Relaciones y sus propiedades

Clase 09

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Pares ordenados

Definición

Para dos elementos a y b, se define el **par ordenado** (a, b) como:

$$(a, b) = \big\{ \{a\}, \{a, b\} \big\}$$

Proposición

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si, y solo si,} \quad a = c \ \text{ y } \ b = d$$

Recordatorio: Producto cartesiano

Definición

- Para dos conjuntos A y B se define el **producto cartesiano** como:

$$A \times B \;=\; \{\; (a, b) \;\mid\; a \in A \,\wedge\, b \in B \;\}$$

- Para conjuntos $A_1, \ldots, A_n$
  se define el **producto cartesiano generalizado**:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \;=\; \{\, (a_1, \ldots, a_n) \;\mid\; a_i \in A_i \,\}$$

Recordatorio: Relaciones

Definición

Dado un conjunto A y B, R es una **relación binaria** sobre A y B si:

$$R \subseteq A \times B$$

Si $B = A$ decimos que R es una relación binaria sobre A.

Ejemplos

- $A \subseteq B$
- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ a \cdot k = b\big)$

Outline

Outline

Representación de relaciones

1. Grafos dirigidos.

2. Matrices sobre bits.

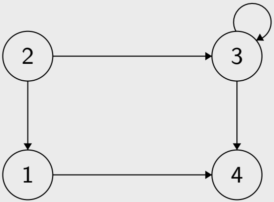
Grafos dirigidos

Definición

Un **grafo dirigido** G es un par (V, E) donde:

- V es un conjunto (**vertices**),
- $E \subseteq V \times V$ es una relación binaria sobre V (**aristas**).

Ejemplo



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1,4), (2,1), (2,3), (3,3), (3,4)\}$

Grafos dirigidos

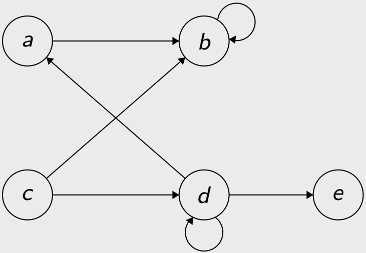
Propiedad

Toda **relación binaria** R sobre A
se puede ver como un **grafo dirigido** $G_R = (A, R)$.

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$



Representación matricial

Definición

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto ordenado arbitrariamente y R una relación binaria sobre A. Definimos la **matriz** M_R de tamaño $n \times n$ como:

$$M_R[i,j] \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; a_i \; R \; a_j \\ 0 & \text{si} \;\; a_i \; \not R \; a_j \end{cases}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Representación matricial

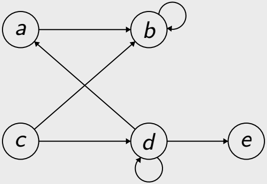
Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \Big\{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\Big\}$$

Entonces la matriz M_R que representa a R es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



¿qué ventaja tiene la representación matricial de una relación?

Operaciones de bits y matrices

Operaciones sobre matrices

Dada dos matrices de bits M y N de tamaño n, definimos las matrices:

$$
\begin{aligned}
(M \vee N)[i,j] &= M[i,j] \vee N[i,j] \\
(M \wedge N)[i,j] &= M[i,j] \wedge N[i,j] \\
(\neg M)[i,j] &= \neg M[i,j]
\end{aligned}
$$

Para dos relacions R y S, ¿qué representa $M_R \vee M_S$? ¿$M_R \wedge M_S$? ¿$\neg M_R$?

Operaciones de bits y matrices

Operaciones sobre matrices

Dada dos matrices de bits M y N de tamaño n definimos el orden $M \leq N$:

$$M[i,j] \quad \leq \quad N[i,j]$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$ suponiendo que $0 \leq 1$.

Para dos relacions R y S, ¿qué representa $M_R \leq M_S$?

Outline

Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R una relación sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Proyección 1**: $\pi_1(R)$ son todos los elementos que estan en la primera componente de R.

$$x \in \pi_1(R) \qquad \text{ssi} \qquad \text{existe un } y \in A \text{ tal que } (x, y) \in R$$

- **Proyección 2**: $\pi_2(R)$ son todos los elementos que estan en la segunda componente de R.

$$y \in \pi_2(R) \qquad \text{ssi} \qquad \text{existe un } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R$$

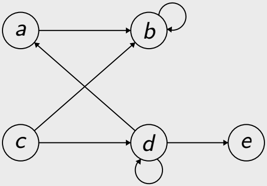
Operaciones entre relaciones

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- ¿cuál es el conjunto $\pi_1(R)$?
- ¿cuál es el conjunto $\pi_2(R)$?

