Examen Domiciliario

Macroeconomía II

Felipe Tappata

22 de diciembre de 2024

Este trabajo fue entregado el domingo 22 de diciembre, según lo acordado con el profesor para alumnos afectados por la extensión del plazo.

1. Sobre el trabajo

Este trabajo consiste en una resolución del examen domiciliario final de *Macroeconomía II* de la Maestría en Economía de la Universidad Torcuato Di Tella, cuyas consignas han sido reproducidas en sus correspondientes secciones para facilitar la referencia. El examen consta de dos ejercicios, cada uno con varios incisos, de los cuales algunos implican el uso de código para replicar resultados. La estructura del subdirectorio entregado es la siguiente.

```
entrega/
├── entrega.pdf
├── README.md
└── code/
    ├── swz/
    ├── werning/
    ├── dynare/
    └── uhlig toolkit/
```

Los nombres de los archivos y directorios son relativamente sugestivos de sus contenidos, pero el Apéndice TODO: agregar referencia contiene una descripción más detallada.

2. *Some Unpleasant Monetarist Arithmetic*

Consigna

1. [35 puntos] Werning (2024)

Lea el siguiente artículo: Werning, Iván (2024). Recalculating Sargent and Wallace's 'Some Unpleasant Monetarist Arithmetic',"Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, Vol. 44, No. 3 (November), pp. 1-19.

(a) Derive detalladamente, e interprete, todos los resultados del artículo (excepto los del Apéndice B).

(b) Replique las figuras 1 y 2 . La demanda de dinero utilizada es

$$L\left(\pi_{t,t+1}\right) = \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2}\left(1+\pi_{t,t+1}\right),$$

con $\gamma_1 = 3$ y $\gamma_2 = 2{,}5$. La tasa de interés real es $r = 0{,}05$. Para la Figura 2 utilice $\frac{1+\omega_0}{1+\Delta_0} = \frac{M_{-1,0}+(1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{M_{0,1}} = 0{,}243$ y $D = 0{,}336$.

Inciso (a)

En su clásico *Some Unpleasant Monetarist Arithmetic*, Sargent y Wallace (1981) ilustran el peligro de considerar de manera independiente a la política fiscal y política monetaria, utilizando un modelo simple para mostrar que política monetaria contractiva puede bajar la inflación en el corto plazo, pero a costo de mayor inflación en el futuro. Peor aun, describen un caso en el cual una política monetaria que busca bajar la inflación puede derivar en mayor inflación en el corto plazo y en el futuro. El trabajo de Werning (2024) busca replicar los resultados de Sargent y Wallace (1981) con un modelo diferente, parametrizado en términos de la tasa de interés nominal y del señoreaje en lugar de la tasa de crecimiento del dinero usada por el modelo original.

El modelo

El modelo se define a partir de cuatro ecuaciones: la restricción presupuestaria del gobierno (expresada en términos nominales), una definición de señoreaje, una condición de vaciamiento del mercado de dinero (expresada en términos reales) y la ecuación de Fisher para las tasas de interés,

$$B_{t,t+1} + P_t s_t = P_t d_t + (1 + i_{t-1,t}) B_{t-1,t}, \tag{1}$$

$$s_t = \frac{M_{t,t+1} - M_{t-1,t}}{P_t}, \tag{2}$$

$$\frac{M_{t,t+1}}{P_t} = L_t(i_{t,t+1}), \tag{3}$$

$$1 + i_{t,t+1} = (1 + r_{t,t+1})(1 + \pi_{t,t+1}), \tag{4}$$

para $t = 0, 1, \ldots$ donde P_t es el nivel de precios, d_t es el déficit fiscal real (exógeno), $B_{t,t+1}$ y $M_{t,t+1}$ son las tenencias de los hogares de bonos (del gobierno) y dinero *cash* en términos nominales entre periodos t y $t+1$, $\pi_{t,t+1} = P_{t+1}/P_t - 1$ es la tasa (neta) de inflación, $i_{t,t+1}$ es la tasa de interés nominal y $r_{t,t+1} > 0$ es la tasa de interés real entre t y $t+1$. La condición de *no-Ponzi* implementada es $\lim_t q_t B_{t,t+1}/P_t = 0$, donde q_t es el factor de descuento implicado por el proceso de tasas de interés reales. En particular,

$$q_t = \prod_{k=0}^{t-1} \frac{1}{1 + r_{k,k+1}}$$

para $t \geq 1$ y $q_0 = 1$. La demanda real de dinero, $L_t(i)$ es una función no-creciente. La sucesión de tasas de interés $(r_{t,t+1})$ se asume exógena. Las variables $B_{-1,0}$, $M_{-1,0}$ y $i_{-1,0}$ son valores iniciales predeterminados. Definimos, por último, a los símbolos ω_0 y Δ_0 como

$$\omega_0 \equiv (1 + i_{-1,0}) \frac{B_{-1,0}}{M_{-1,0}}, \tag{5}$$

$$1 + \Delta_0 \equiv \frac{M_{0,1}}{M_{-1,0}}. \tag{6}$$

Restricciones presupuestarias en valor presente

Para obtener las dos expresiones equivalentes que sintetizan las restricciones presupuestarias del gobierno, comenzamos con la restricción presupuestaria periodo-a-periodo y la condición de no-Ponzi. Iterando hacia adelante la restricción presupuestaria del gobierno y aplicando la condición de no-Ponzi, obtenemos la restricción presupuestaria intertemporal

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t s_t - \frac{(1 + i_{-1,0}) B_{-1,0}}{P_0} = D, \tag{7}$$

donde $D \equiv \sum_{t=0}^{\infty} q_t d_t$ representa el valor presente de los déficits fiscales futuros (dado exógenamente). Para llegar a la ecuación (1) del artículo, debemos manipular el término inicial que involucra la deuda. Primero, expresamos el valor real de la deuda inicial en términos de las variables definidas en las ecuaciones (5) y (6):

$$\frac{(1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{P_0} = \frac{(1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{M_{-1,0}}\frac{M_{-1,0}}{P_0} = \omega_0\frac{M_{-1,0}}{P_0}. \tag{8}$$

El nivel de precios inicial P_0 puede expresarse usando la condición de equilibrio del mercado monetario:

$$P_0 = \frac{M_{0,1}}{L_0(i_{0,1})} = \frac{M_{-1,0}(1+\Delta_0)}{L_0(i_{0,1})} \tag{9}$$

Por lo tanto:

$$\frac{(1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{P_0} = \frac{\omega_0}{1+\Delta_0}L_0(i_{0,1}) \tag{10}$$

De manera similar, podemos expresar el señoreaje inicial s_0 como:

$$s_0 = \frac{M_{0,1}-M_{-1,0}}{P_0} = \frac{M_{-1,0}(\Delta_0)}{M_{-1,0}(1+\Delta_0)}L_0(i_{0,1}) = \frac{\Delta_0}{1+\Delta_0}L_0(i_{0,1}) \tag{11}$$

