UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IME - Instituto de Matemática e Estatística
DMPA - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT 01169-E1 - Cálculo Numérico
Prova da Área 3 - A - Data: 24/07/2017

Nota

Nome: GABARITO Matrícula: ____________________

- Responda às questões individualmente.
- O uso do computador é exclusivo para o `GNU Octave` disponível no sistema operacional `Ubuntu` logado na conta `Prova`.
- Não use rotinas prontas além das já disponíveis no `GNU Octave` instalado.
- As questões são de múltipla escolha, nelas, assinale com X a alternativa correta.

FÓRMULAS

Derivação e Integração

Fórmulas de Diferenças Finitas

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$
$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h} + O(h^2)$$

Regra do Ponto Médio

$$\int_a^b f(x)\,dx = hf\left(\frac{a+b}{2}\right) + O(h^3)$$

Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + O(h^3)$$

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + O(h^5)$$

Integração de Romberg

$$R_{1,1} = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$
$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + \frac{h}{2^{k-2}}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + (2i-1)\frac{h}{2^{k-1}}\right)\right], \quad k > 1$$
$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

Quadratura de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j)$$

n	x_j	w_j
1	0	2
2	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\left(3 - 2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\left(3 + 2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

Problemas de Valor Inicial

$$y' = f(y,t), \quad t > a, \quad y(a) = y_a$$

Método de Euler

$$y^{(1)} = y_a,$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(y^{(k)},\, t^{(k)})$$

Método de Euler Melhorado

$$y^{(1)} = y_a,$$
$$\tilde{y}^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(y^{(k)},\, t^{(k)}),$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{2}\left[f(y^{(k)}, t^{(k)}) + f(\tilde{y}^{(k+1)}, t^{(k+1)})\right]$$

Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

$$y^{(1)} = y_a$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$
$$k_1 = hf(y^{(k)},\, t^{(k)})$$
$$k_2 = hf(y^{(k)} + k_1/2,\, t^{(k)} + h/2)$$
$$k_3 = hf(y^{(k)} + k_2/2,\, t^{(k)} + h/2)$$
$$k_4 = hf(y^{(k)} + k_3,\, t^{(k)} + h)$$

Método de Adams-Bashforth de 2ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{2}\left[3f\left(y^{(k)}, t^{(k)}\right) - f\left(y^{(k-1)}, t^{(k-1)}\right)\right]$$

Método de Adams-Bashforth de 3ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{12}\left[23f\left(y^{(k)}, t^{(k)}\right) - 16f\left(y^{(k-1)}, t^{(k-1)}\right) + 5f\left(y^{(k-2)}, t^{(k-2)}\right)\right]$$

Método de Adams-Bashforth de 4ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{24}\left[55f\left(y^{(k)}, t^{(k)}\right) - 59f\left(y^{(k-1)}, t^{(k-1)}\right) + 37f\left(y^{(k-2)}, t^{(k-2)}\right) - 9f\left(y^{(k-3)}, t^{(k-3)}\right)\right]$$

Método de Adams-Moulton de 4ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{24}\left[9f\left(y^{(k+1)}, t^{(k+1)}\right) + 19f\left(y^{(k)}, t^{(k)}\right) - 5f\left(y^{(k-1)}, t^{(k-1)}\right) + f\left(y^{(k-2)}, t^{(k-2)}\right)\right]$$

Tabela 1

i	1	2	3	4	5
x	-0.2	-0.1	0,0	0,1	0,2
$y_i = f(x_i)$	1,38	1,20	1,00	0,80	0,58

Questão 1 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{(x_i,y_i = f(x_i))\}_{i=1}^{5}$ dado na Tabela 1. Calcule a aproximação da $f'(0.2)$ usando a fórmula de diferenças regressiva de ordem 2 (i.e. com erro de trucamento de ordem h^2). Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 2 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-2{,}3$

b) $-2{,}1$

c) $-2{,}2$

d) $-2{,}4$

e) $-2{,}5$

Questão 2 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte função:

$$f(x) = \frac{2\,\text{sen}\left(e^{-x^3}+1\right)}{x^2+1}.$$

Sejam, também, $D_{+,h}f(x)$ a aproximação de $f'(x)$ dada pela fórmula de diferenças progressiva de ordem 1 (i.e. com erro de trucamento de ordem h). Então, assumindo $h = 0{,}1$, calcule o valor de $D_{+,h}f(-0{,}1) + D_{+,h}f(0{,}2)$ e assinale a alternativa que corresponde a este valor com 7 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-4{,}795687 \times 10^{-1}$

b) $-4{,}795911 \times 10^{-1}$

c) $-4{,}795978 \times 10^{-1}$

d) $-4{,}795259 \times 10^{-1}$

e) $-4{,}796024 \times 10^{-1}$

Questão 3 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{(x_i,y_i = f(x_i))\}_{i=1}^{5}$ dado na Tabela 1. Calcule a aproximação de:

$$\int_{-0,2}^{0} f(x)\,dx$$

dada pela regra do ponto médio (simples). Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 2 dígitos significativos por arredondamento.

