Pontificia Universidad Católica de Chile
Ingeniería Matemática y Computacional
Álgebra Lineal Numérica.

Práctica: SEL y LSP (Parte 1)

1. El número de condición de una matriz no singular A se define como: $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$, para alguna norma matricial $\|\star\|$ inducida, demuestre las siguientes propiedades de $\kappa(A)$:

   a) $\kappa(A) \geq 1$.

   b) $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$.

   c) $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$.

   d) $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$.

2. Dados los sistemas lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5.999 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

   a) Resuelva los sistemas lineales anteriores.

   b) Perturbe los vectores independientes con el vector $\delta b = (0\ 0.001)^t$ y resuelva los sistemas.

   c) Calcule los errores cometidos en la solución del sistema perturbado en cada caso. ¿Qué observa?. Justifique su respuesta.

3. Encuentre el número de condición de las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

   ¿Para qué valores de a y ϵ las matrices anteriores están mal condicionadas?.

4. Sea A una matriz 202×202 tal que $\|A\|_2 = 100$ y $\|A\|_F = 101$. Deduzca la mejor cota inferior que se puede conseguir de $\kappa_2(A)$.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, donde cada elemento de A se define como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ \alpha_i & \text{si} \quad i > 1 \text{ y } j = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

   con $i, j = 1, 2, \cdots, n$. Por ejemplo, si $n = 4$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Calcule el número de condición en la norma infinito de A, $\kappa_\infty(A)$ para cualquier n.
   - Sean $b^t = (1, 1, ..., 1)$ y $\hat{b}^t = (1.00005, 1, ..., 1)$. Suponga que $Ax = b$ y $A\hat{x} = \hat{b}$. Use $\kappa_\infty(A)$ para obtener una cota del error relativo en $\hat{x}$, como aproximación de x, cuando $\max|\alpha_i| = 0.01$ y cuando $\max|\alpha_i| = 100$.
   - ¿Cuántos decimales exactos podemos esperar en $\hat{x}$, como aproximación de x, en cada uno de los dos casos anteriores ?

6. Si Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Muestre que si λ es autovalor de A^TA entonces $0 \leq \lambda \leq \|A^T\|\|A\|$. Demuestre que si A es no singular

$$\kappa_2(A) \leq (\kappa_1(A)\kappa_\infty(A))^{1/2}$$

7. Suponga $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Demuestre que $\lambda = 1$ es autovalor de A^TA con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ autovector asociado tal que $x_1 = 0$ y $\sum_{i=2}^n x_i = 0$. Muestre que existen otros dos autovectores tales que $x_2 = \cdots = x_n$ y encuentre los autovalores asociados. Demuestre que:

$$\kappa_2(A) = \frac{1}{2}(n+1)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(n+1)^2}}\right).$$

Note que Para esta matriz el numero de condición 2 está relacionado con el tamaño de la matriz A.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$ y A de rango completo. Sea $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $b \notin Alc(A)$. Considere el problema de mnimos cuadrados. Defina como $\rho_{LS} = \|b - Ax_{LS}\|_2$ donde x_{LS} es lo solución de las ecuaciones normales. ¿Cuál es el valor de ρ_{LS} si x_{LS} se obtuvo usando

   - La factorización QR full de A.
   - La factorización SVD de A.

9. Dados $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ y $d \in \mathbb{R}^p$. El siguiente problema

$$\min_{x\neq 0} \|b - Ax\|_2 \text{ sujeto a } Bx = d, \tag{1}$$

se conoce como el problema de mínimos cuadrados con restricciones lineales, (LSE por sus siglas en ingles: *Least Squares problem with Equality constrained*). Este problema surge cuando se quiere calcular una curva de ajuste de datos y además es necesario que la curva sea interpolante en un subconjunto de los puntos. Para facilitar el problema considere $m + p \geq n \geq p$. Note que bajo ests condiciones se tiene que $m \geq n - p$ que genera un sistema sobredetermindo.

   - Demuestre que es suficiente que B posea p filas linealmente independientes para que (1) posea solución.
   - La solución de (1) es única si y solo si

$$rgo(B) = p \quad \wedge \quad rgo\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) = n$$

   - Demuestre que la segunda condición del ítem anterior es equivalente a $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, donde $N(M)$ representa el nulo de la matriz M.
   - Para resolver el LSE, investigue y describa el método denominado *Null Space Method*.

10. Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, ¿Cómo implementaría la siguiente expresión

$$x = B^{-1}(2A + I)(C^{-1} + A)b,$$

sin calcular matrices inversas?

11. Considere el SEL $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz dada de elementos a_{ij} tales que $a_{ii} \neq 0$ para todo i y $b \in \mathbb{R}^n$ es un vector dado. Considere la sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}$ definida mediante el siguiente algoritmo

Algoritmo 1 Método iterativo

Dados $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $tol \in \mathbb{R}^+$ y $max \in \mathbb{Z}^+$

for $k = 0, 1, \ldots, max$ **do**
  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$
  Sea i tal que $|r_i^{(k)}| = \text{máx}_{1\leq j\leq n} |r_j^{(k)}| = \|r^{(k)}\|_\infty$
  if $\|r^{(k)}\|_\infty \leq tol$ **then**
    Return
  end if
  $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} \quad \forall j \neq i$ ▷ Definición de $x^{(k+1)}$
  $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$ ▷ Definición de $x^{(k+1)}$
end for

- Demuestre que si a_i denota la i-ésima columna de A,

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} a_i$$

- Demuestre que:

$$\|r^{(k+1)}\|_1 \leq \left[1 - \frac{1}{n} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right| \right] \|r^{(k)}\|_1.$$

  Ayuda: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

- Deduzca una condición suficiente de convergencia para la que la sucesión $\{x^{(k)}\}$ converja a la solución de $Ax = b$.

