UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IME - Instituto de Matemática e Estatística
DMPA - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT 01169-E1 - Cálculo Numérico
Prova da Área 3 - A - Data: 24/07/2017

Nota

Nome: GABARITO Matrícula: ____________

- Responda às questões individualmente.
- O uso do computador é exclusivo para o `GNU Octave` disponível no sistema operacional `Ubuntu` logado na conta `Prova`.
- Não use rotinas prontas além das já disponíveis no `GNU Octave` instalado.
- As questões são de múltipla escolha, nelas, assinale com X a alternativa correta.

FÓRMULAS

Derivação e Integração

Fórmulas de Diferenças Finitas

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h)$$
$$f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h)$$
$$f'(x) = \frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f'(x) = \frac{f(x-2h)-4f(x-h)+3f(x)}{2h} + O(h^2)$$

Regra do Ponto Médio

$$\int_a^b f(x)\,dx = hf\left(\frac{a+b}{2}\right) + O(h^3)$$

Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + O(h^3)$$

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] + O(h^5)$$

Integração de Romberg

$$R_{1,1} = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$
$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + \frac{h}{2^{k-2}}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a+(2i-1)\frac{h}{2^{k-1}}\right)\right], \quad k>1$$
$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1}-R_{k-1,j-1}}{4^{j-1}-1}$$

Quadratura de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \sum_{j=1}^n w_j f(x_j)$$

n	x_j	w_j
1	0	2
2	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\left(3-2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\left(3+2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

Problemas de Valor Inicial

$$y' = f(y,t), \quad t>a, \quad y(a)=y_a$$

Método de Euler

$$y^{(1)} = y_a,$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(y^{(k)},\, t^{(k)})$$

Método de Euler Melhorado

$$y^{(1)} = y_a,$$
$$\tilde{y}^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(y^{(k)},\, t^{(k)}),$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{2}\left[f(y^{(k)},t^{(k)}) + f(\tilde{y}^{(k+1)},t^{(k+1)})\right]$$

Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

$$y^{(1)} = y_a$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{k_1+2k_2+2k_3+k_4}{6}$$
$$k_1 = hf(y^{(k)},\, t^{(k)})$$
$$k_2 = hf(y^{(k)}+k_1/2,\, t^{(k)}+h/2)$$
$$k_3 = hf(y^{(k)}+k_2/2,\, t^{(k)}+h/2)$$
$$k_4 = hf(y^{(k)}+k_3,\, t^{(k)}+h)$$

Método de Adams-Bashforth de 2ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{2}\left[3f\left(y^{(k)},t^{(k)}\right) - f\left(y^{(k-1)},t^{(k-1)}\right)\right]$$

Método de Adams-Bashforth de 3ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{12}\left[23f\left(y^{(k)},t^{(k)}\right) - 16f\left(y^{(k-1)},t^{(k-1)}\right) + 5f\left(y^{(k-2)},t^{(k-2)}\right)\right]$$

Método de Adams-Bashforth de 4ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{24}\left[55f\left(y^{(k)},t^{(k)}\right) - 59f\left(y^{(k-1)},t^{(k-1)}\right) + 37f\left(y^{(k-2)},t^{(k-2)}\right) - 9f\left(y^{(k-3)},t^{(k-3)}\right)\right]$$

Método de Adams-Moulton de 4ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{24}\left[9f\left(y^{(k+1)},t^{(k+1)}\right) + 19f\left(y^{(k)},t^{(k)}\right) - 5f\left(y^{(k-1)},t^{(k-1)}\right) + f\left(y^{(k-2)},t^{(k-2)}\right)\right]$$

Tabela 1

i	1	2	3	4	5
x	-0.2	-0.1	0,0	0,1	0,2
$y_i = f(x_i)$	1,38	1,20	1,00	0,80	0,58

Questão 1 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{(x_i,y_i = f(x_i))\}_{i=1}^{5}$ dado na Tabela 1. Calcule a aproximação da $f'(-0.2)$ usando a fórmula de diferenças progressiva de ordem 2 (i.e. com erro de trucamento de ordem h^2). Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 2 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-1{,}7$

b) $-1{,}5$

c) $-1{,}8$

d) $-1{,}4$

e) $-1{,}5$

Questão 2 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte função:

$$f(x) = \frac{2\,\mathrm{sen}\left(e^{-x^3}+2\right)}{x^2+1}.$$

Sejam, também, $D_{+,h}f(x)$ a aproximação de $f'(x)$ dada pela fórmula de diferenças progressiva de ordem 1 (i.e. com erro de trucamento de ordem h). Então, assumindo $h = 0{,}1$, calcule o valor de $D_{+,h}f(-0{,}1) + D_{+,h}f(0{,}2)$ e assinale a alternativa que corresponde a este valor com 7 dígitos significativos por arredondamento.

