UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IME - Instituto de Matemática e Estatística
DMPA - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT 01169-E1 - Cálculo Numérico
Prova 2 - A - Data: 20/05/2016

Nota

Nome: GABARITO Matrícula: ________________

- Responda às questões individualmente.
- O uso do computador é exclusivo para o `Scilab` disponível no sistema operacional `Ubuntu` logado na conta `Prova`.
- Não use rotinas prontas além das já disponíveis no `Scilab` instalado.
- Nas questões de múltipla escolha (Questões de 1 a 7), assinale com X a alternativa correta.
- Na questão discursiva (Questão 8), siga as instruções mencionadas na questão.

Questão 1 (1,0 Ponto). Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & 5 & x \\ 2 & 0,5 & -3 \end{bmatrix}$$

A norma L_1 de uma matriz $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n,n}$ é dada por:

$$\|A\|_1 := \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Para quais valores de x a norma L_1 da matriz A dada é maior que $6,5$?

X) $x < -2,5$ ou $x > 2,5$.

b) $-3,5 < x < 2,5$.

c) $-2,5 < x < 3,5$.

d) para todo valor de x temos $\|A\|_1 > 6,5$.

e) não existe x tal que $\|A\|_1 > 6,5$.

Questão 2 (1,0 Ponto). Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 &= -1 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

A iteração do método de Jacobi pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$x^{(n+1)} = T_j x^{(n)} + c_j$$

onde $x^{(0)}$ é uma aproximação inicial, T_j é a matriz de iteração e c_j é o vetor de iteração. Para o sistema dado, encontre a matriz T_j e assinale a alternativa que corresponde ao seu raio espectral (com 7 dígitos significativos por arredondamento), i.e., $\rho(T_j)$.

X) $0,5644329$.

b) $0,5566329$.

c) $0,2645751$.

d) $0,2464751$.

e) $7,618034$.

Questão 3 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} -7x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -x_1 + 3x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{2}{3} \\ -3x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Considere que o método de Gauss-Seidel seja usado para resolver este sistema empregando como aproximação inicial o vetor coluna $x^{(0)} = (3, 3, 4)$. Faça, então, três iterações deste método e assinale a alternativa que corresponde ao valor de $x_2^{(3)}$ (com 7 dígitos significativos por arredondamento), i.e. a terceira componente da aproximação da solução na terceira iteração.

a) $0,2221514$

b) $0,2215514$.

c) $0,1901455$.

d) $0,1921455$.

e) $0,2022515$.

Questão 4 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte sistema não linear:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(x_1 + x_2) + \cos x_2 = 0 \\ &x_1^2 + 2x_2^2 = 10 \end{aligned}$$

Considere que o método de Newton seja usado para resolver este sistema empregando como aproximação inicial o vetor coluna $x^{(0)} = (3, 9)$. Faça, então, quatro iterações deste método e assinale a alternativa que corresponde ao valor de $x_1^{(4)}$ (com 7 dígitos significativos por arredondamento), i.e. o valor da aproximação de x_1 na quarta iteração.

a) $-1,4940272$.

b) $-1,5707963$.

c) $-1,5617963$.

d) $-1,4941172$.

e) $-1,5528572$.

Questão 5 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte tabela com pontos (x_i, y_i):

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
1	$0,2$	$0,895$
2	$0,3$	$0,968$
3	$0,5$	$0,962$
4	$0,7$	$1,244$

O polinômio interpolador de grau 3 associado aos pontos dados pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} p(x) = a_1 + a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) \\ + a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \end{aligned}$$

onde o i-ésimo coeficiente é a diferença dividida $a_i = f[x_1, \ldots, x_i]$, $i = 1, \ldots, 4$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de a_3 (com 5 dígitos significativos por arredondamento).

a) $-2,5333$.

b) $-2,5344$.

c) $-2,5433$.

d) $-2,3433$.

e) $-2,4534$.

Questão 6 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte tabela com pontos (x_i, y_i):

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
1	$0,2$	$0,895$
2	$0,3$	$0,968$
3	$0,5$	$0,962$
4	$0,7$	$1,244$

Use o método dos mínimos quadrados para encontrar os coeficientes da função $f(x) = a_1 \operatorname{sen}(x) + a_2$ que melhor aproxima os pontos dados. Assinale a alternativa que corresponde ao valor do coeficiente a_1 (com 7 dígitos significativos por arredondamento).

a) $0,6882504$.

b) $0,6021867$.

c) $0,6462116$.

d) $0,3262195$.

e) $0,6262195$.

