

Metody Numeryczne – Projekt 2

Układy równań liniowych – eliminacja Gaussa

Problem:

Rozwiązanie układu równań liniowych podanego w postaci macierzowej wykorzystując metodę eliminacji Gaussa z wyborem elementu podstawowego dla liczb z przedziału $[-1000, 1000]$ i precyzji do 20stego miejsca po przecinku oraz porównanie wyników dla eliminacji z różnymi wariantami wyboru elementu podstawowego.

Przykładowa macierz nr 1 o rozmiarze $N=3$ i dokładności 1.0:

{	-646.000000,	970.000000,	616.000000,	358892.000000	}
{	740.000000,	-745.000000,	-805.000000,	-157925.000000	}
{	-305.000000,	810.000000,	-807.000000,	717573.000000	}

Rozwiązanie wyznaczone z eliminacji Gaussa:

X[1]: 69.000000
X[2]: 609.000000
X[3]: -304.000000

Różnica obliczonego rozwiązania ze wzorowym rozwiązaniem:

[0]: 0.0000000000000000171
[1]: 0.0000000000000000000
[2]: 0.0000000000000000114

Przykładowa macierz nr 2 o rozmiarze 3×3 i dokładności 0.001:

{	553.786000,	-593.541000,	228.801000,	144151.528224	}
{	-716.124000,	787.283000,	-294.311000,	-197852.826660	}
{	478.498000,	-87.299000,	-844.513000,	-414799.737312	}

Rozwiązanie wyznaczone z eliminacji Gaussa:

X[1]: -496.242000
X[2]: -600.971000
X[3]: 272.125000

Różnica obliczonego rozwiązania ze wzorowym rozwiązaniem:

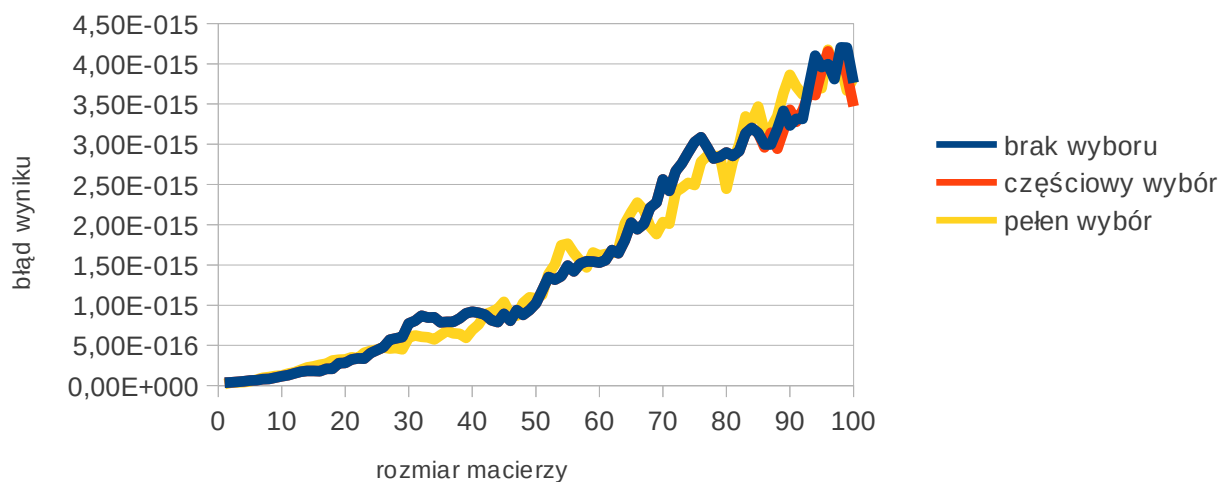
[0]: 0.00000000000000001933
[1]: 0.00000000000000002160
[2]: 0.0000000000000000966

Obserwacja:

