PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Departamento de Matemáticas y Programa de Ingeniería Matemática y Computacional
IMT2111 Algebra Lineal Numérica

Tarea 3

Luis Felipe Silva De Vidts

Parte Teórica

Pregunta 3

Encuentre el número de condición de las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de a y ϵ las matrices anteriores están mal condicionadas?
Para $a \approx 1$ y para $\epsilon \approx 0$

Pregunta 6

Si dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Muestre que si λ es autovalor de A^TA entonces $0 \leq \lambda \leq ||A^T|| * ||A||$.
Demuestre que si A es no singular

$$k_2(A) \leq \sqrt{k_1(A)k_\infty(A)}$$

Primero mostramos la primera parte del enunciado, como λ es valor propio de A^TA, entonces:

$$A^TAv = \lambda v, v \neq 0$$

Luego tomamos norma en ambos lados de la igualdad

$$||A^TAv|| = |\lambda| * ||v||$$

$$|\lambda| = \frac{||A^TAv||}{||v||} \leq \sup_{v\neq 0} \frac{||A^TAv||}{||v||}$$

Por definición de norma matricial nos queda

$$|\lambda| \leq \sup_{v\neq 0} \frac{||A^TAv||}{||v||} = ||A^TA||$$

Ahora por desigualdad de normas matriciales

$$|\lambda| \leq ||A^TA|| \leq ||A^T|| * ||A||$$

con esto obtenemos la cota por arriba, pero para mostrar que $0 \leq \lambda$, probaremos que A^TA es semi-positiva definida. Enonces tenemos que probar que se cumpla

$$x^TA^TAx \geq 0$$

para todo $x \neq 0$, para eso basta con tomar el vector $v = Ax$, luego tenemos que:

$$x^T A^T A x = v^T v$$

eso es equivalente a la norma de v y la norma de cualquier vector es positiva o cero, v puede ser cero ya que no sabemos si A es de rango completo.
$\therefore A^T A$ es semi-positiva definida.
Entonces se cumple la desigualdad

$$0 \leq \lambda \leq ||A^T|| * ||A||$$

Ahora para demostrar el segundo punto citaré unas verdades vistas en el curso de cálculo científico:

$$K_1(A) \leq nK_2(A) \tag{1}$$

$$K_2(A) \leq nK_\infty(A) \tag{2}$$

Teniendo esas verdades es claro que se cumple

$$K_2(A) \leq \frac{1}{n} K_1(A) \tag{3}$$

al multiplicar (2) con (3) nos queda

$$K_2(A)^2 \leq K_1(A) * K_\infty(A)$$
$$K_2(A) \leq \sqrt{K_1(A) * K_\infty(A)}$$

Pregunta 7

Suponga $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Demuestre que $\lambda = 1$ es autovalor de $A^T A$ con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ autovector asociado tal que $x_1 = 0$ y $\sum_{i=2}^n x_i = 0$. Muestre que existen otros dos autovectores tales que $x_2 = \cdots = x_n$ y encuentre los autovalores asociados. Demuestre que:

$$k_2(A) = \frac{1}{2}(n+1)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(n+1)^2}}\right)$$

Note que Para esta matriz el número de condición 2 está relacionado con el tamaño de la matriz A.

Primero podemos ver que $\lambda = 1$ es valor propio de $A^T A$ ya que si tomamos el vector

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

también tenemos que: [1]

$$A^T A = \begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

[1] Lo calcule en Octave

Ahora si multiplicamos $A^T A$ con el vector v, nos quedará:

$$\begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

La última igualdad se cumple porque la suma de los α_i es igual a 0, por enunciado y como se cumple la igualdad anterior, $\lambda = 1$ es valor propio de la matriz $A^T A$.