Separando el primer término de la sumatoria y sustituyendo las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} q_t s_t - \frac{(1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{P_0} &= s_0 + \sum_{t=1}^{\infty} q_t s_t - \frac{\omega_0}{1+\Delta_0}L_0(i_{0,1}),\\ &= \frac{\Delta_0}{1+\Delta_0}L_0(i_{0,1}) + \sum_{t=1}^{\infty} q_t s_t - \frac{\omega_0}{1+\Delta_0}L_0(i_{0,1}),\end{aligned}$$

llegando finalmente a

$$\sum_{t=1}^{\infty} q_t s_t + \frac{\Delta_0-\omega_0}{1+\Delta_0}L_0(i_{0,1}) = D, \tag{12}$$

que es la ecuación (1) del artículo de Werning. La interpretación económica es clara: el valor presente del señoreaje futuro ($\sum_{t=1}^{\infty} q_t s_t$) más el término que captura el señoreaje inicial neto del valor real de la deuda inicial ($L_0(i_{0,1})(\Delta_0-\omega_0)/(1+\Delta_0)$) debe ser igual al valor presente de los déficits fiscales futuros (D).

Procedemos ahora a derivar una expresión alternativa para la restricción presupuestaria intertemporal. Partiendo nuevamente de la restricción presupuestaria en valor presente anterior y sustituyendo la definición de señoreaje, $s_t = (M_{t,t+1} - M_{t-1,t})/P_t$, obtenemos

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t\left(\frac{M_{t,t+1}-M_{t-1,t}}{P_t}\right) - \frac{(1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{P_0} = D. \tag{13}$$

Agrupando los términos que contienen $M_{t,t+1}$ en la sumatoria, llegamos a

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t\left(\frac{M_{t,t+1}}{P_t} - \frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{M_{t,t+1}}{P_{t+1}}\right) - \frac{M_{-1,0}}{P_0} - \frac{(1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{P_0} = D. \tag{14}$$

El término dentro del paréntesis puede reescribirse usando la ecuación de Fisher y la definición del factor de descuento,

$$\begin{aligned}\frac{M_{t,t+1}}{P_t} - \frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{M_{t,t+1}}{P_{t+1}} &= \frac{M_{t,t+1}}{P_t}\left(1 - \frac{q_{t+1}}{q_t}\frac{P_t}{P_{t+1}}\right)\\ &= \frac{M_{t,t+1}}{P_t}\left(1 - \frac{1}{1+r_{t,t+1}}\frac{1}{1+\pi_{t,t+1}}\right)\\ &= \frac{M_{t,t+1}}{P_t}\frac{i_{t,t+1}}{1+i_{t,t+1}}.\end{aligned}$$

Los términos iniciales pueden combinarse usando las definiciones de ω_0 y Δ_0,

$$\frac{M_{-1,0}}{P_0} + \frac{(1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{P_0} = \frac{M_{-1,0} + (1+i_{-1,0})B_{-1,0}}{M_{-1,0}(1+\Delta_0)} L_0(i_{0,1}) = \frac{1+\omega_0}{1+\Delta_0} L_0(i_{0,1}). \tag{15}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior obtenemos la ecuación (2) del artículo,

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \frac{i_{t,t+1}}{1+i_{t,t+1}} L_t(i_{t,t+1}) - \frac{1+\omega_0}{1+\Delta_0} L_0(i_{0,1}) = D. \tag{16}$$

Esta expresión alternativa de la restricción presupuestaria tiene una interpretación económica particular. El primer término representa el valor presente del beneficio financiero de usar dinero en lugar de deuda que paga intereses. Desde la perspectiva del gobierno, ambos son pasivos pero con diferentes tasas de retorno: 0 para el dinero y $i_{t,t+1}$ para los bonos. La diferencia en retornos, dada por la tasa nominal $i_{t,t+1}$, actúa entonces como un impuesto sobre el dinero relativo a los bonos. El segundo término captura el valor real inicial de todos los pasivos del gobierno, tanto dinero como deuda.

Dos curvas de Laffer

La curva de Laffer tradicional se define para un escenario estacionario con demanda de dinero e inflación constantes como

$$\frac{\bar{\pi}}{1+\bar{\pi}} L_(\bar{\pi}), \tag{17}$$

donde por simplicidad escribimos L como función de π (en lugar de i), con $1+i = (1+\pi)(1+r)$ y r dado. Esta curva captura el valor real del flujo de nuevas emisiones monetarias. La ecuación (16) sugiere considerar una curva de Laffer alternativa,

$$\frac{i_{t,t+1}}{1+i_{t,t+1}} L_t(i_{t,t+1}) \tag{18}$$

que, señala el autor, tiene la ventaja de no requerir estacionariedad ni una tasa de inflación constante. La figura 1 ilustra ambas curvas de Laffer usando la especificación de demanda de dinero lineal del ejemplo de Sargent y Wallace (1981). Werning explica que como $r > 0$, la curva de Laffer alternativa se encuentra por encima de la tradicional, y que si bien las curvas de Laffer pueden o no tener un máximo, cuando existe para la curva tradicional, el máximo de la curva alternativa ocurre a una tasa de inflación menor. Esto implica que es más probable encontrarse en el lado "malo" de la curva alternativa, que se ve visualmente en la figura 1.

La perspectiva de la tasa de interés nominal

La ecuación (16) nos permite estudiar directamente la relación entre tasas de interés e inflación, explotando la separabilidad aditiva de la restricción presupuestaria. Dado que las tasas reales son exógenas, existe una relación directa entre tasas nominales e inflación para todo $t = 0, 1, \ldots$. TODO: completar

Resultado 1: Inflación más baja hoy, más alta mañana. Si la curva de Laffer alternativa $i/(1+i)L_t(i)$ es monótona creciente, el lado izquierdo de la ecuación (16) es creciente en las tasas de interés. Por lo tanto, partiendo de cualquier secuencia de tasas de interés que satisfaga la restricción presupuestaria, una disminución en las tasas de interés en algunos períodos requiere necesariamente un aumento en otros períodos para mantener la igualdad. Lo mismo aplica entonces para la inflación: una menor inflación hoy debe ser compensada con mayor inflación en el futuro.

Este resultado se extiende a situaciones donde la curva de Laffer alternativa no es uniformemente creciente. La intuición es sencilla: mientras el equilibrio inicial se encuentre en regiones donde la curva es localmente creciente, reducciones marginales en las tasas de interés (y por ende en la inflación) en algunos períodos deben ser compensadas con aumentos en otros períodos para mantener la igualdad (16). Desde una perspectiva de finanzas públicas, este caso corresponde al escenario regular donde reducciones en algunas tasas impositivas requieren aumentos en otras.

