Pontificia Universidad Católica de Chile
Ingeniería Matemática y Computacional
Álgebra Lineal Numérica.

Práctica del Tema 1: Preliminares

1. En clases se demostró que el cálculo del producto interno es *backward* estable. Realice el análisis para el producto externo. ¿Resulta un procedimiento *backward* estable?

   El conjunto de números punto flotante para un sistema con base β, t dígitos de mantisa y el exponente $e \in [L, U]$, denotado por $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ (o simplemente $\mathbb{F}$), se define como

$$\mathbb{F}(\beta, t, L, U) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^s \beta^e \sum_{i=1}^{t} d_i \beta^{-i} \right\} \cup \{0\},$$

   con $s = 0$ o $s = 1$. El valor $m = 0.d_1 d_2 \cdots d_t$ se conoce como mantisa y satisface que $0 \leq m \leq \beta^t - 1$. Suponga un $x \in \mathbb{R}$ cualquiera escrito como

$$x = 0.d_1 d_2 \cdots d_t d_{t+1} \cdots \times \beta^e,$$

   se dice que la representación de x mediante redondeo en el conjunto $\mathbb{F}$, denotada por $fl(x)$, viene dada por

$$fl(x) = 0.d_1 d_2 \cdots \widehat{d_t} \times \beta^e, \quad \widehat{d_t} = \begin{cases} d_t & \text{si} \quad d_{t+1} < \beta/2 \\ d_t + 1 & \text{si} \quad d_{t+1} \geq \beta/2 \end{cases}$$

   Demuestre que $fl(x) = x(1 + \delta)$ con $|\delta| < \epsilon_M$ donde $\epsilon_M = \beta^{1-t}$ *

2. Considere un computador cuyo sistema numérico es el conjunto $\mathbb{F}(10, 5, -9999, 9999)$. Determine

   a) El *epsilon* de la maquina.

   b) El número positivo mas pequeño representable en F.

3. Evalúe las siguientes expresiones (MatLab y/o Octave) o alguno otro programa que trabaje con el estándar IEEE

   a) 1^∞

   b) 2^∞

   c) e^∞ y $e^{-\infty}$

   d) $sign(NaN)$ y $sign(-NaN)$

   e) NaN^0

   f) ∞^0

   g) 1^{NaN}

   h) $\log(\infty)$, $\log(-\infty)$ y $\log(0)$

---
* e_M recibe el nombre de epsilón de la máquina

¿Los resultados son los esperados?. Comente.

4. Una rutina que implementa $\sqrt{x}$ debe cumplir que $\sqrt{x^2} = |x|$ y $(\sqrt{x})^2 = |x|$. Considerando una aritmética en punto flotante restringida, cuál de esos requerimientos no siempre se puede satisfacer? Justifique su respuesta y muestre ejemplos.

5. Suponga $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ¿Por qué las siguientes operaciones calculan el $x = det(A)$ con mayor precisión (*accuracy*) comparado con la fórmula tradicional, i.e., $x = ad - bc$? Justifique su respuesta.

$$\begin{aligned} w &= bc \\ e &= w - bc \\ x &= (ad - w) + e \end{aligned}$$

6. El desarrollo de Taylor que aproxima a la función exponencial alrededor de cero viene dada por:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

   a) Usando una aritmética aritmética punto flotante de 3 dígitos, evalúe e^x usando la serie de Taylor, hasta $k = 4$, en $x = 0.1$.

   b) Calcule el error absoluto y el error relativo.

   c) Repita los ítem *a*) y *b*) con $x = 2.0$. ¿Por qué el error absoluto se incrementó?, ¿Cuáles son las fuentes de error causantes de este incremento?.

   d) Determine una aproximación de e^{-5} mediante las siguientes expresiones

$$e^{-5} \approx \sum_{k=0}^{9} \frac{(-5)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^k 5^k}{k!} \quad \text{y} \quad e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{k=0}^{9} \frac{5^k}{k!}}.$$

   e) ¿Cuál fórmula Usted considera más precisa, asumiendo que el valor exacto de e^{-5} es 6.74×10^{-3}?. Justifique su respuesta.

7. ¿Por qué la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

tiene problemas para su evaluación en aritmética punto flotante para valores de $x < 0$? Plantee una forma alternativa de evaluación para este caso.

