Elementos extremos y clausuras

Clase 11

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, a) \in R\big) \rightarrow\ a = b.$
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in R\big) \rightarrow\ (a, c) \in R.$

Recordatorio: ordenes totales

Sea A un conjunto y $(A, \preceq)$ un orden parcial.

Definición

Decimos que un orden parcial $(A, \preceq)$ es un **orden total** si $\preceq$ cumple ser:

- **Conexo**: $\forall a, b \in A.\ \ (a, b) \in R \ \text{ o } \ (b, a) \in R$.

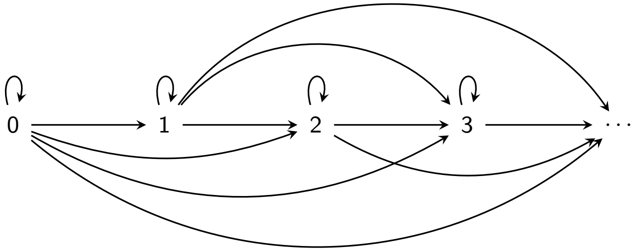
Recordatorio: ejemplos de ordenes parciales

- subconjunto: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$
- menor o igual: $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$
- divide a: $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$
- orden lexicográfico: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq (\mathbf{a}', \mathbf{b}')$
- prefijo: $\mathbf{u} \leq_{\mathbf{p}} \mathbf{v}$
- sufijo: $\mathbf{u} \leq_{\mathbf{s}} \mathbf{v}$
- subpalabra: $\mathbf{u} \leq_{\mathbf{i}} \mathbf{v}$

Outline

¿cómo se ve un orden parcial?

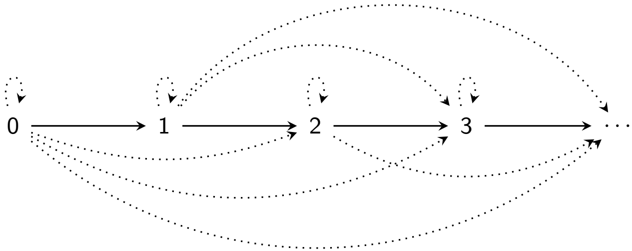
orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



¿podemos **simplificar** la visualización de este grafo?

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$

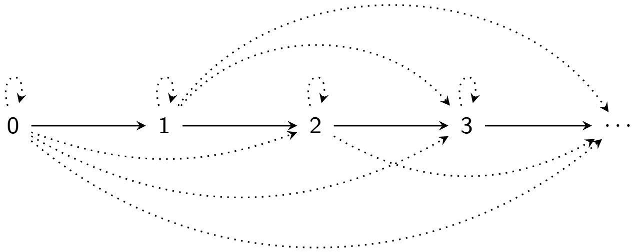


Para simplificar la visualización del grafo podemos:

- Remover **loops**.
- Remover aristas "**transitivas**"

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



Definición

El **diagrama de Hasse** de $(A, \preceq)$ es el diagrama del grafo de $\preceq$ pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \preceq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \preceq$ y $(c, b) \in \preceq$.

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

Diagrama de Hasse de $(\mathbb{N}, \leq)$

Definición

El **diagrama de Hasse** de $(A, \preceq)$ es el diagrama del grafo de $\preceq$ pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \preceq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \preceq$ y $(c, b) \in \preceq$.

¿cómo se ve el orden parcial $\subseteq$?

Diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}),\subseteq)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \varnothing \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

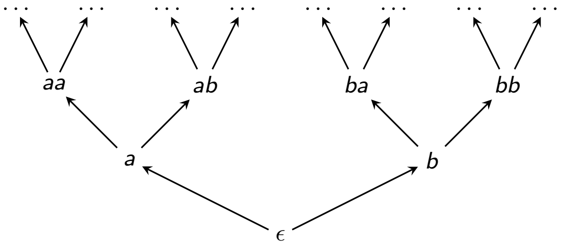
¿cómo se ve el orden lexicográfico $\leq_2$?

Diagrama de Hasse del orden lexicográfico $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_2)$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) \arrow[u] & (1,4) \arrow[u] & (2,4) \arrow[u] & (3,4) \arrow[u] & (4,4) \arrow[u] & \cdots \\
(0,3) \arrow[u] & (1,3) \arrow[u] & (2,3) \arrow[u] & (3,3) \arrow[u] & (4,3) \arrow[u] & \cdots \\
(0,2) \arrow[u] & (1,2) \arrow[u] & (2,2) \arrow[u] & (3,2) \arrow[u] & (4,2) \arrow[u] & \cdots \\
(0,1) \arrow[u] & (1,1) \arrow[u] & (2,1) \arrow[u] & (3,1) \arrow[u] & (4,1) \arrow[u] & \cdots \\
(0,0) \arrow[u] & (1,0) \arrow[u] & (2,0) \arrow[u] & (3,0) \arrow[u] & (4,0) \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

¿cómo se ve el orden parcial $\leq_p$ sobre palabras?