Resultado 2: Inflación más alta en todos los períodos. Consideremos ahora el caso donde la curva de Laffer alternativa no es monótona. Para simplificar, supongamos que existe un umbral $\bar{i}_t > 0$ tal que la curva es creciente para $i < \bar{i}_t$ y decreciente para $i > \bar{i}_t$, con $iL_t(i)/(1+i) \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Si el equilibrio inicial se ubica en ambos lados de la curva (es decir, existe algún período t con $i_t < \bar{i}_t$ y otro período $t' \neq 0$ con $i_{t'} > \bar{i}_{t'}$), es posible aumentar marginalmente ambas tasas de interés manteniendo la igualdad (16). La inflación aumentará entonces en ambos períodos. Un caso similar ocurre cuando $i_{0,1} > \bar{i}_0$ pero el término completo $i/(1+i)L_0(i) - ((1+\omega_0)/(1+\Delta_0))L_0(i)$ es localmente creciente.

Lo opuesto también es posible: reducir la inflación en todos los períodos. Desde una perspectiva de finanzas públicas, esta situación corresponde a estar en el lado "bueno" de la curva de Laffer, donde reducciones generalizadas de impuestos son viables.

Si el equilibrio inicial estuviese enteramente en el lado "bueno" de la curva ($i_t < \bar{i}_t$ para todo $t \geq 0$), cambios marginales nos llevan al escenario del Resultado 1. Sin embargo, aumentos discretos en las tasas de interés siguen siendo posibles: basta con saltar al otro lado de la curva, reemplazando $i_{t,t+1}$ con $i'_{t,t+1} > \bar{i}_t > i_{t,t+1}$ tal que $i_{t,t+1}L_t(i_{t,t+1})/(1+i_{t,t+1}) = i'_{t,t+1}L_t(i'_{t,t+1})/(1+i'_{t,t+1})$.

La perspectiva del señoreaje

Estudiamos ahora las variaciones locales en el timing del señoreaje y sus efectos sobre la inflación. Si bien Werning desarrolla el caso general no estacionario en el apéndice, nos enfocamos aquí en el caso estacionario que presenta en el texto principal del artículo.

Partiendo de una trayectoria estacionaria $(\bar{s}, \bar{m}, \bar{\pi})$ con demanda de dinero constante, la solución acotada única para la inflación viene dada por

$$\tilde{\pi}_{t-1,t} = \frac{1}{\epsilon}\frac{1}{\bar{m}}\sum_{\tau=1}^{\infty} \phi^{\tau} \tilde{s}_{t+\tau}, \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

donde $\phi \equiv (1+\bar{\pi})/(1+\epsilon^{-1}(1+\bar{\pi})^{-1})$ y $\epsilon \equiv -L'(\bar{r}+\bar{\pi})/\bar{m}$ es la semielasticidad local de la demanda de dinero. Esta fórmula requiere $\phi < 1$, lo que equivale a estar en la porción creciente de la curva de Laffer tradicional. La relación es forward-looking porque la demanda de dinero también lo es, y solo en el límite cuando $\epsilon \to 0$ la relación se vuelve miope.

Resultado 1 (de nuevo) Cuando

$$\phi < 1/(1+\bar{r}),$$

que se garantiza para ϵ, $\bar{\pi}$ o $\bar{r}$ suficientemente bajos, existe un trade-off ineludible entre inflación presente y futura. Para ver esto, consideremos una reducción del señoreaje en períodos tempranos compensada con aumentos en el futuro que satisfagan $\sum_{t=1}^{\infty}(1/(1+\bar{r}))^t \tilde{s}_t = 0$. Esta recomposición del señoreaje aumenta la inflación en el futuro cuando $\tilde{s}_t$ sube. Sin embargo, reduce la inflación en períodos anteriores porque, con $\phi < 1/(1+\bar{r})$, la fórmula para $\tilde{\pi}$ asigna menos peso al señoreaje futuro. Lo opuesto ocurre si adelantamos el señoreaje: la inflación sube hoy y baja mañana.

Este argumento se concentra en el término $\sum_{t=1}^{\infty}(1/(1+\bar{r}))^t \tilde{s}_t$ de la restricción presupuestaria, pero la lógica y las conclusiones se mantienen al considerar el término $(\Delta_0 - \omega_0)/(1+\Delta_0)L_0(i_{0,1})$.

Resultado 2 (de nuevo) Cuando

$$\phi > 1/(1+\bar{r}),$$

una reducción del señoreaje en períodos tempranos sigue requiriendo aumentos futuros para satisfacer la restricción presupuestaria. Sin embargo, como $\phi > 1/(1+\bar{r})$, la fórmula para $\tilde{\pi}$ asigna más peso al señoreaje futuro que el implícito en la restricción presupuestaria, por lo que la inflación aumenta en todos los períodos. TODO: explicar mejor

Inciso (b)

El archivo `1.b.jl` contiene el código necesario para replicar las figuras 1 y 2 del artículo de Werning (2024), que se pueden ver en las figuras 1 y 2 respectivamente. La figura 1 muestra la curva de Laffer tradicional (la línea punteada de abajo) y la curva alternativa (la línea sólida de arriba) usando la demanda de dinero de Sargent y Wallace (1981). La figura 2 muestra los equilibrios para un ejemplo simple que desarrolla Werning. Enfocándose en equilibrios con inflación constante en π_∞ a partir de $t = 2$, computa $\pi_{0,1}$ como función de π_∞. El conjunto de equilibrios es representado por la curva sólida, cuyas regiones decrecientes y crecientes corresponden a los lados izquierdo y derecho de la curva de Laffer de la figura 1 respectivamente.

