UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IME - Instituto de Matemática e Estatística
DMPA - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT 01169-E1 - Cálculo Numérico
Prova da Área 3 - B - Data: 26/07/2017

Nota

Nome: GABARITO Matrícula: ____________________

- Responda às questões individualmente.
- O uso do computador é exclusivo para o `GNU Octave` disponível no sistema operacional `Ubuntu` logado na conta `Prova`.
- Não use rotinas prontas além das já disponíveis no `GNU Octave` instalado.
- As questões são de múltipla escolha, nelas, assinale com X a alternativa correta.

FÓRMULAS

Derivação e Integração

Fórmulas de Diferenças Finitas

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$
$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$
$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{2h} + O(h^2)$$

Regra do Ponto Médio

$$\int_a^b f(x)\,dx = hf\left(\frac{a+b}{2}\right) + O(h^3)$$

Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + O(h^3)$$

Regra de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + O(h^5)$$

Integração de Romberg

$$R_{1,1} = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$
$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + \frac{h}{2^{k-2}}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + (2i-1)\frac{h}{2^{k-1}}\right)\right], \quad k > 1$$
$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

Quadratura de Gauss

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

n	x_j	w_j
1	0	2
2	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\left(3 - 2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\left(3 + 2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

Problemas de Valor Inicial

$$y' = f(y,t), \quad t > a, \quad y(a) = y_a$$

Método de Euler

$$y^{(1)} = y_a,$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(y^{(k)},\, t^{(k)})$$

Método de Euler Melhorado

$$y^{(1)} = y_a,$$
$$\tilde{y}^{(k+1)} = y^{(k)} + hf(y^{(k)},\, t^{(k)}),$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{2}\left[f(y^{(k)},t^{(k)}) + f(\tilde{y}^{(k+1)},t^{(k+1)})\right]$$

Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

$$y^{(1)} = y_a$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$
$$k_1 = hf(y^{(k)},\, t^{(k)})$$
$$k_2 = hf(y^{(k)} + k_1/2,\, t^{(k)} + h/2)$$
$$k_3 = hf(y^{(k)} + k_2/2,\, t^{(k)} + h/2)$$
$$k_4 = hf(y^{(k)} + k_3,\, t^{(k)} + h)$$

Método de Adams-Bashforth de 2ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{2}\left[3f\left(y^{(k)},t^{(k)}\right) - f\left(y^{(k-1)},t^{(k-1)}\right)\right]$$

Método de Adams-Bashforth de 3ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{12}\left[23f\left(y^{(k)},t^{(k)}\right) - 16f\left(y^{(k-1)},t^{(k-1)}\right) + 5f\left(y^{(k-2)},t^{(k-2)}\right)\right]$$

Método de Adams-Bashforth de 4ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{24}\left[55f\left(y^{(k)},t^{(k)}\right) - 59f\left(y^{(k-1)},t^{(k-1)}\right) + 37f\left(y^{(k-2)},t^{(k-2)}\right) - 9f\left(y^{(k-3)},t^{(k-3)}\right)\right]$$

Método de Adams-Moulton de 4ª Ordem

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{h}{24}\left[9f\left(y^{(k+1)},t^{(k+1)}\right) + 19f\left(y^{(k)},t^{(k)}\right) - 5f\left(y^{(k-1)},t^{(k-1)}\right) + f\left(y^{(k-2)},t^{(k-2)}\right)\right]$$

Tabela 1

i	1	2	3	4	5
x	-0.20	-0.16	$-0{,}12$	$-0{,}08$	$-0{,}04$
$y_i = f(x_i)$	0,962	0,973	0,987	0,993	0,998

Questão 1 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte função:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2-1) + 2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^4 + \cos(x)^4}.$$

Calcule a aproximação da $f'(1)$ usando a fórmula de diferenças finitas regressiva de ordem 2 (i.e. com erro de trucamento de ordem h^2) com $h = 0{,}03$. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-1{,}8561048$

b) $-1{,}8561041$

c) $-1{,}8560982$

d) $-1{,}8561038$

e) $-1{,}8561144$

Questão 2 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{(x_i, y_i = f(x_i))\}_{i=1}^{5}$ dado na Tabela 1. Seja, também, $D_{+,h}f(x)$ a aproximação de $f'(x)$ dada pela fórmula de diferenças progressiva de ordem 1 (i.e. com erro de trucamento de ordem h). Calcule o valor de $(D_{+,h}f(-0{,}16) + D_{+,h}f(-0{,}08))/\pi$ e assinale a alternativa que corresponde a este valor com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) $1{,}5119720 \times 10^{-1}$

b) $1{,}5120070 \times 10^{-1}$

c) $1{,}5120101 \times 10^{-1}$

d) $1{,}5119381 \times 10^{-1}$

e) $1{,}5120262 \times 10^{-1}$

Questão 3 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte função:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2-1) + 2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^4 + \cos(x)^4}.$$

