# Cardinalidad

Clase 14

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

## ¿cuál es el tamaño de este conjunto?

$$\{\ a\,,\quad b\,,\quad c\,,\quad d\,,\quad e\ \}$$

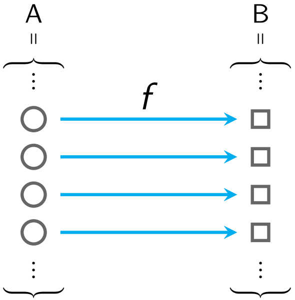
¿por qué el conjunto tiene tamaño 5?

# Cardinalidad

Sea $A$ y $B$ dos conjuntos.

## Definición

$A$ y $B$ son **equinumerosos** si existe una biyección $f : A \to B$.




Si A es **equinumeroso** con B lo anotaremos como $|A| = |B|$.

¿qué propiedad cumple la relación $|A| = |B|$?

# Cardinalidad

## Proposición

La relación $|\cdot| = |\cdot|$ es una **relación de equivalencia**, esto es:

1. refleja.
2. simétrica.
3. transitiva.

### Demostración

- Refleja?

  **PD:** Para todo conjunto $A$, $|A| = |A|$

  La función $f : A \to A$ tal que $f(a) = a$ es una biyección. ✓

# Cardinalidad

## Proposición

La relación $|\cdot| = |\cdot|$ es una **relación de equivalencia**, esto es:

1. refleja.
2. simétrica.
3. transitiva.

## Demostración

- Simétrica?

  **PD:** para todo conjunto $A$ y $B$, si $|A| = |B|$, entonces $|B| = |A|$.

  Supongamos que $|A| = |B|$.

  $\Rightarrow$ existe una biyección $f : A \to B$.

  $\Rightarrow$ $f^{-1} : B \to A$ es una biyección. (¿por qué?)

  $\Rightarrow$ $|B| = |A|$. ✓

# Cardinalidad

## Proposición

La relación $|\cdot| = |\cdot|$ es una **relación de equivalencia**, esto es:

1. refleja.
2. simétrica.
3. transitiva.

### Demostración

- Transitiva?

  **PD:** Para todo $A, B, C$, si $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$, entonces $|A| = |C|$.

  Supongamos que $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$.

  $\Rightarrow$ existen biyecciones $f : A \to B$ y $h : B \to C$.

  $\Rightarrow$ $f \circ h : A \to C$ es una biyección. (¿por qué?)

  $\Rightarrow$ $|A| = |C|$. ✓

$\square$

# Cardinalidad

## Proposición

La relación $|\cdot| = |\cdot|$ es una **relación de equivalencia**, esto es:

1. refleja.
2. simétrica.
3. transitiva.

Por lo tanto, podemos tomar las clases de equivalencia de $|\cdot| = |\cdot|$.

## Definición

Para un conjunto $A$, denotaremos por $|A|$
su **clase de equivalencia** según la relación $|\cdot| = |\cdot|$.

# Cardinalidad (ejemplos)

## Ejemplos

¿qué conjuntos están en las siguientes clases de equivalencia para $|\cdot| = |\cdot|$?

- $|\ \{a, b, c, d, e, f\}\ |$
- $|\ \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}\ |$
- $|\ \{0, 1, 2, 3, 4\}\ |$
- $|\ \varnothing\ |$
- $|\ \mathbb{N}\ |$
- $|\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ |$
- $|\ \mathbb{Z}\ |$
- $|\ \mathbb{Q}\ |$
- $|\ \mathbb{R}\ |$

# Cardinalidad de conjuntos finitos

Sea $A$ un conjunto cualquiera.

## Definición

- Diremos que $A$ es **finito** si existe un $n$ tal que:

$$|A| \ = \ |\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}|$$

- Si $|A| = |\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}|$ diremos que la **cardinalidad de $A$** es $n$.

$$|A| \ = \ n$$

¿sirve la relación $|\cdot| = |\cdot|$ para medir
la cardinalidad de conjuntos **infinitos**?

