Inciso (b)

A lo largo de este inciso, a medida que derivamos las ecuaciones log-linealizadas, mencionamos la referencia que le corresponde en el listado final de las ecuaciones, que se encuentra en la página 3. Empezamos con la ecuación (**??**), del problema del padre, que es

$$\psi L_t^{\chi} = C_t^{-\sigma} w_t.$$

Tomando logaritmo de ambos lados, tenemos

$$\ln \psi + \chi \ln L_t = -\sigma \ln C_t + \ln w_t.$$

La correspondiente ecuación en estado estacionario es

$$\ln \psi + \chi \ln L = -\sigma \ln C + \ln w.$$

Restando la ecuación en estado estacionario de la ecuación "dinámica" (i.e., que depende del tiempo), llegamos a

$$\chi(\ln L_t - \ln L) = -\sigma(\ln C_t - \ln C) + (\ln w_t - \ln w).$$

La ecuación log-linealizada es por lo tanto

$$\chi l_t = -\sigma c_t + \hat{w}_t,$$

donde, siguiendo la notación de los autores, las variables minúsculas sin "*hat*" denotan desviaciones logaritmo del estado estacionario de variables mayúsculas, y las variables con "*hat*" denotan desviaciones logarítmicas de variables que ya eran minúsculas en su versión nivel. Esta es la ecuación (B.1).

Continuamos con la ecuación (**??**), que define el factor de descuento estocástico del padre:

$$\Lambda_{t-1,t} = \beta \left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right)^{-\sigma}.$$

Tomando logaritmo de ambos lados:

$$\ln \Lambda_{t-1,t} = \ln \beta - \sigma(\ln C_t - \ln C_{t-1}).$$

En estado estacionario, cuando $C_t = C_{t-1} = C$, tenemos

$$\ln \Lambda = \ln \beta.$$

Restando la ecuación en estado estacionario:

$$\ln \Lambda_{t-1,t} - \ln \Lambda = -\sigma(\ln C_t - \ln C_{t-1}).$$

Como $\lambda_{t-1,t}$ denota la desviación logarítmica de $\Lambda_{t-1,t}$ respecto de su estado estacionario, y c_t denota la desviación logarítmica de C_t respecto de su estado estacionario, tenemos

$$\lambda_{t-1,t} = -\sigma(c_t - c_{t-1}).$$

Esta es la ecuación (B.2). Ahora consideramos la ecuación (**??**), que es la ecuación de Euler para bonos de corto plazo del hogar padre:

$$1 = R_t^s \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Pi_{t+1}^{-1}.$$

Tomando logaritmo de los dos lados, obtenemos

$$0 = \ln R_t^s + \ln[\mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Pi_{t+1}^{-1}],$$

que en estado estacionario es

$$0 = \ln R^s + \ln[\Lambda \Pi^{-1}].$$

Restando la ecuación en estado estacionario de la corriente, tenemos

$$0 = (\ln R_t^s - \ln R^s) + (\ln[\mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Pi_{t+1}^{-1}] - \ln[\Lambda \Pi^{-1}]),$$

y usando las definiciones de las variables en desviación logarítmica llegamos a

$$0 = r_t^s + \mathbb{E}_t \lambda_{t,t+1} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1},$$

que es la ecuación (B.3). La ecuación (**??**) define el factor de descuento estocástico del hijo,

$$\Lambda_{b,t-1,t} = \beta_b \left(\frac{C_{b,t}}{C_{b,t-1}} \right)^{-\sigma},$$

y tomando logaritmo de ambos lados obtenemos

$$\ln \Lambda_{b,t-1,t} = \ln \beta_b - \sigma(\ln C_{b,t} - \ln C_{b,t-1}).$$

En estado estacionario, cuando $C_{b,t} = C_{b,t-1} = C_b$, tenemos

$$\ln \Lambda_b = \ln \beta_b,$$

y restando la ecuación en estado estacionario llegamos a

$$\ln \Lambda_{b,t-1,t} - \ln \Lambda_b = -\sigma(\ln C_{b,t} - \ln C_{b,t-1}),$$

que en términos de desviaciones logarítmicas es

$$\lambda_{b,t-1,t} = -\sigma(c_{b,t} - c_{b,t-1}),$$

correspondiente a la ecuación (B.4). La ecuación (**??**), que define el retorno del bono largo, es

$$R_t^b = \frac{1 + \kappa Q_t}{Q_{t-1}}.$$

Tomando logaritmo,

$$\ln R_t^b = \ln(1 + \kappa Q_t) - \ln Q_{t-1}.$$

En estado estacionario,

$$\ln R^b = \ln(1 + \kappa Q) - \ln Q.$$

Restando la ecuación en estado estacionario,

$$\ln R_t^b - \ln R^b = [\ln(1 + \kappa Q_t) - \ln(1 + \kappa Q)] - (\ln Q_{t-1} - \ln Q).$$