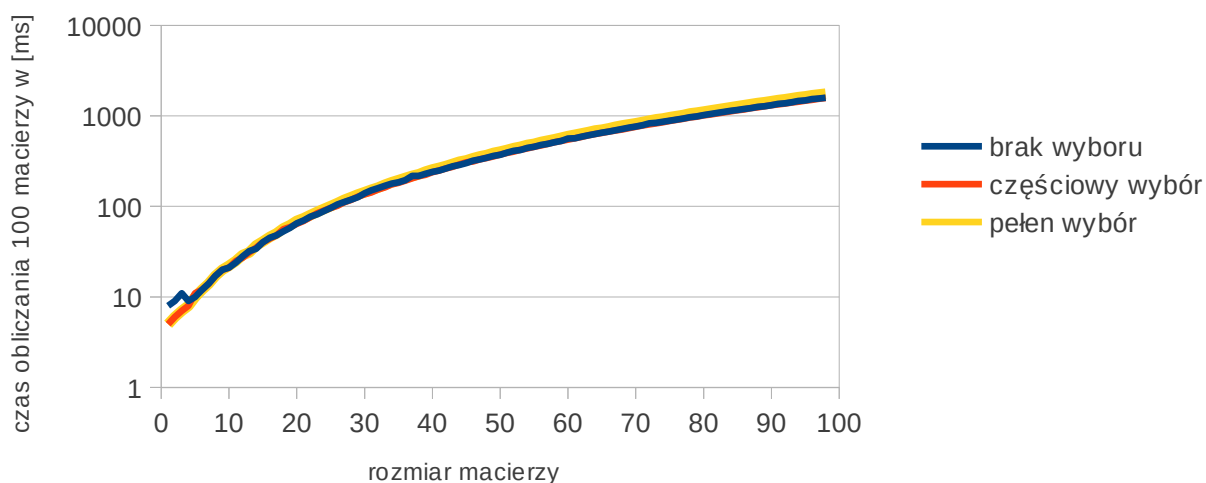
Oba poniższe testy zostały wykonane na 10 000 losowo wygenerowanych macierzach o rozmiarach od $[1][1]$ do $[100][100]$. Pomimo, że wzrost błędu w obliczonych wynikach wyraźnie wzrasta dla coraz to większych macierzy, na wykresie są miejsca, gdzie chwilami precyzja wyniku jest większa dla większej macierzy. Dla różnych zestawów testowych macierzy ten błąd pojawiał się w różnych miejscach i nigdy nie był na tyle duży, żeby zmienić ogólny trend błędu, dlatego uważam go za niedoskonałość danych testowych, którymi sprawdzałem mój algorytm.

metoda	średni błąd	% różnicy
brak wyboru	1,50E-015	26,44%
wybór częściowy	1,25E-015	5,02%
pełen wybór	1,19E-015	-

Rozmiar błędu dla różnych metod wyboru elementu podstawowego



Czas obliczania macierzy dla różnych metod wyboru elementu podstawowego



Wnioski:

Wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy wyraźnie wzrasta czas rozwiązywania układu przy jednoczesnym spadku precyzji, pomimo zastosowania zmiennej „long double”. Eliminacja Gaussa dla dużych macierzy może być bardzo czasochłonna, a do tego jest obciążona narastającym błędem. Jakikolwiek wybór elementu podstawowego daje nam mniejszy błąd w porównaniu do „czystej” metody przy zachowaniu podobnego czasu obliczeń. Średnio błąd obliczeń bez wyboru elementu podstawowego jest o 26,44% większy niż błąd dla pełnego wyboru, a wybór częściowy już tylko o 5%. Jeśli obliczenia wymagają precyzji na ponad piętnastym miejscu po przecinku lub chcemy liczyć duże macierze rzędu tysięcy niewiadomych, powinniśmy wybrać inną metodę. Jednak gdy potrzebujemy szybkiej i nieskomplikowanej metody dla mniejszych macierzy i precyzja nie jest dla nas priorytetem, możemy skorzystać z eliminacji Gaussa.