UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IME - Instituto de Matemática e Estatística
DMPA - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01169-E1 - Cálculo Numérico
Prova 2 - A - Data: 14/06/2017

Nota

Nome: GABARITO Matrícula: ____________

- Responda às questões individualmente.
- O uso do computador é exclusivo para o `GNU Octave` disponível no sistema operacional `Ubuntu` logado na conta `Prova`.
- Não use rotinas prontas além das já disponíveis no `GNU Octave` instalado.
- As questões são de múltipla escolha, nelas assinale com X a alternativa correta.

Sistema linear

$$2x_1 - x_3 = 1{,}1 \quad (1)$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 3{,}1 \quad (2)$$
$$-x_1 + 3x_3 + x_4 = 1{,}9 \quad (3)$$
$$-x_2 - 2x_4 = -2{,}1 \quad (4)$$

Questão 1 (1,0 Ponto)**.** Considere o sistema dado pelas equações (1)-(4). Assuma que o método de Gauss-Seidel seja usado para encontrar uma aproximação para a solução deste sistema, empregando como aproximação inicial o vetor coluna $x^{(1)} = (-1, 1, -1, -2)$. Faça, então, quatro iterações deste método de forma a calcular $x^{(5)}$. Assinale a alternativa que corresponde a $x_2^{(5)}/x_1^{(5)}$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

X a) $-5{,}39185733 \times 10^{-1}$

b) $-5{,}39184733 \times 10^{-1}$

c) $-5{,}39183733 \times 10^{-1}$

d) $-5{,}39186733 \times 10^{-1}$

e) $-5{,}39181833 \times 10^{-1}$

Questão 2 (1,0 Ponto)**.** Considere o sistema $Ax = b$ dado pelas equações (1)-(4). Assuma que o método de Jacobi seja usado para encontrar uma aproximação para a solução deste sistema, empregando como aproximação inicial o vetor coluna $x^{(1)} = (-1, 1, -1, -2)$. Sejam, ainda, T_J e $c_J G$, respectivamente, a matriz e o vetor de iteração deste método, i.e.

$$x^{(n+1)} = T_J x^{(n)} + c_J, \quad n \geq 1.$$

Assinale a alternativa que corresponde à afirmação falsa.

X a) O método é divergente, pois a matriz A é estritamente diagonal dominante.

b) O raio espectral da matriz T_J é menor que 1.

c) O elemento da quarta linha e segunda coluna da matriz T_J é igual a $-0{,}5$.

d) O segundo elemento do vetor c_J é igual a $-0{,}775$.

e) Uma das demais alternativas é falsa.

Questão 3 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte sistema de equações

$$\cos(x_1 x_2) - 2x_2 = -2{,}4 \qquad (5)$$
$$x_1^2 - x_1 x_2 = -1 \qquad (6)$$

Assuma que o método de Newton seja usado para encontrar uma aproximação para a solução deste sistema, empregando como aproximação inicial o vetor coluna $x^{(1)} = (1, 1)$. Faça, então, três iterações deste método de forma a computar $x^{(4)}$. Assinale a alternativa que corresponde a $\|x^{(4)}\|_2$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

a) 1,65379056

b) 1,65378056

c) 1,65376056

d) 1,65377056

e) 1,65375056

Tabela 1

i	x_i
1	0,01
2	0,38
3	0,71
4	0,92
5	0,99

Questão 4 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dado na Tabela 1. Encontre o polinômio

$$p(x) = a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5$$

que interpola o conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^5$, onde $f(x) = \cos(x)$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de a_4/a_3 com 9 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-2{,}03697711 \times 10^{-3}$

b) $-2{,}03696711 \times 10^{-3}$

c) $-2{,}03698711 \times 10^{-3}$

d) $-2{,}03695711 \times 10^{-3}$

e) $-2{,}03694711 \times 10^{-3}$

Questão 5 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dados na Tabela 1. O polinômio interpolador do conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^5$, com $f(x) = \cos(x)$, pode ser escrito na seguinte forma

$$p(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x) + y_5 L_5(x),$$

onde $L_i(x)$ é o i-ésimo polinômio de Lagrange associado a este conjunto de pontos. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $y_2 L_1(x_1)/\cos(L_2(x_2) + L_3(x_3) + L_4(x_4))$ com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-9{,}38052196 \times 10^{-1}$

b) $-9{,}38025196 \times 10^{-1}$

c) $-9{,}38034196 \times 10^{-1}$

d) $-9{,}38043196 \times 10^{-1}$

e) $-9{,}38051296 \times 10^{-1}$

Questão 6 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dados na Tabela 1. O polinômio interpolador do conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^5$, com $f(x) = \cos(x)$, pode ser escrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} p(x) = {} & a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) \\ & + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ & + a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), \end{aligned}$$

onde o i-ésimo coeficiente a_i é dado pela diferença dividida de Newton, i.e.

$$\begin{aligned} a_i &= f[x_1, x_2, \ldots, x_i] \\ &:= \frac{f[x_2, \cdots, x_i] - f[x_1, \cdots, x_{i-1}]}{x_i - x_1}, i > 1, \end{aligned}$$

e $a_1 = f[x_1] := y_1$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $a_1 a_2$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-1{,}92653515 \times 10^{-1}$

b) $-1{,}92655315 \times 10^{-1}$

c) $-1{,}92654715 \times 10^{-1}$

d) $-1{,}92657415 \times 10^{-1}$

e) $-1{,}92656315 \times 10^{-1}$

Questão 7 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^{5}$ dados na Tabela 1. Encontre o polinômio

$$p(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

que melhor se ajusta ao conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}$, com $f(x) = \cos(x)$, no sentido de mínimos quadrados. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $p(0{,}712)$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ $7{,}56983787 \times 10^{-1}$

b) $7{,}56984887 \times 10^{-1}$

c) $7{,}56988487 \times 10^{-1}$

d) $7{,}56985687 \times 10^{-1}$

e) $7{,}56986587 \times 10^{-1}$

Questão 8 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^{5}$ dados na Tabela 1. Encontre a função

$$f(x) = a_1 \exp(x) + a_2x^2$$

que melhor se ajusta ao conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}$, com $f(x) = \cos(x)$, no sentido de mínimos quadrados. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de a_1a_2 com 9 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ $-1{,}62954728$

b) $-1{,}62955728$

c) $-1{,}62956728$

d) $-1{,}62953728$

e) $-1{,}62952728$

Questão 9 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^{5}$ dados na Tabela 1. Encontre a função contínua

$$g(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & , x_1 \leq x < x_3 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & , x_3 \leq x \leq x_5 \end{cases}$$

que interpola o conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{5}$, com $f(x) = \cos(x)$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $g(0.2)$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ $9{,}79144687 \times 10^{-1}$

b) $9{,}79145687 \times 10^{-1}$

c) $9{,}79143687 \times 10^{-1}$

d) $9{,}79142687 \times 10^{-1}$

e) $9{,}79146687 \times 10^{-1}$

Questão 10 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte função

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_{11}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 5 \\ x_1 - 3x_2^2 \\ x_2 - 3x_3^2 \\ \vdots \\ x_9 - 3x_{10}^2 \\ -x_{11} - 6 \end{bmatrix}$$

Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $\|J(u)\|_2$ (com 8 dígitos significativos por arredondamento), onde u é o vetor coluna $u = (1, 1, \ldots, 1)$ e J é a jacobiana da função F.

~~a)~~ $6{,}9580471$

b) $6{,}9581471$

c) $6{,}9580571$

d) $6{,}9581571$

e) $6{,}9584071$