais controle sobre isso do qu

Devido a isso, os tipos de dados numéricos básicos do NumPy parecem com os do Python, mas em geral têm um número à direita. Esse número represen

Alguns exemplos de tipos de dados do NumPy (e provavelmente os mais comuns) são:

```
np.int32
np.int64
np.float32
np.float64
```

Como exemplo, podemos criar uma outra array, `a16`, com o tipo inteiro de 16 bits.

```
>>> a16 = np.array([1, 2, 3], dtype=np.int16)
>>> a16
array([1, 2, 3], dtype=int16)
```

Note que por ser um tipo diferente do padrão, ele ressalta ao mostrar o array na tela.

Para descobrir o espaço que cada elemento ocupa na memória, individualmente, podemos acessar o atributo `itemsize`.

```
>>> a16.itemsize
2
```

Ele retornou 2! Mas a gente não falou que era um tipo inteiro de "16 bits"?

O NumPy nos mostra o espaço em memória em bytes, e não em bits. Cada byte equivale a 8 bits. Logo, 16 bits são o mesmo que 2 bytes.

816 = 2

Já se fizermos um array padrão em um Python de 64 bits, temos um `itemsize` de 8.

```
>>> a = np.array([1, 2, 3])
>>> a.dtype
dtype('int64')
>>> a.itemsize
8
```

Isso pois o padrão de 64 bits equivale a 8 bytes.

864 = 8

A quantidade de elementos multiplicado pelo tamanho de cada elemento em memória nos dará o tamanho total de bytes que o array inteiro ocupa na me

```
>>> # quantidade de elementos total
>>> a.size
3
>>> # tamanho em memória do vetor "a"
>>> a.size * a.itemsize
24
```

Não precisamos, porém, ficar calculando esse valor se quisermos saber essa informação. Podemos simplesmente acessar o atributo `nbytes`, que represe

```
>>> a.nbytes
24
```

Observação

Geralmente não é necessário reduzir o número de bits a não ser que você tenha certeza que um tamanho reduzido vai atender sua necessidade e você q

---

Podemos converter os tipos de dados do array do NumPy depois da sua criação de forma manual, usando a função `astype`.

```
>>> a = np.array([1., 2., 3.])
>>> a.dtype
dtype('float64')
>>> b = a.astype('int32').copy()
>>> b
array([1, 2, 3], dtype=int32)
>>> b.dtype
dtype('int32')
```

2.3. Acessando e modificando elementos (Indexing & Slicing)

Vamos montar duas matrizes, uma usando Python e outra usando NumPy, para podermos comparar como nós acessamos os elementos de cada uma.

```
>>> np_mat = np.array([[1, 2,  3,  4,  5,  6,  7],
                       [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]])
>>> print(np_mat)
[[ 1  2  3  4  5  6  7]
 [ 8  9 10 11 12 13 14]]
>>> py_mat = [[1, 2,  3,  4,  5,  6,  7],
              [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]]
>>> print(py_mat)
[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]]
```

Podemos acessar um elemento específico de forma similar a uma lista natural do Python, utilizando a sintaxe de colchetes. Porém, no NumPy, quando te

Se quisermos então pegar o número 13 nos arrays acima, que está na posição [1,5] (linha 1, coluna 5, lembrando que o Python começa os índices sempre

```
>>> py_mat[1][5]
13
```

Já para um ndarray com duas dimensões (2D), temos uma sintaxe um pouco mais simples.

```
>>> np_mat[1,5]
13
```

Além disso, todas as regras do Python são aplicáveis no NumPy. Usar números negativos, por exemplo, funciona como uma indexação de trás para frente

```
>>> np_mat[1, -2]
13
```

Para pegar uma linha inteira, podemos utilizar a sintaxe de `:` na coluna. Essa sintaxe pode ser lida como "todos os elementos deste eixo". Podemos ler ent

```
>>> np_mat[0, :]
array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])
```

Embora também poderíamos fazer de forma mais fácil essa indexação em específico.

```
>>> np_mat[0]
array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])
```

Porém, para pegar uma coluna, não tem jeito, precisamos usar `:`. A sintaxe abaixo pode ser lida como "todas as linhas, coluna 2".

```
>>> np_mat[:, 2]
array([ 3, 10])
```

O operador `:` é também conhecido como slicing (ou "fatiamento", em português), e pode ser usado para pegar intervalos de indices. Para isso, ele precisa

start, o índice inicial do intervalo
end, o índice final do intervalo
step, quantos índices nós pulamos em cada passo dado para ir do *start* até o *end*.

