Teorema de Cantor

Clase 15

IIC 1253

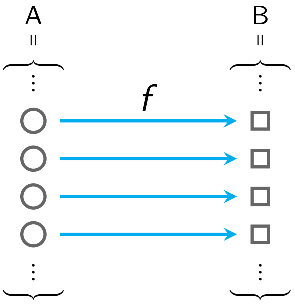
Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Cardinalidad

Sea A y B dos conjuntos.

Definición

A y B son **equinumerosos** si existe una biyección $f : A \to B$.



Si A es **equinumeroso** con B lo anotaremos como $|A| = |B|$.

Recordatorio: Cardinalidad

Proposición

La relación $|\cdot| = |\cdot|$ es una **relación de equivalencia**, esto es:

1. refleja.
2. simétrica.
3. transitiva.

Por lo tanto, podemos tomar las clases de equivalencia de $|\cdot| = |\cdot|$.

Definición

Para un conjunto A, denotaremos por $|A|$
su **clase de equivalencia** según la relación $|\cdot| = |\cdot|$.

Recordatorio: Conjuntos numerables

Definición

Decimos que un conjunto A es **numerable** si: $|A| = |\mathbb{N}|$.

Proposición

A es **numerable** si, y solo si, existe una secuencia infinita:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

1. $a_i \in A$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
2. $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$.
3. para todo $a \in A$, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_i$.

A es numerable si, y solo si,
todos sus elementos se pueden poner en una **lista infinita**.

Recordatorio: Conjuntos numerables

Teorema

Los conjuntos $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables.

Demostración (recordatorio)

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \cdots & n & -n & \cdots \end{array}$$

Definimos la biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ como:

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Recordatorio: conjuntos numerables

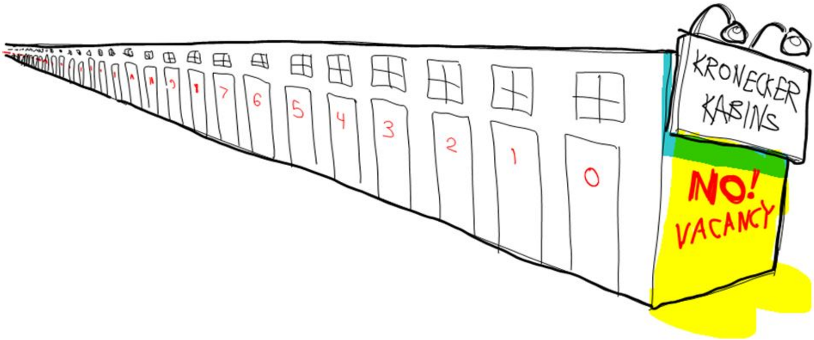
Teorema

Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son numerables.

Demostración (recordatorio)

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,3) & (1,3) \arrow[ul] & (2,3) \arrow[ul] & (3,3) \arrow[ul] & \cdots \\
(0,2) & (1,2) \arrow[ul] & (2,2) \arrow[ul] & (3,2) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(0,1) & (1,1) \arrow[ul] & (2,1) \arrow[ul] & (3,1) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(0,0) \arrow[r] & (1,0) \arrow[ul] & (2,0) \arrow[ul] & (3,0) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Paradoja del gran hotel de Hilbert



¿son todos los conjuntos numerables?

¿es $\mathbb{R}$ numerable?

Teorema

$\mathbb{R}$ **NO** es numerable.

Demostración

- Demostraremos que el intervalo $(0, 1)$ de $\mathbb{R}$ NO es numerable.
- Por **contradicción**, supongamos que $(0, 1)$ es numerable.
- Entonces existe una **lista infinita** del los reales en (0,1), donde cada elemento aparece una vez y solo una vez.

¿son todos los conjuntos numerables?

Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

Reales	Representación decimal							
r_0	0.	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	$\cdots$
r_1	0.	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	$\cdots$
r_2	0.	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	$\cdots$
r_3	0.	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	$\cdots$
r_4	0.	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}	$\cdots$
r_5	0.	d_{50}	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	$\cdots$
$\vdots$					$\vdots$			$\ddots$

¿son todos los conjuntos numerables?

Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

Reales	Representación decimal							
r_0	0.	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	$\cdots$
r_1	0.	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	$\cdots$
r_2	0.	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	$\cdots$
r_3	0.	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	$\cdots$
r_4	0.	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}	$\cdots$
r_5	0.	d_{50}	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	$\cdots$
$\vdots$					$\vdots$			$\ddots$

- Para cada $i \geq 0$, definamos: $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$
- Defina el número real: $r = 0.d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

¿aparece r en la lista?

¿son todos los conjuntos numerables?

Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

- Para cada $i \geq 0$, definamos: $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$.
- Defina el número real: $r = 0.d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

¿aparece r en la lista?

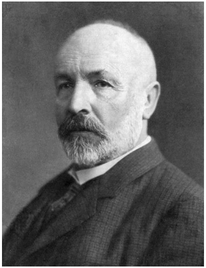
Veamos:

- $r = r_0$? ✕
- $r = r_1$? ✕
- ...
- $r = r_n$? NO, porque el n-esimo digito de r es distinto al de r_n:

$$d_n \neq d_{nn}$$

$\rightarrow\leftarrow$ **CONTRADICCIÓN** $\rightarrow\leftarrow$

Argumento de diagonalización de Cantor

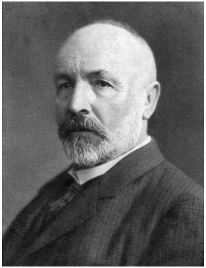


Georg Cantor
(1845 - 1918)

"I see it, but I don't believe it!"

