UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul
IME - Instituto de Matemática e Estatística
DMPA - Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01169-E1 - Cálculo Numérico
Prova 2 - A - Data: 14/06/2017

Nota

Nome: GABARITO Matrícula: ____________

- Responda às questões individualmente.
- O uso do computador é exclusivo para o `GNU Octave` disponível no sistema operacional `Ubuntu` logado na conta `Prova`.
- Não use rotinas prontas além das já disponíveis no `GNU Octave` instalado.
- As questões são de múltipla escolha, nelas assinale com X a alternativa correta.

Sistema linear

$$2x_1 - x_3 = 1 \quad (1)$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 = 3{,}1 \quad (2)$$
$$-x_1 + 3x_3 + x_4 = 1{,}9 \quad (3)$$
$$-x_2 - 2x_4 = -2 \quad (4)$$

Questão 1 (1,0 Ponto)**.** Considere o sistema dado pelas equações (1)-(4). Assuma que o método de Gauss-Seidel seja usado para encontrar uma aproximação para a solução deste sistema, empregando como aproximação inicial o vetor coluna $x^{(1)} = (-1, 1, -1, -2)$. Faça, então, quatro iterações deste método de forma a calcular $x^{(5)}$. Assinale a alternativa que corresponde a $x_2^{(5)}/x_1^{(5)}$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

X a) $-5{,}94262295 \times 10^{-1}$
b) $-5{,}94253295 \times 10^{-1}$
c) $-5{,}94262825 \times 10^{-1}$
d) $-5{,}94272285 \times 10^{-1}$
e) $-5{,}94252275 \times 10^{-1}$

Questão 2 (1,0 Ponto)**.** Considere o sistema $Ax = b$ dado pelas equações (1)-(4). Assuma que o método de Jacobi seja usado para encontrar uma aproximação para a solução deste sistema, empregando como aproximação inicial o vetor coluna $x^{(1)} = (-1, 1, -1, -2)$. Sejam, ainda, T_J e c_JG, respectivamente, a matriz e o vetor de iteração deste método, i.e.

$$x^{(n+1)} = T_J x^{(n)} + c_J, \quad n \geq 1.$$

Assinale a alternativa que corresponde à afirmação falsa.

X a) O método é divergente, pois o raio espectral de T_J é estritamente menor que 1.
b) A é uma matriz estritamente diagonal dominante.
c) O elemento da quarta linha e segunda coluna da matriz T_J é igual a $-0{,}5$.
d) O segundo elemento do vetor c_J é igual a $-0{,}775$.
e) Uma das demais alternativas é falsa.

Questão 3 (1,0 Ponto)**.** Considere o seguinte sistema de equações

$$\cos(x_1 x_2) - x_2 = -2{,}4 \tag{5}$$
$$x_1^2 - x_1 x_2 = -1 \tag{6}$$

Assuma que o método de Newton seja usado para encontrar uma aproximação para a solução deste sistema, empregando como aproximação inicial o vetor coluna $x^{(1)} = (1, 1)$. Faça, então, três iterações deste método de forma a computar $x^{(4)}$. Assinale a alternativa que corresponde a $\|x^{(4)}\|_2$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

a) 2,23216154

b) 2,23261154

c) 2,23235154

d) 2,23253154

e) 2,23274154

Tabela 1

i	x_i
1	0,01
2	0,38
3	0,71
4	0,92
5	0,99

Questão 4 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dado na Tabela 1. Encontre o polinômio

$$p(x) = a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5$$

que interpola o conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^5$, onde $f(x) = \cos(x)$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de a_4 com 9 dígitos significativos por arredondamento.