Isso é feito no formato `[start:end:step]`. Neste caso, `step` é o tamanho do passo que vamos dar. Basicamente, ele diz quantos elementos devemos pula

```
>>> np_mat[0, 1:6:2]
array([2, 4, 6])
```

Novamente, ele também funciona com índice negativo.

```
>>> np_mat[0, 1:-1:2]
array([2, 4, 6])
```

Podemos usar essas indexações para alterar os elementos do array. Basta usar o operador `=` para atribuir um novo falar ao elemento daquela posição.

```
>>> np_mat[1,5] = 20
>>> print(np_mat)
```

```
[[ 1  2  3  4  5  6  7]
 [ 8  9 10 11 12 20 14]]
```

Isso vale até para colunas ou linhas inteiras.

```
>>> np_mat[:, 2] = 5
>>> print(np_mat)
[[ 1  2  5  4  5  6  7]
 [ 8  9  5 11 12 20 14]]
```

Isso acontece por uma característica fundamental do array do NumPy:

Ao alterar o pedaço rec

Juntando com o problema que vimos antes, de cópia de array, quando queremos copiar um slice de um array, temos que explicitamente usar o método `cc`

```
>>> a = np.array([1, 2, 3])
>>> b = a[1:].copy()
>>> b
array([2, 3])
>>> c = a[1:]
>>> c
array([2, 3])
>>> c[0] = 5
>>> c
array([5, 3])
>>> a
array([1, 5, 3])
>>> b
array([2, 3])
```

2.4. Máscara Booleana e Seleção Avançada

Uma outra forma de seleção é por meio de uma lista de posições.

```
>>> a = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
>>> a[[1, 2, -1]]
array([2, 3, 9])
```

No caso de arrays multidimensionais, vamos ter que passar uma lista para cada dimensão. O NumPy nos retornará os elementos formados pelos pares (s

```
>>> a = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]).reshape(3,3)
>>> a
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6],
       [7, 8, 9]])
>>> a[[0, 0, 2],[1, 2, 2]]
array([2, 3, 9])
```

Uma outra forma muito comum de selecionar elementos de um ndarray é usando o que chamamos de "máscara booleana". Ela nada mais é do que um arr

Assim, quando passamos essa máscara para um array do NumPy, ele nos retorna apenas as posições onde temos o valor "True".

```
>>> a = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]).reshape(3,3)
>>> a
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6],
       [7, 8, 9]])
>>> a[[True, True, False, False, False, False, False, True, False]]
array([1, 2, 8])
```

Note, no exemplo acima, que temos 3 posições onde nossa máscara possui valor "True". A posição 0, a posição 1, e a posição 7, que correspondem aos val

Nós podemos gerar essa máscara a partir de comparações elemento a elemento de um ndarray. De fato, ao aplicar qualquer operador booleano, como

```
>,
```

`<`,

`<=`,

`>=`,

`==`,

para comparar um ndarray com algum valor, o NumPy retorna um ndarray de valores booleanos. Esse novo ndarray vai ter o valor `True` nas posições ond

Vamos ver um exemplo.

```
>>> mat = np.array([1, 10, 20, 30]).reshape(2, 2)
>>> mat
array([[ 1, 10],
       [20, 30]])
>>> mat > 10 # retorna um ndarray com valor True onde o elemento original é maior que 10
array([[False, False],
       [ True,  True]])
```

Podemos juntar os dois exemplos anteriores, de uso da máscara booleana como indexação e da criação de uma máscara, em uma única linha.

```
>>> mat[mat > 10]
array([20, 30])
```

Neste exemplo, temos como retorno um array com os elementos 20 e 30, como era esperado.

Podemos fazer operações semelhantes, mas restritos a seguir "linha a linha" ou "coluna a coluna". No nosso exemplo anterior, pode ser que queiramos to

Para isso, usamos os métodos auxiliares `any` e `all`.

any: se qualquer elemento do meu eixo for `True`, retorna um valor `True`
all: se, e somente se, todos os elementos do meu eixo forem `True`, retorna `True`

Nas explicações, o "eixo" são as dimensões do ndarray, como discutido na sessão 2.2.

Vamos ver alguns exemplos.

O exemplo abaixo pega todas as linhas onde existe pelo menos um elemento com valor `10`.

```
>>> mat[(mat == 10).any(axis=1)]
array([[ 1, 10]])
```

Por que usamos o eixo 1 nesse caso? Porque aqui, o eixo define por onde o NumPy vai "traversar" para avaliar o nosso ndarray.