Diagrama de Hasse de $(\Sigma^*, \leq_p)$



¿qué tienen de parecido todos estos grafos?

Caminos y ciclos de un grafo

Definiciones (recordatorio)

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

- Un **camino** en G es una secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en V tal que:
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $0 \leq i < n$.

  Decimos que $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es un **camino de v_0 a v_n**.
- Un **camino simple** es un camino donde todos los vértices son distintos.
- Dos nodos u y v estan **conectados en G** si existe un camino de u a v

Ejemplo

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] & b \arrow[d] \\
c \arrow[r] \arrow[ur] & d \arrow[ul] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}
$$

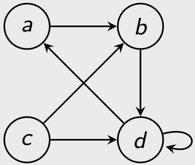
Caminos y ciclos de un grafo

Definiciones

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigído.

- Un **ciclo** en G es un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ donde $v_0 = v_n$.
- Un **ciclo simple** en G es un ciclo $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tal que todos los vértices son distintos, exceptuando el primero y el último.
- El **largo** de un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es igual a n (el número de aristas que atraviesa).

Ejemplo



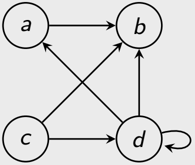
Grafos acíclicos o DAGs

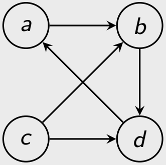
Definición

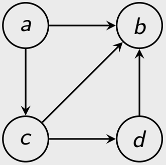
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigído.

- G se dice **acíclico** si NO tiene ciclos.
- Si G es acíclico decimos que G es un **DAG** (**D**irect **A**cyclic **G**raph).

¿cuáles grafos son DAGs?







¿es un orden parcial un DAG?

Teorema

Si $(A, \preceq)$ es un orden parcial,
entonces el grafo dirigido $(A, \preceq)$ NO tiene ciclos ≥ 2.

En otras palabras, el diagrama de Hasse de $(A, \preceq)$ es un DAG.

¿es un orden parcial un DAG?

Demostración: orden parcial $\Rightarrow$ $(A, \preceq)$ NO tiene ciclos ≥ 2

Por contradicción, suponga que:

- $(A, \preceq)$ es un orden parcial.
- el grafo $(A, \preceq)$ tiene un ciclo de largo mayor o igual a 2.

Sea $v_0, v_1, \ldots, v_n$ con $n \geq 2$ el ciclo simple en $(A, \preceq)$ tal que:

- $v_i \preceq v_{i+1}$ para todo $i < n$,
- $v_i \neq v_j$ para todo $i < j < n$, y
- $v_0 = v_n$.

PD: $v_0 \preceq v_i$ para todo $i < n$. (demostración: ejercicio)

De lo anterior, podemos deducir que:

$$v_0 \preceq v_{n-1}, \quad v_{n-1} \preceq v_0 \quad \text{y} \quad v_0 \neq v_{n-1}$$

por lo tanto, tenemos una **contradicción** (¿por qué?).

$\square$

¿es un orden parcial un DAG?

Teorema

Si $(A, \leq)$ es un orden parcial,
entonces el grafo dirigido $(A, \leq)$ NO tiene ciclos ≥ 2.

En otras palabras, el diagrama de Hasse de $(A, \leq)$ es un DAG.

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$.

Si (A, R) es un DAG, entonces ¿es (A, R) un orden parcial?

Outline

Cotas **superiores**, **maximales** y **máximos**

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S si para todo $y \in S$, se cumple $\mathbf{y} \preceq \mathbf{c}$.
- $x^* \in S$ es un elemento **maximal** si ningún elemento es mayor que x^*.

$$\forall y \in S. \quad \mathbf{x}^* \preceq \mathbf{y} \ \rightarrow \ x = y$$

- $x^{**} \in S$ es un **máximo** si x^{**} es mayor a cualquier elemento en S.

$$\forall y \in S. \quad \mathbf{y} \preceq \mathbf{x}^{**}$$

Ejemplo

Sea $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}), \subseteq)$ y $S = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3,5\}\}$.