¿a qué corresponde $\pi_1(R)$ en la representación de grafo dirigido?

Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso**: R^{-1} son todos los pares (x, y) tal que $(y, x) \in R$.

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: $R_1 \circ R_2$ son todos los elementos (x, y) tal que existe un z que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$.

$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \exists z \in A. \ (x, z) \in R_1 \ \text{ y } \ (z, y) \in R_2\}$$

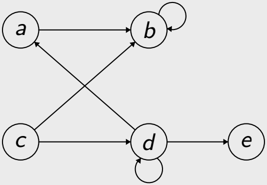
Operaciones entre relaciones

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- ¿cuál es la relación R^{-1}?
- ¿cuál es la relación $R \circ R$?

¿a qué corresponde R^{-1} y $R \circ R$
en la representación de **grafo dirigido** y **matricial**?

Caminos en grafos dirigidos

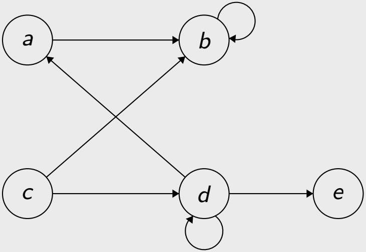
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

Definición

- Un **camino** en G es una secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tal que:
  - $v_i \in V$ para todo $0 \leq i \leq n$.
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $0 \leq i < n$.
- Un **camino simple** en G es un camino donde todos los nodos son distintos en la secuencia.
- El **largo** de un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es igual a n, esto es, el al largo de la secuencia menos uno.

Caminos en grafos dirigidos

Ejemplo



- ¿cuál es un camino de largo 2? ¿y de largo 3?
- ¿cuál es un camino simple de largo 4? ¿y de largo 5?

¿qué significa el grafo de $R \circ R$? ¿y de $R \circ R \circ R$?

Multiplicación de matrices de bits

Definición

Dado dos matrices de bits M y N de tamaño $n \times n$, se define la **multiplicación** $M \cdot N$ tal que:

$$(M \cdot N)[i,j] \;=\; \bigvee_{k=1}^{n} M[i,k] \wedge N[k,j]$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dada una relación R, ¿qué representa $M_R \cdot M_R$?

Outline

Propiedades de relaciones binarias

1. Refleja
2. Irrefleja
3. Simétrica
4. Asimétrica
5. Antisimétrica
6. Transitiva
7. Conexa

Relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. R es una relación **refleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \in R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a, a) \in R$$

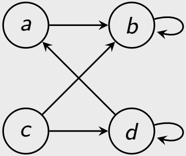
2. R es una relación **irrefleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \notin R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a, a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{ & (a, b),\ (b, b),\ (c, b), \\ & (c, d),\ (d, a),\ (d, d)\ \} \end{aligned}$$

NO es refleja ni irrefleja



Relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. R es una relación **refleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \in R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a, a) \in R$$

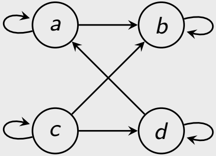
2. R es una relación **irrefleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \notin R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a, a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{\ & (a, b),\ (a, a),\ (b, b),\ (c, b), \\ & (c, c),\ (c, d),\ (d, a),\ (d, d)\ \} \end{aligned}$$

Refleja



Ejemplo de relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Irrefleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \notin R.$

¿cuáles relaciones son reflejas o irreflejas?

- $A \subseteq B$
- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ b = n \cdot k\big)$

Si R NO es refleja, entonces ¿es R irrefleja?

Relaciones simétricas y asimétricas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

3. R es **simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A. \ \ (a, b) \in R \ \rightarrow \ (b, a) \in R$$

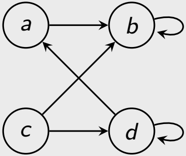
4. R es **asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R$.

$$\forall a, b \in A. \ \ (a, b) \in R \ \rightarrow \ (b, a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{ \ & (a, b), \ (b, b), \ (c, b), \\ & (c, d), \ (d, a), \ (d, d) \ \} \end{aligned}$$

NO es simétrica ni asimétrica



Relaciones simétricas y asimétricas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

3. R es **simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$$

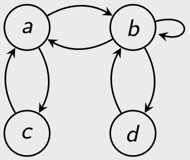
4. R es **asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{\ &(a,b),\ (a,c),\ (b,a), \\ &(b,b),\ (b,d),\ (c,a),\ (d,b)\ \} \end{aligned}$$

Relación simétrica



Relaciones **antisimétricas**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

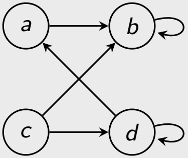
5. R es **antisimétrica** si
para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$.