O eixo 0 são as linhas. Assim, quando olhamos *ao longo do eixo 0*, nós estamos caminhando através das linhas. Se usássemos `(mat == 10).any(axis=0)`, c

O processo então vai ser o seguinte:

olha se `1 == 10`. Nesse caso, temos `False`.
o próximo elemento, **ao longo do eixo 0**, é o `20`.
`20 == 10` também retorna `False`. Logo, nessa coluna, a resposta será `False`.
segue para a próxima coluna.

Já quando usamos `(mat == 10).any(axis=1)`, ele olha **ao longo do eixo 1**, ou seja, ao longo das colunas. O processo fica:

olha se `1 == 10`. Nesse caso, temos `False`.
o próximo elemento, **ao longo do eixo 1**, é o `10`.
`10 == 10` retorna `True`. Logo, existe pelo menos um valor `True`. Então, para essa linha, retornamos o valor `True`.
segue para a próxima linha.

Como um outro exemplo, se quisermos pegar as colunas onde todos os elements sejam maiores que `5`, podemos usar o `all`. A regra de qual eixo usar é ig

```
>>> mat[:, (mat > 5).all(axis=0)]
array([[10],
       [30]])
```

Perceba que neste exemplo, nós colocamos dois pontos na primeira posição. Isso garante que pegamos todas as linhas, e olhamos a nossa máscara boole

Para nos ajudar a lembrar essa questão do parâmetro `axis`, podemos pensar que esse parâmetro define ao longo de qual eixo a função irá "esmagar" o nc

```
>>> new_mat = np.array([1, 2, 4, 5, 7, 8]).reshape(3, 2)
>>> new_mat
array([[1, 2],
       [4, 5],
       [7, 8]])
>>> (new_mat < 8).all(axis=1) # Apenas as 2 primeiras linhas têm todos os elementos < 8
array([ True, True, False])
>>> (new_mat == 5).any(axis=0) # Apenas a segunda coluna tem um elemento com valor 5
array([False, True])
```

Múltiplas condições

Similar ao `and` do python, nós podemos usar múltiplas condições para filtrar dados da nossa matriz com o operador `&`.

```
>>> mask = (mat > 10) & (mat <= 20)
>>> mat[mask]
array([20])
```

Observação: note que os parênteses, além de melhorarem a legibilidade, são necessárias devido a ordem de precedência dos operadores `>`, `&` e `<=`. Se nã

Além do `&`, também podemos fazer quaisquer operações booleanas básicas.

No caso do `or`, nós temos o operador `|`.

```
>>> mask = (mat == 1) | (mat >= 20)
>>> mat[mask]
array([1, 20, 30])
```

No caso do `not`, nós temos o operador `~`.

```
>>> mask = (mat == 1) | (mat >= 20)
>>> mat[~mask]
array([10])
```

2.5. Métodos built-in de criação de arrays

O NumPy já possui diversos métodos para gerar alguns arrays comuns mais conhecidos. Isso nos ajuda imensamente a criar algumas matrizes padrões p

Primeiro, é possível gerar um array de zeros com qualquer formato.

```
>>> np.zeros((2, 3)) # O argumento é o formato do ndarray resultante.
array([[0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.]])

>>> np.zeros((2, 2, 5))
array([[[0., 0., 0., 0., 0.],
        [0., 0., 0., 0., 0.]],

       [[0., 0., 0., 0., 0.],
        [0., 0., 0., 0., 0.]]])
```

Para criar um array de uns, a sintaxe é semelhante.

```
>>> np.ones((4, 2, 2), dtype='int32')
array([[[1, 1],
        [1, 1]],

       [[1, 1],
        [1, 1]],

       [[1, 1],
        [1, 1]],
```

```
       [[1, 1],
        [1, 1]]], dtype=int32)
```

Se invés de uma matriz apenas de uns, nós quisermos usar outro número, podemos fazer isso aproveitando o `np.ones`. Basta multiplicarmos a matriz pel

```
>>> np.ones((2, 2)) * 10
array([[10., 10.],
       [10., 10.]])
```

Mas o NumPy já tem uma opção mais direta, o `full`.

```
>>> np.full((2, 2), 99) # O primeiro argumento é o formato, o segundo é o número
array([[99, 99],
       [99, 99]])
```

Também temos o `full_like`, que copia o formato de uma matriz que já tenha sido declarada antes.

```
>>> np_mat = np.array([[1, 2,  3,  4,  5,  6,  7],
                       [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]])
>>> np.full_like(np_mat, 4)
array([[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4],
       [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]])
```

Outra função para criação de arrays é `np.repeat`. Ela repete um determinado array na direção do eixo escolhido.