- ¿cuál es una **cota superior** para S?
- ¿cuál son los elementos **maximales** de S?
- ¿cuál son los **máximos** de S?

Cotas inferiores, minimales y mínimos

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$, se cumple que $c \preceq y$.
- $x^* \in S$ es un elemento **minimal** si ningún elemento es menor que x^*.

$$\forall y \in S. \quad y \preceq x^* \ \rightarrow \ x^* = y$$

- $x^{**} \in S$ es un **mínimo** si x^{**} es menor a cualquier elemento en S.

$$\forall y \in S. \quad x^{**} \preceq y$$

Ejemplo

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.

- ¿cuál es una **cota inferior** para S? ¿es 2 una cota inferior?
- ¿cuál son los elementos **minimales** de S?
- ¿cuál son los **mínimos** de S?

Sobre minimales y mínimos

Preguntas

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

1. Si S tiene un elemento mínimo, entonces ¿es único?
2. ¿siempre tiene S un mínimo?
3. Si x es mínimo, entonces ¿es x minimal?
4. ¿siempre tiene S un elemento minimal?
5. Si x es minimal, entonces ¿es x mínimo?

Demuestre o de un contra-ejemplo.

…lo mismo es cierto sobre maximales / máximos.

Infimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **infimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c se cumple que $c \preceq c^*$.

Ejemplo

- Para $(\mathbb{N} - \{0\}, |\ )$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$, ¿cuál es el ínfimo?
- Para $(\mathbb{N} - \{0\}, |\ )$ y $S \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, ¿cuál es el ínfimo?
- Para $(\mathbb{R}, \leq)$ y $S = (0, 1]$, ¿cuál es el ínfimo?

Infimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **infimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c se cumple que $c \preceq c^*$.

c^* es la **mayor de las cotas inferiores**.

Definición alternativa

Decimos que $c^* \in A$ es un **infimo** de S si c es un máximo del conjunto:

$$S_{\succeq} = \{ \; c \mid c \text{ es una cota inferior de } S \; \}$$

Supremo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si:

1. c^* es una cota superior de S y
2. para toda cota superior c se cumple que $c^* \preceq c$.

Ejemplo

- Para $(\mathbb{N} - \{0\}, |\,)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$, ¿cuál es el supremo?
- Para $(\mathbb{N} - \{0\}, |\,)$ y $S \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, ¿cuál es el supremo?
- Para $(\mathbb{Q}, \leq)$ y $S = \{x \mid x^2 < 2\}$, ¿cuál es el supremo?

Supremo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si:

1. c^* es una cota superior de S y
2. para toda cota superior c se cumple que $c^* \preceq c$.

c^* es el **menor de las cotas superiores**.

Definición alternativa

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si c es un mínimo del conjunto:

$$S_{\preceq} = \left\{ c \mid c \text{ es una cota superior de } S \right\}$$

Sobre ínfimos y supremos

Preguntas

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

1. Si S tiene un ínfimo, entonces ¿es único?
2. Si x es el mínimo, ¿es x el ínfimo?
3. Si S NO tiene mínimo, ¿entonces tiene ínfimo?

Demuestre o de un contra-ejemplo.

...lo mismo es cierto sobre máximos / supremos.

Outline

Clausura **refleja**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

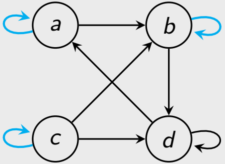
Definición

Una relación $R^r \subseteq A \times A$ es la **clausura refleja** de R si:

1. $R \subseteq R^r$.
2. R^r es refleja.
3. para toda otra relación refleja R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^r \subseteq R'$.

R^r es la **menor relación refleja** que contiene a R.

¿cuál es la clausura refleja de esta relación?



Clausura **refleja**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Una relación $R^r \subseteq A \times A$ es la **clausura refleja** de R si:

1. $R \subseteq R^r$.
2. R^r es refleja.
3. para toda otra relación refleja R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^r \subseteq R'$.

R^r es la **menor relación refleja** que contiene a R.

¿cuál es la relación de R^r con el **mínimo** de un conjunto?

Clausura **transitiva**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

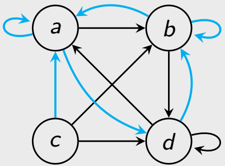
Definición

Una relación $R^t \subseteq A \times A$ es la **clausura transitiva** de R si:

1. $R \subseteq R^t$.
2. R^t es transitiva.
3. para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^t \subseteq R'$.

R^t es la **menor relación transitiva** que contiene a R.

