Funciones y principio del palomar

Clase 13

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

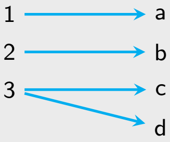
Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función** si para cualquier elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

1. $\forall a \in A.\ \exists b \in B.\ \ (a, b) \in f.$
2. $\forall a \in A.\ \forall b_1, b_2 \in B.\ \ (\,(a, b_1) \in f\ \wedge\ (a, b_2) \in f\,)\ \rightarrow\ b_1 = b_2.$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿cuáles son funciones?

$$f_1 = \{\ (3, c),\ (1, a),\ (2, b),\ (3, d)\ \}$$ ✗



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

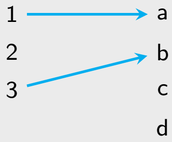
Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función** si para cualquier elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

1. $\forall a \in A.\ \exists b \in B.\ \ (a, b) \in f.$
2. $\forall a \in A.\ \forall b_1, b_2 \in B.\ \ (\,(a, b_1) \in f \ \wedge\ (a, b_2) \in f\,) \ \rightarrow\ b_1 = b_2.$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿cuáles son funciones?

$$f_2 = \{\ (1, a),\ (3, b)\ \}$$ ✗



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

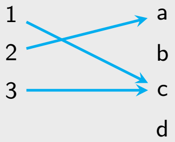
Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función** si para cualquier elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

1. $\forall a \in A.\ \exists b \in B.\ \ (a, b) \in f.$
2. $\forall a \in A.\ \forall b_1, b_2 \in B.\ \ (\,(a, b_1) \in f \ \wedge\ (a, b_2) \in f\,) \ \rightarrow\ b_1 = b_2.$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿cuáles son funciones?

$$f_3 \ = \ \{\ (1, c),\ (3, c),\ (2, a)\} \quad ✓$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función** si para cualquier elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

1. $\forall a \in A.\ \exists b \in B.\ \ (a, b) \in f$.
2. $\forall a \in A.\ \forall b_1, b_2 \in B.\ \ (\,(a, b_1) \in f \ \wedge \ (a, b_2) \in f\,) \ \rightarrow \ b_1 = b_2$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una **función**, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.
  - *"b es* **la imagen** *de a en f"*
  - *"a es* **una preimagen** *de b en f"*

Funciones

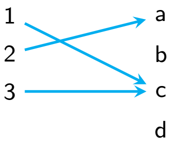
Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función** si para cualquier elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

1. $\forall a \in A.\ \exists b \in B.\ \ (a, b) \in f.$
2. $\forall a \in A.\ \forall b_1, b_2 \in B.\ \ (\,(a, b_1) \in f\ \wedge\ (a, b_2) \in f\,)\ \rightarrow\ b_1 = b_2.$

Una función **siempre** puede ser visto como una "**tabla**":



A	B
1	c
2	a
3	c

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos.

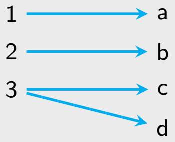
Definición

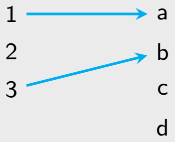
Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función parcial** si para cualquier elemento $a \in A$ si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

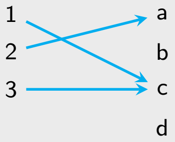
$$\forall a \in A.\ \forall b_1, b_2 \in B.\ \ \big((a, b_1) \in f \ \wedge \ (a, b_2) \in f \ \big) \ \rightarrow \ b_1 = b_2$$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿cuáles son funciones parciales?







Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una **función parcial** si para cualquier elemento $a \in A$ si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

$$\forall a \in A.\ \forall b_1, b_2 \in B.\ \left((a, b_1) \in f \ \wedge\ (a, b_2) \in f \right) \ \rightarrow\ b_1 = b_2$$

Si $f \subseteq A \times B$ es una **función parcial**, entonces escribiremos:

- $f : A \rightharpoonup B$ para decir que f es una función parcial de A a B. (notar la diferencia en la flecha)
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.

Funciones parciales (mas definiciones)

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

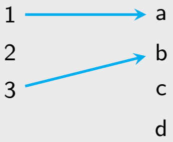
Definición

Se define el **dominio** e **imagen** de f como:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f) &= \pi_1(f) = \{\ a \in A \mid \exists b \in B.\ (a,b) \in f\ \}.\\
\mathrm{img}(f) &= \pi_2(f) = \{\ b \in B \mid \exists a \in A.\ (a,b) \in f\ \}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Sea $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$.



$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f) &= \{1,3\}\\
\mathrm{img}(f) &= \{a,b\}
\end{aligned}
$$

Funciones parciales (mas definiciones)

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Definición

Se define el **dominio** e **imagen** de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \pi_1(f) &= \{\, a \in A \mid \exists b \in B.\ (a,b) \in f \,\}. \\ \mathrm{img}(f) &= \pi_2(f) &= \{\, b \in B \mid \exists a \in A.\ (a,b) \in f \,\}. \end{aligned}$$

Proposición

Sea $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial. Entonces:

$$f \text{ es una función} \quad \text{ssi} \quad \mathrm{dom}(f) = A$$

Ejemplos de funciones

Ejemplos

Sea $A = B = \mathbb{R}$.

