

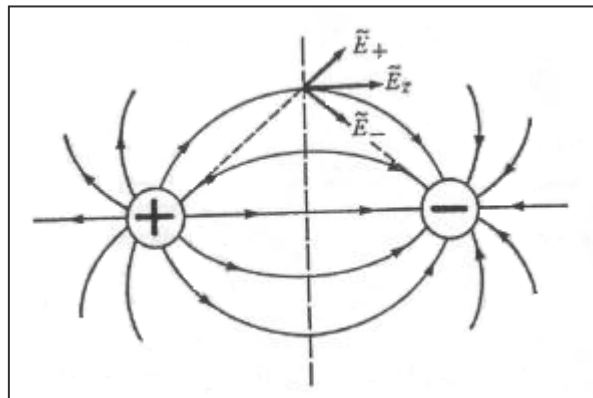


UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES

**Facultad de Ingeniería**  
Instituto de Ciencias Básicas

# **TÓPICOS DE** **“ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO”**

*(Primera Versión)*



*(Incluye 140 problemas resueltos)*

**Julio Pozo Pérez, Alejandro León Zapata y**  
**Rosa María Chorbadjian Rosales.**

2007

## INDICE

<b>CAPÍTULO I: FUERZA ELECTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO.....</b>	<b>06</b>
1.1. Carga eléctrica.....	06
1.2. Conductores y aisladores.....	07
1.3. Fuerza eléctrica (Ley de Coulomb).....	07
1.4. Densidad de carga eléctrica.....	08
1.5. Campo Eléctrico.....	10
1.6. Líneas de fuerza.....	12
1.7. Problemas resueltos.....	14
 <b>CAPÍTULO II: LEY DE GAUSS.....</b>	 <b>30</b>
2.1. Flujo eléctrico.....	30
2.2. Ley de Gauss.....	30
2.3. Problemas resueltos.....	31
 <b>CAPÍTULO III: POTENCIAL ELÉCTRICO.....</b>	 <b>50</b>
3.1. Definición de diferencia de potencial.....	50
3.2. Cálculo del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico.....	51
3.3. Potencial de una carga puntual.....	51
3.4. Potencial debido a una distribución de carga.....	52
3.5. Determinación del campo eléctrico a partir del potencial.....	54
3.6. Problemas resueltos .....	58
 <b>CAPÍTULO IV: CONDENSADORES Y DIELECTRICOS.....</b>	 <b>78</b>
4.1. Definición de capacidad o capacitancia.....	78
4.2. Condensador de placas paralelas .....	79
4.3. Dieléctricos en condensadores.....	81
4.4. Conexión de condensador en serie y en paralelo .....	85
4.5. Energía almacenada por un condensador .....	87
4.6. Circuitos RC.....	89
4.7. Problemas resueltos.....	93

<b>CAPÍTULO V: CIRCUITOS ELÉCTRICOS.....</b>	<b>105</b>
5.1. Corriente eléctrica.....	105
5.2. Ley de Ohm.....	107
5.3. Conversión de energía en una resistencia.....	108
5.4. Fuerza electromotriz.....	110
5.5. Circuitos eléctricos.....	111
5.6. Leyes de Kirchhoff.....	112
5.7. Problemas resueltos.....	113
<b>CAPÍTULO VI: CAMPO MAGNÉTICO.....</b>	<b>123</b>
6.1. Líneas de inducción y Flujo magnético.....	123
6.2. Fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento.....	124
6.3. Fuerza sobre un conductor con corriente.....	125
6.4. Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético. ....	127
6.5. Problemas resueltos .....	128
<b>CAPÍTULO VII: LEY DE AMPERE - LEY DE BIOT-SAVART.....</b>	<b>140</b>
7.1. Ley de Ampere.....	140
7.2. Campo de un conductor recto y largo, con corriente.....	142
7.3. Fuerza entre dos conductores paralelos.....	142
7.4. Campo de un Solenoide.....	144
7.5. Ley de Biot- Savart.....	146
7.6. Problemas resueltos .....	148
<b>CAPÍTULO VIII: LEY DE FARADAY.....</b>	<b>170</b>
8.1. Ley de Faraday.....	170
8.2. Ley de Lenz.....	171
8.3. <i>Fem</i> inducida.....	171
8.4. Campos magnéticos variables en el tiempo.....	172
8.5. Problemas resueltos .....	174

<b>CAPÍTULO IX: INDUCTANCIA.....</b>	<b>187</b>
9.1. Definición de inductancia.....	187
9.2. Cálculo de la inductancia.....	188
9.3. Energía del campo magnético .....	189
9.4. Densidad de energía del campo magnético.....	190
9.5. Circuitos LR.....	191
9.6. Circuitos LC.....	194
9.7. Circuitos RLC.....	196
9.8. Problemas resueltos .....	198
<b>CAPÍTULO X: CORRIENTE ALTERNA.....</b>	<b>206</b>
10.1. Introducción.....	206
10.2. Corriente Alterna en una resistencia.....	207
10.3. Corriente Alterna en un condensador... ..	208
10.4. Corriente Alterna en una bobina.....	210
10.5. Circuito RLC (Serie).....	212
10.6. Resonancia.....	216
10.7. Circuito RLC (paralelo).....	217
10.8. Potencia en circuito de corriente alterna.....	218
10.9. Valores efectivos o rms para la corriente y el potencial.....	219
10.10. Transformadores.....	220
10.11. Problemas resueltos.....	221
<b>CAPÍTULO XI: PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA.....</b>	<b>230</b>
11.1. Introducción (momento magnético y magnetización).....	230
11.2. Magnetización: (Corrientes atómicas).....	231
11.3. Propiedades magnéticas de la materia.....	232
11.4. Materiales Ferromagnéticos.....	233
11.5. Dominios ferromagnéticos.....	234
11.6. Los tres vectores magnéticos.....	236
11.7. Problemas resueltos.....	238