¿cuál es la clausura transitiva de esta relación?



Clausura **transitiva**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Una relación $R^t \subseteq A \times A$ es la **clausura transitiva** de R si:

1. $R \subseteq R^t$.
2. R^t es transitiva.
3. para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^t \subseteq R'$.

R^t es la **menor relación transitiva** que contiene a R.

¿cuál es la relación de R^t con el mínimo de un conjunto?

Clausura transitiva y clausura refleja

- ¿siempre existe R^r o R^t para un R cualquiera?
- ¿cómo podemos calcular R^r o R^t (si existen)?

¿cómo calculamos la clausura **refleja** de una relación?

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^r \;=\; R \;\cup\; I_A$$

donde $I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad.

Demostración: ejercicio.

¿cómo calculamos la clausura **refleja** de una relación?

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^r \;=\; R \,\cup\, I_A$$

donde $I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad.

Propiedad

$(R^r)^r = R^r$ para todo $R \subseteq A \times A$.

¿cómo calculamos la clausura **transitiva**?

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Recordatorio

- $R \circ R \ = \ \left\{ \ (x, y) \ \middle| \ \exists z \in A. \ (x, z) \in R \ \wedge \ (z, y) \in R \ \right\}$
- Se define $R^1 = R$ y $R^2 = R \circ R$.
- Se define $R^i = R^{i-1} \circ R$ para $i > 1$.

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^t \ = \ \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Demostración: $R^t \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

¿qué debemos demostrar?

1. $R \;\subseteq\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. ✓
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.
3. Para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \;\subseteq\; R'$$

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Demostración: $R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.

PD: Si $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ y $(y, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, entonces $(x, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Supongamos que $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ y $(y, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

$\Rightarrow$ existe k y j tal que $(x, y) \in R^k$ y $(y, z) \in R^j$.

$\Rightarrow$ $(x, z) \in R^k \circ R^j = R^{k+j}$

$\Rightarrow$ $(x, z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Demostración: $R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

3. Para toda R' transitiva con $R \subseteq R'$ se cumple: $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$.

Sea R' transitiva tal que $R \subseteq R'$.

PD: para todo $i \geq 1$, $R^i \subseteq R'$. (por inducción)

Caso base: $i = 1$. ✓

Caso inductivo: se cumple $R^i \subseteq R'$ y demostramos que $R^{i+1} \subseteq R'$.

Supongamos que $(x, z) \in R^{i+1}$. (**PD**: $(x, z) \in R'$)

$\Rightarrow$ existe $y \in A$, tal que $(x, y) \in R^i$ y $(y, z) \in R$.

$\Rightarrow$ $(x, y) \in R'$ y $(y, z) \in R'$. (¿por qué?)

$\Rightarrow$ $(x, z) \in R'$. (¿por qué?)

Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$.

$\square$

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

Algunas preguntas:

- Dado un R finito, ¿podemos computar R^t?
- ¿es verdad que $\left(R^t\right)^t = R^t$? (ejercicio)

Relación entre DAGs y ordenes parciales (revisitado)

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Se define la **clausura refleja y transitiva** de R como:

$$R^* \quad = \quad R^t \cup R^r$$

Proposición

Si (A, R) es un **DAG**, entonces (A, R^*) es un **orden parcial**.

Relación entre DAGs y ordenes parciales (revisitado)

Demostración: DAG $\Rightarrow$ orden parcial

¿qué debemos demostrar?

1. R^* es refleja. ✓
2. R^* es antisimétrica.
3. R^* es transitiva. ✓

Relación entre DAGs y ordenes parciales (revisitado)

Demostración: DAG $\Rightarrow$ orden parcial

2. R^* es antisimétrica.

Suponga que (A, R) es un grafo acíclico.

Por contradicción: Supongamos que R^* NO es antisimétrica.

Existe $(x, y) \in R^*$ y $(y, x) \in R^*$, pero $x \neq y$.

$\Rightarrow$ existe $j, k \geq 1$, tal que $(x, y) \in R^j$ y $(y, x) \in R^k$. (¿por qué?)

$\Rightarrow$ existe una secuencia (un camino): (¿por qué?)

$$x = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k = y$$
$$y = y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_j = x$$

tal que $(x_i, x_{i+1}) \in R$ para $i < k$ y $(y_i, y_{i+1}) \in R$ para $i < j$.

$\Rightarrow$ $x = x_0, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_j$ es un ciclo de largo ≥ 2 en (A, R).

contradicción (¿por qué?)

$\square$