



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERÍA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 1

Pregunta 1

Sea A un conjunto no vacío. Una relación binaria $R \subseteq A \times A$ se dice Euleriana si cada vez que $(a, b) \in R$ y $(a, c) \in R$, entonces se tiene que $(b, c) \in R$.

1. Sea T una relación refleja y simétrica. Demuestre que T es Euclidea si, y solo si, T es transitiva.

Dado que T es simétrica, entonces para todo $(a, b) \in T$, $(b, a) \in T$, y como es refleja, entonces para todo $a \in A$ se cumple que $(a, a) \in T$.

Se pide demostrar que T es Euclidea si, y solo si, T es transitiva.

(\Rightarrow)

Suponemos T Euclidea, entonces se cumple que $\forall a, b, c \in A$ se tiene

$$[(a, b) \in T \wedge (a, c) \in T] \rightarrow (b, c) \in T$$

como T es simétrica se tiene:

$$[(b, a) \in T \wedge (a, c) \in T] \rightarrow (b, c) \in T$$

Por lo que T es transitiva.

(\Leftarrow)

Ahora suponemos T transitiva, entonces se cumple que $\forall a, b, c \in A$ se tiene

$$[(a, b) \in T \wedge (b, c) \in T] \rightarrow (a, c) \in T$$

como T es simétrica se tiene:

$$[(b, a) \in T \wedge (b, c) \in T] \rightarrow (a, c) \in T$$

Por lo tanto T es Euclidea.

2. Sea T una relación refleja. Demuestre que T es simétrica y transitiva si, y solo si, T es Euclidea.

Dado que en la parte anterior se demostró que si T es simétrica y transitiva, T es Euclidea, solo realizaremos la demostración en el otro sentido.

(\Leftarrow)

Si T es Euclidea se tiene que $\forall a, b, c \in A$:

$$[(a, b) \in T \wedge (a, c) \in T] \rightarrow (b, c) \in T$$

Entonces también tendremos:

$$[(a, c) \in T \wedge (a, b) \in T] \rightarrow (c, b) \in T$$

Por lo tanto T es simétrica.

Como T es simétrica y Euclidea, entonces T también es transitiva por lo demostrado en la pregunta anterior.



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERÍA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 2

Pregunta 2

Considere el conjunto \mathcal{N} de todos los subconjuntos no-vacíos y finitos de \mathbb{N} . Formalmente $\mathcal{N} = \{S \subseteq \mathbb{N} \mid S \text{ es finito y } S \neq \emptyset\}$. Para todo $C \in \mathcal{N}$, se define $\min(C)$ como el mínimo en C según el orden \leq en \mathbb{N} . Se define la relación $R \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tal que $(A, B) \in R$ si, y solo si, si $A \neq B$, entonces:

$$\min((A \cup B) - (A \cap B)) \in A$$

Es decir, $(A, B) \in R$ con $A \neq B$ si el mínimo de los elementos que no tienen en común A y B pertenece a A . Por ejemplo, $A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$ y $B = \{1, 2, 6, 8, 10\}$ cumplen que $(A, B) \in R$ dado que $\min((A \cup B) - (A \cap B)) = \min(\{4, 6, 7, 10\}) = 4$ y $4 \in A$.

1. Demuestre que R es refleja, antisimétrica y conexa.

Para esto primero reescribiremos la definición de R :

$$(A, B) \in R \leftrightarrow (A \neq B \rightarrow \min((A \cup B) - (A \cap B)) \in A)$$

Notamos que en el caso de $A = B$ la implicancia se hace verdadera, y por lo tanto $(A, A) \in R$ para algún A , de la misma forma se cumple con B , por lo que para cualquier conjunto A , $(A, A) \in R$, por lo tanto R es refleja.

R es antisimétrica por construcción, ya que dentro de la función mínimo solo existirán elementos que sean solo de A o solo de B , por lo que no puede pasar que $(A, B) \in R$ (o sea que el valor mínimo de los elementos distintos entre A y B pertenezca a A) y que al mismo tiempo $(B, A) \in R$ (que el valor mínimo de los elementos distintos entre A y B pertenezca a B), ya que ese mínimo solo pertenece a uno de los conjuntos, a menos que $A = B$, en ese caso si se cumple que $(A, B) \in R$ y $(B, A) \in R$, por lo enunciado en el paso anterior.

Para probar que R es conexa basta con tomar dos conjuntos de \mathcal{N} cualquiera, como ambos son conjun-

tos finitos y distintos de \emptyset , para el caso en que sean iguales sabemos que $(A, B) \in R$ ya que probamos que R es refleja, si son distintos entre ellos, tendrán un conjunto de elementos distintos con al menos un elemento, que pertenecerán a A o B , pero no a ambos $((A \cup B) - (A \cap B))$, como dicho conjunto está conformado por una cantidad finita de números naturales, este conjunto siempre tendrá un mínimo, que pertenecerá a A o B , pero no a ambos, si suponemos que dicho mínimo pertenece a A , entonces se cumple $(A, B) \in R$ mientras que si el mínimo pertenece a B , entonces se cumple $(B, A) \in R$, lo que es equivalente a que:

$$\forall A, B \in \mathcal{N} \quad (A, B) \in R \vee (B, A) \in R$$

Por lo tanto R es conexa.

2. Demuestre que R es transitiva.

Esto quiere decir que se cumple que para todo $A, B, C \in \mathcal{N}$:

$$[(A, B) \in R \wedge (B, C) \in R] \rightarrow (A, C) \in R$$

Lo demostraremos por contradicción, suponemos que se cumple

$$[(A, B) \in R \wedge (B, C) \in R] \rightarrow (A, C) \notin R$$

para todo A, B, C

Ahora tomamos el caso $C = A$ y nos quedará:

$$[(A, B) \in R \wedge (B, A) \in R] \rightarrow (A, A) \notin R$$

pero eso es una contradicción, ya que R es refleja, por lo tanto R es transitiva.

En otras palabras, R es un orden total para el conjunto \mathcal{N} .