Pontificia Universidad Católica de Chile
Ingeniería Matemática y Computacional
Álgebra Lineal Numérica.

Práctica: SEL (Parte 2)

1. Demuestre que Gauss-Seidel es un método de proyección, tomando $\mathcal{K} = \mathcal{L} = span\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ con los e_i vectores canónicos.

2. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cualquiera no singular, $b, x_0 \in \mathbb{R}^n$. Considere $v = A^T r_k$ y $w = Av$

   - Deduzca el método de proyección unidimensionales con $\mathcal{K} = \{v\}$ y $\mathcal{L} = \{w\}$ (Dicho método se conoce como *Residual Norm Steepest Descend*)
   - Obtenga una versión eficiente del Algoritmo.
   - Demuestre que el método obtenido es equivalente a Mínimo Descenso aplicado a $A^T Ax = A^T b$ (Ecuaciones Normales)

3. Ejercicio 6, (ítem a y b) página 140 del Libro *Iterative Method for Sparse Linear Systems* de Y. Saad.

4. Ejercicio 16, (ítem a y b) página 142 del Libro *Iterative Method for Sparse Linear Systems* de Y. Saad.

5. Demuestre que si el proceso de Arnoldi no se detiene antes de m pasos, entonces la matriz V_m es base de $\mathcal{K}_m(v_1, A) = span\{v_1, Av_1, \ldots, A^{m-1}v\}$ con $\|v_1\|_2 = 1$

6. Deduzca el Proceso de Lanczos a partir del Proceso de Arnoldi aplicado a una matriz A simétrica.

7. Dado el SEL $Ax - b$ con A no singular. Demuestre que si en un paso j del Algoritmo de GMRES ocurre que $h_{j+1,j} = 0$ entonces la aproximación x_j es exacta.

8. Ejercicio 6, 8 y 11 (página 201, 202) del Libro *Iterative Method for Sparse Linear Systems* de Y. Saad.

9. ¿Cómo extendería FOM para múltiples vectores independientes?, es decir, ¿cómo resolvería el problema $AX = B$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ no singular y $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$?

HW 4: SEL: Métodos de Krylov

Fecha de entrega: Entre el 15 y 19 de Mayo de 2017

Parte teórica:

Ejercicio 6

Parte práctica:

1. Implemente *Conjugate Gradient (CG)* y *Conjugate Residual (CR)*. Ambas para resolver $Ax = b$ con A SPD.
   - He leído que, dado que CR hace dos productos matriz-vector por iteración, es común preferir CG sobre CR. Me gustaría ver algunos experimentos numéricos que afirmen o refuten esa aseveración.
   - Para que sus rutinas sean comparables en cuanto a eficiencia es necesario que ustedes realicen ambas implementaciones. Es decir, no usen librerías.
   - Comparen en diversos escenarios: Matrices con número de condición 2 alto, matrices con autovalores en *cluster* bien y mal condicionadas.
   - Es recomendable que usen matrices *sparse* y $n \geq 1000$ (En general si las matrices son muy chicas no se observa nada de interés!).
   - En las páginas 178 (Algoritmo 6.17) y 182 (Algoritmo 6.19) del libro de Y. Saad tiene los pseudos códigos de CG y CR respectivamente.

Sobre la implementación

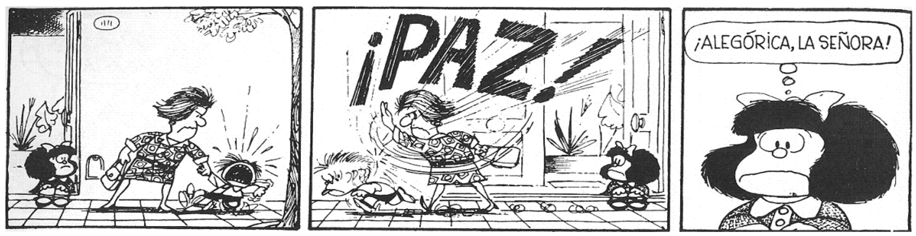
Cada función debe tener el siguiente encabezado

$$[x, flag, relres, iter, resvec] = METODO(A, b, tol, maxit, x0),$$

donde los parámetros de entrada son los usuales y los de salida son

- x: Aproximación
- $flag$: variable que indica el estatus de la método:
  0 indica que el método convergió con la tolerancia especificada (tol)
  1 Alcanzó el máximo de iteraciones SIN convergencia
  2 El método se estancó.

- *relres*: valor del residual relativo al final del proceso $\frac{\|b-Ax\|}{\|b\|}$
- *iter* número de iteraciones realizadas
- *resvec*: vector con el residual relativo por iteración



Realizado por M. Monsalve