Ahora tenemos que buscar los vectores que cumplan con ser vectores propios de la matriz $A^T A$ con la condición de que todas sus componentes exceptuando la primera son iguales para eso ahora tomamos el vector:

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \\ \vdots \\ y \end{bmatrix}$$

luego al multiplicarlo por la matriz $A^T A$ nos quedará:

$$\begin{bmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ y \\ \vdots \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nx + (n-1)y \\ x + y \\ x + y \\ \vdots \\ x + y \end{bmatrix}$$

queremos que u sea vector propio por lo que necesitamos que se cumplan las siguientes igualdades:

$$nx + (n-1)y = \lambda x \tag{4}$$

$$x + y = \lambda y \tag{5}$$

donde λ sería el valor propio asociado, ahora despejamos λ de ambas ecuaciones y obtenemos al igualdad:

$$\frac{nx + (n-1)y}{x} = \frac{x + y}{y}$$

que al desarrollar obtenemos la ecuación cuadrática en x

$$0 = x^2 + (1-n)yx + (1-n)y^2$$

cuya solución para x será:

$$x = \frac{-(1-n)y \pm \sqrt{(1-n)^2 y^2 - 4(1-n)y^2}}{2}$$

$$x = y * \left(\frac{(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2 + 4(n-1)}}{2} \right)$$

Por lo que tendremos dos vectores propios a partir de esto, ya que ahora u puede ser con x igual a la solución con $+$ o a la solución con $-$, lo que nos dará los dos vectores propios que buscabamos, para encontrar los valores propios correspondientes basta con reemplazar en la ecuación (5) y obtendremos:

$$y * \left(\frac{(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2 + 4(n-1)}}{2} \right) + y = \lambda * y$$

entonces

$$\lambda = \frac{(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2 + 4(n-1)}}{2} + 1$$

donde cada valor propio le corresponde a cada vector propio según la suma o resta de la raíz de la expresión.

Por último demostraremos la igualdad:

$$k_2(A) = \frac{1}{2}(n+1)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(n+1)^2}}\right)$$

Sabemos que el $K_2(A)$ es equivalente al valor del mayor valor propio de $A^T A$, por lo que buscaremos sus valores propios por definición y analizaremos cual es el mayor. Para eso vemos la siguiente matriz:

$$A^T A - \lambda I = \begin{bmatrix} n-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

al calcular el determinante de esa matriz lo haremos por cofactores y lo haremos usando la primera fila para ir formando los cofactores, por lo que el primer sumando será:

$$(n-\lambda) * (1-\lambda)^{n-1}$$

luego el segundo cofactor será:

$$-1 * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1 * 1 * (1-\lambda)^{n-2}$$

el tercer cofactor seŕa:

$$1 * \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 * -1 * (1-\lambda)^{n-2}$$

en este caso el -1 es porque al tomar el determinante de la submatriz tomamos una posición impar, por lo que se multiplica por -1. El resto de cofactores es de la misma forma y siempre se obtiene el mismo resultado, ya que si el -1 no viene dado por la posición del cofactor al principio, lo tendrá el de la posición al seguir calculando cofactores. Por lo tanto el determinante general quedará de la forma

$$(n-\lambda) * (1-\lambda)^{n-1} - (n-1) * (1-\lambda)^{n-2}$$

Como queremos los valores propios debemos igualarlo a 0, entonces

$$(n-\lambda) * (1-\lambda)^{n-1} - (n-1) * (1-\lambda)^{n-2} = 0$$

si factorizamos por $(1-\lambda)^{n-2}$ y desarollamos llegaremos a la igualdad:

$$(1-\lambda)^{n-2} * (\lambda^2 - (n+1)\lambda + 1) = 0$$

Por lo que $\lambda = 1$ es valor propio con multiplicidad $n-2$ y la solución de la ecuación cuadrática nos dará los otros dos valores propios:

$$\lambda^2 - (n+1)\lambda + 1 = 0$$

que tiene como soluciones:

$$\lambda = \frac{n+1 \pm \sqrt{(n+1)^2 - 4}}{2}$$

Notamos que si $n \geq 2$ la raíz es mayor a cero, por lo que en el caso de la resta de la raíz estaremos obteniendo un valor menor que con la suma. (si $n = 1$, caso real, $\lambda = 1$, lo que es consistente con lo anterior, ya que tiene al menos un valor propio igual a 1). Por lo que tomaremos la solución con la suma, ya que buscamos el valor propio mayor.
Ahora si desarrollamos la expresión anterior, factorizando $(n+1)^2$ en la raíz tendremos:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2\left(1 - \frac{4}{(n+1)^2}\right)}}{2}$$

luego

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{(n+1) + (n+1)\sqrt{\left(1 - \frac{4}{(n+1)^2}\right)}}{2}$$