## **CAPÍTULO XII: ECUACIONES DE MAXWELL Y ONDAS**

<b>ELECTROMAGNETICAS.....</b>	<b>244</b>
12.1. Campos eléctricos variables y campos magnéticos inducidos.....	244
12.2. El aporte de Maxwell (Ley de Ampere-Maxwell).....	245
12.3. Ecuaciones de Maxwell.....	246
12.4. Energía electromagnética.....	247
12.5. Vector de Poynting.....	247
12.6. Ondas electromagnéticas.....	247
12.7. Problemas Resueltos .....	249

## CAPÍTULO I

### FUERZA ELECTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO

#### 1.1. Carga eléctrica

La carga eléctrica en sí durante el proceso de frotamiento no se crea, sólo existe una transferencia de carga negativa (electrones), de la lana a la ebonita. Por consiguiente, la ebonita queda cargada negativamente y la lana positivamente.

Una observación experimental es que **cuerpos con cargas de igual signo se repelen y con cargas de signos distintos se atraen (Ley de polaridad).**

La materia se compone de átomos y éstos a su vez de electrones, protones, neutrones y otras partículas que son de menor importancia en electrostática. Los átomos son eléctricamente neutros. Los electrones son partículas cargadas negativamente, los protones son partículas con cargas positivas. El átomo tiene igual número de electrones que de protones. Cuando decimos que un objeto está cargado, lo que queremos decir es que tiene un exceso de carga; que puede ser positiva (deficiencia de electrones) o negativa (exceso de electrones).

Experimentalmente se observa que **"la carga neta en un sistema cerrado se conserva"**, esto es el enunciado del **principio de la conservación de la carga.**

En el siglo pasado se creía que la carga eléctrica era un fluido continuo, pero a principios de este siglo, se descubrió que la carga eléctrica está dada en unidades o paquetes de cargas separadas, y esta propiedad de la carga eléctrica se conoce como **"cuantización de la carga"**. Esta carga básica es la carga del electrón que se representa simbólicamente por  $e$ , y su valor está dado  $e = 1.60206 \times 10^{-19}$  [Coulomb].

**Notación:** las cargas macroscópicas se representan por  $q$  o  $Q$  y equivalen a  $N e$  donde  $N$  es un número entero.

## 1.2. Conductores y aisladores

Respecto al comportamiento eléctrico, los materiales pueden clasificarse en general en dos clases: conductores y aisladores (dieléctricos) de la electricidad. Los conductores son sustancias metálicas, como el cobre, plata, hierro, etc., que contienen un gran número de portadores de carga libre. Estos portadores de carga (generalmente electrones) se mueven libremente en el conductor. Los dieléctricos, son materiales en los que las partículas cargadas no se mueven debido a que están fuertemente ligadas a las moléculas de las que forman parte, por ejemplo, vidrio, plástico, porcelana, etc.

## 1.3. Fuerza eléctrica (Ley de Coulomb)

Uno de los primeros científicos que realizó experimentos para el estudio cuantitativo de la fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas puntuales, fue el científico francés Charles Agustin Coulomb (1736 - 1806). Utilizando una balanza de torsión, similar a la que utilizó posteriormente Cavendish para medir las atracciones gravitacionales. El experimento que realizó Coulomb fue diseñado con el propósito de analizar cómo la fuerza entre dos cargas puntuales varía con el producto de la magnitud de las cargas e inversamente a su separación elevada al cuadrado. Las cargas son representadas por  $q_1$  y  $q_2$ , y la separación entre las cargas por  $r$ . Coulomb encontró que la fuerza que ejercía una carga sobre la otra, estaba descrita por:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

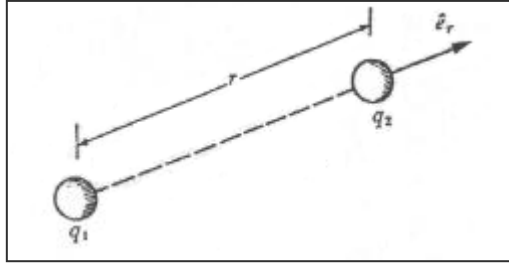
Donde  $K$  representa una constante de proporcionalidad cuyo valor dependerá del sistema de unidades que se utilice.

Esta expresión recibe el nombre de **Ley de Coulomb**. La ecuación (1.1) se puede escribir en forma vectorial como

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r \quad ; \quad \hat{e}_r = \frac{|\vec{r}|}{r} \Rightarrow |\hat{e}_r| = 1 \quad (1.2)$$

donde  $\hat{e}_r$  es el vector unitario a lo largo de  $r$  como se indica en la siguiente Fig.; el signo algebraico de  $q_1$  y  $q_2$ , son los que nos entregan el sentido de la fuerza, si  $q_1$  y  $q_2$ , son

positivos, el sentido de la fuerza en  $q_2$  es en el sentido de  $\hat{e}_r$ ; si  $q_1$  es negativa y  $q_2$  es positiva, el sentido de  $\vec{F}$  es contraria a  $\hat{e}_r$ .