Calcule a aproximação de:

$$\int_{-1{,}5}^{-0{,}5} f(x)\,dx$$

dada pela regra de Simpson (simples). Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) 1,6886766

b) 1,6886865

c) 1,6886768

d) 1,6886685

e) 1,6886734

Questão 4 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{(x_i, y_i = f(x_i))\}_{i=1}^{5}$ dado na Tabela 1. Calcule a aproximação de:

$$\int_{-0{,}20}^{-0{,}04} f(x)\,dx$$

dada pela regra do ponto médio composta com 2 subintervalos. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 5 dígitos significativos por arredondamento.

a) $1{,}5728 \times 10^{-1}$

b) $1{,}5669 \times 10^{-1}$

c) $1{,}5686 \times 10^{-1}$

d) $1{,}5725 \times 10^{-1}$

e) $1{,}5730 \times 10^{-1}$

Questão 5 (1,0 Ponto)**.** Calcule a aproximação de:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1) + 2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^4 + \cos(x)^4}\,dx$$

dada pela regra do trapézio composta com 7 subintervalos. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) $9{,}0518744 \times 10^{-1}$

b) $9{,}0518055 \times 10^{-1}$

c) $9{,}0517897 \times 10^{-1}$

d) $9{,}0519386 \times 10^{-1}$

e) $9{,}0518278 \times 10^{-1}$

Questão 6 (1,0 Ponto)**.** Calcule a aproximação de:

$$\int_{-2}^{0} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)+2\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)^4+\cos(x)^4}\,dx$$

dada pela quadratura de Gauss-Legendre de 2 pontos composta com 2 subintervalos (i.e. divida o intervalo de integração em 2 subintervalos de mesmo tamanho). Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) 2,6057844

b) 2,6057849

c) 2,6057861

d) 2,6057768

e) 2,6057930

Questão 7 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$t^2\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(3t) - 2ty, \quad t > 1{,}1,$$
$$y(1{,}1) = 2.$$

Use o método de Euler com $h = 0{,}02$ para computar o valor aproximado de $y(2)$. Assinale a alternativa que corresponde a esta aproximação com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) $4{,}2523724 \times 10^{-1}$

b) $4{,}2522935 \times 10^{-1}$

c) $4{,}2524498 \times 10^{-1}$

d) $4{,}2523322 \times 10^{-1}$

e) $4{,}2523527 \times 10^{-1}$

Questão 8 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$t^2\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(3t) - 2ty, \quad t > 1{,}1,$$
$$y(1{,}1) = 2.$$

Use o método de Adams-Bashforth de 4^a ordem com $h = 0{,}02$ para computar o valor aproximado de $y(2)$. Inicialize-o pelo método de Euler melhorado. Assinale a alternativa que corresponde a aproximação de $y(2)$ com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) $4{,}4271013 \times 10^{-1}$

b) $4{,}4270143 \times 10^{-1}$

c) $4{,}4271269 \times 10^{-1}$

d) $4{,}4270912 \times 10^{-1}$

e) $4{,}4271306 \times 10^{-1}$

Questão 9 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$t^2\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(3t) - 2ty, \quad t > 1{,}1,$$
$$y(1{,}1) = 2.$$

Use o método de Runge-Kutta de quarta ordem com $h = 0{,}02$ para computar o valor aproximado de $y(2)$. Assinale a alternativa que corresponde a este valor com 8 dígitos significativos por arredondamento.

a) $4{,}4269583 \times 10^{-1}$

b) $4{,}4268707 \times 10^{-1}$

c) $4{,}4269423 \times 10^{-1}$

d) $4{,}4269846 \times 10^{-1}$

e) $4{,}4269349 \times 10^{-1}$

Questão 10 (1,0 Ponto)**.** Considere que o método de diferenças finitas seja usado para resolver o seguinte problema de valor de contorno:

$$-2u_{xx} + u_x = f(x), \quad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 0,$$
$$u(1) = 0.$$

Considere, também, que as fórmulas de diferenças finitas centrais de ordem 2 sejam usadas para discretizar as derivadas na equação diferencial. Então, usando uma malha uniforme de $n = 11$ pontos, este problema fica aproximado por um problema discreto da forma $A\underline{u} = b$, onde A é a matriz 11×11 deste problema linear, $b = (0, f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_{n-1}), 0)$ o vetor dos termos constantes associado e $\underline{u}_i \approx u(x_i)$, nos pontos da malha $x_i = (i-1)h$, $h = 1/(n-1)$. Assinale a alternativa que corresponde ao elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz A.

a) $-\frac{2}{h^2} + \frac{1}{2h}$

b) $-\frac{1}{h^2} + \frac{2}{2h}$

c) 0

d) $-\frac{2}{h^2} - \frac{1}{2h}$

e) $-\frac{1}{h^2} - \frac{2}{2h}$