$$\forall a, b \in A. \ \big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, a) \in R \big) \ \rightarrow \ a = b$$

Ejemplo

$$R = \{ (a, b),\ (b, b),\ (c, b),\ (c, d),\ (d, a),\ (d, d) \}$$

Relación antisimétrica



Ejemplo de relaciones (a, anti)simétricas

Definiciones

3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R\big) \rightarrow a = b.$

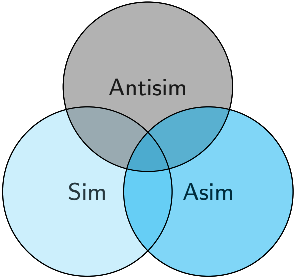
¿cuáles relaciones son (a, anti)simétricas?

- $A \subseteq B$
- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ b = n \cdot k\big)$

Ejemplo de relaciones (a, anti)simétricas

Definiciones

3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R\big) \rightarrow a = b.$



Encuentre un ejemplo para cada intersección.

Relaciones **transitivas** y **conexas**

Definición

6. R es **transitiva** si
   para cada $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A. \ \big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, c) \in R \big) \ \rightarrow \ (a, c) \in R$$

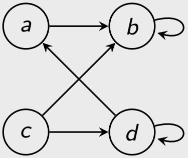
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A. \ (a, b) \in R \ \vee \ (b, a) \in R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{ \ (a, b), \ (b, b), \ (c, b), \\ (c, d), \ (d, a), \ (d, d) \ \} \end{aligned}$$

NO es transitiva ni conexa



Relaciones **transitivas** y **conexas**

Definición

6. R es **transitiva** si
   para cada $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in R\big) \to (a, c) \in R$$

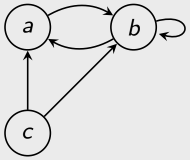
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

Ejemplo

$$R = \{ (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$$

No es conexa ni transitiva



Relaciones **transitivas** y **conexas**

Definición

6. R es **transitiva** si
   para cada $a, b, c \in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A.\ \big((a,b) \in R \ \wedge\ (b,c) \in R\big) \ \rightarrow\ (a,c) \in R$$

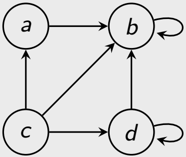
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a,b) \in R$ o $(b,a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \ \vee\ (b,a) \in R$$

Ejemplo

$$R = \{ (a,b),\ (b,b),\ (c,a),\ (c,b),\ (c,d),\ (d,b),\ (d,d) \}$$

Relación transitiva no conexa



Ejemplo de relaciones transitivas y conexas

Definiciones

6. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a,b) \in R \ \wedge\ (b,c) \in R \big) \rightarrow (a,c) \in R.$
7. **Conexa**: $\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \ \vee\ (b,a) \in R.$

¿cuáles relaciones son transitivas o conexas?

- $A \subseteq B$
- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ b = n \cdot k\big)$

Outline

Tipos de relaciones (resumen)

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Irrefleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \notin R.$
3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R\big) \rightarrow a = b.$
6. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R\big) \rightarrow (a, c) \in R.$
7. **Conexa**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$

¿es posible **caracterizar** cada propiedad
en termino de operaciones entre relaciones?

Recordatorio: operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Unión**: $R_1 \cup R_2$ son todos los pares (x, y) tal que $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$.

$$R_1 \cup R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ o } (x, y) \in R_2\}$$

- **Intersección**: $R_1 \cap R_2$ son todos los pares (x, y) tal que $(x, y) \in R_1$ y $(x, y) \in R_2$.

$$R_1 \cap R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ y } (x, y) \in R_2\}$$

Recordatorio: operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso**: R^{-1} son todos los pares (x, y) tal que $(y, x) \in R$.

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: $R_1 \circ R_2$ son todos los elementos (x, y) tal que existe un z que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$.

$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \exists z \in A.\ (x, z) \in R_1 \ \text{ y } \ (z, y) \in R_2\}$$

- **Relación identidad**: I_A contiene solo los pares (x, x) para todo $x \in A$.

$$I_A \quad = \quad \{(x, x) \mid x \in A\}$$

Caracterización de propiedades en termino de operaciones

Teorema

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

1. R es **refleja** ssi $I_A \subseteq R$.
2. R es **irrefleja** ssi $R \cap I_A = \varnothing$.
3. R es **simétrica** ssi $R = R^{-1}$.
4. R es **asimétrica** ssi $R \cap R^{-1} = \varnothing$.
5. R es **antisimétrica** ssi $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
6. R es **transitiva** ssi $R \circ R \subseteq R$.
7. R es **conexa** ssi $R \cup R^{-1} = A \times A$.

Demostración: ejercicio.