Para um vetor de 1D, temos apenas 1 eixo, mas para matrizes, tempos dois. O eixo 0 é linha, o eixo 1 é coluna.

```
>>> arr = np.array([1, 2, 3])
>>> r1 = np.repeat(arr, 3)
>>> print(r1)
[1 1 1 2 2 2 3 3 3]
```

Para fazermos uma matriz, mudamos o formato da variável `arr` de (3,) para (1,3).

```
>>> arr = np.array([[1, 2, 3]])
>>> r1 = np.repeat(arr, 3, axis=0)
>>> print(r1)
[[1 2 3]
 [1 2 3]
 [1 2 3]]
>>> r2 = np.repeat(arr, 3, axis=1)
>>> print(r2)
[[1 1 1 2 2 2 3 3 3]]
```

Criando arrays com listas de números

Um caso específico de criação de arrays é quando queremos gerar uma lista sequencial de números. Isso é muito comum, por exemplo, quando queremo

A primeira função do NumPy para criar essa sequência numérica é `np.arange`. Esta função retorna elementos igualmente espaçados por um step (que pc

```
>>> np.arange(0, 10)
array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
```

A função `np.arange` é semelhante à função `range` do Python, porém permite que peguemos valores de ponto flutuante (números com decimal) dentro dc

```
>>> np.arange(0, 11, 0.1)
array([ 0. ,  0.1,  0.2,  0.3,  0.4,  0.5,  0.6,  0.7,  0.8,  0.9,  1. ,
        1.1,  1.2,  1.3,  1.4,  1.5,  1.6,  1.7,  1.8,  1.9,  2. ,  2.1,
        2.2,  2.3,  2.4,  2.5,  2.6,  2.7,  2.8,  2.9,  3. ,  3.1,  3.2,
        3.3,  3.4,  3.5,  3.6,  3.7,  3.8,  3.9,  4. ,  4.1,  4.2,  4.3,
        4.4,  4.5,  4.6,  4.7,  4.8,  4.9,  5. ,  5.1,  5.2,  5.3,  5.4,
        5.5,  5.6,  5.7,  5.8,  5.9,  6. ,  6.1,  6.2,  6.3,  6.4,  6.5,
        6.6,  6.7,  6.8,  6.9,  7. ,  7.1,  7.2,  7.3,  7.4,  7.5,  7.6,
        7.7,  7.8,  7.9,  8. ,  8.1,  8.2,  8.3,  8.4,  8.5,  8.6,  8.7,
```

```
        8.8,  8.9,  9. ,  9.1,  9.2,  9.3,  9.4,  9.5,  9.6,  9.7,  9.8,
        9.9, 10. , 10.1, 10.2, 10.3, 10.4, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.9])
```

Outro caso comum que esbarramos para criar uma lista sequencial é quando queremos escolher uma grande quantidade de pontos entre dois números.

Neste caso, usamos a função `np.linspace`.

```
>>> np.linspace(3, 7, num=10)
array([3.        , 3.44444444, 3.88888889, 4.33333333, 4.77777778,
       5.22222222, 5.66666667, 6.11111111, 6.55555556, 7.        ])
```

Números decimais aleatórios

O NumPy tem um sub-módulo chamado `random` (cujas funções são acessadas usando o preâmbulo `np.random`). Nele, existe um conjunto de funções focad

Por exemplo, a função `np.random.random_sample` retorna valores aleatórios entre 0 e 1.

```
>>> np.random.random_sample((4, 2)) # O argumento é o formato do array resultante.
array([[0.59701743, 0.40627135],
       [0.23940108, 0.58528558],
       [0.04228252, 0.68467361],
       [0.68907347, 0.85636431]])
```

A função `np.random.rand` é um "alias" da função de cima. Isso significa que, por trás dos panos, ela literalmente só executa a função `np.random.random_sa`

Essa função existe para facilitar a migração de códigos de outras linguagens de computação numérica (especificamente, códigos de uma linguagem cham

```
>>> np.random.rand(4, 2)
array([[0.13322589, 0.76493887],
       [0.06716679, 0.61834428],
       [0.54098045, 0.09752974],
       [0.6656696 , 0.79337782]])
```

Se quisermos criar um array de números inteiros abaixo de um certo valor, escolhidos ao acaso, usamos a função `np.random.randint`.

```
>>> np.random.randint(7, size=(3, 3)) # Números menores que 7, formato 3 x 3
array([[6, 5, 6],
       [0, 6, 2],
       [4, 6, 5]])
```

Os argumentos principais da função `np.random.randint` são `low`, `high` e `size`, que definem o menor inteiro possível, o maior inteiro possível, e o tamanho

```
>>> np.random.randint(5, high=10, size=10)
array([8, 7, 8, 6, 9, 9, 5, 6, 8, 9])
```

Para incluir o 10 entre os valores possíveis, basta trocar o argumento high para 11.

