NOMBRE: Luis Felipe Silva De Vidts NOTA:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 1 – Respuesta Pregunta 1

Pregunta 1

1. ¿ Es verdad que si $\alpha \not\equiv \beta$, entonces $\alpha \equiv \neg\beta$? Demuestre o de un contraejemplo.
   Para probar que no se cumple basta con tomar

$$p \to q \not\equiv p$$

p	q	$p \to q$	p	$\neg p$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

   Notamos que no se cumple:

$$p \to q \equiv \neg p$$

   Por lo tanto no se cumple lo enunciado.

2. ¿ Es verdad que si $\Sigma \vDash \alpha$, entonces $\neg\alpha \vDash \neg\beta$ para cualquier fórmula β en Σ? Demuestre o de un contraejemplo.
   Para probar que no se cumple tomamos la consecuencia lógica $\Sigma \vDash \alpha$:

$$\{p, p \to q\} \vDash q$$

p	q	p	$p \to q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

   Donde se cumple que cuando p y $p \to q$ son verdaderos q también lo es, por lo que $\alpha = q$ es consecuencia lógica de $\Sigma = \{p, p \to q\}$.
   Del enunciado se debiese cumplir que:

$$\{\neg q\} \vDash \neg p$$

$$\{\neg q\} \vDash \neg(p \to q)$$

   Al realizar la tabla de verdad obtenemos:

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg(p \to q)$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Por lo que no se cumple que

$$\{\neg q\} \vDash \neg p$$

$$\{\neg q\} \vDash \neg(p \to q)$$

ya que hay casos en los que $\neg q$ es verdadero y $\neg p$ es falso o $\neg(p \to q)$ es falso.

3. Demuestre que una valuación $v_1, \ldots, v_n$ hace verdadera a la fórmula:

$$(\cdots((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow p_3) \cdots \leftrightarrow p_n)$$

si, y solo si, el número de valores falsos en $v_1, \ldots, v_n$ es par.
Para esto tomamos el caso $n = 3$:

$$((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow p_3)$$

y realizamos la tabla de verdad

p_1	p_1	p_1	$((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow p_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Notamos que para este caso la expresión se vuelve verdadera si hay una cantidad par de ceros.
Si ahora definimos

$$s_1 = ((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow p_3)$$

y planteamos el caso $n = 4$ de la forma

$$s_1 \leftrightarrow p_4$$

y formamos la tabla de verdad obtendremos

s_1	p_4	$s_1 \leftrightarrow p_4$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Notamos que cuando s_1 toma el valor falso es porque hay una cantidad impar de ceros en dicha expresión, luego si p_4 es cero habrá una cantidad par de ceros por lo que la expresión $s_1 \leftrightarrow p_4$ será verdadera.
Ahora para el caso genérico si tomamos la expresión

$$((s_{n-3} \leftrightarrow p_n) \leftrightarrow p_{n+1})$$

y suponemos que se cumple el que s_{n-3} es verdadero si y solo si la cantidad de valores falsos es par, entonces realizamos la tabla de verdad correspondiente

s_{n-3}	p_n	p_{n+1}	$((s_{n-3} \leftrightarrow p_n) \leftrightarrow p_{n+1})$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Donde de igual forma se cumple que si la suma de valores falsos es par la expresión final es verdadera, y no se cumple en ningún otro caso.

NOMBRE: Luis Felipe Silva De Vidts NOTA:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

Tarea 1 – Respuesta Pregunta 2

Pregunta 2

Sea α y β dos formulas proposicionales tal que $\alpha \vDash \beta$. Demuestre que existe una formula γ tal que $\alpha \vDash \gamma$, $\gamma \vDash \beta$ y γ solo contiene variables mencionadas en α y β simultáneamente.
Para eso primero probaremos que para que se cumpla $\alpha \vDash \beta$ estos deben tener elementos en común.
Si tomamos

$$\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

con

$$\alpha_i = \alpha_i(p, q), \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

y

$$\beta = \beta(w)$$

Al realizar la tabla de verdad obtendremos

<table>
<tr><th>p</th><th>q</th><th>w</th><th>α</th><th>β</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="4">A</td><td rowspan="4">B</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td rowspan="4">A</td><td rowspan="4">B'</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Donde A será una cadena de ceros y unos dependiente de p y q, B será una cadena de solo ceros o solo unos y B' será la cadena opuesta a B a menos que β sea una contradicción o tautología, en ese caso α será una contradicción o una tautología y siempre se puede formar una tautología o contradicción γ con los elementos que tengan en común ($p \vee \neg p$ y $p \wedge \neg p$, 0 o 1 en caso de no tener elementos en común).

En los demás casos no se puede cumplir que $\alpha \vDash \beta$ a menos que tengan elementos comunes, ya que si hay una concordancia entre algún elemento de A con uno de B, que ambos sean 1 para alguna valuación, como B y B' son opuestos y A se compara también con B' si antes coincidían ahora no lo harán ya que A seguirá teniendo un 1 pero B' tendrá un 0.

Ahora como la consecuencia lógica viene dada solo por lo elementos comunes de ambos, α puede tener como consecuencia lógica a alguna proposición que este formada por elementos de α y β y está a su vez tenga como consecuencia lógica a β ya que tienen elementos en común. Para encontrarla basta realizar un DNF para obtener los valores de 1 donde α y β coinciden y eliminar las demás variables de las que no dependen simultáneamente α y β.