Carta de Cantor a Dedekind.

Argumento de diagonalización de Cantor



Georg Cantor
(1845 - 1918)

Tecnica inventada por **Georg Cantor** para demostrar que no existe una biyección entre A y su conjunto potencia:

$$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}$$

Argumento de diagonalización de Cantor

Sea A un conjunto no vacío.

Teorema de Cantor

NO existe una **biyección** entre A y el conjunto potencia 2^A.

Demostración

- Si A es finito, el teorema se cumple. ¿por qué?
- Supongamos que A es infinito.

Para hacer mas "**pedagógica**" la demostración:

1. Demostraremos que NO existe una biyección de $\mathbb{N}$ a $2^{\mathbb{N}}$.
2. Demostraremos que NO existe una biyección de A a 2^A.

Diagonalización entre $\mathbb{N}$ y $2^{\mathbb{N}}$

Suponga (**por contradicción**) una biyección f entre $\mathbb{N}$ y $2^{\mathbb{N}}$.

Considere la siguiente la matriz:

	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$f(0)$	1	1	0	1	0	0	1	1	
$f(1)$	0	0	1	1	1	0	0	1	
$f(2)$	1	1	1	1	0	0	0	0	
$f(3)$	1	0	1	0	0	1	0	1	
$f(4)$	0	0	1	1	0	0	1	0	$\cdots$
$f(5)$	1	1	0	1	0	1	1	1	
$f(6)$	1	0	0	0	0	0	1	0	
$f(7)$	1	0	0	1	0	1	1	1	
$\vdots$					$\vdots$				$\ddots$

La coordenada (i, j) es igual a 1 ssi $j \in f(i)$.

Cada conjunto $S \in 2^{\mathbb{N}}$ es una fila en la matriz

Diagonalización entre $\mathbb{N}$ y $2^{\mathbb{N}}$

Ahora considere la diagonal de la matriz:

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\
\hline
f(0) & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
f(1) & 0 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
f(2) & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
f(3) & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
f(4) & 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
f(5) & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & \\
f(6) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \\
f(7) & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} & \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & \ddots
\end{array}
$$

- El conjunto de la **diagonal** es igual a $D = \{i \in \mathbb{N} \mid i \in f(i)\}$.
- El **complemento** de la diagonal es $\bar{D} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin f(i)\}$.

¿aparece $\bar{D}$ en alguna fila de la matriz?

Diagonalización entre $\mathbb{N}$ y $2^{\mathbb{N}}$

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin f(i)\}$$

¿aparece $\bar{D}$ en alguna fila de la matriz?

NO, debido a que $\bar{D}$ difiere con $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{N}$.

$$x \in f(x) \quad \text{ssi} \quad x \notin \bar{D}$$

Por lo tanto, no existe una biyección entre $\mathbb{N}$ y $2^{\mathbb{N}}$. □

¿Podemos ocupar el mismo argumento
de la "diagonal" para cualquier conjunto A?

Diagonalización entre A y 2^A

Suponga (**por contradicción**) una biyección f entre A y 2^A.

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Suponga que existe $x^* \in A$, tal que $f(x^*) = \bar{D}$.

¿ $x^* \in f(x^*)$? o ¿ $x^* \notin f(x^*)$?

- Si $x^* \in f(x^*) \;\Rightarrow\; x^* \in \bar{D} \;\Rightarrow\; x^* \notin f(x^*)$ ✗
- Si $x^* \notin f(x^*) \;\Rightarrow\; x^* \notin \bar{D} \;\Rightarrow\; x^* \in f(x^*)$ ✗

Por lo tanto, NO existe una biyección entre A y 2^A. $\square$

¿cuántos infinitos hay?

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & |\mathbb{N}| & < & |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| & < & |2^{2^{\mathbb{N}}}| & < & |2^{2^{2^{\mathbb{N}}}}| & < & \cdots \\
\hline
\text{Notación:} & \aleph_0 & < & \aleph_1 & < & \aleph_2 & < & \aleph_3 & < & \cdots
\end{array}
$$

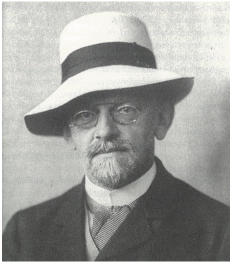
Hay una cantidad **infinita** de distintos **infinitos**!!

¿hay algún conjunto que tenga una cardinalida (infinitud) intermedia?

¿hay algún infinito entremedio?

Hipótesis del continuo

No existe ningún conjunto A tal que: $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$.



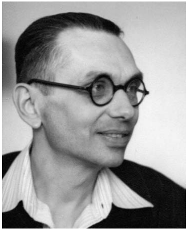
David Hilbert
(1862 - 1943)

Uno de los 23 problemas de Hilbert propuestos en 1900

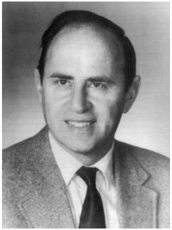
¿hay algún infinito entremedio?

Hipótesis del continuo

No existe ningún conjunto A tal que: $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$.



Kurt Gödel
(1906 - 1978)



Paul Cohen
(1934 - 2007)

Con los axiomas de teoría de conjuntos (Zermelo–Fraenkel)

1940: **NO** se puede demostrar que la hipótesis es **falsa**.

1963: **NO** se puede demostrar que la hipótesis es **verdadera**.