ANÁLISIS REAL

PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL CONJUNTO DE CANTOR

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Jesús F. Tolentino*
Escuela de Matemática
wfelipet@uni.pe

Eric H. Velasquez
Escuela de Física
ehurtado@uni.pe

Jecson C. Irigoin
Escuela de Física
jchavezi@uni.pe

May 20, 2020

ABSTRACT

Cantor's set is used in many proofs of theorems, given its characteristics individuals, which in the present work we try to cover from the construction, concepts of measurement and cardinality up to the topological properties. Finishing with generalizations of the Cantor set, in objects in other dimensions called Fractals, we also present the concept of fractal dimension as a unique feature of these objects

***K*eywords** Cantor · Métrica · Clausura · Interior · Densidad · Fractales

1 Introducción

El conjunto de Cantor de tercio medio es, probablemente, el más usual ejemplo y contraejemplo de cuantos se utilizan en el estudio de ciertas áreas de las matemáticas. Fue construido por primera vez a fines del siglo XIX por Georg Cantor para resolver un problema que se había planteado en el marco de la naciente topología, a saber, si existía o no un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$ que fuera totalmente disconexo y denso en sí mismo. Cantor probó que sí existe, más tarde ya en el siglo XX se demostró que todos los conjuntos con estas características son topológicamente equivalentes (homeoformos). El presente trabajo, nos presenta algunos resultados interesantes respecto a este famoso objeto. [Jos96, pág. 1 - 2]

2 Construcción del conjunto de Cantor

El *conjunto de Cantor* $\mathcal{C}$ es un subconjunto cerrado del intervalo $[0, 1]$ obtenido como el complementario de una unión de intervalos abiertos, de la siguiente forma. Se retira del intervalo $[0, 1]$ el intervalo abierto centrado en el punto medio de $[0, 1]$ de longitud 1/3, $(1/3, 2/3)$ (su tercio central). Se retiran después los tercios centrales de cada uno de los intervalos restantes, $[0, 1/3]$ y $[2/3, 1]$. Entonces sobra $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. A continuación se retira el tercio central de cada uno de estos cuatro intervalos. Se repite este proceso inductivamente (Véase la figura 1). El conjunto $\mathcal{C}$ de los puntos no retirados es el conjunto de Cantor. [Elo05, pág. 66]

*Universidad Nacional de Ingeniería - Facultad de Ciencias

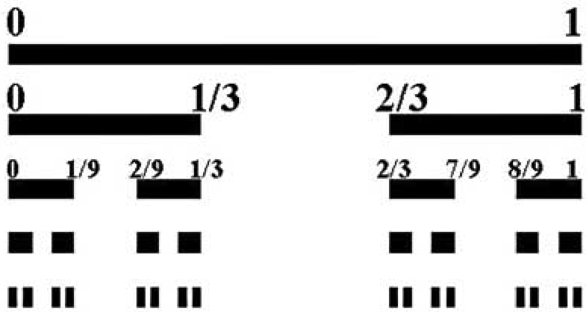

Figure 1: Construyendo el conjunto de Cantor

3 Médida y Cardinalidad

La noción de distancia en un espacio *n-euclideano*, nos dice que, si $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$ son puntos en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$d(x, y) = \left(\sum_{i \in \{1,...,n\}} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Esta noción permite la definición de continuidad de funciones en un espacio euclidiano.
Asímismo podemos definir la continuidad en Topología sobre espacios más generales que los *n-euclideanos*, llamados ***espacios métricos***. [Bre00, pág. 1]

Definición 3.1. *Un espacio métrico es un conjunto X junto con una función*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

llamada métrica, tal que las siguientes condiciones se cumplen

1. $d(x, y) \geq 0$, *con la igualdad* $\Leftrightarrow$ $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

[Bre00, pág. 1–2]

Para nuestros propositos el conjunto $X \subset \mathbb{R}$, junto con la métrica usual en $\mathbb{R}$

$$\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R} \quad \tilde{d}(x, y) = |x - y| \tag{1}$$

Es fácil observar que d cumple con las condiciones de una métrica.
Para cálcular la medida del conjunto de Cantor, denotado por $\mathcal{C}$, vamos a considerar a $\tilde{d}|_{\mathcal{C}}$ como métrica, entonces nuestro espacio métrico será $(\mathcal{C}, \tilde{d}|_{\mathcal{C}})$

Teorema 3.1. *La medida del conjunto de Cantor es 0, es decir $\tilde{d}|_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = 0$.*
[Jos96, pág. 25-27]

Al hablar de cardinalidad tenemos la noción de cantidad de elementos de un conjunto, sin embargo para conjunto no numerables, esto no es totalmente cierto, por ejemplo no hay una función sobreyectica del conjunto de los naturales al intervalo no degenerado $[0, 1]$, por tanto $[0, 1]$ no se puede enumerar, sin embargo podemos hablar de su cardinal y es *Álef 1*, el cardinal de los números reales, el menor cardinal superior al de los naturales.