TODO: flesh out explanation

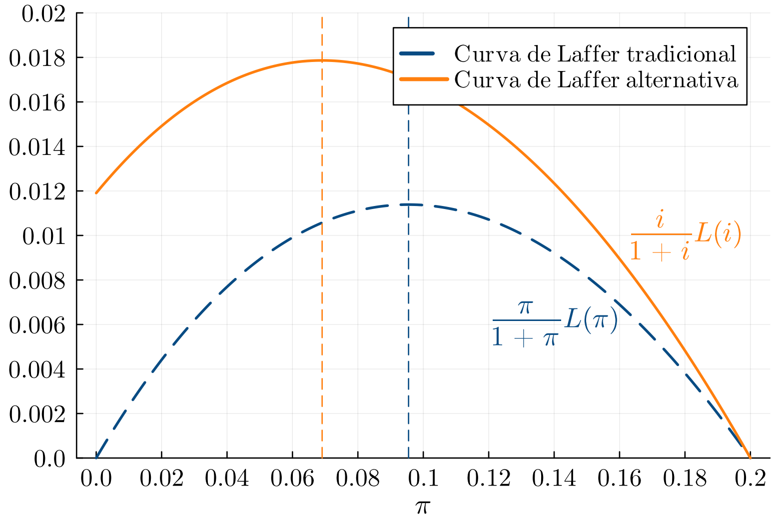


Figura 1: Curvas de Laffer en el ejemplo "espectacular" de Sargent y Wallace

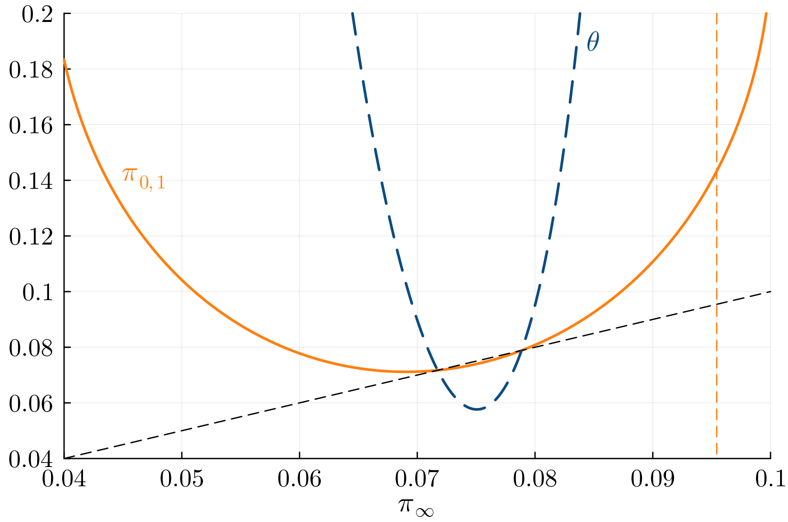


Figura 2: Equilibrios para un ejemplo simple

3. *The Four-Equation New Keynesian Model*

Consigna

2. [65 puntos] Sims, Wu, and Zhang (2023)

En este ejercicio nos vamos a concentrar en las secciones I y II del siguiente artículo: Sims, E., Wu J., and Zhang, J. (2023). "The Four-Equation New Keynesian Model,"The Review of Economics and Statistics, Vol. 105, Issue 4 (July), pp. 931-947.

(a) Resuelva el problema de optimización de cada agente y obtenga todas las ecuaciones correspondientes al modelo no lineal.[a b]

(b) Log-linealice todas las ecuaciones del modelo.[c]

(c) Demuestre que el sistema de ecuaciones log-lineales se puede reducir al siguiente Modelo Neokeynesiano de Cuatro Ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_t &= \mathbb{E}_t x_{t+1} - \frac{1-z}{\sigma}\left(r_t^s - \mathbb{E}_t \pi_{t+1} - r_t^*\right) - z\left(\bar{b}^{FI}\left(\mathbb{E}_t \theta_{t+1} - \theta_t\right) + \bar{b}^{cb}\left(\mathbb{E}_t qe_{t+1} - qe_t\right)\right)\\
\pi_t &= \gamma\zeta x_t - \frac{z\gamma\sigma}{1-z}\left(\bar{b}^{FI}\theta_t + \bar{b}^{cb} qe_t\right) + \beta \mathbb{E}_t \pi_{t+1}\\
r_t^s &= \rho_r r_{t-1}^s + (1-\rho_r)\left(\phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t\right) + v_t\\
qe_t &= \rho_q qe_{t-1} + \epsilon_{q,t}
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
r_t^* &= -\frac{(1-\rho_a)(1+\chi)\sigma}{\sigma + (1-z)\chi} a_t\\
y_t^* &= \frac{(1-z)(1+\chi)}{\sigma + (1-z)\chi} a_t\\
y_t &= y_t^* + x_t\\
a_t &= \rho_a a_{t-1} + \epsilon_{a,t}\\
\theta_t &= \rho_\theta \theta_{t-1} + \epsilon_{\theta,t}\\
v_t &= \rho_v v_{t-1} + \epsilon_{r,t}
\end{aligned}
$$

donde $\mathbb{E}\left(\epsilon_{q,t}\right) = 0, \operatorname{Var}\left(\epsilon_{q,t}\right) = s_q^2, \mathbb{E}\left(\epsilon_{a,t}\right) = 0, \operatorname{Var}\left(\epsilon_{a,t}\right) = s_a^2, \mathbb{E}\left(\epsilon_{\theta,t}\right) = 0, \operatorname{Var}\left(\epsilon_{\theta,t}\right) = s_\theta^2, \mathbb{E}\left(\epsilon_{r,t}\right) = 0 y \operatorname{Var}\left(\epsilon_{r,t}\right) = s_r^2$. Los autores suponen que $\rho_v = 0$.

(d) Describa e interprete cada una de las ecuaciones del modelo. Demuestre que la ecuación (36) del artículo se puede deducir del sistema anterior. Explique bajo qué condiciones el sistema anterior se reduce al modelo neokeynesiano estándar de tres ecuaciones. Liste cada una de las ecuaciones del modelo de tres ecuaciones.

(e) Escriba las ecuaciones del modelo en forma matricial, utilizando el formato *brute force* de Uhlig. Escriba un código para el *toolkit* de Uhlig y resuelva el modelo utilizando la siguiente calibración (muy similar a la de la Tabla 1 del artículo): $\beta = 0{,}995, z = 0{,}33, \sigma = \chi = 1, \bar{b}^{FI} = 0{,}697, \bar{b}^{cb} = 0{,}303, \gamma = 0{,}0846$, $\zeta = 2{,}4925, \rho_r = \rho_a = \rho_\theta = \rho_q = 0{,}8, \rho_v = 0, \phi_\pi = 1{,}5, \phi_x = 0$. Los desvíos estándar de los shocks no son relevantes porque nos vamos a concentrar en las funciones de impulso-respuesta, pero los autores utilizan los siguientes valores: $s_r = s_q = s_\theta = 0{,}01$, y $s_a = 0{,}0125$. Presente la solución del modelo (matrices P y Q). Reporte las funciones de impulso-respuesta para cada shock.

(f) Escriba un código en *Dynare* y demuestre que obtiene la misma solución del inciso anterior.

(g) Replique la Figura 1 del artículo (los tres paneles).[d] Preste atención a la manera en que los autores normalizan los shocks. En el panel (a), la función de impulso-respuesta del producto está calculada para un shock de tamaño $\epsilon_{a,0} = s_a = 0{,}0125$. Comente las similitudes y diferencias entre los resultados de los dos modelos.