3. Matemática com NumPy

No início deste texto, nós introduzimos o NumPy como uma biblioteca muito utilizada para fazer cálculos numéricos. Vamos ver então as operações mat

A primeira coisa a se observar é que as operações matemáticas básicas, como usadas no Python, podem ser usadas também para ndarrays. Só temos que

```
>>> vec1 = np.array([2., 4., 6., 8.])
>>> vec2 = np.array([1., 2., 3., 4.])
>>> vec1 + vec2                    # Soma
array([ 3.,  6.,  9., 12.])
>>> vec1 - vec2                    # subtração
array([1., 2., 3., 4.])
>>> vec1 * vec2                    # Multiplicação
array([ 2.,  8., 18., 32.])
>>> vec1 / vec2                    # Divisão
array([2., 2., 2., 2.])
```

```
>>> vec1 ** vec2                  # exponenciação
array([2.000e+00, 1.600e+01, 2.160e+02, 4.096e+03])
```

A notação com este "e" minúsculo significa que o número está escrito em potências de 10. Assim, `4.096e+03` significa `4096` (pois multiplicamos o número

O NumPy também consegue fazer operações entre arrays e números (chamadas operações com escalares).

```
>>> vec2 + 2                # Somar
array([3, 4, 5, 6])
>>> vec2 - 2                # Subtrair
array([-1,  0,  1,  2])
>>> vec2 * 2                # Multiplicar
array([2, 4, 6, 8])
>>> vec2 / 2                # Dividir
array([0.5, 1. , 1.5, 2. ])
>>> a ** 2                  # Potência (elevar a um número)
array([ 1,  4,  9, 16])
>>> vec2 += 2               # Incrementar
>>> vec2
array([3, 4, 5, 6])
```

Agora uma dúvida é: se os nossos ndarrays tiverem formatos diferentes, então o NumPy apenas retorna um erro?

Depende do caso. Ele consegue fazer a operação se a diferença entre os formatos seguirem algumas regras que veremos abaixo. Nestes casos, ele faz o c

Se a diferença entre os formatos não seguirem as regrinhas necessárias para realizar broadcasting, então o NumPy retorna de fato um erro.

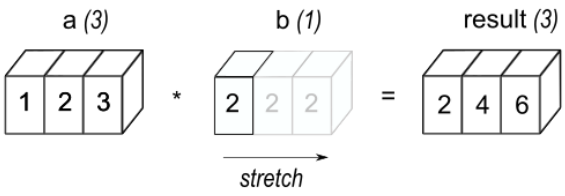
```
>>> a = np.array([1, 2, 3])
>>> b = np.array([2, 2])
>>> a * b
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-113-9bc1a869709f> in <module>
----> 1 a * b

ValueError: operands could not be broadcast together with shapes (3,) (2,)
```

3.1. Broadcasting

O que fizemos, nas operações com escalar, é um tipo de broadcasting. Você pode imaginar que o que está acontecendo é o seguinte:

> pegue o seu número,
> crie um ndarray, de mesmo formato que o primeiro, mas cujos valores são o seu número.



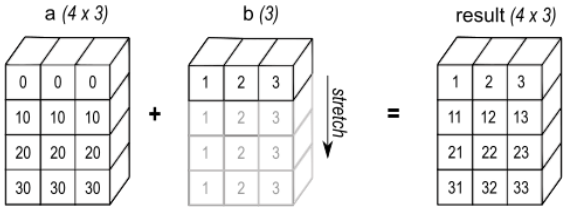
(**Fonte:** Tutoriais oficiais do NumPy [2])

Na imagem acima (que foi tirada dos tutoriais oficiais do NumPy), nota que o valor 2 é "esticado". Ele é repetido ao longo do eixo 0 até ter um ndarray de

Essa ideia pode ser generalizada. Sempre que fizer sentido "esticar" (ou repetir) o array menor até ele ficarcom o mesmo formato do maior, então o Num

```
>>> matrix = np.array([[0, 0, 0],
                       [10, 10, 10],
                       [20, 20, 20],
                       [30, 30, 30]])
>>> vec = np.array([1, 2, 3])
>>> matrix + vec
array([[ 1,  2,  3],
       [11, 12, 13],
```