En el sistema SI la ley de Coulomb se puede escribir en la forma siguiente:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r \quad (1.3)$$

donde  $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  y  $\epsilon_0$ , es una constante que se conoce como la **permitividad del vacío** o del espacio libre y su valor está dado por:

$$\epsilon_0 = 8.85415 \times 10^{-12} \left[ \frac{C^2}{Nm^2} \right]$$

Para simplificar los cálculos se puede considerar:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 9 \times 10^9 [Nm^2/C^2]$$

Cuando se considera la interacción de un conjunto discreto formado por varias cargas puntuales y se desea saber la fuerza resultante sobre una carga específica, se encuentra que la fuerza total resultante es simplemente la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada una de las cargas. Esto se conoce como el **Principio de Superposición**.

#### 1.4. Densidad de carga eléctrica

**Densidad de carga volumétrica.** Cuando una carga eléctrica es distribuida en toda una región del espacio, podemos definir la densidad de carga eléctrica promedio como la carga total en la región dividida por el volumen de la región. La densidad de la carga eléctrica se simboliza por



“ $\rho$ ” y tiene las unidades de  $[C/m^3]$ , cuando el volumen  $v$  contiene la carga total  $q$ , entonces la densidad de carga promedio es:

$$\rho_{prom} = \frac{q}{v} \quad (1.4)$$

La carga total se puede encontrar a partir del volumen y la densidad de carga promedio, es decir:

$$q = \rho_{prom} v$$

Estas relaciones son similares a la definición de la densidad de la masa.

En la interacción entre cargas, se puede suponer que cuando éstas llegan a un arreglo de equilibrio, la fuerza neta que actúa sobre cada carga es cero; de esta forma es posible encontrar distribuciones de cargas que no son uniformes. Entonces es posible definir la densidad de la carga variable en función de la posición, esto es:

$$\rho = \rho(\vec{r}) \quad \text{donde} \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Esto permite definir la densidad volumétrica de carga en la forma.

$$\rho(r) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \quad (1.5)$$

Si la densidad de la carga no es función de la posición, entonces es constante; si se asume que el límite existe y es independiente de los detalles de la subdivisión se puede escribir:

$$q = \iiint \rho(r) dv \quad (1.6)$$

El diferencial de volumen  $dv$  puede expresarse en diferentes sistemas de coordenadas dependiendo del problema en cuestión (cartesianas, esféricas y cilíndricas).

**Densidad de carga lineal y superficial.** Si la región cargada eléctricamente es muy delgada comparada con su longitud y distante de otros cuerpos, entonces se puede representar por una línea matemática (ideal), con una distribución de carga unidimensional  $\lambda$ , definida mediante

$$\lambda(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \quad (1.7)$$

de donde se tiene que

$$q = \int \lambda(l) dl \quad (1.8)$$

si  $\lambda$  es independiente de  $l$  o constante, entonces:

$$q = \lambda \int_0^L dt = \lambda L$$

La densidad de carga lineal está expresada en unidades de [C/m].

Si la carga se encuentra distribuida sobre una superficie en una región del espacio distante de otros cuerpos se puede representar matemáticamente por la siguiente expresión:

$$\sigma(r) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (1.9)$$

de donde se obtiene

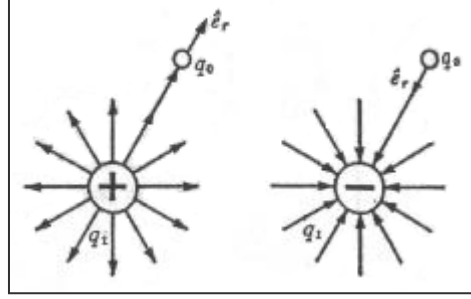
$$q = \iint \sigma(r) ds \quad (1.10)$$

El diferencial de superficie se debe expresar en sus coordenadas apropiadas. La densidad de carga superficial está dada en unidades de [C/m<sup>2</sup>].

### **1.5. Campo Eléctrico ( $\vec{E}$ )**

Cuando una carga eléctrica experimenta una fuerza de atracción o repulsión (en ausencia de campos gravitacionales y magnéticos) en una región del espacio, existe un campo eléctrico en esa región. La magnitud del campo eléctrico dependerá de la magnitud de la fuerza eléctrica y de la magnitud de la carga prueba (carga que experimenta la fuerza). La fuerza eléctrica puede ser generada por cargas aisladas o bien por una distribución de carga.

Supongamos que la fuerza se debe a una carga aislada, entonces se observa experimentalmente que la atracción o repulsión sobre la carga de prueba es radial y se puede dibujar líneas radiales a la carga que representen gráficamente la dirección de repulsión o atracción, estas líneas radiales se conocen como líneas de campo (las cuales son imaginarias) que salen de las cargas positivas y entran a las cargas negativas como se muestran en la figura.



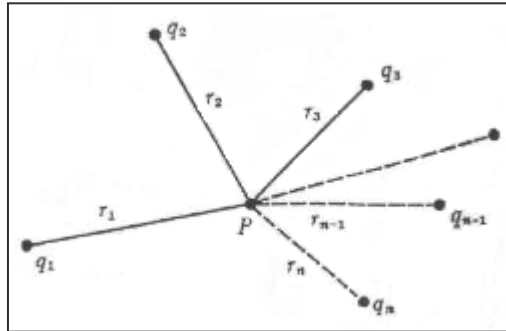
El campo eléctrico se define como la razón de la fuerza eléctrica  $\vec{F}$  (que experimenta la carga prueba), por unidad de **carga prueba** ( $q_0$ ) **que por definición se considera positiva**. Esto es:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

De la Fig. anterior se observa que la dirección de la fuerza está en la dirección del campo.