Questão 7 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte tabela com pontos (x_i, y_i):

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$f'(x_i)$
1	$0,2$	$0,895$	$1,0$
2	$0,3$	$0,968$	$--$
3	$0,5$	$0,962$	$--$
4	$0,7$	$1,244$	$1,0$

Assuma que a função:

$$S(x) = \begin{cases} 0,895 + 0,73(x-0,2) + 3,57(x-0,2)^2 - 35,7(x-0,2)^3 & ,0,2 \le x < 0,3 \\ 0,968 + 0,373(x-0,3) - 7,13(x-0,3)^2 + 25,6(x-0,3)^3 & ,0,3 \le x < 0,5 \\ a + 0,589(x-0,5) + b(x-0,5)^2 - 20,5(x-0,5)^3 & ,0,5 \le x \le 0,7 \end{cases}$$

seja o spline fixado que interpola os pontos dados. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de b (com 3 dígitos significativos corretos).

a) $7,18$.

b) $12,3$.

c) $13,2$.

d) $7,81$.

e) $9,67$.

Questão 8 (3,0 Pontos)**.** Encontre o ponto de interseção (x, y), com $x, y > 0$, das curvas:

$$\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$$
$$\operatorname{sen}(x) + x = y + y^3$$

Para tanto, use o método de Newton para calcular um aproximação da solução com precisão de 10^{-6}. *Atenção: A resposta desta questão deve incluir todas as instruções (inclusive o script do Scilab) para que os cálculos realizados possam ser reproduzidos. Ao usar o método de Newton forneça: a) justificativa para a escolha da aproximação inicial utilizada, b) aproximação calculada na primeira e nas três últimas iterações do método, c) justificativa para a garantia da precisão solicitada.*

Espaço reservado para os cálculos e resposta da questão discursiva.

O ponto de interseção das curvas dadas ocorre no zero da seguinte função:

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{(x_1-1)^2}{8} + \frac{x_2^2}{5} - 1 \\ \sin(x_1) + x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}.$$

Usar o método de Newton para encontrar o zero desta função compreende em iterarmos:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - J^{(-1)}(x^{(n)})F(x^{(n)}), n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ e $J^{(-1)}$ é a inversa da jacobiana:

$$J(x) := \begin{bmatrix} \frac{(x_1-1)}{4} & \frac{2}{5}x_2 \\ \cos(x_1) + 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Para a escolha da condição inicial, analisamos o gráfico destas curvas.
Vamos, primeiramente, definir as seguintes funções:

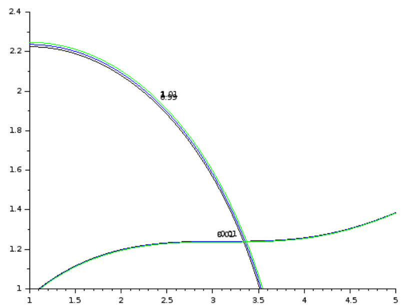
```
function [y] = F(x)
    y(1) = (x(1)-1)^2/8 + x(2)^2/5 - 1
    y(2) = sin(x(1)) + x(1) - x(2) - x(2)^3
endfunction

function [y] = J(x)
    y(1,1) = (x(1)-1)/4
    y(1,2) = 2*x(2)/5

    y(2,1) = cos(x(1)) + 1
    y(2,2) = -1 - 3*x(2)^2
endfunction
```

Em seguida, podemos fazer o seguinte gráfico:

```
x1 = linspace(1,5)
x2 = linspace(1,5)
z1=[]
z2=[]
for i = 1:100
    for j = 1:100
        z = F([x1(i),x2(j)])
        z1(i,j) = z(1)
        z2(i,j) = z(2)
    end
end
contour2d(x1,x2,z1+1,[0.99,1.0,1.01])
contour2d(x1,x2,z2,[-0.01,0.0,0.01])
```



O que nos mostra que o ponto de interseção procurado está próximo do ponto $(3,25,\ 1,2)$. Usando este ponto como aproximação inicial para as iterações de Newton, obtemos:

```
-->x = [3.25, 1.2]'; x'
 ans  =
    3.25    1.2
-->x = x - inv(J(x))*F(x); x'
 ans  =
    3.3563831    1.2403063
-->x = x - inv(J(x))*F(x); x'
 ans  =
    3.354203    1.2393885
-->x = x - inv(J(x))*F(x); x'
 ans  =
    3.3542021    1.2393881
-->x = x - inv(J(x))*F(x); x'
 ans  =
    3.3542021    1.2393881
-->x = x - inv(J(x))*F(x); x'
 ans  =
    3.3542021    1.2393881
```

Os resultados obtidos a cada iterações nos mostram que obtivemos convergência com precisão mínima de 10^{-6}. Logo, o ponto procurado, na precisão desejada, é $(3,354201,\ 1,2393881)$.