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \lfloor\ x + \sqrt{x}\ \rfloor$$

$$f_3(x) = 0$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos de funciones

Algunas preguntas

- ¿es necesario definir funciones de mayor dimensiones?
  - Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$, ¿qué es $\mathrm{dom}(f)$?

Tanto el **dominio** como la **imagen** de una función
pueden ser números, conjuntos, relaciones, grafos, palabras, ...

Mas ejemplos de funciones

Ejemplos

Las siguientes son funciones de A en 2^A:

$$
\begin{array}{lrcl}
g_1 : A \to 2^A & g_1(a) & = & \{a\} \\
g_2 : A \to 2^A & g_2(a) & = & A - \{a\} \\
g_3 : A \to 2^A & g_3(a) & = & \varnothing
\end{array}
$$

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto cualquiera.

Definición

Una **secuencia** S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.

Ejemplo

- $S_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{(-1)^n}{n+1}\ ,\ \ldots$$

- $S_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$

- $S_3 : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2 \ldots, 9\}$

$$3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ 6,\ 5,\ 3,\ 5,\ 9, \ldots$$

Outline

Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

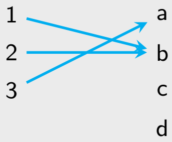
Definiciones

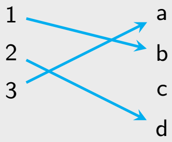
Una función $f : A \to B$ se dice:

1. **inyectiva** si no existen dos elementos en A con la misma imagen.

$$\forall a_1, a_2 \in A.\ f(a_1) = f(a_2) \ \rightarrow\ a_1 = a_2$$

¿cuál de las siguientes funciones son inyectivas?





Alternativamente, $\forall a_1, a_2 \in A.\ a_1 \neq a_2 \ \rightarrow\ f(a_1) \neq f(a_2)$

Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definiciones

Una función $f : A \to B$ se dice:

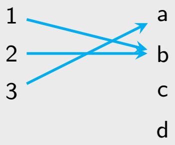
1. **inyectiva** si no existen dos elementos en A con la misma imagen.

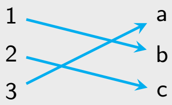
$$\forall a_1, a_2 \in A.\ f(a_1) = f(a_2) \ \to\ a_1 = a_2$$

2. **sobreyectiva** si todo elemento en B tienen una preimagen.

$$\forall b \in B.\ \exists a \in A.\ \ f(a) = b$$

¿cuál de las siguientes funciones son sobreyectivas?





Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definiciones

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. **inyectiva** si no existen dos elementos en A con la misma imagen.

$$\forall a_1, a_2 \in A.\ f(a_1) = f(a_2) \ \to \ a_1 = a_2$$

2. **sobreyectiva** si todo elemento en B tienen una preimagen.

$$\forall b \in B.\ \exists a \in A.\ \ f(a) = b$$

3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva **a la vez**.

Notación

- inyectica $\equiv$ **1-a-1**.
- sobreyectica $\equiv$ función **sobre** o **onto**.
- biyectica $\equiv$ **epiyectiva**.

Tipos de funciones

Definiciones

1. **inyectiva**: $\forall a_1, a_2 \in A.\ f(a_1) = f(a_2) \ \rightarrow \ a_1 = a_2.$
2. **sobreyectiva**: $\forall b \in B.\ \exists a \in A.\ \ f(a) = b.$
3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva **a la vez**.

¿cuál es el tipo de cada función?

- $f_1 : A \rightarrow 2^A$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

- $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$f_2(r) = |\lfloor r \rfloor|$$

Tipos de funciones

Definiciones

1. **inyectiva**: $\forall a_1, a_2 \in A.\ f(a_1) = f(a_2) \ \rightarrow \ a_1 = a_2$.
2. **sobreyectiva**: $\forall b \in B.\ \exists a \in A.\ \ f(a) = b$.
3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva **a la vez**.

¿cuál es el tipo de cada función?

- $f_3 : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ tal que para todo $w = a_0 \dots a_n \in \{0,1\}^*$:

$$f_3(w) \ = \ a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$

- $f_4 : \{0,1\}^* \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $w = a_0 \dots a_n \in \{0,1\}^*$:

$$f_4(w) \ = \ \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 2^i$$

Tipos de funciones

Definiciones

1. **inyectiva**: $\forall a_1, a_2 \in A.\ f(a_1) = f(a_2) \ \rightarrow\ a_1 = a_2$.
2. **sobreyectiva**: $\forall b \in B.\ \exists a \in A.\ \ f(a) = b$.
3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva **a la vez**.

