Ordenes parciales

Clase 10

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

¿en qué se parecen estas relaciones?

- subconjunto: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$
- menor o igual: $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$
- divide a: $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$

Outline

Outline

Ordenes parciales

Ejemplos

Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R$.
2. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, a) \in R\big) \ \rightarrow\ a = b$.
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in R\big) \ \rightarrow\ (a, c) \in R$.

Ejemplos

- subconjunto: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$
- menor o igual: $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$
- divide a: $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$

¿cómo comparamos el 6 con el 9 en la relación “divide a”?

Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R$.
2. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, a) \in R\big) \rightarrow\ a = b$.
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in R\big) \rightarrow\ (a, c) \in R$.

Un orden parcial sobre A los denotaremos como $(\mathbf{A}, \leq)$.

Ordenes totales

Sea A un conjunto y $(A, \preceq)$ un orden parcial.

Definición

Decimos que un orden parcial $(A, \preceq)$ es un **orden total** si $\preceq$ cumple ser:

- **Conexo**: $\forall a, b \in A.\ \ (a, b) \in R\ \vee\ (b, a) \in R$.

¿cuál de los ordenes parciales anteriores son **totales**?

Outline

Ordenes parciales

Ejemplos

Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación $\leq_2$ entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i, j) \leq_2 (i', j') \quad \text{si, y solo si,} \quad i < i' \vee (i = i' \wedge j \leq j')$$

Ejemplos

- $(2, 100) \leq_2 (3, 5)$?
- $(2, 5) \leq_2 (2, 100)$?
- $(2, 5) \leq_2 (2, 3)$?

Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación $\leq_2$ entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i, j) \;\leq_2\; (i', j') \quad \text{si, y solo si,} \quad i < i' \;\vee\; (i = i' \wedge j \leq j')$$

¿qué propiedades cumple $\leq_2$?

1. ¿es $\leq_2$ **refleja**? ✓
2. ¿es $\leq_2$ **anti-simétrica**? ✓
3. ¿es $\leq_2$ **transitiva**? ✓

Por lo tanto, $\leq_2$ es un **orden parcial**.

Orden lexicográfico

En general, si $(A, \preceq)$ es un orden parcial, entonces siempre podemos definir un orden parcial sobre $A \times A$.

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial.
Se define la relación $\preceq_2$ entre pares en $A \times A$ como:

$$(a, b) \ \preceq_2 \ (a', b') \qquad \text{si, y solo si,} \qquad (a \neq a' \rightarrow a \preceq a') \ \wedge \ (a = a' \rightarrow b \preceq b')$$

Demuestre que $\preceq_2$ es un **orden parcial**.

- La relación $\preceq_2$ se conoce como el **orden lexicográfico** en $A \times A$.
- Para todo k, es posible definir $\preceq_k$ sobre A^k. (¿cómo?)

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- Un **alfabeto** Σ es un conjunto finito de elementos.
- Un elemento $a \in \Sigma$ lo llamaremos una **letra** o **símbolo**.
- Una **palabra** w sobre Σ es una secuencia finita de letras en Σ.

Ejemplo

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ es un alfabeto con tres letras.
- aa, $abbca$, o $acaabaa$ son palabras.

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- El largo $|w|$ de una palabra w sobre Σ es el número de letras.

$$|w| \overset{\text{def}}{\equiv} \#\text{ de letras en } w$$

- Denotaremos ϵ como la **palabra vacía** de largo 0.

$$|\epsilon| \overset{\text{def}}{\equiv} 0$$

- Denotaremos por Σ^* como el **conjunto de todas las palabras** sobre Σ.

Ejemplo

- $\Sigma = \{a, b\}$ es un alfabeto con dos letras.
- $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, \ldots\}$

Concatenación de palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$:

$$u \cdot v \overset{\text{def}}{\equiv} u \ \textbf{concatenado} \text{ con } v$$

$u \cdot v$ corresponde a la secuencia u **seguido** de la secuencia v.

Ejemplo

- $aab \cdot bab = aabbab$
- $bc \cdot aabbc = bcaabbc$
- $\epsilon \cdot abaca = abaca$

Concatenación de palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$:

$$u \cdot v \overset{\text{def}}{\equiv} u \text{ **concatenado** con } v$$

$u \cdot v$ corresponde a la secuencia u **seguido** de la secuencia v.

Propiedades

- La concatenación $\cdot$ es **asociativa**: $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$
- La concatenación $\cdot$ **NO es conmutativa**: $u \cdot v \neq v \cdot u$
- $|u \cdot v| = |u| + |v|$
- $\epsilon \cdot u = u \cdot \epsilon = u$

¿por qué nos podría interesar trabajar con **palabras**?

Relaciones entre palabras

Definición

Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^*:

$$\mathbf{u} \leq_{\mathbf{p}} \mathbf{v} \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w \in \Sigma^*.\ u \cdot w = v$$

$$\mathbf{u} \leq_{\mathbf{s}} \mathbf{v} \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w \in \Sigma^*.\ w \cdot u = v$$

$$\mathbf{u} \leq_{\mathbf{i}} \mathbf{v} \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*.\ w_1 \cdot u \cdot w_2 = v$$

Ejemplos

- $aaab \ \leq_p \ aaabba$? $\checkmark$
- $bab \ \leq_p \ abbab$? $\times$
- $bab \ \leq_s \ baab$? $\times$
- $cba \ \leq_i \ aabbcbaaa$? $\checkmark$

Relaciones entre palabras

Definición

Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^*:

$$\mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{p}} \ \mathbf{v} \qquad \text{si, y solo si,} \qquad \exists w \in \Sigma^*. \ \ u \cdot w = v$$

$$\mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{s}} \ \mathbf{v} \qquad \text{si, y solo si,} \qquad \exists w \in \Sigma^*. \ \ w \cdot u = v$$

$$\mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{i}} \ \mathbf{v} \qquad \text{si, y solo si,} \qquad \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*. \ \ w_1 \cdot u \cdot w_2 = v$$

¿qué propiedades cumple $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$?

1. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **refleja**? ✓
2. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **anti-simétrica**? ✓
3. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **transitiva**? ✓

Por lo tanto, $\leq_p$, $\leq_s$ y $\leq_i$ son **ordenes parciales**.