8. Para calcular el punto medio m del intervalo $[x, y]$ ¿Cuál de los siguientes fórmulas es más adecuada si para un arimética en punto flotante restringida? Justifique su respuesta.

$$m = (x + y)/2 \tag{1}$$

$$m = x + (y - x)/2 \tag{2}$$

9. Encuentre una forma de evitar la pérdida de dígitos significativos en el cálculo de las siguientes expresiones:

    a) $\log(x+1) - \log(x)$, para x suficientemente grande.

    b) $(1-\cos(x))/x^2$, para $x \approx 0$.

    c) $\sin x - \sin y$, para para $x \approx y$

    d) $\sqrt{1+x} - 1$, para $x \approx 0$.

    e) $x^2 - y^2$, para para $x \approx y$

    f) $\frac{1-cos(x)}{\sin x}$, para $x \approx 0$.

    g) $c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)}$, para $a \approx b$ y $\theta << 1$.

    h) $\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$, para $x \approx 0$.

    i) $\frac{1-cos(x)}{x^2}$, para $x \approx 0$.

    j) $1 - \sin(x)$, para $x \approx 0$.

10. Analice la estabilidad[*] de los siguientes algoritmos diseñados para evaluar $f(x) = (e^x - 1)/x$ para $|x| << 1$.

Algoritmo 1 Salida f

```
if x == 0 then
    f ← 1
else
    f ← (exp x − 1)/x
end if
```

Algoritmo 2 Salida f

```
y ← exp x
if y == 1 then
    f ← 1
else
    f ← (y − 1)/ log y
end if
```

11. En clases vimos un ejemplo de algoritmo inestable (cálculo de la integral). ¿Qué haría Usted para obtener una buena aproximación de y_n para un n grande dado?
Recordar: Sea
$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}dx \text{ con } n \geq 0.$$
Se puede probar que
$$y_n = \frac{1}{n} - 5y_{n-1},$$
con $y_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5}dx = \log 6 - \log 5 = \log 6/5$
Use el comando *quad* (disponible en Matlab, Octave y en Python (`scipy.integrate`) para obtener una buena aproximación de y_n que le permita comparar la calidad de la aproximación generada con su propuesta.

[*]En función de la propagación de los errores de redondeo

12. Programa la función `sucre`

Algoritmo 3 Una SUCesión REcursiva

function SUCRE(x_1, x_2, n)
  for $i = 2 : n - 1$ **do**
    $x_{i+1} = \frac{13}{3}x_i - \frac{4}{3}x_{i-1}$
  end for
  return x_n
end function

a) Si $x_1 = 1$ y $x_2 = 1/3$, demuestre que $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Ejecute SUCRE$(x_1, x_2, n)$ para $n = 3, 4, \ldots, 10$ y para cada valor de n calcule el error relativo. Comente sobre los resultados obtenidos.

b) Si $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, entonces $x_n = 4^{n-1}$. Ejecute SUCRE(x_1, x_2, n) para $n = 3, 4, \ldots, 10$ y para cada valor de n calcule el error relativo. Comente sobre los resultados obtenidos.

c) ¿La función SUCRE es inestable? Justifique su respuesta.

13. Observe y analice el siguiente pseudo código.
Sea $x \in \mathbb{R}^{10}$; con $x = (0.1,\ 0.1, \cdots, 0.1)^t$;
`n` $\leftarrow$ 10; `norma1` $\leftarrow$ 0;
Para $i = 1$ **hasta** n **hacer**
  `norma1 = norma1 +` $|x_i|$;
Fin Para
Si `norma1=1` **entonces**
$\leftarrow$ `Calculé la norma 1 de` x;
sino
$\leftarrow$ `Todo salió mal;`
Fin Si

a) ¿Cuál es el mensaje que debe imprimir el programa?

b) Implemente el código anterior en MATLAB (OCTAVE), ejecútelo y explique su comportamiento.

14. Demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

. Considere la siguiente función: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Para esta función se tiene que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

a) Calcule $f(x)$ para $x = 10^{-1}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-20}$.

b) Explique los resultados obtenidos.

c) Obtenga una expresión equivalente para $f(x)$ a partir del siguiente polinomio de Taylor: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$.

d) Repita los cálculos con la nueva formulación y explique los resultados.

