Equivalencia y consecuencia lógica para lógica de predicados

Clase 05

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Predicados n-arios

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $O(x, y) \ := \ x \leq y$
- $S(x, y, z) \ := \ x + y = z$
- $Padre(x, y) \ := \ x$ es padre de y

$O(2, 3) \qquad S(5, 10, 15) \qquad S(4, 12, 1) \qquad Padre(\text{Homero}, \text{Bart})$

Recordatorio: Predicados y dominio

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos depredicados y sus dominios

- $O(x, y) \;:=\; x \leq y$ — sobre $\mathbb{N}$

- $S(x, y, z) \;:=\; x + y = z$ — sobre $\mathbb{Q}$

- $Padre(x, y) \;:=\; x$ es padre de y — sobre todas las personas

Recordatorio: Predicados compuestos (o formulas)

Definición

Un predicado es **compuesto** si es un predicado básico, o
la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x,y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) \ := \ \neg P(x)$
- $O'(x,y,z) \ := \ O(x,y) \wedge O(y,z)$
- $P''(x,y) \ := \ (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x,y)$

Recordatorio: Cuantificador universal

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x.\, O(x, y)$ $\qquad O'(2) = \forall x.\, O(x, 2)$
- $O''(x) := \forall y.\, O(x, y)$ $\qquad O''(0) = \forall y.\, O(0, y)$
- $P_0 \ := \ \forall x.\, P(x)$
- $P_0' \ := \ \forall x.\, \big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$

Recordatorio: Cuantificador existencial

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x.\, O(x, y)$ $\qquad$ $O'(2) = \exists x.\, O(x, 2)$
- $O''(x) := \exists y.\, O(x, y)$ $\qquad$ $O''(2) = \exists y.\, O(2, y)$
- $O'''(x, y) := \exists z.\, O(x, z) \wedge O(z, y)$ $\qquad$ $O'''(1, 2)$
- $P_0 \ := \ \exists x.\, P(x)$

Recordatorio: Lógica de Predicados

(re)Definición

Decimos que una predicado es **compuesto** (o también formula) si es:

- un predicado básico,
- la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuatificación **universal** ($\forall$) o **existencial** ($\exists$) de un pred. compuesto.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Outline

Outline

¿de qué depende si una formula sea verdadera o falsa?

¿es la formula verdadera o falsa?

$$\varphi = \exists x.\, \forall y.\, x \leq y$$

- si el "dominio" donde se evalúa φ son los naturales.
- si el "dominio" donde se evalúa φ son los enteros.
- si el "dominio" donde se evalúa φ son nombres de personas. (?)

Depende de la **interpretación** del dominio y símbolo $\leq$.

Interpretaciones

Notación

Desde ahora, diremos que $P(x_1, \ldots, x_n)$ es un **símbolo de predicado**.

Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo P_i un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

Interpretaciones

Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo P_i un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

Ejemplos

Considere los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$.

- $$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(dom) &:= \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(P) &:= x \neq 1 \\ \mathcal{I}_1(O) &:= x \text{ divide a } y \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(dom) &:= \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_2(P) &:= x < 0 \\ \mathcal{I}_2(O) &:= x + y = 0 \end{aligned}$$

Interpretaciones

Definición

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una formula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en φ.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en φ según $\mathcal{I}$.

Ejemplos

Para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}_1(dom) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(P) & := & x \neq 1 \\ \mathcal{I}_1(O) & := & x \text{ divide a } y \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathcal{I}_2(dom) & := & \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_2(P) & := & x < 0 \\ \mathcal{I}_2(O) & := & x + y = 0 \end{array}$$

- $\mathcal{I}_1 \models \forall x. \exists y. P(y) \wedge O(x, y)$?
- $\mathcal{I}_2 \models \forall x. \exists y. P(y) \wedge O(x, y)$?

Interpretaciones

Definición

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una formula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en φ.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en φ según $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ **NO** **satisface** φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ lo anotaremos como:

$$\mathcal{I} \nvDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

$\mathcal{I} \vDash \varphi$ se puede leer como:
"φ es **verdadero** bajo el dominio y predicados dados por $\mathcal{I}$."

