Planification de production

Une entreprise cherche à établir un plan de production pour ses I usines, qui fabriquent chacune un produit unique. Nous désignerons ainsi par l'indice $i \in I$ à la fois un produit et l'usine dont il est issu. Chaque jour, l'usine $i \in I$ est capable de fabriquer au maximum $F_i \in \mathbb{N}$ unités du produit i.

Pour chaque produit i, chaque client $j \in J$ requiert d_{ij} unités, qu'il souhaite recevoir dans un intervalle de dates $[a_j; b_j]$. Toute unité requise doit être livrée. En cas de livraison en dehors de l'intervalle spécifié par le client, une pénalité $p_j > 0$ est appliquée par nombre d'unités livrées et par nombre de jours d'avance ou de retard.

Les produits sont fabriqués dans les usines, et ils peuvent éventuellement y être stockés. Le coût de stockage est de $h_i > 0$ par unité et par jour.
Puis, ils sont expédiés vers un entrepôt central, où ils sont potentiellement regroupés avec d'autres produits, avant d'être expédiés chez les clients. Il n'est pas possible de stocker de produits à l'entrepôt central. Si un produit est expédié depuis l'usine le jour t, il arrive à l'entrepôt le jour t, et est livré au client le jour t.
Le nombre total de produits (de toute catégorie) pouvant transiter quotidiennement dans l'entrepôt central est limité à $M \in \mathbb{N}$.

Il s'agit donc d'élaborer une planification des productions, des stockages et des livraisons afin de satisfaire les demandes des clients à moindre coût. Nous supposons qu'à la date $t = 0$, tous les stocks sont nuls. Dans un premier temps, nous étudions le problème sur un horizon de $T = 30$ jours.

Consignes - Vous devez déposer sur Campus deux documents avant le 20/12/24, 8h00:

- **le code matlab dans le fichier .m qui vous est fourni (pas de mlx) ; et qui répond aux spécifications du sujet. Vous devez compléter le squelette qui vous est donné. Vous ne devez pas modifier les signatures des fonctions qui vous sont données (nom de la fonction, nombre de paramètres d'entrée, type de paramètres d'entrée, retours de fonction). Vous pouvez ajouter des fonctions si besoin.**
- **un pdf qui contient les modèles mathématiques ainsi que les réponses aux questions théoriques. Vous indiquerez les noms de chacun des membres du groupe de projet, ainsi que votre groupe de TD.**

Question 1 Modélisez le problème sous forme d'un programme linéaire P (on accepte donc de traiter les cas non entiers). Vous écrirez la formulation mathématique dans le rapport.
Vous compléterez la fonction `optimProd` dans le squelette de code fourni, afin que si le paramètre `modele` de cette fonction vaut 1, elle retourne la solution et la valeur objectif du problème P.

Question 2 Proposez un horizon de temps T calculé en fonction des données, qui permette d'obtenir une solution optimale quel que soit le cas étudié.
Remarque 1: avec un horizon de temps trop petit, vous prenez le risque de ne pas pouvoir honorer toutes vos commandes ; ou de trouver une solution sous-optimale. Avec un horizon trop long, vous augmentez inutilement le nombre de variables, de contraintes, et donc le temps de calcul.
Remarque 2 : pour les tests numériques, si vous ne savez pas comment traiter cette question, vous pouvez garder la valeur $T = 30$ *sur toutes les instances fournies.*

Question 3 On aimerait visualiser l'impact de la capacité de l'entrepôt central sur la valeur de la fonction objectif. Complétez la fonction `plotOptim` qui fait appel à `optimProd` dans laquelle vous ferez varier la valeur de M autour de 200 sur l'instance exemple. Tracez la courbe de valeur de la fonction objectif. Commentez la courbe obtenue.

Question 4 Montrez que, dans le cas d'une capacité infinie à l'entrepôt central, résoudre P peut se ramener à la résolution de I problèmes indépendants.

On va maintenant prendre en compte les coûts de livraison avec deux modélisations différentes, dans les deux questions suivantes. Le coût de transport depuis l'usine jusqu'à l'entrepôt central vaut c_i^1. Le coût de transport de l'entrepôt central jusqu'au client j vaut c_j^2. On suppose que la capacité des camions est infinie.

Question 5 En repartant de P, ajoutez le fait qu'à chaque jour t,

- on envoie un camion de l'usine i jusqu'à l'entrepôt dès que le nombre d'unités qu'on souhaite envoyer de l'usine i à l'entrepôt est non-nul (tous clients confondus).
- on envoie un camion de l'entrepôt jusqu'au client j dès que le nombre d'unités qu'on souhaite envoyer de l'entrepôt au client j est non nul (tous produits confondus).

Ce modèle est le modèle IP_1. Vous compléterez la fonction `optimProd` dans le squelette de code fourni, afin que si le paramètre `modele` de cette fonction vaut 2, elle retourne la solution et la valeur objectif du problème IP_1

Question 6 En repartant de P, ajoutez le fait qu'à chaque jour t,

- on envoie un camion de l'usine i jusqu'à l'entrepôt dès qu'une unité destinée à un client j doit être envoyée à l'entrepôt.
- un camion est envoyé au client j dès qu'au moins une unité du produit i qu'on souhaite lui envoyer est non nul.

Ce modèle est le modèle IP_2. Vous compléterez la fonction `optimProd` dans le squelette de code fourni, afin que si le paramètre `modele` de cette fonction vaut 3, elle retourne la solution et la valeur objectif du problème IP_2

Question 7 Comparez théoriquement la qualité des modèles IP_1 et IP_2.
Remarque : regardez la capsule vidéo ajoutée sur la page du cours dans la section du projet

Question 8 Pour chacune des deux formulations IP_1 et IP_2, testez les modèles sur toutes les instances fournies. Pour chacune d'entre elles et pour chacun des deux modèles, indiquez le nombre de variables et le nombre de contraintes, la valeur de la fonction objectif de la solution optimale, et le temps de calcul. Les résultats numériques confirment-ils la théorie ?