15. La siguiente expresión se conoce como la aproximación de Stirling[†] para el factorial de un número dado $n \in \mathbb{N}$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

Para $n = 1, 2, \ldots, 10, 11, 12$, obtenga una aproximación a $n!$. ¿Qué ocurre con los errores absoluto y relativo a medida que n aumenta?, ¿Qué puede concluir acerca de la precisión de la aproximación de Stirling?.

16. El polinomio $(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$, tiene una raíz multiple en $x = 1$. El lado izquierdo de esta igualdad, lo denotaremos por $p(x)$ mientras que el lado derecho será $q(x)$.

    a) Gráfique en una misma "ventana" tanto a p como a q, en el intervalo $[-10, 10]$ con un espaciado de 0.5.

    b) Gráfique en una misma "ventana" tanto a p como a q, en el intervalo $[0.995, 1.005]$ con un espaciado de 0.0001.

    c) ¿Qué puede concluir de lo observado en las gráficas anteriores?

17. Preguntas 1.9 (pág. 24). Libro Demmel.

18. Siguiendo la notación y las definiciones de las clases de teoría. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices dadas no singulares. Demuestre que $fl(AB) = (A + \Delta A)B$ donde $\Delta A \leq \gamma_n |A||B||B^{-1}|$ ¿Siempre el *Backward error* es pequeño?

19. (Tonto pero útil!) Considere las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

En cada uno de los siguientes casos y usando los elementos de A y B, rellene las casillas de forma tal que $C = AB$

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

[†] James Stirling (1692-1770). Matemático Escocés

$$C = \left[\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \right]_{2\times 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

20. Halle el coseno del ángulo formado entre los siguientes vectores:

    a) $x = (\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0)^t$, $y = (\frac{2}{3},\ 1,\ -2)^t$.

    b) $x = (1,\ \frac{3}{2},\ 0,\ -1)^t$, $y = (2, -\frac{2}{3},\ 1,\ 1)^t$.

21. ¿Es posible encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que los vectores $(\ (1,\ 2,\ 3)^t + \alpha(-1,\ 4,\ 2)^t\ )$ y $(1,\ 2,\ 3)^t$ sean ortogonales?

22. Demuestre que si w es un vector ortogonal a u y v, entonces w es ortogonal a $\alpha u + \beta v$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

23. Sean $\{v_1, v_2\}$ vectores linealmente independientes. Pruebe que el conjunto de vectores

$$\{v_1, v_2 - \alpha v_1\} \text{ con } \alpha = \frac{v_1^* v_2}{v_1^* v_1}$$

    es ortogonal.

24. Demuestre que el producto de $n \geq 2$ matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

25. Sea $v \in \mathbb{C}^n$ y sea la matriz

$$H = I - \frac{2vv^*}{v^*v}.$$

    Demuestre que:

    a) H es simétrica. *b*) $H^2 = H$. *c*) H es ortogonal.

26. Sean A y B dos matrices ortogonales. Indique y justifique si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

    a) $A + B$ es una matriz ortogonal.

    b) AB es una matriz ortogonal.

    c) $(AB)^{-1} = (BA)^T$.

    d) $(AB)^{-1} = BA$.

27. Sean A y C matrices cuadradas. Suponga que la matriz particionada

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

es ortogonal. Pruebe que A y C deben ser matrices ortogonales y además B debe ser la matriz nula.

28. Dadas $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Se sabe que $A(BC) = (AB)C$, pero ¿Desde el punto de vista del costo computacional, es lo mismo realizar $A(BC)$ que $(AB)C$?

29. Prueba del Lema 1.7 (pág. 22). Libro Demmel

30. Ejercicios 2.3 (pág. 15), 2.6 (pág. 16) y 3.2 (pág. 24). Libro Trefethen & Bau.

HW 1: Conceptos Básicos

- Fecha de entrega: Lunes 27 de Marzo
- Ejercicios: 2, 3, 4, 6, 9 (ítems d y f), 15, 17, 18 y 27
- Utilicen Matlab, Octave, *etc* tanto como puedan!

Realizado por M. Monsalve.