Si se tiene una carga punto  $q_1$ , y a una distancia  $r$  se encuentra una carga prueba  $q_0$ , se puede emplear la ley de Coulomb, ecuación (1.3). Para obtener que:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r^2} \hat{e}_r$$



Si se divide ambos lados de la ecuación por  $q_0$  se obtendrá una expresión del campo eléctrico para cargas aisladas.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{e}_r \quad (1.12)$$

Para determinar el campo eléctrico en el punto  $P$ , debido a la presencia de un conjunto discreto de cargas puntuales se utiliza el **principio de superposición** el cual consiste en la suma vectorial de los campos en el punto  $P$ , dado por

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{q_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{e}_i \quad (1.13)$$

Donde  $q_i$  representa la carga de cada una, y  $r_i$  la distancia de las cargas al punto donde se desea calcular el campo.

### Determinación del campo eléctrico para distribuciones continuas

Tomando el límite continuo de la ecuación (1.13) que consiste en escribir:

$$\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \rightarrow \int \frac{dq}{r^2} \quad (1.14)$$

Se obtiene que el campo para una distribución continua de carga, está dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{e}_r \quad (1.15)$$

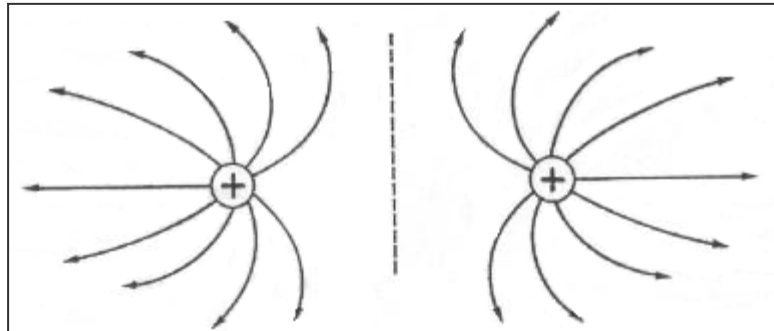
donde

$$dq = \begin{cases} \lambda dl & (\text{distribución lineal}) \\ \sigma ds & (\text{distribución superficial}) \\ \rho dv & (\text{distribución volumétrica}) \end{cases}$$

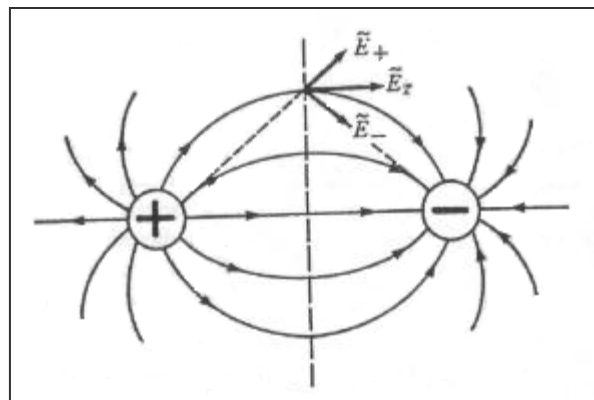
$dq$  es una diferencial de carga,  $r$  es la distancia entre el diferencial de carga y el punto donde se desea calcular el campo y  $\hat{e}_r$  es el vector unitario que nos indica la dirección del campo, siguiendo la trayectoria de  $r$ .

### 1.6. Líneas de fuerza

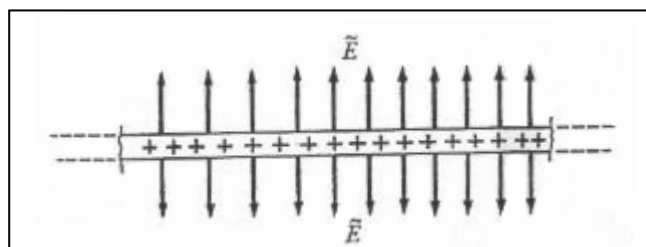
Las líneas de fuerza o líneas de campo son líneas imaginarias trazadas de tal forma, que la tangente en un punto coincide con la dirección del campo eléctrico en dicho punto.



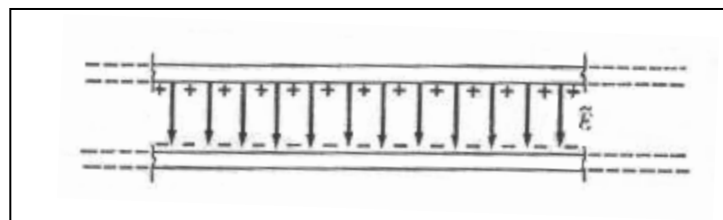
a) Dos cargas iguales.



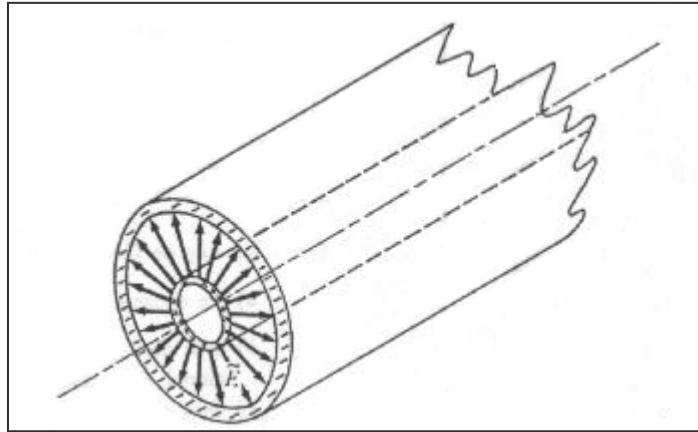
b) Dipolo eléctrico.



c) Placa cargada.



d) Dos placas paralelas con la misma densidad de carga, y signo contrario.



e) Cascarones cilíndricos concéntricos con la misma carga total, de signos contrarios.