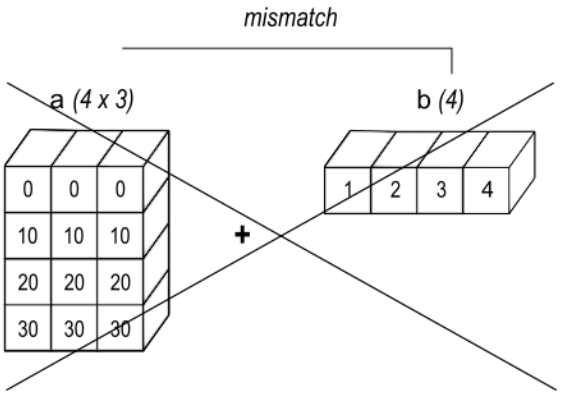
```
        [21, 22, 23],
        [31, 32, 33]])
```



(**Fonte:** Tutoriais oficiais do NumPy [2])

A imagem acima mostra o que está acontecendo no código de exemplo que demos.

Mas por que colocamos a expressão "sempre que fizer sentido"? O motivo é que a única coisa que o NumPy aceita fazer é repetir o array menor diversas



(**Fonte:** Tutoriais oficiais do NumPy [2])

```
>>> matrix = np.array([[0, 0, 0],
                       [10, 10, 10],
                       [20, 20, 20],
                       [30, 30, 30]])
>>> vec = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> matrix + vec
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-17-a18531600448> in <module>
----> 1 matrix + vec

ValueError: operands could not be broadcast together with shapes (4,3) (4,)
```

É interessante notar que essa "esticada" para realizar o broadcast só pode ser feita em 1 eixo. Mesmo que fosse possível copiar o array menor até ele ter

```
>>> a = np.array([[1, 2, 3, 4],
                  [3, 4, 5, 6],
                  [7, 8, 9, 10]])
>>> b = np.array([2, 2])
>>> a * b
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-117-9bc1a869709f> in <module>
----> 1 a * b

ValueError: operands could not be broadcast together with shapes (3,4) (2,)
>>> b = np.array([[2, 2]])
>>> a * b
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-119-9bc1a869709f> in <module>
----> 1 a * b
```

```
ValueError: operands could not be broadcast together with shapes (3,4) (1,2)
```

3.2. Funções matemáticas

Além de fazer operações matemáticas entre arrays, também podemos usar funções matemáticas conhecidas. O NumPy possui milhares de funções já im

Função seno:

```
>>> x = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> np.sin(x)
array([ 0.84147098,  0.90929743,  0.14112001, -0.7568025 ])
```

Função cosseno:

```
>>> x = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> np.cos(x)
array([ 0.54030231, -0.41614684, -0.9899925 , -0.65364362])
```

O NumPy também possui o valor de constantes matemáticas comuns, como o π ("pi").

```
>>> x = np.array([0, np.pi / 2 , np.pi, 3 * np.pi / 2, 2 * np.pi])
>>> np.sin(x)
array([ 0.0000000e+00,  1.0000000e+00,  1.2246468e-16, -1.0000000e+00,
       -2.4492936e-16])
```

Os valores `1.2246468e-16` e `-2.4492936e-16` representam o número zero. O motivo de não estar zerado é que nem todas as operações com números de p precisão do nosso cálculo, esses valores são basicamente o mesmo que zero.

Depois das funções trigonométricas, vamos ver a função exponencial.

```
>>> x = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> np.exp(x)
array([ 2.71828183,  7.3890561 , 20.08553692, 54.59815003])
```

Também existe a constante "e" (número euleriano) no NumPy. De fato, a função exponencial `np.exp(x)` nada mais é do que o número euleriano elevado a

ex

Assim, também podemos fazer a mesma conta abaixo.

```
>>> x = np.array([1, 2, 3, 4])
>>> np.e ** x
array([ 2.71828183,  7.3890561 , 20.08553692, 54.59815003])
```

Como falamos, existem milhares de funções matemáticas nativamente no NumPy, e todas são muito úteis para fazermos cálculos matemáticos computa

Temos falado, ao longo do texto, sobre o poder e eficiência do NumPy. Do ponto de vista de escrever código, uma enorme vantagem do NumPy é que poc

Aqui entra em foco a ideia de "operações vetorizadas", que encontramos antes. No fim das contas, conseguimos escrever tudo de forma vetorizada no Nu

Imagine a equação abaixo:

ex + sin(x)

Se quisermos achar o valor dela para diversos valores de "x" entre -1 e 2 no Python, teríamos que fazer um loop iterativo. No NumPy, a operação é mais

```
>>> x = np.linspace(-1, 2, 10)
>>> np.exp(x) + np.sin(x)
array([-0.47359154, -0.10495268,  0.38933661,  1.        ,  1.72280712,
        2.56610384,  3.55975281,  4.7656058 ,  6.28989801,  8.29835353])
```

Por fim, o último conceito essencial de se conhecer quanto a operações matemáticas no NumPy é o de número infinito e de NaN (not a number).