(h) Obtenga la ecuación (39) del artículo. Replique la Figura 2.

a. Puede consultar el apéndice *online* del artículo.
b. Para complementar la descripción de los bonos de largo plazo, puede leer la nota adjunta `Bonos.pdf`.
c. Puede consultar el apéndice *online* del artículo.
d. Note que para hacerlo tendrá que resolver también el modelo de tres ecuaciones

Inciso (a)

Problema del hogar padre

Comenzamos con el problema del hogar padre, que maximiza su utilidad esperada descontada sujeto a una restricción presupuestaria. El problema está dado por:

$$\text{máx} \quad \mathbb{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left[\frac{C_{t+j}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \psi \frac{L_{t+j}^{1+\chi}}{1+\chi} \right],$$

sujeto a

$$P_t C_t + S_t \leq W_t L_t + R_{t-1}^s S_{t-1} + P_t D_t + P_t D_t^{FI} + P_t T_t - P_t X_t^b - P_t X_t^{FI},$$

donde C_t es consumo, L_t trabajo, S_t bonos de corto plazo, W_t salario nominal, R_t^s tasa de interés nominal de corto plazo, D_t dividendos de las firmas, D_t^{FI} dividendos de los intermediarios financieros, T_t transferencias del gobierno, X_t^b transferencias al hijo y X_t^{FI} transferencias a los intermediarios. Para resolver este problema, definimos el lagrangiano como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{C_{t+j}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \psi \frac{L_{t+j}^{1+\chi}}{1+\chi} \right] \\
- \mathbb{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^t \varphi_t \big[P_{t+j} C_{t+j} + S_{t+j} - W_{t+j} L_{t+j} - R_{t+j-1}^s S_{t+j-1} - P_{t+j} D_{t+j} - P_{t+j} D_{t+j}^{FI} \\
- P_{t+j} T_{t+j} + P_{t+j} X_{t+j}^b + P_{t+j} X_{t+j}^{FI} \big],
\end{aligned}$$

donde φ_t es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria. Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned}
\{C_t\} &: \beta^t C_t^{-\sigma} = \beta^t \varphi_t P_t \\
\{L_t\} &: -\beta^t \psi L_t^{\chi} = -\beta^t \varphi_t W_t \\
\{S_t\} &: -\beta^t \varphi_t + \beta^{t+1} \varphi_{t+1} R_t^s = 0
\end{aligned}$$

De la primera condición, obtenemos $\varphi_t = C_t^{-\sigma}/P_t$. De la segunda, usando $w_t = W_t/P_t$, obtenemos la ecuación (5):

$$\psi L_t^{\chi} = C_t^{-\sigma} w_t, \tag{20}$$

que representa la condición intratemporal entre consumo y trabajo. Definimos el factor de descuento estocástico como:

$$\Lambda_{t-1,t} = \beta \left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right)^{-\sigma}, \tag{21}$$

que corresponde a la ecuación (6). Finalmente, en la tercera condición de primer orden (para S_t) reemplazamos $\varphi_t = C_t^{-\sigma}/P_t$ para obtener:

$$-\beta^t \frac{C_t^{-\sigma}}{P_t} + \beta^{t+1} \frac{C_{t+1}^{-\sigma}}{P_{t+1}} R_t^s = 0.$$

Multiplicando por P_t y reordenando:

$$\beta^t C_t^{-\sigma} = \beta^{t+1} \frac{P_t}{P_{t+1}} C_{t+1}^{-\sigma} R_t^s.$$

Dividiendo ambos lados por $\beta^t C_t^{-\sigma}$:

$$1 = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} R_t^s.$$

Usando la definición de inflación bruta $\Pi_{t+1} = P_{t+1}/P_t$ y notando que el término $\beta(C_{t+1}/C_t)^{-\sigma}$ es el factor de descuento estocástico $\Lambda_{t,t+1}$ definido en la ecuación (6), obtenemos la ecuación de Euler (7)

$$1 = R_t^s \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Pi_{t+1}^{-1}, \tag{22}$$

que representa la condición de optimalidad intertemporal para bonos de corto plazo.

Rendimiento del bono *long*

Los bonos de largo plazo en el modelo son perpetuidades que pagan cupones que decaen geométricamente a tasa $\kappa \in [0, 1]$. Un bono emitido en t paga un dólar nominal en $t + 1$, κ dólares en $t + 2$, κ^2 dólares en $t + 3$, y así sucesivamente. Como se demuestra en `Bonds.pdf`, no arbitraje implica que el precio en t de un bono emitido en $t - k$ satisface $Q_{t,t-k} = \kappa^k Q_t$, donde Q_t es el precio de un bono nuevo.

El retorno bruto nominal del bono largo entre $t - 1$ y t está dado por

$$R_t^b = \frac{1 + \kappa Q_t}{Q_{t-1}}, \tag{23}$$

capturando en el numerador la suma del cupón corriente y el valor presente de los cupones futuros.

Problema del hogar hijo

El hogar hijo maximiza una función de utilidad similar a la del padre, pero con dos diferencias fundamentales: no trabaja y descuenta el futuro con un factor $\beta_b < \beta$ (es más impaciente que el padre). Su problema está dado por

$$\text{máx} \quad V_{b,t} = \mathbb{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta_b^j \left[\frac{C_{b,t+j}^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \right],$$

sujeto a la restricción presupuestaria

$$P_t C_{b,t} + B_{t-1} \leq Q_t (B_t - \kappa B_{t-1}) + P_t X_t^b,$$

donde $C_{b,t}$ es su consumo, B_t es la cantidad de bonos largos que emite, Q_t es el precio de dichos bonos, y X_t^b es la transferencia que recibe del padre.

Para resolver este problema, definimos el lagrangiano como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & \mathbb{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta_b^j \left[\frac{C_{b,t+j}^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \right] \\ & - \mathbb{E}_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta_b^j \varphi_{b,t+j} \left[P_{t+j} C_{b,t+j} + B_{t+j-1} - Q_{t+j}(B_{t+j} - \kappa B_{t+j-1}) - P_{t+j} X_{t+j}^b \right], \end{aligned}$$

donde $\varphi_{b,t}$ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria del hijo.

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \{C_{b,t}\} &: \beta_b^t C_{b,t}^{-\sigma} = \beta_b^t \varphi_{b,t} P_t \\ \{B_t\} &: -\beta_b^t \varphi_{b,t} Q_t + \beta_b^{t+1} \varphi_{b,t+1} (1 + \kappa Q_{t+1}) = 0 \end{aligned}$$

De la primera condición obtenemos $\varphi_{b,t} = C_{b,t}^{-\sigma}/P_t$. Definimos el factor de descuento estocástico del hijo como:

$$\Lambda_{b,t-1,t} = \beta_b \left(\frac{C_{b,t}}{C_{b,t-1}} \right)^{-\sigma}, \tag{24}$$

que corresponde a la ecuación (13).