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Definición

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los números **pares**.

¿es $\mathbb{P}$ **mas infinito** que $\mathbb{N}$?

$$\mathbb{N} = \left\{ \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad \ldots \right\}$$

$$\mathbb{P} = \left\{ \quad 0 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 8 \qquad 10 \quad \ldots \right\}$$

Con la biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ tal que $f(n) = 2 \cdot n$, se tiene que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{P}|$.

Demuestre que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ es una biyección.

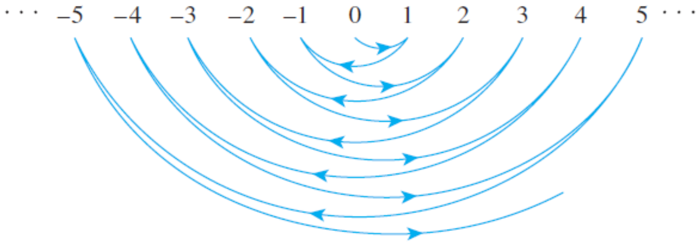
## ¿es $\mathbb{Z}$ mas infinito que $\mathbb{N}$?

# ¿es $\mathbb{Z}$ mas infinito que $\mathbb{N}$?

## Teorema

Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son **equinumerosos**.

¿cómo demostramos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$?



# ¿es $\mathbb{Z}$ mas infinito que $\mathbb{N}$?

## Teorema

Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son **equinumerosos**.

¿como demostramos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$?

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \cdots & n & -n & \cdots
\end{array}$$

Definimos la biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ como:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ !!

# Conjuntos numerables

## Definición

Decimos que un conjunto $A$ es **numerable** si: $|A| = |\mathbb{N}|$.

## Proposición

$A$ es **numerable** si, y solo si, existe una secuencia infinita:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

1. $a_i \in A$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
2. $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$.
3. para todo $a \in A$, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_i$.

$A$ es numerable si, y solo si,
todos sus elementos se pueden poner en una **lista infinita**.

# ¿hay más conjuntos numerables?

¿son los racionales $\mathbb{Q}$ numerables? ¿es $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ numerable?

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

¿cómo podemos enumerar $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & (0,4) & \cdots & (0,n) & (0,n+1) & \cdots
\end{array}$$

¿funciona?

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,3) & (1,3) \arrow[ul] & (2,3) \arrow[ul] & (3,3) \arrow[ul] & \cdots \\
(0,2) & (1,2) \arrow[ul] & (2,2) \arrow[ul] & (3,2) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(0,1) & (1,1) \arrow[ul] & (2,1) \arrow[ul] & (3,1) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul] \\
(0,0) \arrow[r] & (1,0) \arrow[ul] & (2,0) \arrow[ul] & (3,0) \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

¿cuál es la secuencia que estamos siguiendo?

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

$$(0,0),$$
$$(1,0),(0,1),$$
$$(2,0),(1,1),(0,2),$$
$$\dots$$
$$(n,0),(n-1,1),(n-2,2),\dots,(2,n-2),(1,n-1),(0,n),\dots$$

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

$$\begin{aligned}
S_0 &:= (0,0), \\
S_1 &:= (1,0),(0,1), \\
S_2 &:= (2,0),(1,1),(0,2), \\
\ldots & \\
S_n &:= (n,0),(n-1,1),(n-2,2),\ldots,(2,n-2),(1,n-1),(0,n),\ldots
\end{aligned}$$

1. ¿$a_i \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para todo $i \in \mathbb{N}$? ✓
2. ¿$a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$? ✓
3. ¿para todo $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $(n_1, n_2) = a_i$? ✓

Por lo tanto, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto numerable.

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son conjuntos **numerables**.

¿cómo podemos enumerar $\mathbb{Q}$?

(Ejercicio)

# ¿por qué nos falla la intuición?

David Hilbert
(1862 - 1943)

# Paradoja del gran hotel de Hilbert