NOMBRE: Luis Felipe Silva De Vidts NOTA:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 6 – Respuesta Pregunta 1

Sea $\Sigma = \{a, b\}$ un alfabeto y Σ^* todas las palabras finitas sobre Σ. Para una letra $x \in \Sigma$ y $w \in \Sigma^*$ se define $|w|_x$ como el número de x en w. Por último, se define el conjunto R inductivamente como el menor conjunto de palabras en Σ^* que satisface las siguientes propiedades:

- $\epsilon \in R$
- si $w \in R$, entonces $a \cdot w \cdot b \in R$.
- si $u, v \in R$, entonces $u \cdot v \in R$.

Pregunta 1

1. Demuestre por inducción sobre R que para toda palabra $w \in R$ se tiene que:

$$|w|_a = |w|_b \tag{1}$$

Primero tenemos que $\epsilon \in R$ cumple con el enunciado anterior ya que

$$|\epsilon|_a = |\epsilon|_b = 0$$

ahora suponemos que para un cierto w de largo $2n$ se cumple que $|w|_a = |w|_b = n$, luego tenemos que

$$a \cdot w \cdot b \in R$$

y se cumple que ($a \cdot w \cdot b$ de largo $2n + 2$)

$$|a \cdot w \cdot b|_a = |a \cdot w \cdot b|_b = n + 1$$

Por lo tanto todo $w \in R$ de largo $2n$ tendrá n veces la letra a y n veces la letra b, o sea

$$|w|_a = |w|_b \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Y todo w toma largos pares por como se construye, solo se agregan letras o palabras de a pares.

2. Demuestre por inducción sobre R que para toda palabra $w \in R$ se tiene que:

$$\text{si } u \text{ es un prefijo de } w, \text{ entonces } |u|_a \geq |u|_b. \tag{2}$$

Primero tenemos que si u es prefijo de ϵ, entonces $u = \epsilon$, por lo tanto se cumple para ϵ que

$$0 = |u|_a \geq |u|_b = 0$$

donde u es prefijo de ϵ

Ahora bien si tomamos un $w \in R$ tal que u es prefijo de w y que cumpla con:

$$|u|_a \geq |u|_b$$

entonces podemos escribir w de la forma $w = u \cdot v$ y tendremos que

$$a \cdot u \cdot v \cdot b \in R$$

y esa palabra tiene como prefijo a $a \cdot u$ y como se cumple la desigualdad anterior,tendremos que

$$|a \cdot u|_a \geq |a \cdot u|_b$$

Por lo tanto para toda palabra w perteneciente a R cualquier prefijo u que se tome de la palabra cumplirá con la desigualdad

$$|u|_a \geq |u|_b$$

NOMBRE: Luis Felipe Silva De Vidts NOTA:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 6 – Respuesta Pregunta 2

Pregunta 2

Demuestre por inducción sobre el largo de $w \in \Sigma^*$, que si w satisface (1) y (2), entonces $w \in R$.

Es claro que si $w = \epsilon$, $w \in R$, por como se define el conjunto R, y también se cumple que ϵ satisface (1) y (2), por lo visto en la pregunta anterior. Ahora si tomamos un $w \in R$ tal que $|w| = 2n$ (donde $|\cdot|$ es la cantidad de letras de la palabra) y $|w|_a = |w|_b = n$, entonces tenemos

$$w' := a \cdot w \cdot b \in R$$

tenemos que $|w'| = 2n + 2$ y que $|w'|_a = |w'|_b = n + 1$, también tenemos que

$$w \cdot w \in R$$

por lo que también se cumple

$$w' \cdot w' \in R$$

Por lo tanto dado un w cuyo largo en a y b sea igual a n, siempre podemos construir un w' tal que tenga largo $n + 1$ en a y en b y que pertenezca al R.