0.2 aplicando el método de dif. finitas muestre que las ecs. están discretizadas

inicialmente voy a considerar las discre. de la derivada de u.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x}$$

y análogamente para la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}$$

luego, si considero la eq. (6) de las instrucciones

$$W = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y}$$

$$= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$$

que bajo $h_x = h_y$ que denoto como h.

$$Wh^2 = u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}$$

que despejando para $u_{i,j}$

$$u_{i,j} = (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - Wh^2)$$

Ahora bien, tenemos que escribir para $w_{i,j}$
no es extraño considerar sus sub.
yo sé por (10) que:

$$V\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

que puede reescribirse como:

$$V\left(\frac{w_{i+1,j} - 4w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}}{h^2}\right) = \frac{(u_{i,j+1} + u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j})}{4h^2} - \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j})}{4h^2}$$

$$4V(w_{i+1,j} - \boxed{4w_{i,j}} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j} - w_{i-i,j})}{16}$$

Despejo para w_{ij}

$$w_{i,j} = \frac{1}{16V}\Big[(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})(w_{i+1,j} - w_{i-1,j}) - (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) - 4V(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j+1})\Big]$$

donde puedo tomar $1/V = R$. para llegar a lo que quería

Q.3. Muestre que la vorticidad en las fronteras

Sabemos que W puede escribirse como

$$W = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

Por las condiciones de nuestro problema podemos asumir $V_y = 0$

$$\Rightarrow W = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

Ahora bien, si considero mi fun V como $V(x, y+h)$
⇒ puedo considerar su expr. en serie de Taylor como:

$$V(x,y+h) = V(x,y) + \partial V/\partial y + h^2/2 \, \partial V/\partial y^2$$
$$= V(x,y) - h^2/2 \, W$$
$$= V(x,y) + h^2 \frac{V(x,y+h) - V(x,y)}{h^2} \Rightarrow W_{ij} = -2\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{h^2}$$

Si considero un obstáculo a la izquierda $\dot{x} = 0$

⇒

$$W = -\frac{\partial V_y}{\partial x} = -\frac{\partial V^2}{\partial x^2}$$

$$V(x,y-h) = V(x,y) - h^2/2 \, W$$
$$= V(x,y) + h^2 \frac{V(x,y-h) - V(x,y)}{h^2} \Rightarrow W_{ij} = -2\frac{V_{i,j-1} - V_{i,j}}{h^2}$$