Teorema 3.2. *El conjunto de Cantor tiene una cantidad mayor o igual a la del intervalo no degenerado* $[0, 1)$.
[Jos96, pág. 27-28]

Teorema 3.3. *El conjunto de Cantor tiene la misma cardinalidad del intervalo no degenerado* $[0, 1]$.
[Jos96, pág. 27-28]

También llamado el cardinal del continuo, por la *Hipotesis de Continuo*.

4 Propiedades topológicas

4.1 Numerabilidad

A pesar de la noción intuitiva de los puntos del conjunto de Cantor como subconjunto de los racionales, se establece el siguiente teorema

Teorema 4.1. *El conjunto de Cantor no es numerable, es decir existe una biyección con el intervarlo* $[0, 1]$

4.2 Interior

Para aprender la noción de interior de un conjunto primero necesitamos el concepto de conjunto abierto.
Usando la métrica $\tilde{d}$ definida en el espacio métrico $X \subset \mathbb{R}$ podemos establecer cuando un conjunto es abierto.

Definición 4.1. *Un subconjunto* $U \subset X$ *es llamado abierto si*

$$\forall x \in U, \exists\, \mathcal{B}_r(x) \subset U$$

Donde $\mathcal{B}_r(x) = \{y \in X : \tilde{d}(x, y) < r, r \in \mathbb{R}\}$*, llamada r-bola en* $X \subset \mathbb{R}$

De la definición de conjunto abierto, decimos que todo intervalo abierto $(a, b) \subset X \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto.
[Bre00, pág. 2]

Definición 4.2. *El interior de un conjunto* $X \subset \mathbb{R}$*, denotado por* $int(X)$*, es el conjunto abierto más grande contenido en* X*, es decir.*

$$int(X) = \bigcup_{X\, \supset\, U:\; es\ abierto} U$$

[Ela10, pág. 6–8]

Por otro lado decimos que un punto x es interior de un conjunto X si existe una $\mathcal{B}_r(x)$ que este complementamente contenida en el conjunto X.
A partir de esto mostramos una equivalencia de la definición anterior.
Denominaremos $int(X)$ al conjunto de todos los puntos interiores de A y lo denotaremos también como A°

Teorema 4.2. *El interior del conjunto de Cantor es el vacío, es decir* $int(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\circ} = \emptyset$
[Jos96, pág. 31]

4.3 Cerradura

Sunpongamos que A es un subconjunto no vacío del espacio métrico (X, d). Dado un $x \in X$. Definimos la distancia de x a A como:

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

Definamos el conjunto cerrado

Definición 4.3. *Un subconjunto* F *de un espacio metrico* X *es cerrado si* $d(x, F) = 0$ *implica* $x \in F$*.*

Teorema 4.3. *Un subconjunto* F *de un espacio metrico* X *es cerrado si* $X \backslash F$ *es abierto*

[Mic17, pág. 255]
Definiremos ahora la cerradura, que junto con el interior de un subconjunto, sirven para asociar de forma natural un conjunto abierto y un conjunto cerrado a cada subconjunto de un espacio métrico.

Definición 4.4. *Dado un espacio métrico* (X, d) *con topología de conjuntos abiertos* $\mathcal{U}$ *y conjuntos cerrados* $\mathcal{F}$*. Además, sea* $A \subset X$*. La cerradura* $\overline{A}$ *de* A *es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a* A

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}, F\, \supset\, A} F$$

Se observa que la definición de cerradura se basa en las propiedades de la topología y no de la estructura del espacio métrico, razón por la cual la definición se puede extender a espacios topológicos en general

[Mic17, pág. 258]

4.4 Densidad

Comencemos por las definiciones

Definición 4.5. *Un subconjunto A de un espacio métrico X es denso en X si $\overline{A} = X$*

[Mic17, pág. 261]

Definición 4.6. *Un subconjunto A de un espacio métrico X denso en ninguna parte en X si el interior de $\overline{A}$ es vacio*

[Cro08, pág. 88]

Teorema 4.4. *El conjunto de cantor es denso en ninguna parte*

[Mic17, pág. 303]

References

[Bre00] Glen E. Bredon. Topology and geometry. In *Topology and Geometry.*, pages 1–3. Departamento de Matemáticas, Universidad de Rutger, New Brunswick USA, 2000.

[Cro08] Fred H. Croom. Principles of topology. In *Topology*. Cegange Learning, New Delhi, 2008.

[Ela10] Ocaña Eladio. Introducción al análisis convexo. In *Convexo*. Universidad Nacional de Ingeniería, 2010.

[Elo05] Lages Lima Elon. Análisis real. In *Análisis Real*, pages 66–67. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, Universidad Nacional de Ingeniería, 2005.

[Jos96] Galaviz C. José. El conjunto de cantor. In *Cantor.*, pages 23–37. Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México., 1996.

[Mic17] Field Michael. Essential real analysis. In *Essential Real Analysis.* Springer International Publishing, Switzerland, 2017.