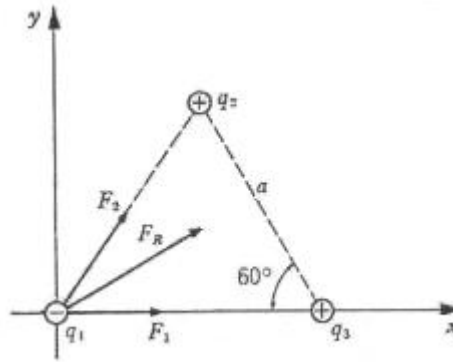
Al analizar los diagramas de la Fig. anteriores para diferentes distribuciones de carga, se observa que:

1. Las líneas de Fuerza comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas.
2. La tangente a la línea de fuerza en cualquier punto es paralela a la dirección del campo eléctrico en ese punto.
3. El número de líneas de fuerza por unidad de área en una región del espacio está en relación directa a la magnitud del campo eléctrico. A mayor número de líneas de fuerza por unidad de área, mayor la magnitud del campo.
4. Las líneas de fuerza nunca se cruzan.

## **1.7. Problemas resueltos**

### **Problema 1.1**

En cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de lado  $a = 1$  m se tienen las siguientes cargas  $q_1 = -2 \times 10^{-6}$  C,  $q_2 = 1 \times 10^{-6}$  C,  $q_3 = 1 \times 10^{-6}$  C. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre  $q_1$  ?



**Solución:**

De acuerdo con el principio de superposición:

$$\vec{F}_R = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$$

Del diagrama vectorial de la Fig. anterior:

$$F_x = F_1 + F_2 \cos 60^\circ$$

$$F_y = F_2 \sen 60^\circ$$

de la aplicación de la Ley de Coulomb, se puede escribir que :

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} \cos 60^\circ$$

dado que  $q_2 = q_3$ , se tiene que

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} (1 + \cos 60^\circ)$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a^2} \sen 60^\circ$$

Teniendo presente que  $K = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9 [Nm^2 / C^2]$ . Sustituyendo los datos se tiene:

$$F_x = \left( 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \right) \left( \frac{-2 \times 10^{-12} C^2}{1 m^2} \right) (1 + 0.5)$$

$$F_x = -27 \times 10^{-3} [N]$$

$$F_y = \left( 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \right) \left( \frac{-2 \times 10^{-12} C^2}{1 m^2} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -15.58 \times 10^{-3} [N]$$

La fuerza resultante escrita en forma vectorial es:

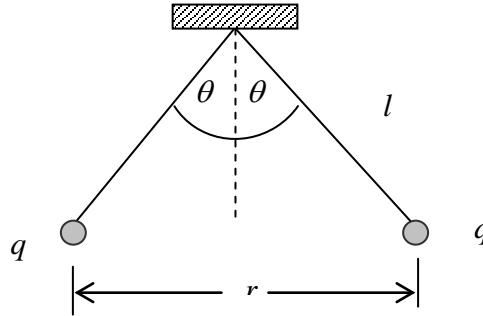
$$\vec{F}_R = (27 \times 10^{-3} \hat{e}_x + 15.58 \times 10^{-3} \hat{e}_y) [N]$$

### Problema 1.2

Para el sistema de la figura formado por dos péndulos idénticos, cargados con cargas iguales  $q$  y de masas iguales  $m$ .

Determine:

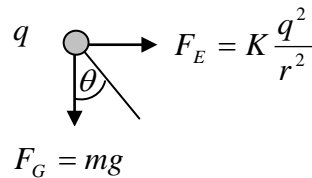
- El valor del Angulo  $\theta$  para que el sistema se encuentre en equilibrio.
- La distancia de separación  $x$ , entre las cargas para ángulos pequeños.



$$\sin \theta = \frac{r/2}{l}$$

**Solución:**

- Del DCL de la carga del lado derecho de la figura anterior, se tiene



De la figura anterior

$$F_E = F_G \tan \theta$$



Sustituyendo los valores de las fuerzas respectivas y sabiendo a partir de la primera figura que  $r = 2l \sin \theta$ , se obtiene

$$K \frac{q^2}{(2l \sin \theta)^2} = mg \tan \theta$$

de donde se encuentra que

$$\sin^2 \theta \tan \theta = \frac{Kq^2}{4l^2 mg}$$

b) Para ángulos pequeños se tiene:  $\tan \theta \approx \sin \theta = \frac{x/2}{l}$ . Entonces, reemplazando en la ecuación anterior, se encuentra

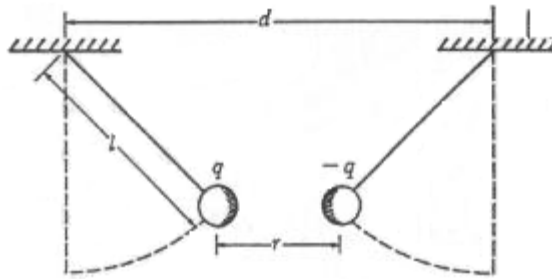
$$\frac{x^3}{8l^3} = \frac{Kq^2}{4l^2 mg} \Rightarrow x^3 = \frac{2lKq^2}{mg} \quad ; \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

luego

$$x = \left( \frac{lq^2}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$

### Problema 1.3

Dos partículas de igual masa  $m$ , están suspendidas por cuerdas de longitud  $l$  de puntos separados, una distancia  $d$  como se muestra en la figura. Calcule la magnitud de cada carga si la distancia horizontal que separa las partículas es  $r$ .