De la segunda condición, reemplazando la expresión para $\varphi_{b,t}$ y $\varphi_{b,t+1}$, obtenemos:

$$-\frac{C_{b,t}^{-\sigma}}{P_t}Q_t + \beta_b \frac{C_{b,t+1}^{-\sigma}}{P_{t+1}}(1+\kappa Q_{t+1}) = 0.$$

Multiplicando por $P_t/C_{b,t}^{-\sigma}$:

$$-Q_t + \beta_b \frac{P_t}{P_{t+1}} \left(\frac{C_{b,t+1}}{C_{b,t}}\right)^{-\sigma} (1+\kappa Q_{t+1}) = 0.$$

Reordenando:

$$Q_t = \beta_b \frac{P_t}{P_{t+1}} \left(\frac{C_{b,t+1}}{C_{b,t}}\right)^{-\sigma} (1+\kappa Q_{t+1}).$$

Usando la definición del retorno bruto del bono largo $R_{t+1}^b = (1+\kappa Q_{t+1})/Q_t$ y la inflación bruta $\Pi_{t+1} = P_{t+1}/P_t$:

$$1 = \beta_b \left(\frac{C_{b,t+1}}{C_{b,t}}\right)^{-\sigma} R_{t+1}^b \Pi_{t+1}^{-1}.$$

Tomando esperanza y usando la definición del factor de descuento estocástico del hijo, obtenemos la ecuación (14):

$$1 = \mathbb{E}_t \Lambda_{b,t,t+1} R_{t+1}^b \Pi_{t+1}^{-1}, \tag{25}$$

que representa la condición de optimalidad intertemporal para bonos de largo plazo.

Problema del intermediario financiero

Los intermediarios financieros viven un período y reciben capital del hogar padre en forma de transferencia $P_t X_t^{FI}$. Esta transferencia tiene dos componentes: capital nuevo, fijo en $\bar{X}^{FI}$, y el valor de los bonos largos mantenidos por intermediarios previos, valorados a κQ_t:

$$P_t X_t^{FI} = P_t \bar{X}^{FI} + \kappa Q_t B_{t-1}^{FI}.$$

El intermediario puede atraer depósitos S_t^{FI} del hogar padre, mantener bonos largos B_t^{FI} o reservas RE_t^{FI} en el banco central. Su balance satisface:

$$Q_t B_t^{FI} + RE_t^{FI} = S_t^{FI} + P_t X_t^{FI}. \tag{26}$$

El intermediario está sujeto a una "restricción de apalancamiento" (*risk-weighted leverage constraint*), definida por

$$Q_t B_t^{FI} \leq \Theta_t P_t \bar{X}^{FI}, \tag{27}$$

donde Θ_t es un shock exógeno a las condiciones crediticias. Esta ecuación, siguiendo la interpretación de los autores, dice que el valor de bonos largos en tenencia del intermediario no puede exceder un múltiplo (que varía en el tiempo) de la transferencia del hogar padre. Se asume que el proceso estocástico que sigue Θ_t es conocido, y los cambios en Θ_t se denominan "shocks al crédito" (*credit shocks*). Los bonos largos tienen ponderación de riesgo unitaria, mientras que las reservas tienen ponderación nula. El intermediario maximiza el valor esperado de sus dividendos futuros, descontados por el factor de descuento estocástico del hogar padre:

$$\mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Pi_{t+1}^{-1} \left[(R_{t+1}^b - R_t^s) Q_t B_t^{FI} + (R_t^{re} - R_t^s) RE_t^{FI} + R_t^s P_t X_t^{FI} \right],$$

donde R_t^s es el costo de los depósitos, R_t^{re} el retorno sobre reservas, y R_{t+1}^b el retorno sobre bonos largos. Definiendo el lagrangiano como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \Lambda_{t,t+1} \Pi_{t+1}^{-1} &\left[(R_{t+1}^b - R_t^s) Q_t B_t^{FI} + (R_t^{re} - R_t^s) RE_t^{FI} + R_t^s P_t X_t^{FI} \right], \\ &- \Omega_t [Q_t B_t^{FI} - \Theta_t P_t \bar{X}^{FI}],\end{aligned}$$

las condiciones de primer orden son

$$\{B_t^{FI}\}: \quad \mathbb{E}_t\Lambda_{t,t+1}\Pi_{t+1}^{-1}(R_{t+1}^b - R_t^s) = \Omega_t, \tag{28}$$
$$\{RE_t^{FI}\}: \quad \mathbb{E}_t\Lambda_{t,t+1}\Pi_{t+1}^{-1}(R_t^{re} - R_t^s) = 0. \tag{29}$$

Estas son las ecuaciones (19) y (20) del *paper*. La segunda ecuación implica que el intermediario mantendrá una cantidad indeterminada de reservas cuando $R_t^{re} = R_t^s$. La primera ecuación muestra que la restricción de apalancamiento vinculante ($\Omega_t > 0$) genera retornos en exceso (*excess return*) sobre los bonos largos.

Para expresar las ecuaciones del intermediario financiero en términos reales, definimos las variables reales de la manera típica, como el cociente entre la variable nominal y el nivel de precios: $b_t^{FI} = B_t^{FI}/P_t$, $re_t = RE_t/P_t$, $s_t = S_t/P_t$ y X_t^{FI} ya está expresado en términos reales. Dividiendo la ecuación del balance del intermediario (26) por P_t, obtenemos

$$Q_t b_t^{FI} + re_t = s_t + X_t^{FI}, \tag{30}$$

que corresponde a la ecuación (A.6) del apéndice. De manera similar, dividiendo la restricción de apalancamiento (27) por P_t, obtenemos

$$Q_t b_t^{FI} \leq \Theta_t \bar{X}^{FI}, \tag{31}$$

que corresponde a la ecuación (A.7) del apéndice.

Producción: firma mayorista

La firma mayorista (*wholesale*) opera una tecnología lineal en trabajo para producir el bien mayorista $Y_{m,t}$:

$$Y_{m,t} = A_t L_t, \tag{32}$$

donde A_t es un shock exógeno de productividad que sigue un proceso estocástico conocido, y L_t es el trabajo provisto por el hogar padre. La firma toma como dados el salario nominal W_t y el precio nominal del bien mayorista $P_{m,t}$, y maximiza sus beneficios, dados por

$$\max_{L_t} P_{m,t} A_t L_t - W_t L_t.$$

La condición de primer orden con respecto a L_t es

$$P_{m,t} A_t = W_t,$$

que es la típica para firmas con rendimientos constantes a escala. Dividiendo ambos lados por P_t y definiendo el costo marginal real como $p_{m,t} = P_{m,t}/P_t$ y el salario real como $w_t = W_t/P_t$, obtenemos la ecuación (27) del paper:

$$w_t = p_{m,t} A_t. \tag{33}$$

Producción: firmas minoristas

Vaciamiento de mercados y producción agregada

TODO: Review this section Las condiciones de vaciamiento de mercado requieren que:

$$RE_t = RE_t^{FI} \qquad \text{(el intermediario mantiene todas las reservas)}$$
$$S_t = S_t^{FI} \qquad \text{(el intermediario mantiene todos los bonos de corto plazo)}$$
$$B_t = B_t^{FI} + B_t^{cb} \qquad \text{(los bonos largos son mantenidos por el FI o el BC)}$$