Outline

Equivalencia lógica en Lógica de Predicados

Definición

Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ dos formulas en lógica de predicados.
Decimos que φ y ψ son **lógicamente equivalentes**:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$$

Caso especial

Si φ y ψ son oraciones (no tienen variables libres), entonces:

$$\text{para toda interpretación } \mathcal{I}: \qquad \mathcal{I} \models \varphi \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \psi$$

Equivalencia lógica en Lógica de Predicados

Todas las equivalencias de lógica proposicional
son equivalencias en lógica de predicados.

Ejemplos

Para fórmulas α, β y γ en lógica de predicados:

1. **Conmutatividad**: $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
2. **Asociatividad**: $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
3. **Idempotente**: $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
4. **Doble negación**: $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
5. **Distributividad**: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
6. **De Morgan**: $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
7. ...

Equivalencia lógica en Lógica de Predicados

Ejemplos

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalente**:

- $\forall x.\, P(x) \rightarrow R(x) \;\equiv\; \forall x.\, \neg P(x) \vee R(x)$
- $(\forall x.\, P(x)) \rightarrow (\exists y.\, R(y)) \;\equiv\; (\neg \exists y.\, R(y)) \rightarrow (\neg \forall x.\, P(x))$

Nuevas equivalencias lógicas en Lógica de Predicados

Para formulas φ y ψ en lógica de predicados:

1. $\neg\forall x.\,\varphi \;\equiv\; \exists x.\,\neg\varphi$.
2. $\neg\exists x.\,\varphi \;\equiv\; \forall x.\,\neg\varphi$.

Demostración ($\neg\forall x.\,\varphi \;\equiv\; \exists x.\,\neg\varphi$)

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, entonces:

$$
\begin{array}{rll}
\mathcal{I} \models \neg\forall x.\,\varphi(x) & \text{ssi} & \mathcal{I} \not\models \forall x.\,\varphi(x) \\
 & \text{ssi} & \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \varphi(a) \\
 & \text{ssi} & \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg\varphi(a) \\
 & \text{ssi} & \mathcal{I} \models \exists x.\,\neg\varphi(x)
\end{array}
$$

Demuestre la otra equivalencia!

Nuevas equivalencias lógicas en Lógica de Predicados

Para formulas φ y ψ en lógica de predicados:

3. $\forall x.\,(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x.\,\varphi) \wedge (\forall x.\,\psi)$.
4. $\exists x.\,(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x.\,\varphi) \vee (\exists x.\,\psi)$.

Demostración ($\exists x.\,(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x.\,\varphi) \vee (\exists x.\,\psi)$)

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, entonces:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{I} \models \exists x.\,(\varphi(x) \vee \psi(x)) & \text{ssi} & \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a) \vee \psi(a) \\
 & \text{ssi} & \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a) \quad (?) \\
 & \text{ssi} & \mathcal{I} \models \exists x.\,\varphi(x) \\
 & \text{ssi} & \mathcal{I} \models \exists x.\,\varphi(x) \vee \exists x.\,\psi(x)
\end{array}
$$

Demuestre la otra equivalencia!

Nuevas equivalencias lógicas en Lógica de Predicados

¿es verdad que ...?

- $\forall x.\, \exists y.\, \varphi(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \exists x.\, \forall y.\, \varphi(x, y)$ ✕
- $\forall x.\, (\varphi \vee \psi) \stackrel{?}{\equiv} (\forall x.\, \varphi) \vee (\forall x.\, \psi)$ ✕
- $\exists x.\, (\varphi \wedge \psi) \stackrel{?}{\equiv} (\exists x.\, \varphi) \wedge (\exists x.\, \psi)$ ✕

Outline

Tautologías en lógica de predicados

Definición

Una fórmula φ es una **tautología** si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple que:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

¿cuáles fórmulas son tautologías?

- $\forall x.\, P(x) \vee \neg P(x)$ ✓
- $\forall x.\, \exists y.\, x \leq y$ ✗
- $(\forall x.\, P(x)) \rightarrow P(y)$ ✓
- $\forall x.\, \big(P(x) \rightarrow P(y)\big)$ ✗

Consecuencia lógica en lógica de predicados

Para un conjunto Σ de formulas, decimos que $\mathcal{I}$ **satisface** Σ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ (notación $\mathcal{I} \vDash \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$) si:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{para toda } \varphi \in \Sigma$$

Definición

Una oración φ es **consecuencia lógica** de un conjunto de oraciones Σ:

$$\Sigma \;\vDash\; \varphi$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple que:

$$\text{si } \; \mathcal{I} \vDash \Sigma(a_1, \ldots, a_n) \;\; \text{entonces} \;\; \mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

Consecuencia lógica en lógica de predicados

Ejemplo

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Esto lo podemos modelar con el vocabulario $\mathsf{H}(\cdot)$, $\mathsf{M}(\cdot)$:

$$\begin{array}{l} \forall x.\ \mathsf{H}(x) \rightarrow \mathsf{M}(x) \\ \mathsf{H}(\mathsf{y}) \\ \hline \mathsf{M}(\mathsf{y}) \end{array}$$

¿se cumple la **consecuencia lógica**?