**Solución:**

Siguiendo el mismo procedimiento que el empleado en el problema anterior (1.2), también se puede escribir

$$F_E = F_G \tan \theta$$

Sustituyendo los valores de las fuerzas respectivas

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = mg \tan \theta \equiv mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

de donde se encuentra

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r^2 mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

por otro lado, de la figura anterior, se tiene que

$$2l \sin \theta + r = d \Rightarrow \sin \theta = \left( \frac{d-r}{2l} \right)$$

expresando  $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ , después de sustituir, se obtiene

$$q = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mgr^2 [(d-r)/2]}{\{l^2 - [(d-r)/2]^2\}^{1/2}}}$$

#### Problema 1.4

Si se tiene una esfera dieléctrica de radio  $R$  con una densidad de carga volumétrica  $\rho = A$  [C/m<sup>3</sup>]; donde  $A$  es constante. Calcule la carga total encerrada en la esfera.

**Solución:**

Utilizando la ecuación (1.6) tenemos que  $\rho = A$  entonces:

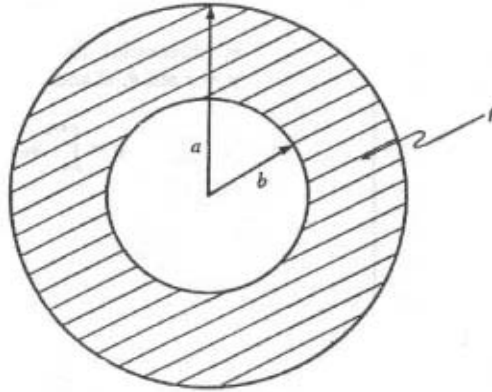
$$q = \iiint A \, dv = A \iiint dv$$

Dado que el volumen de una esfera es  $4/3 \pi R^3$ , entonces

$$q = 4/3 \pi R^3 A.$$

### Problema 1.5

Una esfera maciza, no conductora, de radio  $a$ , con una cavidad esférica de radio  $b$ , como se muestra en la figura, tiene una distribución de carga volumétrica  $\rho = A/r^3$  donde  $A$  es una constante. Calcule la carga que se encuentra en la esfera.



**Solución:**

Utilizando la ecuación (1.6), se tiene que:

$$q = \iiint \rho \, dv$$

En coordenadas esféricas  $dv = r^2 dr \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ , entonces

$$q = \iiint \rho \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_b^a \frac{A}{r^3} r^2 dr \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

Luego

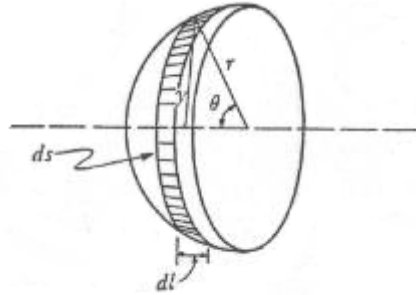
$$q = 4\pi A \int_b^a \frac{dr}{r}$$

De donde se encuentra que la carga en la esfera es:

$$q = 4\pi A \, \text{Ln} \, \frac{a}{b}$$

### Problema 1.6

Una semiesfera hueca dieléctrica tiene una distribución de carga eléctrica  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin \theta$ , donde  $\sigma_0$  está expresada en  $[C/m^2]$ . Calcule la carga total que se encuentra en la semiesfera hueca.



### Solución:

Para una distribución superficial de carga se tiene que

$$q = \iint \sigma(\theta) ds$$

en esta caso  $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Sustituyendo, se obtiene

$$q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sigma_0 \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$q = \sigma_0 r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta$$

$$q = \sigma_0 2\pi r^2 \left[ \theta - \sin \theta \cos \theta \right]_0^{\pi/2}$$

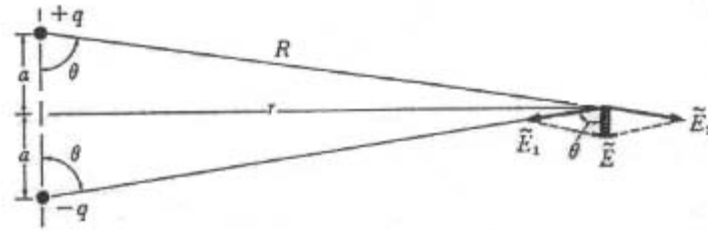
evaluando:

$$q = \frac{1}{2} \sigma_0 \pi^2 r^2 [C].$$

Esta expresión nos muestra que la carga total que no está distribuida uniformemente.

### Problema 1.7

**Dipolo eléctrico.** Se tienen dos cargas iguales de signo contrario separadas por una distancia pequeña, como se muestra en la figura, esta configuración se conoce como Dipolo eléctrico. Suponiendo que  $r \gg a$ , calcule el campo eléctrico debido a estas cargas en un punto localizado a una distancia  $r$  del centro del dipolo, según la perpendicular bisectriz de la línea que une las cargas. (donde  $R = \sqrt{a^2 + r^2}$  )



**Solución:**

De acuerdo con el principio de superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Según la ecuación 1.12:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

De la Fig.

$$E = 2 E_1 \cos \theta$$

donde  $\cos \theta = \frac{a}{R}$ .