O NumPy possui duas constantes, `np.inf` e `np.NaN` que representam um "número infinito" e um erro, respectivamente.

O "número infinito" é um valor de ponto flutuante que é maior que qualquer outro número. Se colocarmos um sinal negativo, ele vira "menos infinito", e p

```
>>> np.inf > 3823748932489
True
```

```
>>> -np.inf < -9832743293278423
True
```

Já o NaN é um valor indefinido. Sempre que nossa operação não fizer sentido, o numpy retorna um NaN.

```
>>> np.float64(0) / np.float64(0)
nan
```

O cuidado que devemos tomar com o NaN é que todas as operações entre um número e um NaN passam a ser NaN.

```
>>> np.NaN + 44
nan
```

4. Álgebra Linear e Estatística básica

4.1. Álgebra Linear

Da definição do Wikipédia:

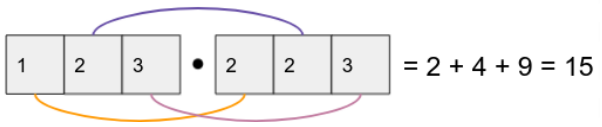
Álgebra linear é um ramo da matemática que surgiu do estudo detalhado de sistemas de equações lineares [...]. A álgebra linear utiliza alguns conceitos e

Independente da definição exata, a questão é que a álgebra linear estuda vetores e matrizes. Como vimos até aqui, o NumPy opera de forma bastante an

O que não vimos ainda é como o NumPy nos permite também executar operações típicas da álgebra linear, como "produto entre matrizes".

De fato, o NumPy tem a capacidade de realizar um "produto escalar" entre vetores, de fazer o produto de uma matriz por um vetor, e de fazer o produto

Vamos relembrar o que são essas operações. O produto escalar de dois vetores consiste em multiplicar os dois, elemento a elemento, e depois somar os



(Exemplo de produto escalar, ou "produto interno")
(**Fonte:** Imagem original Ada)

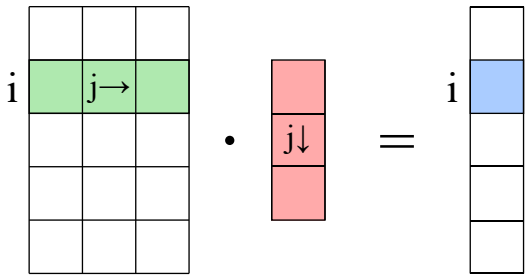
A sintaxe do NumPy é dada abaixo.

```
>>> vec1 = np.array([1, 2, 3])
>>> vec2 = np.array([2, 2, 3])
>>> vec1.dot(vec2)
15
```

Também podemos usar o operador `@`.

```
>>> vec1 = np.array([1, 2, 3])
>>> vec2 = np.array([2, 2, 3])
>>> vec1 @ vec2
15
```

O produto de matriz e vetor é dado fazendo algo semelhante ao produto escalar. Para cada linha da matriz, a gente faz o produto escalar entre aquela lin



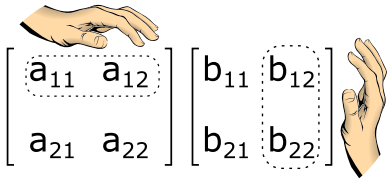
(**Fonte:** Usuária Claudia4 do site Wikimedia Commons, disponível em https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/22/Matrix_vector_multiplica

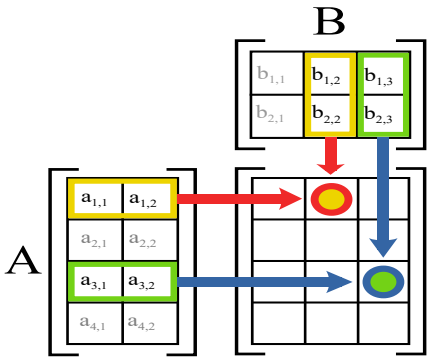
As possibilidades de sintaxe do NumPy seguem abaixo.

```
>>> matrix = np.array([[1, 1, 1],
                       [1, 2, 3],
                       [1, 1, 1]])
>>> vec2 = np.array([2, 2, 3])
>>> matrix.dot(vec2)
array([ 7, 15,  7])
>>> matrix @ vec2
array([ 7, 15,  7])
```

Na multiplicação entre matrizes, nós multiplicamos a linha da matriz da esquerda pela coluna da matriz da direita, elemento a elemento, e somamos o re

Neste caso, quando fazemos o produto interno da linha N com a coluna M, nós obtemos o elemento que ficará na posição (N,M) na nova matriz.