Para derivar la restricción agregada de recursos, partimos de las restricciones presupuestarias individuales. La restricción del hogar padre es:

$$P_t C_t + S_t = W_t L_t + R_{t-1}^s S_{t-1} + P_t D_t + P_t D_t^{FI} + P_t T_t - P_t X_t^b - P_t X_t^{FI},$$

mientras que la del hijo satisface:

$$P_t C_{b,t} + B_{t-1} = Q_t(B_t - \kappa B_{t-1}) + P_t X_t^b.$$

Al sumar estas ecuaciones, varios términos se cancelan. La transferencia X_t^b aparece con signo opuesto en ambas ecuaciones, la transferencia X_t^{FI} es un ingreso para el intermediario financiero que afecta sus dividendos D_t^{FI}, y las operaciones con bonos y reservas son transferencias entre agentes que se cancelan entre sí.

Por el lado de la producción, los ingresos del sector mayorista son $P_{m,t}Y_{m,t} = W_t L_t$ y los beneficios del sector minorista son $P_t D_t = P_t Y_t - P_{m,t} Y_{m,t}$. Al sumar y simplificar estas expresiones, obtenemos que $P_t Y_t = W_t L_t + P_t D_t$.

Finalmente, sustituyendo estas expresiones y dividiendo por P_t, llegamos a la restricción agregada de recursos:

$$Y_t = C_t + C_{b,t}, \tag{34}$$

que indica que la producción total debe ser igual a la suma del consumo del padre y del hijo.

Por el lado de la producción, cada minorista f enfrenta una demanda:

$$Y_t(f) = \left(\frac{P_t(f)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t.$$

Para obtener la producción agregada, integramos sobre todas las variedades:

$$Y_t = \int_0^1 Y_t(f) df = \int_0^1 \left(\frac{P_t(f)}{P_t}\right)^{-\epsilon} Y_t df.$$

Dado que cada productor minorista usa una unidad de bien mayorista para producir una unidad de su variedad, la producción total del sector mayorista debe igualar la demanda agregada ajustada por la dispersión de precios:

$$Y_{m,t} = \int_0^1 Y_t(f) df = Y_t \int_0^1 \left(\frac{P_t(f)}{P_t}\right)^{-\epsilon} df = Y_t v_t^p,$$

donde v_t^p es la medida de dispersión de precios definida como:

$$v_t^p = \int_0^1 \left(\frac{P_t(f)}{P_t}\right)^{-\epsilon} df.$$

Usando la función de producción de las firmas mayoristas $Y_{m,t} = A_t L_t$, obtenemos:

$$Y_t v_t^p = A_t L_t, \tag{35}$$

que corresponde a la ecuación (31) del paper.

Inciso (b)

Empezamos con la ecuación (5) de Sims, Wu y Zhang (2023), que describe la oferta de trabajo del padre:

$$\psi L_t^{\chi} = C_t^{-\sigma} w_t.$$

Tomando logaritmos naturales de ambos lados:

$$\ln \psi + \chi \ln L_t = -\sigma \ln C_t + \ln w_t.$$

En estado estacionario:

$$\ln \psi + \chi \ln L = -\sigma \ln C + \ln w.$$

Restando la ecuación en estado estacionario de la ecuación dinámica:

$$\chi(\ln L_t - \ln L) = -\sigma(\ln C_t - \ln C) + (\ln w_t - \ln w).$$

La ecuación log-linealizada es por lo tanto

$$\chi l_t = -\sigma c_t + \hat{w}_t,$$

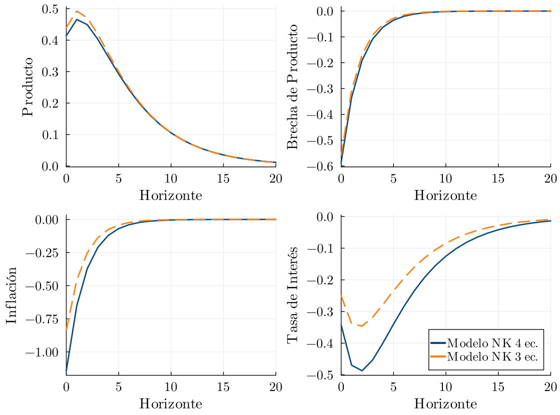
donde las variables minúsculas sin circunflejo denotan desviaciones logarítmicas del estado estacionario de variables mayúsculas, y las variables con circunflejo denotan desviaciones logarítmicas de variables que ya eran minúsculas. Esta es la ecuación (B.1).