12. Identifique A, b y c en las siguientes cuadráticas:

- $q(x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_3^2 + x_3 - x_1 + 5$
- $q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 12x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 12x_3^2 - 3x_1 - 2x_2 - x_3$
- $q(x) = 2x_1x_2 + x_1 + x_2$

y clasifique sus puntos críticos.

13. Suponga la iteración k del método de Gradientes Conjugados (GC) aplicado para resolver $Ax = b$ con $x_k \neq x_*$ donde x_* es la solución del SEL. Denote por r_k el vector residual en la iteración k. Demuestre que

- $span\{r_0, r_1, \ldots, r_k\} = span\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \ldots A^kr_0\}$
- $span\{u_0, u_1, \ldots, u_k\} = span\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \ldots A^kr_0\}$
- $\langle r_k, r_j\rangle = 0, \quad 0 \leq j \leq k-1$

- $\langle r_j, r_j\rangle = \langle u_j, r_j\rangle, \quad \forall j \geq 0$

donde $r_k = b - Ax_k$ y las u_k son los direcciones usadas por GC.

14. Al aplicar el algoritmo de GC se obtuvieron los siguientes resultados: $\|e_0\|_A = 1$ y $\|e_{10}\|_A = 2 \times 2^{-10}$, donde $e_k = x_k - x_*$ siendo x_k el iterado k-ésimo de GC y x_* la solución exacta del SEL. Basado en esta información encuentre cotas para $\kappa_2(A)$ y para $\|e_{20}\|_A$

15. Suponga que quiere resolver el SEL $Cz = d$ con $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $d = \in \mathbb{C}^m$ pero usted sólo tiene rutinas que trabajan con reales. Si $C = A + iB$, $d = b + ic$ donde A, B, b y c son reales. Muestre que la solución $z = x + iy$ esta dada por la solución del SEL (real):
$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}.$$
¿Cómo resolvería el SEL anterior sin armar la matriz de coeficientes de orden m^2.

16. Escriba dos rutinas para calcular $C = AB$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. La primera debe calcular cada elemento de C mediante productos internos de las filas de A con las columnas de B. La segunda debe formar cada columna de C mediante combinaciones lineales de las columnas de A. Compare sus rutinas en su computador. Es probable que necesite usar matrices grandes antes de observar alguna diferencia importante. Trate de encontrar información sobre el sistema de su computadore (cache, politica de manejo de la memoria) para tratar de explicar los resultados observados.

17. Sea una matriz A de 100×100 simétrica tridiagonal con $1, 2, \cdots, 100$ en la diagonal y unos en la sub y super diagonal. Y sea $b^t = (1, 1, \cdots, 1)$. Escriba un programa que ejecute 100 pasos de GC y del Mínimo Descenso para aproximar la solución de $Ax = b$. Genere una gráfica que contenga cuatro curvas:
    a) La norma del residual para GC.
    b) La norma del residual para Mínimo Descenso.
    c) La norma del residual por cada iteración en GC.
    d) Estimado del Teorema 38.5 del Libro Trefethen and Bau

18. Sea H una matriz de Hilbert de orden n definida como
$$H = (h_{ij}) \text{ con } h_{ij} = \frac{1}{i+j+1} \text{ y } 1 \leq i, j \leq n.$$
Usando $n = 10, 20, 50, 100$ y forzando $x_* = ones(n, 1)$ compare el desempeño del método de CG con al menos un método iterativo estacionario (Jacobi, Gauss-Seidel, SSOR, etc). Comente sus resultados.

19. Repita el Ejemplo numérico de la páginas 300-301 del Libro Trefethen and Bau.

20. **Ejercicio didáctico para observar la velocidad de convergencia de GC**: Considere las matrices A_1 y A_2 ambas simétricas positivo definidas de orden n tales que los autovalores de A_1 estás distribuidos uniformemente en $[0.95,\ 1.05]$ mientras que los de A_2 son $[100\ 200\ 300\ 400\ 500]$ y los $n-5$ restantes están uniformemente distribuidos en $[0.95,\ 1.05]$. Construya los vectores b_1 y b_2 tales que los sistemas $A_1x = b_1$ y $A_2y = b_2$ tengan como solución el vector de unos.
    - Ejecute CG con diferentes valores de n
    - Grafique el error relativo y el residual relativo por iteración para ambos SEL.
    - Compare y comente los resultados. Use los resultados vistos en clases para justificar sus observaciones.

HW 3: SEL y LSP

- **Fecha de entrega:** Entre el 01 y 05 de Mayo de 2017
- Parte teórica: 3, 6, 7, 11 y 15.
- Parte práctica: 16, 19 y 20.

Realizado por M. Monsalve