Sustituyendo los valores de  $E_1$ ,  $R$  y de  $\cos \theta$ , se obtiene:

$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(a^2 + r^2)} \frac{a}{(a^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

Para el caso en que  $a \ll r$ , entonces, se puede omitir el  $a$  del denominador y la magnitud del campo eléctrico para el dipolo está dada por:

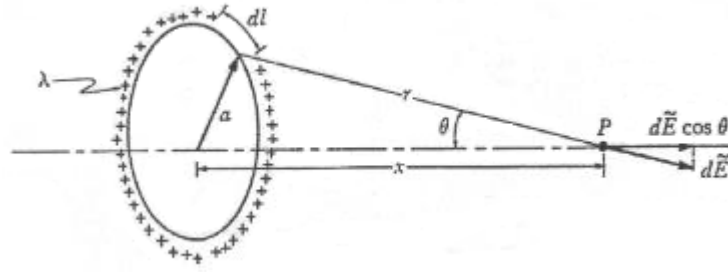
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{r^3}$$

El producto  $2aq$  se conoce como momento del dipolo eléctrico  $P$ , y en general para el cálculo del campo eléctrico nunca se trabaja con los factores  $q$  y  $2a$  separados, sino siempre con el producto que se sustituye por  $P$ . Para el caso en, el cual  $r \gg a$  el campo del dipolo se puede escribir como:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3}$$

### Problema 1.8

Se tiene un **anillo de radio  $a$** , cargado positivamente con una distribución de carga uniforme lineal  $\lambda$ . Calcular  $E$  a una distancia  $x$  sobre el eje del anillo a partir de su centro. (ver Fig.).



### Solución:

De la definición de densidad lineal de carga, se tiene que

$$dq = \lambda dl$$

lo cual producirá un diferencial de campo eléctrico en el punto en cuestión, que de acuerdo con la ecuación (1.14), resulta:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + x^2)}$$

de la Fig. se puede ver que al integrar, la componente perpendicular al eje se anula quedando solamente la componente colineal, de aquí que:

$$E = \int dE \cos \theta$$

donde:

$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

entonces:

$$E = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl$$

Integrando y evaluando

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a \lambda x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

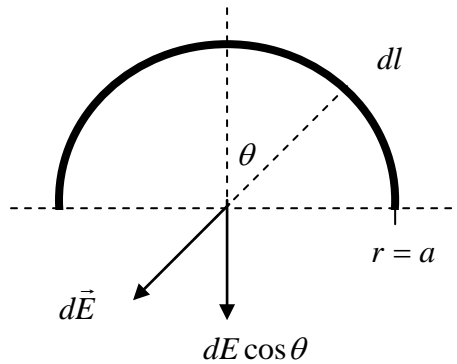
Para  $x \gg a$ , se tiene que

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a \lambda}{x^2}$$

donde  $2\pi a \lambda$  representa la carga total del anillo. Del resultado anterior se puede concluir que para grandes distancias, el anillo se comporta como una carga puntual.

### Problema 1.9

Considere un **arco semicircular** como el de la figura, cargado uniformemente con una densidad lineal  $\lambda$ . Determine el campo eléctrico en el centro de curvatura del arco.



**Solución:**

De la figura se tiene

$$dE_y = dE \cos \theta$$

por simetría  $E_x = 0$

Por otro lado, de la definición de campo eléctrico se obtiene que

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

sustituyendo en la ecuación anterior, se puede escribir

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta$$

para este caso  $dq = \lambda dl$ , donde,  $dl = a d\theta$  y  $r = a$ , entonces

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\theta}{a^2} \cos \theta$$

Integrando

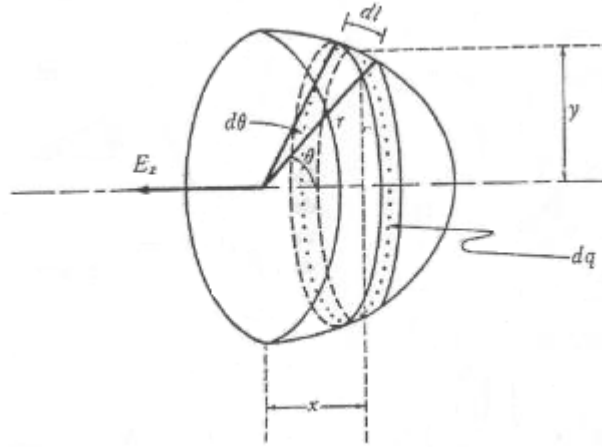
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

En forma vectorial

$$\vec{E}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} (-\hat{e}_y)$$

### Problema 1.10

La **mitad de un cascarón esférico**, no conductor de radio interior  $r$ , tiene una carga total  $Q$  distribuida uniformemente en su superficie interior. Calcular el campo eléctrico en el centro de curvatura.



**Solución:**

De la figura se ve que por simetría  $E_y = 0$ , (ver problema anterior), entonces se puede escribir

$$dE_x = dE \cos \theta$$



De la ecuación (1.15), se tiene que

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta$$

Sabiendo que  $dq = \sigma ds$  e integrando se obtiene

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r^2} \cos \theta$$

dado que  $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , se tiene

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma ds}{r^2} \cos \theta = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

como  $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2}$ , se tiene

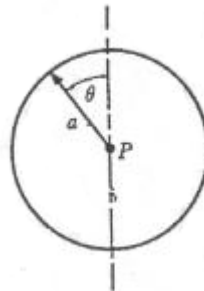
$$E_x = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

dado que  $\sigma = \frac{Q}{2\pi r^2}$ , sustituyendo se encuentra

$$E_x = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

### Problema 1.11

Para un anillo circular de radio  $a$  con una distribución de carga lineal  $\lambda = \lambda_0(1 + \cos \theta)$  como el de la Fig. Calcule la carga total del anillo.