¿cuáles son consecuencias lógicas válidas?

1. $\{\ (\forall x.\, \varphi) \vee (\forall x.\, \psi)\ \} \vDash \forall x.\, (\varphi \vee \psi)$ ✓
2. $\{\ \exists x.\, (\varphi \wedge \psi)\ \} \vDash (\exists x.\, \varphi) \wedge (\exists x.\, \psi)$ ✓
3. $\{\ (\exists x.\, \varphi) \wedge (\exists x.\, \psi)\ \} \vDash \exists x.\, (\varphi \wedge \psi)$ ✗
4. $\{\ (\exists x.\, \varphi(x)) \wedge \psi\ \} \vDash \exists y.\, (\varphi(y) \wedge \psi)$, y no aparece en φ o ψ ✓
5. $\{\ \forall x.\, \varphi\ \} \vDash \exists x.\, \varphi$ ✓
6. $\{\ \forall x.\, \exists y.\, R(x, y)\ \} \vDash \exists x.\, \forall y.\, R(x, y)$ ✗

Demuestre estas consecuencias lógicas

Inferencia en lógica de predicados

Para hacer inferencia lógica es muy útil usar nombres de variables!

1. **Instanciación universal:**

$$\frac{\forall x.\, \varphi(x)}{\varphi(a) \qquad \text{para cualquier } a}$$

2. **Generalización universal:**

$$\frac{\varphi(a) \qquad \text{para cualquier } a}{\forall x.\, \varphi(x)}$$

Inferencia en lógica de predicados

Para hacer inferencia lógica es muy útil usar nombres de variables!

3. **Instanciación existencial:**

$$\frac{\exists x.\, \varphi(x)}{\varphi(a) \qquad \text{para algún } a \text{ (nuevo)}}$$

4. **Generalización existencial:**

$$\frac{\varphi(a) \qquad \text{para algún } a}{\exists x.\, \varphi(x)}$$

Inferencia en lógica de predicados

Ejemplo

$$\begin{array}{l} \text{Algún estudiante en la sala no estudio para el examen} \\ \text{Todos los estudiantes en la sala pasaron el examen} \\ \hline \text{Algún estudiante pasó el examen y no estudio} \end{array}$$

¿cómo **modelamos** este problema?

$$\begin{array}{rcl} S(x) & := & x \text{ está en la sala.} \\ E(x) & := & x \text{ estudio para el examen.} \\ X(x) & := & x \text{ pasó el examen.} \end{array}$$

¿cómo queda la **consecuencia lógica**?

$$\begin{array}{c} \exists x.\, S(x) \wedge \neg E(x) \\ \forall x.\, S(x) \rightarrow X(x) \\ \hline \exists x.\, X(x) \wedge \neg E(x) \end{array}$$

Inferencia en lógica de predicados

Ejemplo

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x.\, S(x) \wedge \neg E(x) \\ \forall x.\, S(x) \rightarrow X(x)\end{array}}{\exists x.\, X(x) \wedge \neg E(x)}$$

¿cómo **inferimos** esta consecuencia lógica?

1.	$\exists x.\, S(x) \wedge \neg E(x)$	(Premisa)
2.	$S(a) \wedge \neg E(a)$	(Inst. existencial 1.)
3.	$S(a)$	(Simpl. conjuntiva 2.)
4.	$\forall x.\, S(x) \rightarrow X(x)$	(Premisa)
5.	$S(a) \rightarrow X(a)$	(Inst. universal 4.)
6.	$X(a)$	(Modus ponens 3. y 5.)
7.	$\neg E(a)$	(Simpl. conjuntiva 2.)
8.	$X(a) \wedge \neg E(a)$	(Conjunción 6. y 7.)
9.	$\exists x.\, X(x) \wedge \neg E(x)$	(Gen. existencial 8.)