



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
 ESCUELA DE INGENIERÍA  
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

## Tarea 4 – Respuesta Pregunta 1

### Pregunta 1

Para un conjunto  $A$ , sea  $R_1$  y  $R_2$  dos relaciones de equivalencia.

1. Demuestre que  $R_1 \cap R_2$  es una relación de equivalencia.

Para demostrar esto basta con probar que la intersección de:

- Dos relaciones reflejas es refleja.

Esto será verdad si

$$\forall a \in A. (a, a) \in R_1 \cap R_2$$

como  $R_1$  es refleja y  $R_2$  es refleja se cumple

$$\forall a \in A. [(a, a) \in R_1]$$

$$\forall a \in A. [(a, a) \in R_2]$$

entonces como  $\forall a \in A$ ,  $(a, a)$  pertenece  $R_1$  y a  $R_2$  simultáneamente, entonces  $(a, a)$  está en la intersección de ambas relaciones.

En otras palabras

$$\forall a \in A. [(a, a) \in R_1 \wedge (a, a) \in R_2] \equiv \forall a \in A. [(a, a) \in R_1 \cap R_2]$$

- Dos relaciones simétricas es simétrica.

Esto es cierto si se cumple

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2]$$

Tenemos que se cumple

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1]$$

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_2]$$

Entonces como todo elemento de  $R_1$  cumple con lo anterior y al mismo tiempo todo elemento de  $R_2$  también, los elementos en común cumplirán con ser simétricos.

En otras palabras

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1] \wedge [(a, b) \in R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_2]$$

$$\equiv$$

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2]$$

- Dos relaciones transitivas es transitiva.

Esto es equivalente a probar

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \cap R_2] \rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$$

Como  $R_1$  y  $R_2$  son transitivas, entonces:

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1] \rightarrow (a, c) \in R_1$$

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2] \rightarrow (a, c) \in R_2$$

Como todos los pares que pertenecen a  $R_1$  y a  $R_2$  cumplen con lo anterior, en particular los que están en ambos también lo cumplirán.

En otras palabras:

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_1 \wedge (a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2] \rightarrow [(a, c) \in R_1 \wedge (a, c) \in R_2]$$

$\equiv$

$$\forall a, b, c \in A. [(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \cap R_2] \rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$$

Como  $R_1$  y  $R_2$  son relaciones de equivalencia cumplen con los tres puntos anteriores, lo que implica que su intersección también lo cumple, lo que hace que  $R_1 \cap R_2$  sea una relación de equivalencia.

2. Demuestre que si  $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ , entonces  $R_1 \circ R_2$  es una relación de equivalencia.

Para esto suponemos que se cumple  $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$  y que  $R_1 \circ R_2$  no es una relación de equivalencia. Pero dado lo primero sabemos que se cumple

$$\forall a, b \in A. [(a, b) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow (a, b) \in R_2 \circ R_1]$$

Y en particular se cumple que para todo  $a \in A$ :

$$(a, a) \in R_1 \circ R_2$$

Pero eso es una contradicción ya que si  $R_1 \circ R_2$  no es una relación de equivalencia, ésta no puede ser refleja.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

## Tarea 4 – Respuesta Pregunta 2

### Pregunta 2

Para un conjunto  $A$ , sea  $R \subseteq A \times A$  una relación (no necesariamente de equivalencia). Para todo  $a \in A$ , se define el conjunto:

$$[a]_R = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}.$$

Considere el conjunto  $\mathcal{S}_R = \{[a]_R \mid a \in A\}$  y responda las siguientes preguntas.

1. Si  $R$  es una relación refleja y  $\mathcal{S}_R$  es una partición de  $A$ , ¿és  $R$  una relación de equivalencia? Demuestre o de un contra-ejemplo.
2. Si  $R$  es una relación simétrica y  $\mathcal{S}_R$  es una partición de  $A$ , ¿és  $R$  una relación de equivalencia? Demuestre o de un contra-ejemplo.