a) $2{,}543772 \times 10^{-1}$

b) $2{,}543651 \times 10^{-1}$

c) $2{,}544560 \times 10^{-1}$

d) $2{,}543349 \times 10^{-1}$

e) $2{,}543009 \times 10^{-1}$

Questão 3 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{(x_i,y_i = f(x_i))\}_{i=1}^{5}$ dado na Tabela 1. Calcule a aproximação de:

$$\int_0^{0{,}2} f(x)\,dx$$

dada pela regra do ponto médio (simples). Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 2 dígitos significativos por arredondamento.

a) $1{,}6 \times 10^{-1}$

b) $1{,}4 \times 10^{-1}$

c) $1{,}5 \times 10^{-1}$

d) $1{,}2 \times 10^{-1}$

e) $1{,}3 \times 10^{-1}$

Questão 4 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{(x_i,y_i = f(x_i))\}_{i=1}^{5}$ dado na Tabela 1. Calcule a aproximação de:

$$\int_{-0.2}^{0.2} f(x)\,dx$$

dada pela regra de Simpson composta com o máximo de subintervalos possível. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 4 dígitos significativos por arredondamento.

a) $3{,}9867 \times 10^{-1}$

b) $3{,}9915 \times 10^{-1}$

c) $3{,}9812 \times 10^{-1}$

d) $3{,}9791 \times 10^{-1}$

e) $3{,}9943 \times 10^{-1}$

Questão 5 (1,0 Ponto)**.** Calcule a aproximação de:

$$\int_{-0.8}^{0.2} \frac{2\sin\left(e^{-x^3}+2\right)}{x^2+1}\,dx$$

dada pela regra do trapézio composta com 10 subintervalos. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 6 dígitos significativos por arredondamento.

a) $7{,}85499 \times 10^{-2}$

b) $7{,}85561 \times 10^{-2}$

c) $7{,}84956 \times 10^{-2}$

d) $7{,}85496 \times 10^{-2}$

e) $7{,}86189 \times 10^{-2}$

Questão 6 (1,0 Ponto)**.** Calcule a aproximação de:

$$\int_{-0.8}^{0.2} \frac{2\sin\left(e^{-x^3}+2\right)}{x^2+1}\,dx$$

dada pela quadratura de Gauss-Legendre com 2 pontos. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 7 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ $7{,}827088 \times 10^{-2}$

b) $7{,}826990 \times 10^{-2}$

c) $7{,}827064 \times 10^{-2}$

d) $7{,}827051 \times 10^{-2}$

e) $7{,}827028 \times 10^{-2}$

Questão 7 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + ty = \frac{4t}{y}, \quad t > 0,$$
$$y(0) = 1{,}4.$$

Use o método de Euler melhorado com $h = 0{,}1$ para computar o valor aproximado de $y(1)$. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 7 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ 1,801764

b) 1,801848

c) 1,801770

d) 1,801725

e) 1,801673

Questão 8 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + ty = \frac{4t}{y}, \quad t > 0,$$
$$y(0) = 1{,}4.$$

Use o método de Adams-Bashforth de 3^a ordem com $h = 0{,}1$ para computar o valor aproximado de $y(1)$. Inicialize-o pelo método de Euler. Assinale a alternativa que corresponde a aproximação de $y(1)$ com 7 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ 1,798246

b) 1,798291

c) 1,798342

d) 1,798252

e) 1,798340

Questão 9 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} + ty = \frac{4t}{y}, \quad t > 0,$$
$$y(0) = 1{,}4.$$

Use o método de Runge-Kutta de quarta ordem com $h = 0{,}02$ para computar o valor aproximado de $y(1{,}02)$. Assinale a alternativa que corresponde a este valor com 7 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ 1,8810867

b) 1,810794

c) 1,810937

d) 1,810951

e) 1,810802

Questão 10 (1,0 Ponto)**.** Considere que o método de diferenças finitas seja usado para resolver o seguinte problema de valor de contorno:

$$-u_{xx} = f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 0,$$
$$u'(1) = 0.$$

Considere, também, que a fórmula de diferenças finitas central de ordem 2 seja usada para discretizar a derivada na equação diferencial e que a fórmula de diferenças finitas regressiva de ordem 1 seja usada para discretizar a derivada no contorno. Então, usando uma malha uniforme de $n = 11$ pontos, este problema fica aproximado por um problema discreto da forma $A\underline{u} = b$, onde A é a matriz 11×11 deste problema linear, $b = (0, f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_{n-1}), 0)$ o vetor dos termos constantes associado e $\underline{u}_i \approx u(x_i)$, i.e. a aproximação de u no i-ésimo ponto da malha. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $A(11{,}9)$.

~~a)~~ 0

b) -2

c) 1

d) -1

e) 2