¿cuál es el tipo de cada función?

- $f_5 : A \rightarrow A/\!\sim$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_5(a) \ = \ [a]_\sim$$

Recordatorio: operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso**: R^{-1} son todos los pares (x, y) tal que $(y, x) \in R$.

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: $R_1 \circ R_2$ son todos los elementos (x, y) tal que existe un z que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$.

$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \exists z \in A.\ (x, z) \in R_1 \ \wedge \ (z, y) \in R_2\}$$

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

  ... la relación inversa, no necesariamente una función.

- Dado que $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ son relaciones,

  ¿qué significa $f_1 \circ f_2$?

  ... la composición de dos funciones.

Proposición (ejercicio)

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$, entonces para todo $a \in A$ y $c \in C$:

$$(a, c) \in f_1 \circ f_2 \quad \text{si, y solo si,} \quad f_2(f_1(a)) = c$$

En este curso, anotaremos la composición de dos funciones como $f_1 \circ f_2$.

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. f es **inyectiva** si, y solo si, f^{-1} es una función parcial.
2. f es **sobreyectiva** si, y solo si, $\mathrm{img}(f) = B$.

Demostración (1. $\Rightarrow$)

Sea f inyectiva.

Para todo $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$.

PD: $\forall b \in B.\ \forall a_1, a_2 \in A.\ \Big((b, a_1) \in f^{-1} \ \wedge\ (b, a_2) \in f^{-1} \Big) \to\ a_1 = a_2$

Suponga $(b, a_1) \in f^{-1}$ y $(b, a_2) \in f^{-1}$.

$$\Rightarrow\ f(a_1) = b \ \text{ y } \ f(a_2) = b \ \Rightarrow\ f(a_1) = f(a_2) \ \Rightarrow\ a_1 = a_2.$$

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. f es **inyectiva** si, y solo si, f^{-1} es una función parcial.
2. f es **sobreyectiva** si, y solo si, $\mathrm{img}(f) = B$.

Demostración (1. $\Leftarrow$)

Sea f^{-1} una función parcial.

$\forall b \in B.\ \forall a_1, a_2 \in A.\ \big((b, a_1) \in f^{-1} \ \wedge \ (b, a_2) \in f^{-1} \big) \to \ a_1 = a_2$

PD: Para todo $a_1, a_2 \in A$, si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$.

Supongamos $f(a_1) = f(a_2) = b$ para algún $b \in B$.

$$\Rightarrow \ (b, a_1) \in f^{-1} \text{ y } (b, a_2) \in f^{-1} \ \Rightarrow \ a_1 = a_2. \qquad \square$$

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. f es **inyectiva** si, y solo si, f^{-1} es una función parcial.
2. f es **sobreyectiva** si, y solo si, $\operatorname{img}(f) = B$.

Corolario

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

f es **biyectiva** si, y solo si, f^{-1} es una función.

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$. Entonces:

- Si f_1 y f_2 son **inyectivas**, entonces $f_1 \circ f_2$ es **inyectiva**.
- Si f_1 y f_2 son **sobreyectivas**, entonces $f_1 \circ f_2$ es **sobreyectiva**.

Demostración

(ejercicio)

¿es verdadero el inverso de cada implicación?

Outline

¿cómo demostrarían estas afirmaciones?

- En esta sala hay dos alumnos
  que nacieron en el mismo año.

- En Santiago, hay dos personas
  que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$,
  tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

- Sea $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$.
  Siempre hay dos números en S tal que uno divide al otro.

Principio del palomar

Principio

"Si N **palomas** *se distribuyen en M* **palomares** *y tengo mas palomas que palomares ($N > M$), entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma"*

Principio del palomar

Principio (en nuestros términos)

Si $f : A \to B$ y $|B| < |A|$, entonces f **NO** puede ser **inyectiva**, esto es:

$$\exists a_1, a_2 \in A. \quad a_1 \neq a_2 \;\wedge\; f(a_1) = f(a_2)$$

Principio muy útil y usado en matemáticas y computación!!

Principio del palomar

Ejemplos

- En esta sala hay dos alumnos
  que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos > 100
  cantidad de años < 70.

- En Santiago, hay dos personas
  que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

  Demostración: cantidad de personas $> 6.300.000$
  cantidad de pelos en un cabeza < 300.000

Principio del palomar

Ejemplos

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

  Demostración:
  Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Palomas:	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
Palomares:	$\{1, 8\},\ \{2, 7\},\ \{3, 6\},\ \{4, 5\}$
Función:	$f(a_i)$ = el conjunto que contiene a a_i.

Principio del palomar

Ejemplos

- Sea $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$.
  Siempre hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

  Palomas: $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$

  Palomares: $\{\ a \in \mathbb{N} \ \mid \ a \leq 2n - 1 \ \text{ y } \ a \text{ es impar } \}$

  Función: $F(a_i) \ = \ m$