NOMBRE: Luis Felipe Silva De Vidts NOTA:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 1

Pregunta 1

Sea A un conjunto no vacío. Una relación binaria $R \subseteq A \times A$ se dice Euleriana si cada vez que $(a, b) \in R$ y $(a, c) \in R$, entonces se tiene que $(b, c) \in R$.

1. Sea T una relación refleja y simétrica. Demuestre que T es Euclideana si, y solo si, T es transitiva.

   Dado que T es simétrica, entonces para todo $(a, b) \in T$, $(b, a) \in T$, y como es refleja, entonces para todo $a \in A$ se cumple que $(a, a) \in T$.
   Se pide demostrar que T es Euclideana si, y solo si, T es transitiva.
   $(\Rightarrow)$
   Suponemos T Euclideana, entonces se cumple que $\forall a, b, c \in A$ se tiene

   $$[(a, b) \in T \wedge (a, c) \in T] \rightarrow (b, c) \in T$$

   como T es simétrica se tiene:

   $$[(b, a) \in T \wedge (a, c) \in T] \rightarrow (b, c) \in T$$

   Por lo que T es transitiva.
   $(\Leftarrow)$
   Ahora suponemos T transitiva, entonces se cumple que $\forall a, b, c \in A$ se tiene

   $$[(a, b) \in T \wedge (b, c) \in T] \rightarrow (a, c) \in T$$

   como T es simétrica se tiene:

   $$[(b, a) \in T \wedge (b, c) \in T] \rightarrow (a, c) \in T$$

   Por lo tanto T es Euclideana.

2. Sea T una relación refleja. Demuestre que T es simétrica y transitiva si, y solo si, T es Euclideana.

   Dado que en la parte anterior se demostró que si T es simétrica y transitiva, T es Euclideana, solo realizaremos la demostración en el otro sentido.
   $(\Leftarrow)$
   Si T es Euclideana se tiene que $\forall a, b, c \in A$:

   $$[(a, b) \in T \wedge (a, c) \in T] \rightarrow (b, c) \in T$$

Entonces también tendremos:

$$[(a,c) \in T \wedge (a,b) \in T] \rightarrow (c,b) \in T$$

Por lo tanto T es simétrica.
Como T es simétrica y Euclideana, entonces T también es transitiva por lo demostrado en la pregunta anterior.

NOMBRE: Luis Felipe Silva De Vidts NOTA:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 2

Pregunta 2

Considere el conjunto $\mathcal{N}$ de todos los subconjuntos no-vacíos y finitos de $\mathbb{N}$. Formalmente $\mathcal{N} = \{S \subseteq \mathbb{N} | S$ es finito y $S \neq \emptyset\}$. Para todo $C \in \mathcal{N}$, se define $\min(C)$ como el mínimo en C según el orden $\leq$ en $\mathbb{N}$. Se define la relación $R \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tal que $(A, B) \in R$ si, y solo si, si $A \neq B$, entonces:

$$\min((A \cup B) - (A \cap B)) \in A$$

Es decir, $(A, B) \in R$ con $A \neq B$ si el mínimo de los elementos que no tienen en común A y B pertenece a A. Por ejemplo , $A = \{1, 2, 4, 7, 8\}$ y $B = \{1, 2, 6, 8, 10\}$ cumplen que $(A, B) \in R$ dado que $\min((A \cup B) - (A \cap B)) = \min(\{4, 6, 7, 10\}) = 4$ y $4 \in A$.

1. Demuestre que R es refleja, antisimétrica y conexa.

   Para esto primero reescribiremos la definición de R:

   $$(A, B) \in R \leftrightarrow (A \neq B \rightarrow \min((A \cup B) - (A \cap B)) \in A)$$

   Notamos que en el caso de $A = B$ la implicancia se hace verdadera, y por lo tanto $(A, A) \in R$ para algún A, de la misma forma se cumple con B, por lo que para cualquier conjunto A, $(A, A) \in R$, por lo tanto R es refleja.

   R es antisimétrica por construcción, ya que dentro de de la función mínimo solo existirán elementos que sean solo de A o solo de B, por lo que no puede pasar que $(A, B) \in R$ (o sea que el valor mínimo de los elementos distintos entre A y B pertenezca a A) y que al mismo tiempo $(B, A) \in R$ (que el valor mínimo de los elementos distintos entre A y B pertenezca a B), ya que ese mínimo solo pertenece a uno de los conjuntos, a menos que $A = B$, en ese caso si se cumple que $(A, B) \in R$ y $(B, A) \in R$, por lo enunciado en el paso anterior.
   Para probar que R es conexa basta con tomar dos conjuntos de $\mathcal{N}$ cualquiera, como ambos son conjun-

tos finitos y distintos de $\emptyset$, para el caso en que sean iguales sabemos que $(A, B) \in R$ ya que probamos que R es refleja, si son distintos entre ellos, tendrán un conjunto de elementos distintos con al menos un elemento, que pertenecerán a A o B, pero no a ambos ($(A \cup B) - (A \cap B)$), como dicho conjunto está conformado por una cantidad finita de números naturales, este conjunto siempre tendrá un mínimo, que pertenecerá a A o B, pero no a ambos, si suponemos que dicho mínimo pertenece a A, entonces se cumple $(A, B) \in R$ mientras que si el mínimo pertenece a B, entonces se cumple $(B, A) \in R$, lo que es equivalente a que:

$$\forall A, B \in \mathcal{N} \qquad (A, B) \in R \vee (B, A) \in R$$

Por lo tanto R es conexa.

2. Demuestre que R es transitiva.

   Esto quiere decir que se cumple que para todo $A, B, C \in \mathcal{N}$:

$$[(A, B) \in R \wedge (B, C) \in R] \rightarrow (A, C) \in R$$

   Lo demostraremos por contradicción, suponemos que se cumple

$$[(A, B) \in R \wedge (B, C) \in R] \rightarrow (A, C) \notin R$$

   para todo A, B, C
   Ahora tomamos el caso $C = A$ y nos quedará:

$$[(A, B) \in R \wedge (B, A) \in R] \rightarrow (A, A) \notin R$$

   pero eso es una contradicción, ya que R es refleja, por lo tanto R es transitiva.

En otras palabra, R es un orden total para el conjunto $\mathcal{N}$.