Resumiendo, la lista completa de condiciones de equilibrio linealizadas es

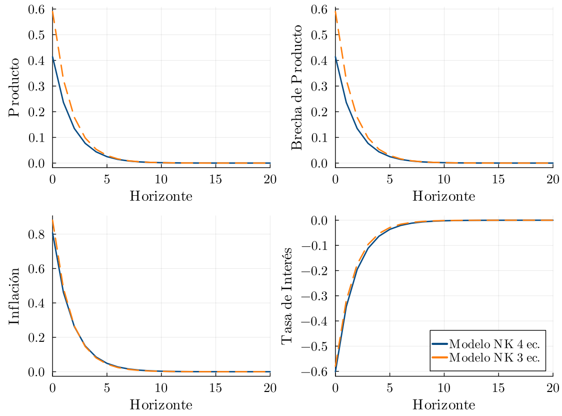
$$\chi l_t = -\sigma c_t + \widehat{w}_t \tag{B.1}$$
$$\lambda_{t-1,t} = -\sigma\left(c_t - c_{t-1}\right) \tag{B.2}$$
$$0 = \mathbb{E}_t\lambda_{t,t+1} + r_t^s - \mathbb{E}_t\pi_{t+1} \tag{B.3}$$
$$\lambda_{b,t-1,t} = -\sigma\left(c_{b,t} - c_{b,t-1}\right) \tag{B.4}$$
$$r_t^b = \frac{\kappa}{R^b}q_t - q_{t-1} \tag{B.5}$$
$$0 = \mathbb{E}_t\lambda_{b,t,t+1} + \mathbb{E}_t r_{t+1}^b - \mathbb{E}_t\pi_{t+1} \tag{B.6}$$
$$q_t + \widehat{b}_t^{FI} = \theta_t \tag{B.7}$$
$$\left[Qb^{FI}(1-\kappa)\right]q_t + Qb^{FI}\widehat{b}_t^{FI} - \kappa Qb^{FI}\widehat{b}_{t-1}^{FI} + \kappa Qb^{FI}\pi_t + re\cdot\widehat{re}_t = s\cdot\widehat{s}_t \tag{B.8}$$
$$\mathbb{E}_t\lambda_{t,t+1} - \mathbb{E}_t\pi_{t+1} + \frac{R^b}{sp}\mathbb{E}_t r_{t+1}^b - \frac{R^s}{sp}r_t^s = \omega_t \tag{B.9}$$
$$r_t^{re} = r_t^s \tag{B.10}$$
$$\widehat{p}_{*,t} = \widehat{x}_{1,t} - \widehat{x}_{2,t} \tag{B.11}$$
$$\widehat{x}_{1,t} = (1-\phi\beta)\widehat{p}_{m,t} + (1-\phi\beta)y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t\lambda_{t,t+1} + \epsilon\phi\beta\mathbb{E}_t\pi_{t+1} + \phi\beta\mathbb{E}_t\widehat{x}_{1,t+1} \tag{B.12}$$
$$\widehat{x}_{2,t} = (1-\phi\beta)y_t + \phi\beta\mathbb{E}_t\lambda_{t,t+1} + (\epsilon-1)\phi\beta\mathbb{E}_t\pi_{t+1} + \phi\beta\mathbb{E}_t\widehat{x}_{2,t+1} \tag{B.13}$$
$$\widehat{w}_t = \widehat{p}_{m,t} + a_t \tag{B.14}$$
$$(1-z)c_t + zc_{b,t} = y_t \tag{B.15}$$
$$\widehat{v}_t^p + y_t = a_t + l_t \tag{B.16}$$
$$\widehat{v}_t^p = 0 \tag{B.17}$$
$$\pi_t = \frac{1-\phi}{\phi}\widehat{p}_{*,t} \tag{B.18}$$
$$q_t + \widehat{b}_t^{cb} = \widehat{re}_t \tag{B.19}$$
$$\widehat{b}_t = \frac{b^{FI}}{b}\widehat{b}_t^{FI} + \frac{b^{cb}}{b}\widehat{b}_t^{cb} \tag{B.20}$$
$$c_{b,t} = q_t + \widehat{b}_t \tag{B.21}$$
$$qe_t = \rho_q qe_{t-1} + s_q\varepsilon_{q,t} \tag{B.22}$$
$$a_t = \rho_A a_{t-1} + s_A\varepsilon_{A,t} \tag{B.23}$$
$$\theta_t = \rho_\theta\theta_{t-1} + s_\theta\varepsilon_{\theta,t} \tag{B.24}$$
$$r_t^{re} = \rho_r r_{t-1}^{re} + (1-\rho_r)\left[\phi_\pi\pi_t + \phi_x x_t\right] + s_r\varepsilon_{r,t} \tag{B.25}$$
$$qe_t = \widehat{re}_t \tag{B.26}$$
$$x_t = y_t - y_t^* \tag{B.27}$$

Inciso (g)

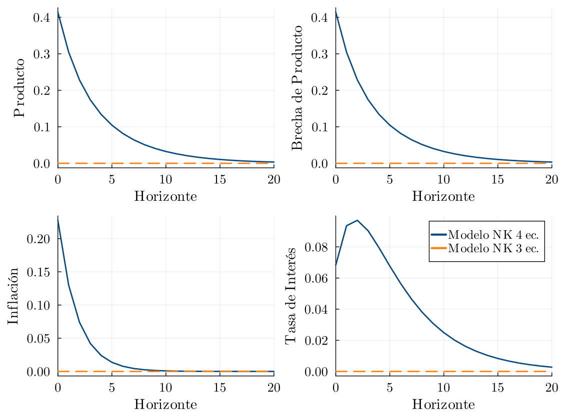
Inciso (h)



(a) Shock de Producto Potencial



(b) Shock de Política Monetaria



(c) Shock de Crédito/*QE*

Figura 3: Funciones impulso-respuesta para el modelo *New Keynesian* de cuatro y tres ecuaciones

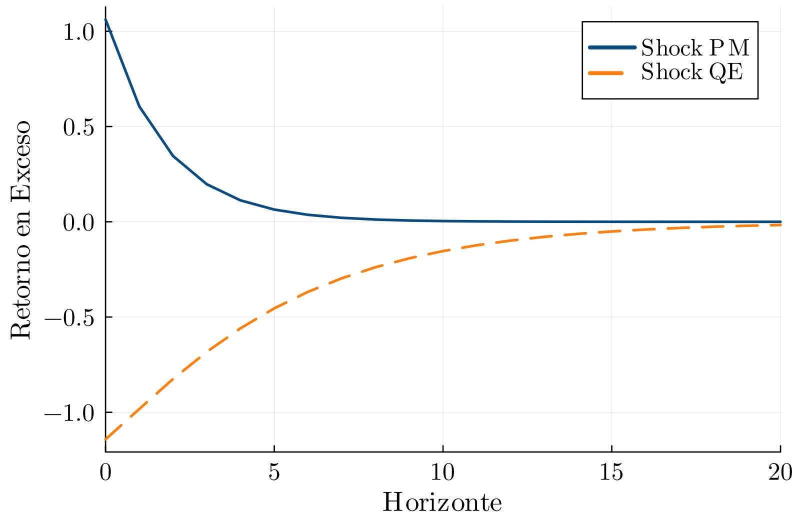


Figura 4: Respuesta de *Excess Return* del bono *long* a shocks de política monetaria y de *QE*

A. Descripción detallada de archivos

TODO: completar

Referencias

Sargent, Thomas J. y Neil Wallace. 1981. Some Unpleasant Monetarist Arithmetic. *Quarterly Review* 5, n.º 3 (septiembre). ISSN: 02715287, visitado 20 de diciembre de 2024. https://doi.org/10.21034/qr.531. https://researchdatabase.minneapolisfed.org/concern/publications/0c483j46q.

Sims, Eric, Jing Cynthia Wu y Ji Zhang. 2023. The Four-Equation New Keynesian Model. *Review of Economics and Statistics* 105, n.º 4 (11 de julio de 2023): 931-947. ISSN: 0034-6535, 1530-9142, visitado 21 de diciembre de 2024. https://doi.org/10.1162/rest_a_01071. https://direct.mit.edu/rest/article/105/4/931/102828/The-Four-Equation-New-Keynesian-Model.

Werning, Iván. 2024. Recalculating Sargent and Wallace's "Some Unpleasant Monetarist Arithmetic". *Quarterly Review* 44, n.º 3 (13 de noviembre de 2024). ISSN: 0271-5287, visitado 20 de diciembre de 2024. https://doi.org/10.21034/qr.4431. https://researchdatabase.minneapolisfed.org/concern/publications/kp78gg58h.