**Solución:**

Para esta caso la carga eléctrica se determina a partir de

$$q = \int \lambda dl$$

donde  $\lambda = \lambda_0(1 + \cos \theta)$  y de la figura se tiene que  $dl = a d\theta$

Reemplazando se encuentra

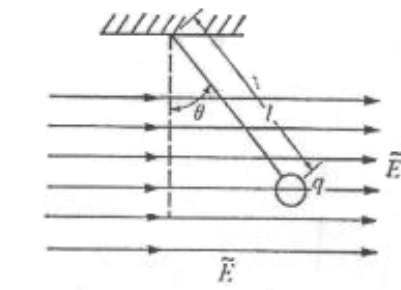
$$q = \int_0^{2\pi} \lambda_0(1 + \cos \theta) a d\theta$$

de donde se obtiene que

$$q = 2\pi a \lambda_0$$

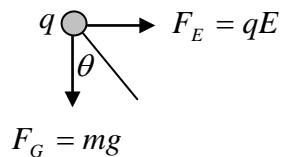
**Problema 1.12**

Una esferita no conductora con una carga  $q$ , cuelga de un hilo de longitud  $l$  dentro de un campo eléctrico  $E$ . Calcule la masa de la esferita si el ángulo entre la vertical y el hilo es  $\theta$



**Solución:**

a) Del DCL de la carga se tiene



De la figura anterior

$$F_E = F_G \tan \theta$$

Sustituyendo lo valores de las fuerzas, se tiene  $qE = mg \tan \theta$

de donde se encuentra

$$m = \frac{qE}{g \tan \theta}$$

### Problema 1.13

Determine la carga en el volumen definido por  $1 \leq r \leq 2$  [m] en coordenadas esféricas si:

$$\rho = \frac{5 \cos^2 \phi}{r^4} [C / m^3]$$

**Solución:**

La carga en un volumen está dada por

$$q = \iiint \rho dv$$

donde  $dv =$  (en coordenadas esféricas), luego

$$q = \iiint \rho dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^2 \frac{5 \cos^2 \phi}{r^4} r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

$$q = 5 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_1^2 r^{-2} dr$$

Dado que  $\cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\phi)$ , se tiene

$$q = 5 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\phi) \right) d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_1^2 r^{-2} dr = 5(\pi)(2) \left( \frac{1}{2} \right) = 5\pi [C]$$

### Problema 1.14

Demuestre que la magnitud máxima del campo eléctrico a lo largo del eje de un anillo cargado uniformemente ocurre cuando  $x = a / \sqrt{2}$  y tiene un valor de  $E = \frac{Q}{6\pi \epsilon_0 \sqrt{3} a^2}$

**Solución:**

El campo eléctrico para este caso es

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Derivando con respecto a  $x$  e igualando a cero se obtiene

$$x = a / \sqrt{2}$$

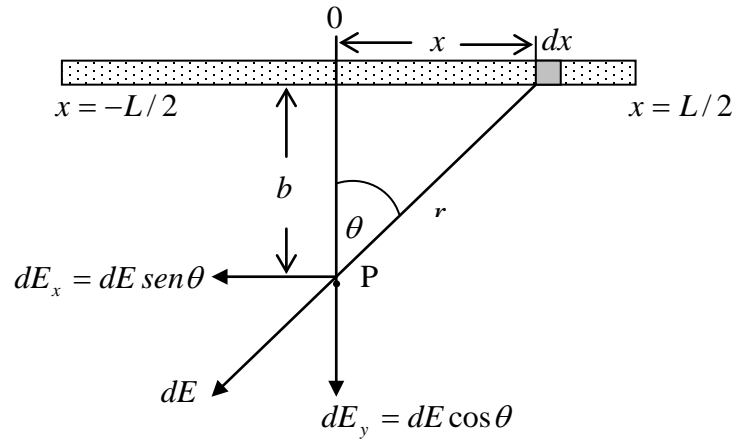
Evaluando el valor del campo en  $x = a / \sqrt{2}$ , se encuentra

$$E = \frac{Q}{6\pi \varepsilon_0 \sqrt{3} a^2}$$

### Problema 1.15

Una varilla de longitud  $L$  no conductora tiene una distribución de carga lineal uniforme  $\lambda$ .

Determine el campo eléctrico en el punto P a una distancia  $b$  sobre la perpendicular bisectriz.



**Solución:**

De la figura se tiene que

$$dE_y = dE \cos \theta$$

$$dE_x = dE \sin \theta$$

la componente  $E_x = 0$  por simetría

como  $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$ , se tiene que

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta$$

Para esta caso  $dq = \lambda dx$ , y  $\cos \theta = b/r$ , luego sustituyendo se tiene

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \frac{b}{r} = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{r^3}$$

como  $r = (x^2 + b^2)^{1/2}$  se obtiene

$$dE_y = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

Integrando

$$E_y = \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

Dado que  $\int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{x}{b^2(x^2 + b^2)^{1/2}}$ , se encuentra

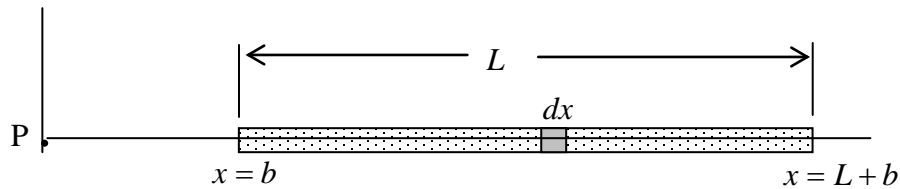
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{L}{(L^2/4 + b^2)^{1/2}}$$

También se puede escribir

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 b} \frac{L}{(L^2 + 4b^2)^{1/2}}$$

### Problema 1.16

Determine el campo eléctrico en un punto P ubicado a una distancia  $b$  del extremo izquierdo de la barra del problema anterior.



**Solución:**

Teniendo presente el problema anterior, se puede escribir

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2}$$

Integrando se encuentra

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_b^{L+b} \frac{dx}{x^2} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{L+b} - \frac{1}{b} \right]$$