



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERÍA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 1

Pregunta 1

Para un conjunto A , sea R_1 y R_2 dos relaciones de equivalencia.

1. Demuestre que $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia.

Para demostrar esto basta con probar que la intersección de:

- Dos relaciones reflejas es refleja.

Esto será verdad si

$$\forall a \in A. (a, a) \in R_1 \cap R_2$$

como R_1 es refleja y R_2 es refleja se cumple

$$\forall a \in A. [(a, a) \in R_1]$$

$$\forall a \in A. [(a, a) \in R_2]$$

entonces como $\forall a \in A$, (a, a) pertenece R_1 y a R_2 simultáneamente, entonces (a, a) está en la intersección de ambas relaciones.

En otras palabras

$$\forall a \in A. [(a, a) \in R_1 \wedge (a, a) \in R_2] \equiv \forall a \in A. [(a, a) \in R_1 \cap R_2]$$

- Dos relaciones simétricas es simétrica.

Esto es cierto si se cumple

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2]$$

Tenemos que se cumple

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1]$$

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_2]$$

Entonces como todo elemento de R_1 cumple con lo anterior y al mismo tiempo todo elemento de R_2 también, los elementos en común cumplirán con ser simétricos.

En otras palabras

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1] \wedge [(a, b) \in R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_2]$$

$$\equiv$$

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2]$$

- Dos relaciones transitivas es transitiva.

Esto es equivalente a probar

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \cap R_2] \rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$$

Como R_1 y R_2 son transitivas, entonces:

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1] \rightarrow (a, c) \in R_1$$

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2] \rightarrow (a, c) \in R_2$$

Como todos los pares que pertenecen a R_1 y a R_2 cumplen con lo anterior, en particular los que están en ambos también lo cumplirán.

En otras palabras:

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2] \rightarrow [(a, c) \in R_1 \wedge (a, c) \in R_2]$$

\equiv

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \cap R_2] \rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$$

Como R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia cumplen con los tres puntos anteriores, lo que implica que su intersección también lo cumple, lo que hace que $R_1 \cap R_2$ sea una relación de equivalencia.

2. Demuestre que si $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, entonces $R_1 \circ R_2$ es una relación de equivalencia.

Por definición de composición, tenemos que para todo $a, b \in A$

$$((a, b) \in R_1 \circ R_2) \Leftrightarrow (\exists c \in A. [(a, c) \in R_1 \wedge (c, b) \in R_2])$$

Por lo que si tomamos el caso $a = b$, quedará:

$$((a, a) \in R_1 \circ R_2) \Leftrightarrow (\exists c \in A. [(a, c) \in R_1 \wedge (c, a) \in R_2])$$

y como R_1 y R_2 son reflejas sabemos que $c = a$ cumple con lo anterior
 $\therefore R_1 \circ R_2$ es refleja.

Por otro lado notamos que $R_1 = R_1^{-1}$ y $R_2 = R_2^{-1}$, ya que son simétricas, y en ambos casos ($\forall i \in \{1, 2\}$) se cumple que

$$R_i = R_i^{-1} \Leftrightarrow R_i \circ R_i = I_A$$

Ahora notamos que $R_1 \circ R_2$ es transitiva si, y solo si:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2$$

Por enunciado $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, entonces

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq R_1 \circ R_2$$

por asociatividad de la composición

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_2) \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$$

Por lo probado hace dos pasos

$$R_1 \circ (I_A) \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$$

Al componer con la identidad se obtiene la relación misma

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$$

Por lo demostrado anteriormente

$$I_A \subseteq R_1 \circ R_2$$

Esto último es cierto ya que $R_1 \circ R_2$ es refleja.

Por lo tanto $R_1 \circ R_2$ es transitiva, pero además es simétrica ya que

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_2 \circ R_1) = I_A$$

Lo que implica que

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1}$$

Por lo tanto es simétrica.

Finalmente como $R_1 \circ R_2$ es refleja, simétrica y transitiva, entonces es una relación de equivalencia.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERÍA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 2

Pregunta 2

Para un conjunto A , sea $R \subseteq A \times A$ una relación (no necesariamente de equivalencia). Para todo $a \in A$, se define el conjunto:

$$[a]_R = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}.$$

Considere el conjunto $\mathcal{S}_R = \{[a]_R \mid a \in A\}$ y responda las siguientes preguntas.

1. Si R es una relación refleja y \mathcal{S}_R es una partición de A , ¿és R una relación de equivalencia? Demuestre o de un contra-ejemplo.

La respuesta es que si, ya que si es refleja solo basta probar que R es simétrica y transitiva.

Para eso notamos que si \mathcal{S}_R es partición entonces si $b \in [a]_R$ entonces $a \in [b]_R$ que es lo mismo que la relación es simétrica.

Mientras que si $c \in [b]_R$ y $b \in [a]_R$ entonces $c \in [a]_R$ ya que \mathcal{S}_R es partición, lo que significa que si un par de elementos están relacionados entre si entonces todos los que estén relacionados con el segundo estarán con el primero, ya que no pueden pertenecer a dos clases distintas.

Por lo tanto tiene que ser transitiva y por tanto R es una relación de equivalencia.

2. Si R es una relación simétrica y \mathcal{S}_R es una partición de A , ¿és R una relación de equivalencia? Demuestre o de un contra-ejemplo.

Un contra-ejemplo a esto es tomar el conjunto $A = \{1, 2\}$ y la relación $R = \{(a, b) \mid a \neq b\}$ donde \neq es el distinto a de los números naturales, esta relación es simétrica ya que $\forall (a, b) \in N. (a, b) \in R \leftrightarrow (b, a) \in R$ para este caso particular también se cumple ya que $1 \neq 2$ si, y solo si $2 \neq 1$.

Por otro lado el conjunto \mathcal{S}_R es una partición ya que $[1]_R = \{2\}$ y $[2]_R = \{1\}$ la unión forma el conjunto A y son claramente disjuntos. Pero esta relación no es refleja, ya que $(1, 1) \notin R$.

Por lo tanto R no es una relación de equivalencia.