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(n+1)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(n+1)^2}}\right)$$

Como $\lambda_{\text{máx}}$ es el mayor valor propio de $A^T A$, es equivalente a $K_2(A)$

$$\therefore K_2(A) = \frac{1}{2}(n+1)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(n+1)^2}}\right)$$

Pregunta 11

Considere el SEL $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz dada de elementos a_{ij} tales que $a_{ii} \neq 0$ para todo i y $b \in \mathbb{R}^n$ es un vector dado. Considere la sucesión de vectores $\left\{x^{(k)}\right\}$ definida mediante el siguiente algoritmo

Algoritmo 1 Método iterativo

Dados $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $tol \in \mathbb{R}^+$ y $max \in \mathbb{Z}^+$

for $k = 0, 1, \ldots, max$ **do**
 $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$
 Sea i tal que $|r_i^{(k)}| = \text{máx}_{1\leq j\leq n} |r_j^{(k)}| = ||r^{(k)}||_\infty$
 if $||r^{(k)}||_\infty \leq tol$ **then**
  Return
 end if
 $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} \quad \forall j \neq i$ ▷ Definición de $x^{(k+1)}$
 $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$ ▷ Definición de $x^{(k+1)}$
end for

- Demuestre que si a_i denota la i-ésima columna de A.

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} a_i$$

- Demuestre que:

$$||r^{(k+1)}||_1 \leq \left[1 - \frac{1}{n} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right|\right] ||r^{(k)}||_1$$

  Ayuda: $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

- Deduzca una condición suficiente de convergencia para que la sucesión $\left\{x^{(k)}\right\}$ converja a la solución de $Ax = b$.

Pregunta 15

Suponga que quiere resolver el SEL $Cz = d$ con $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $d \in \mathbb{C}^m$ pero usted sólo tiene rutinas que trabajan con reales. Si $C = A + iB, d = b + ic$ donde A, B, b y c son reales. Muestre que la solución $z = x + iy$ está dada por la solución del SEL (real):

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

¿Cómo resolvería el SEL anterior sin armar la matriz de coeficientes de orden m^2?

Parte Práctica

Pregunta 16

Escriba dos rutinas para clacular para calcular $C = AB$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. La primera debe calcular cada elemento de C mediante productos internos de las fila de A con las columnas de B. La segunda debe formar cada columna de C mediante combinaciones lineales de las columnas de A. Compare sus rutinas en su computador. Es probable que necesite usar matrices grandes antes de observar alguna diferencia importante. Trate de encontrar información sobre el sistema de su computador (cache, política de manejo de la memoria) para tratar de explicar los resultados observados.

Pregunta 19

Repita el Ejemplo numérico de las páginas 300-301 del Libro Trefethen and Bau.

Pregunta 20

Ejercicio didáctico para observar velocidad de convergencia de GC: Considere las matrices A_1 y A_2 ambas simétricas positivo definidas de orden n tales que los autovalores de A_1 están distribuidos uniformemente en $[0{,}95, 1{,}05]$ mientras que los de A_2 son $[100, 200, 300, 400, 500]$ y los $n - 5$ restantes están uniformemente distribuidos en $[0{,}95, 1{,}05]$.
Constuya los vectores b_1 y b_2 tales que los sistemas $A_1x = b_1$ y $A_2y = b_2$ tengan como solución el vector de unos.

- Ejecute CG don diferentes valores de n
- Grafique el error relativo y el residual por iteración para ambos SEL.
- Compare y comente los resultados. Use los resultados vistos en clases para justificar sus observaciones.