a) $1{,}03025862 \times 10^{-3}$

b) $1{,}03026762 \times 10^{-3}$

c) $1{,}03027662 \times 10^{-3}$

d) $1{,}03028562 \times 10^{-3}$

e) $1{,}03024962 \times 10^{-3}$

Questão 5 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dados na Tabela 1. O polinômio interpolador do conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^5$, com $f(x) = \cos(x)$, pode ser escrito na seguinte forma

$$p(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x) + y_5 L_5(x),$$

onde $L_i(x)$ é o i-ésimo polinômio de Lagrange associado a este conjunto de pontos. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $L_1(x_1)/\cos(L_2(x_2) + L_3(x_3) + L_4(x_4))$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-1{,}01010867$

b) $-1{,}01010767$

c) $-1{,}01010967$

d) $-1{,}01010567$

e) $-1{,}01011767$

Questão 6 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dados na Tabela 1. O polinômio interpolador do conjunto de pontos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^5$, com $f(x) = \cos(x)$, pode ser escrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} p(x) = a_1 &+ a_2(x - x_1) + a_3(x - x_1)(x - x_2) \\ &+ a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &+ a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), \end{aligned}$$

onde o i-ésimo coeficiente a_i é dado pela diferença dividida de Newton, i.e.

$$\begin{aligned} a_i &= f[x_1, x_2, \ldots, x_i] \\ &:= \frac{f[x_2, \cdots, x_i] - f[x_1, \cdots, x_{i-1}]}{x_i - x_1}, i > 1, \end{aligned}$$

e $a_1 = f[x_1] := y_1$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de a_2/a_1 com 9 dígitos significativos por arredondamento.

a) $-1{,}92672782 \times 10^{-1}$

b) $-1{,}92673782 \times 10^{-1}$

c) $-1{,}92674782 \times 10^{-1}$

d) $-1{,}92671782 \times 10^{-1}$

e) $-1{,}92671682 \times 10^{-1}$

Questão 7 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dados na Tabela 1. Encontre o polinômio

$$p(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

que melhor se ajusta ao conjunto de pontos $\{(x_i,f(x_i))\}_{i=1}^5$, com $f(x) = \cos(x)$, no sentido de mínimos quadrados. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $p(0{,}71)$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ $7{,}58284961 \times 10^{-1}$

b) $7{,}58289461 \times 10^{-1}$

c) $7{,}58285661 \times 10^{-1}$

d) $7{,}58286561 \times 10^{-1}$

e) $7{,}58283561 \times 10^{-1}$

Questão 8 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dados na Tabela 1. Encontre a função

$$f(x) = a_1 \exp(x) + a_2x^2$$

que melhor se ajusta ao conjunto de pontos $\{(x_i,f(x_i))\}_{i=1}^5$, com $f(x) = \cos(x)$, no sentido de mínimos quadrados. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de a_1/a_2 com 9 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ $-4{,}64982395 \times 10^{-1}$

b) $-4{,}64984395 \times 10^{-1}$

c) $-4{,}64985395 \times 10^{-1}$

d) $-4{,}64986395 \times 10^{-1}$

e) $-4{,}64984295 \times 10^{-1}$

Questão 9 (1,0 Ponto)**.** Considere o conjunto de pontos $\{x_i\}_{i=1}^5$ dados na Tabela 1. Encontre a função contínua

$$g(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & , x_1 \le x < x_3 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & , x_3 \le x \le x_5 \end{cases}$$

que interpola o conjunto de pontos $\{(x_i,f(x_i))\}_{i=1}^5$, com $f(x) = \cos(x)$. Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $g(0.1)$ com 9 dígitos significativos por arredondamento.

~~a)~~ $9{,}94252927 \times 10^{-1}$

b) $9{,}94252827 \times 10^{-1}$

c) $9{,}94252727 \times 10^{-1}$

d) $9{,}94252627 \times 10^{-1}$

e) $9{,}94251727 \times 10^{-1}$

Questão 10 (1,0 Ponto)**.** Considere a seguinte função

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_{11}) = \begin{bmatrix} x_1 - 5 \\ x_1 - 3x_2^2 \\ x_2 - 3x_3^2 \\ \vdots \\ x_9 - 3x_{10}^2 \\ -x_{11} - 6 \end{bmatrix}$$

Assinale a alternativa que corresponde ao valor de $\|J(u)\|_2$ (com 7 dígitos significativos por arredondamento), onde u é o vetor coluna $u = (1, 1, \ldots, 1)$ e J é a jacobiana da função F.

~~a)~~ 6,957951

b) 6,957851

c) 6,957751

d) 6,957761

e) 6,957061