a) $2{,}4 \times 10^{-1}$

b) $2{,}3 \times 10^{-1}$

c) $2{,}2 \times 10^{-1}$

d) $2{,}6 \times 10^{-1}$

e) $2{,}5 \times 10^{-1}$

Questão 4 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{(x_i,y_i = f(x_i))\}_{i=1}^{5}$ dado na Tabela 1. Calcule a aproximação de:

$$\int_{-0.2}^{0.2} f(x)\,dx$$

dada pela regra de Simpson composta com o máximo de subintervalos possível. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 4 dígitos significativos por arredondamento.

a) $3{,}9867 \times 10^{-1}$

b) $3{,}9915 \times 10^{-1}$

c) $3{,}9812 \times 10^{-1}$

d) $3{,}9791 \times 10^{-1}$

e) $3{,}9943 \times 10^{-1}$

Questão 5 (1,0 Ponto)**.** Calcule a aproximação de:

$$\int_{-0.8}^{0.2} \frac{2\sin\left(e^{-x^3}+1\right)}{x^2+1}\,dx$$

dada pela regra do trapézio composta com 10 subintervalos. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 6 dígitos significativos por arredondamento.

a) 1,48846

b) 1,48845

c) 1,48844

d) 1,48777

e) 1,48871

Questão 6 (1,0 Ponto)**.** Calcule a aproximação de:

$$\int_{-0.8}^{0.2} \frac{2\sin\left(e^{-x^3}+1\right)}{x^2+1}\,dx$$

dada pela quadratura de Gauss-Legendre com 2 pontos. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 7 dígitos significativos por arredondamento.

a) 1,497907

b) 1,497088

c) 1,497778

d) 1,497163

e) 1,498726

Questão 7 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + ty = \frac{4t}{y}, \quad t > 0,$$
$$y(0) = 1{,}5.$$

Use o método de Euler melhorado com $h = 0{,}1$ para computar o valor aproximado de $y(1)$. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 7 dígitos significativos por arredondamento.

a) 1,831288

b) 1,831361

c) 1,831205

d) 1,831319

e) 1,831250

Questão 8 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + ty = \frac{4t}{y}, \quad t > 0,$$
$$y(0) = 1{,}5.$$

Use o método de Adams-Bashforth de 3^a ordem com $h = 0{,}1$ para computar o valor aproximado de $y(1)$. Inicialize-o pelo método de Euler. Assinale a alternativa que corresponde a aproximação de $y(1)$ com 7 dígitos significativos por arredondamento.

a) 1,828328

b) 1,828263

c) 1,828265

d) 1,828262

e) 1,828399

Questão 9 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + ty = \frac{4t}{y}, \quad t > 0,$$
$$y(0) = 1{,}5.$$

Use o método de Runge-Kutta de quarta ordem com $h = 0{,}02$ para computar o valor aproximado de $y(1{,}02)$. Assinale a alternativa que corresponde a este valor com 7 dígitos significativos por arredondamento.

a) 1,838940

b) 1,838860

c) 1,838969

d) 1,838865

e) 1,838995

Questão 10 (1,0 Ponto)**.** Considere que o método de diferenças finitas seja usado para resolver o seguinte problema de valor de contorno:

$$-u_{xx} = f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 0,$$
$$u'(1) = 0.$$

Considere, também, que a fórmula de diferenças finitas central de ordem 2 seja usada para discretizar a derivada na equação diferencial e que a fórmula de diferenças finitas regressiva de ordem 1 seja usada para discretizar a derivada no contorno. Então, usando uma malha uniforme de $n = 11$ pontos, este problema fica aproximado por um problema discreto da forma $A\underline{u} = b$, onde A é a matriz 11×11 deste problema linear, $b = (0, f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_{n-1}), 0)$ o vetor dos termos constantes associado e $\underline{u}_i \approx u(x_i)$, i.e. a aproximação de u no i-ésimo ponto da malha. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $A(11{,}10)$.

a) -1

b) -2

c) 1

d) 0

e) 2