NOMBRE: Luis Felipe Silva De Vidts NOTA:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 1

Pregunta 1

Para un conjunto A, sea R_1 y R_2 dos relaciones de equivalencia.

1. Demuestre que $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia.

   Para demostrar esto basta con probar que la intersección de:

   - Dos relaciones reflejas es refleja.

     Esto será verdad si
     $$\forall a \in A.(a,a) \in R_1 \cap R_2$$
     como R_1 es refleja y R_2 es refleja se cumple
     $$\forall a \in A.[(a,a) \in R_1]$$
     $$\forall a \in A.[(a,a) \in R_2]$$
     entonces como $\forall a \in A$, (a,a) pertenece R_1 y a R_2 simultáneamente, entonces (a,a) está en la intersección de ambas relaciones.
     En otras palabras
     $$\forall a \in A.[(a,a) \in R_1 \wedge (a,a) \in R_2] \equiv \forall a \in A.[(a,a) \in R_1 \cap R_2]$$

   - Dos relaciones simétricas es simétrica.

     Esto es cierto si se cumple
     $$\forall a,b \in A.[(a,b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2]$$
     Tenemos que se cumple
     $$\forall a,b \in A.[(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (b,a) \in R_1]$$
     $$\forall a,b \in A.[(a,b) \in R_2 \Leftrightarrow (b,a) \in R_2]$$
     Entonces como todo elemento de R_1 cumple con lo anterior y al mismo tiempo todo elemento de R_2 también, los elementos en común cumplirán con ser simétricos.
     En otras palabras
     $$\forall a,b \in A.[(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (b,a) \in R_1] \wedge [(a,b) \in R_2 \Leftrightarrow (b,a) \in R_1]$$
     $$\equiv$$
     $$\forall a,b \in A.[(a,b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (b,a) \in R_1 \cap R_2]$$

- Dos relaciones transitivas es transitiva.

  Esto es equivalente a probar

  $$\forall a, b, c \in A.[(a,b) \in R_1 \cap R_2 \land (b,c) \in R_1 \cap R_2] \to (a,c) \in R_1 \cap R_2$$

  Como R_1 y R_2 son transitivas, entonces:

  $$\forall a, b, c \in A.[(a,b) \in R_1 \land (b,c) \in R_1] \to (a,c) \in R_1$$

  $$\forall a, b, c \in A.[(a,b) \in R_2 \land (b,c) \in R_2] \to (a,c) \in R_2$$

  Como todos los pares que pertenecen a R_1 y a R_2 cumplen con lo anterior, en particular los que están en ambos también lo cumplirán.

  En otras palabras:

  $$\forall a, b, c \in A.[(a,b) \in R_1 \land (a,b) \in R_2 \land (b,c) \in R_1 \land (b,c) \in R_2] \to [(a,c) \in R_1 \land (a,c) \in R_2]$$

  $$\equiv$$

  $$\forall a, b, c \in A.[(a,b) \in R_1 \cap R_2 \land (b,c) \in R_1 \cap R_2] \to (a,c) \in R_1 \cap R_2$$

Como R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia cumplen con los tres puntos anteriores, lo que implica que su intersección también lo cumple, lo que hace que $R_1 \cap R_2$ sea una relación de equivalencia.

2. Demuestre que si $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, entonces $R_1 \circ R_2$ es una relación de equivalencia.

Por definición de composición, tenemos que para todo $a, b \in A$

$$((a,b) \in R_1 \circ R_2) \Leftrightarrow (\exists c \in A.[(a,c) \in R_1 \land (c,b) \in R_2])$$

Por lo que si tomamos el caso $a = b$, quedará:

$$((a,a) \in R_1 \circ R_2) \Leftrightarrow (\exists c \in A.[(a,c) \in R_1 \land (c,a) \in R_2])$$

y como R_1 y R_2 son reflejas sabemos que $c = a$ cumple con lo anterior
$\therefore R_1 \circ R_2$ es refleja.

Por otro lado notamos que $R_1 = R_1^{-1}$ y $R_2 = R_2^{-1}$, ya que son simétricas, y en ambos casos $(\forall i \in \{1, 2\})$ se cumple que

$$R_i = R_i^{-1} \Leftrightarrow R_i \circ R_i = I_A$$

Ahora notamos que $R_1 \circ R_2$ es transitiva si, y solo si:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2$$

Por enunciado $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, entonces

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq R_1 \circ R_2$$

por asociatividad de la composición

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_2) \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$$

Por lo probado hace dos pasos

$$R_1 \circ (I_A) \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$$

Al componer con la identidad se obtiene la relación misma

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$$

Por lo demostrado anteriormente

$$I_A \subseteq R_1 \circ R_2$$

Esto último es cierto ya que $R_1 \circ R_2$ es refleja.
Por lo tanto $R_1 \circ R_2$ es transitiva, pero además es simétrica ya que

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_2 \circ R_1) = I_A$$

Lo que implica que

$$R_1 \circ R_2 = (R_1 \circ R_2)^{-1}$$

Por lo tanto es simétrica.

Finalmente como $R_1 \circ R_2$ es refleja, simétrica y transitiva, entonces es una relación de equivalencia.

NOMBRE: Luis Felipe Silva De Vidts NOTA:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 2

Pregunta 2

Para un conjunto A, sea $R \subseteq A \times A$ una relación (no necesariamente de equivalencia). Para todo $a \in A$, se define el conjunto:

$$[a]_R = \{b \in A | (a, b) \in R\}.$$

Considere el conjunto $\mathcal{S}_R = \{[a]_R | a \in A\}$ y responda las siguientes preguntas.

1. Si R es una relación refleja y $\mathcal{S}_R$ es una partición de A, ¿és R una relación de equivalencia? Demuestre o de un contra-ejemplo.

2. Si R es una relación simétrica y $\mathcal{S}_R$ es una partición de A, ¿és R una relación de equivalencia? Demuestre o de un contra-ejemplo.