Para linealizar el término $\ln(1+\kappa Q_t)$, usamos la aproximación de Taylor de primer orden de $\ln f(x)$ alrededor de $\bar{x}$:

$$\ln f(x) \approx \ln f(\bar{x}) + \frac{f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}(x - \bar{x}).$$

En nuestro caso, $f(Q_t) = 1 + \kappa Q_t$ y $\bar{x} = Q$, por lo que:

$$\ln(1 + \kappa Q_t) \approx \ln(1 + \kappa Q) + \frac{\kappa}{1 + \kappa Q}(Q_t - Q).$$

Además, notemos que en estado estacionario:

$$R^b = \frac{1 + \kappa Q}{Q} \implies 1 + \kappa Q = R^b Q.$$

Por lo tanto:

$$\ln R_t^b - \ln R^b = \frac{\kappa}{R^b Q}(Q_t - Q) - (\ln Q_{t-1} - \ln Q),$$

que en términos de desviaciones logarítmicas es

$$r_t^b = \frac{\kappa}{R^b} q_t - q_{t-1},$$

que es la ecuación (B.5).

Resumiendo, la lista completa de condiciones de equilibrio linealizadas es

$$\chi l_t = -\sigma c_t + \widehat{w}_t \tag{B.1}$$

$$\lambda_{t-1,t} = -\sigma\left(c_t - c_{t-1}\right) \tag{B.2}$$

$$0 = \mathbb{E}_t \lambda_{t,t+1} + r_t^s - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \tag{B.3}$$

$$\lambda_{b,t-1,t} = -\sigma\left(c_{b,t} - c_{b,t-1}\right) \tag{B.4}$$

$$r_t^b = \frac{\kappa}{R^b} q_t - q_{t-1} \tag{B.5}$$

$$0 = \mathbb{E}_t \lambda_{b,t,t+1} + \mathbb{E}_t r_{t+1}^b - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} \tag{B.6}$$

$$q_t + \widehat{b}_t^{FI} = \theta_t \tag{B.7}$$

$$\left[Qb^{FI}(1-\kappa)\right] q_t + Qb^{FI}\widehat{b}_t^{FI} - \kappa Qb^{FI}\widehat{b}_{t-1}^{FI} + \kappa Qb^{FI}\pi_t + re \cdot \widehat{re}_t = s \cdot \widehat{s}_t \tag{B.8}$$

$$\mathbb{E}_t \lambda_{t,t+1} - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} + \frac{R^b}{sp}\mathbb{E}_t r_{t+1}^b - \frac{R^s}{sp} r_t^s = \omega_t \tag{B.9}$$

$$r_t^{re} = r_t^s \tag{B.10}$$

$$\widehat{p}_{*,t} = \widehat{x}_{1,t} - \widehat{x}_{2,t} \tag{B.11}$$

$$\widehat{x}_{1,t} = (1-\phi\beta)\widehat{p}_{m,t} + (1-\phi\beta)y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t\lambda_{t,t+1} + \epsilon\phi\beta\mathbb{E}_t\pi_{t+1} + \phi\beta\mathbb{E}_t\widehat{x}_{1,t+1} \tag{B.12}$$

$$\widehat{x}_{2,t} = (1-\phi\beta)y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t\lambda_{t,t+1} + (\epsilon-1)\phi\beta\mathbb{E}_t\pi_{t+1} + \phi\beta\mathbb{E}_t\widehat{x}_{2,t+1} \tag{B.13}$$

$$\widehat{w}_t = \widehat{p}_{m,t} + a_t \tag{B.14}$$

$$(1-z)c_t + zc_{b,t} = y_t \tag{B.15}$$

$$\widehat{v}_t^p + y_t = a_t + l_t \tag{B.16}$$

$$\widehat{v}_t^p = 0 \tag{B.17}$$

$$\pi_t = \frac{1-\phi}{\phi}\widehat{p}_{*,t} \tag{B.18}$$

$$q_t + \widehat{b}_t^{cb} = \widehat{re}_t \tag{B.19}$$

$$\widehat{b}_t = \frac{b^{FI}}{b}\widehat{b}_t^{FI} + \frac{b^{cb}}{b}\widehat{b}_t^{cb} \tag{B.20}$$

$$c_{b,t} = q_t + \widehat{b}_t \tag{B.21}$$

$$qe_t = \rho_q qe_{t-1} + s_q\varepsilon_{q,t} \tag{B.22}$$

$$a_t = \rho_A a_{t-1} + s_A\varepsilon_{A,t} \tag{B.23}$$

$$\theta_t = \rho_\theta\theta_{t-1} + s_\theta\varepsilon_{\theta,t} \tag{B.24}$$

$$r_t^{re} = \rho_r r_{t-1}^{re} + (1-\rho_r)\left[\phi_\pi\pi_t + \phi_x x_t\right] + s_r\varepsilon_{r,t} \tag{B.25}$$

$$qe_t = \widehat{re}_t \tag{B.26}$$

$$x_t = y_t - y_t^* \tag{B.27}$$

Usamos los mismos números de ecuación que los autores para facilitar la referencia.