(**Fonte:** Usuários Guy vandegrift e Bilou do site Wikimedia Commons, disponíveis em https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/Hands_ma

Como nos casos anteriores, abaixo temos a sintaxe do NumPy.

```
>>> matrix1 = np.array([[1, 1, 1],
                        [1, 2, 3],
                        [1, 1, 1]])
>>> matrix2 = np.array([[1, 1, 1],
                        [1, 1, 1],
                        [1, 1, 1]])
>>> matrix1.dot(matrix2)
array([[3., 3., 3.],
       [6., 6., 6.],
       [3., 3., 3.]])
>>> matrix1 @ matrix2
array([[3., 3., 3.],
       [6., 6., 6.],
       [3., 3., 3.]])
```

No campo da álgebra linear, existem algumas matrizes especiais muito úteis. O NumPy possui métodos de criação para a maioria delas.

A mais importante é a chamada matriz identidade. Ela é uma matriz quadrada (mesmo número de linhas e colunas) com diagonal 1, e os outros valores 0.

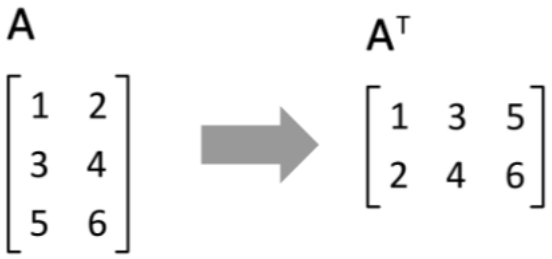
```
>>> np.identity(3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

Ela se chama identidade pois qualquer matriz multiplicada pela identidade (por produto de matrizes) dá a própria matriz.

```
>>> matrix1 @ np.identity(3)
array([[1., 1., 1.],
```

```
       [1., 2., 3.],
       [1., 1., 1.]])
```

Outra operação comum com matrizes é a transposição.



(**Fonte:** Imagem original Ada)

A transposição pode ser feita com a função `np.transpose`.

```
>>> np.transpose(a)
array([[1., 1.],
       [1., 1.],
       [1., 1.]])
```

Outra forma é usando o atributo `T`:

```
>>> a.T
array([[1., 1.],
       [1., 1.],
       [1., 1.]])
```

Operações mais específicas se encontram no módulo `linalg` do NumPy.

Um exemplo é encontrar o determinante de uma matriz. O determinante é um número característico de uma dada matriz, e que se relaciona com diversa

```
>>> c = np.identity(3)
>>> print(c)
[[1. 0. 0.]
 [0. 1. 0.]
 [0. 0. 1.]]
>>> np.linalg.det(c)
1.0
```

Para encontrar todas as funções específicas de Álgebra Linear que têm no NumPy, você pode acessar o link https://numpy.org/doc/stable/reference/rout

Algum exemplo de funções já implementadas na biblioteca:

- Traço
- Decomposição de vetores
- Autovalor/autovetor
- Norma de Matriz
- Inversa
- Etc...

4.2. Estatística

Por fim, o NumPy também possui várias funções básicas de estatística, como mínimo, máximo, média, mediana, etc.

```
>>> stats = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]])
>>> stats
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
>>> np.min(stats)
1
>>> np.max(stats)
6
>>> np.min(stats, axis=1) # Pega o menor valor de cada linha
array([1, 4])
```

```
>>> np.max(stats, axis=0) # Pega o maior valor de cada coluna
array([4, 5, 6])
>>> np.sum(stats, axis=0) # Faz a soma dos valores de cada coluna
array([5, 7, 9])
>>> np.mean(stats) # Valor médio de todos os elementos do array
3.5
>>> np.mean(stats, axis=0) # Valor médio de cada coluna do array
array([2.5, 3.5, 4.5])
>>> np.mean(stats, axis=1) # Valor médio de cada linha do array
array([2., 5.])
```

Referências:

1. Documentação NumPy, disponível em https://NumPy.org/doc/stable/index.html ;
2. Tutorial NumPy, disponível em https://NumPy.org/doc/stable/user/absolute_beginners.html ;
3. Funções matemáticas do NumPy, disponível em https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.math.html
4. Álgebra linear com NumPy, disponível em https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.linalg.html
5. Tutorial NumPy da ABRACD, disponível em https://abracd.org/tutorial-numpy-os-primeiros-passos-em-computacao-numerica-e-tratamento-de-d