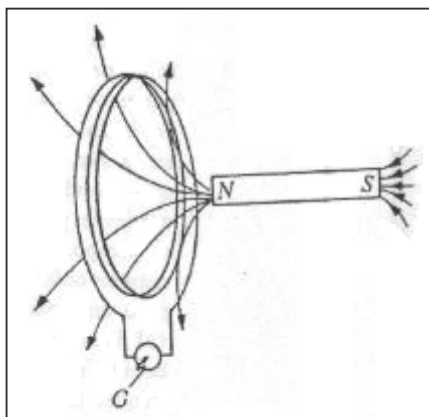


CAPÍTULO VIII

LEY DE INDUCCIÓN FARADAY

8.1. Ley de Faraday

En 1831 Faraday observó experimentalmente que cuando en una bobina que tiene conectado un galvanómetro como se muestra en la Fig.



y se hace variar un campo magnético introduciendo un imán, se produce una desviación en el galvanómetro lo que es equivalente a producir una corriente inducida en la bobina, pero este fenómeno sucede únicamente cuando el imán está en movimiento.

De este y otros experimentos, Faraday estableció que se induce una *fem* (fuerza electromotriz) en la bobina donde está conectado el galvanómetro, y cuya magnitud depende de la variación del campo y del área con respecto al tiempo, es decir del cambio del flujo magnético con respecto al tiempo, se puede expresar en la forma

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (8.1)$$

A la ecuación anterior se conoce como **“Ley de la Inducción de Faraday”**, donde ε es la *fem* inducida, Φ_B y $\frac{d\Phi_B}{dt}$ es la razón del cambio del flujo magnético, con respecto al tiempo, el signo menos tiene una relación con la polaridad de la *fem* inducida como lo veremos en la siguiente sección.

8.2. Ley de Lenz

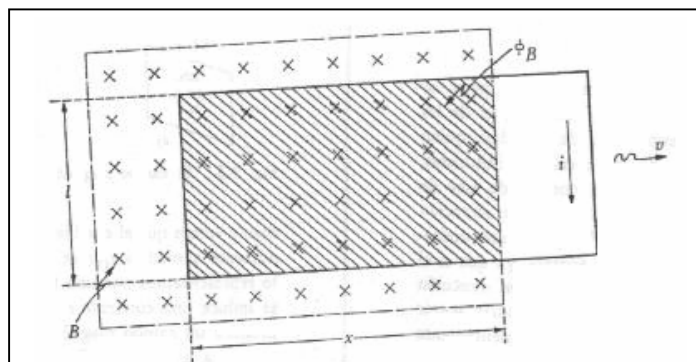
En la sección anterior se analizó cómo se inducen las *fem* pero no se mencionó nada acerca de la dirección de esta *fem*, ni de las corrientes inducidas. Fue H. F. Lenz, contemporáneo de Faraday, quien en una forma sencilla, estableció el sentido de las corrientes inducidas, mediante el siguiente enunciado que se conoce con el nombre de Ley de Lenz: **“La corriente que es inducida en un circuito tendrá una dirección de tal forma que se oponga a la causa que la produce”**, que es una consecuencia directa del principio de la conservación de la energía.

8.3. Fem inducida

De acuerdo a la Ley de Faraday que se define con la Ec. (8.1) se pueden inducir *fem* cuando existe una razón de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo, vamos a considerar un ejemplo sencillo en el cual se tiene una espira dentro de un campo magnético (el eje de la espira es paralelo a la dirección del campo para simplificar el ejemplo) si el campo magnético varía con el tiempo, entonces, se induce una *fem* en la espira, si movemos la espira perpendicularmente a la dirección del campo magnético, que se mantiene uniforme (con una velocidad constante), también se induce una *fem*.

Al realizar un análisis cuantitativo vamos a considerar primero el caso en que tenemos una espira rectangular de alambre con resistencia R , la cuál se encuentra parcialmente dentro de un campo magnético, como se muestra en la Fig. la espira se mueve hacia afuera del campo magnético con una velocidad v . El flujo magnético encerrado por la espira en un instante dado es

$$\phi_B = B l x \quad (8.2)$$



donde lx es el área de la espira; como B y l no varían, obviamente se tiene que:

$$v = -\frac{dx}{dt}$$

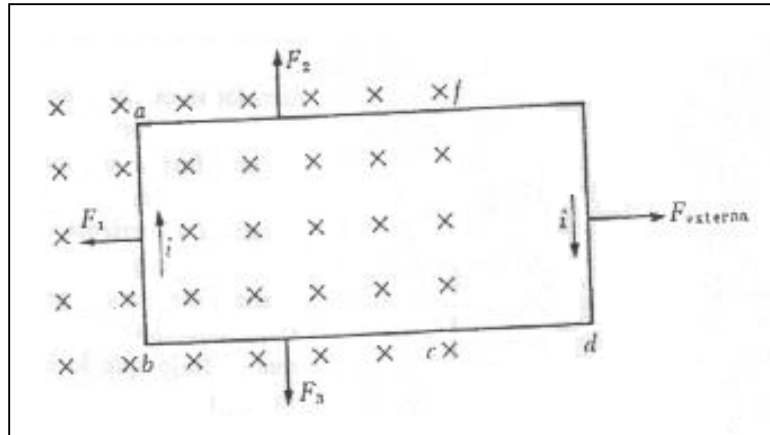
la velocidad es igual $-dx/dt$ ya que x está decreciendo. El cambio del flujo magnético ϕ_B con respecto al tiempo de acuerdo a la Ley de Faraday nos da la fem inducida, esto es

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = Blv \quad (8.3)$$

La fem inducida produce una corriente en el alambre que es igual a:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R} \quad (8.4)$$

donde R es la resistencia del alambre.



La fuerza que aparece en los segmentos af y bc son iguales en magnitud, pero tienen direcciones opuestas, como se muestra en la figura anterior.

8.4. Campos magnéticos variables en el tiempo

Las formas en las que el flujo magnético puede variar, se deben a la variación del área con respecto al tiempo, y también a la variación del campo magnético.

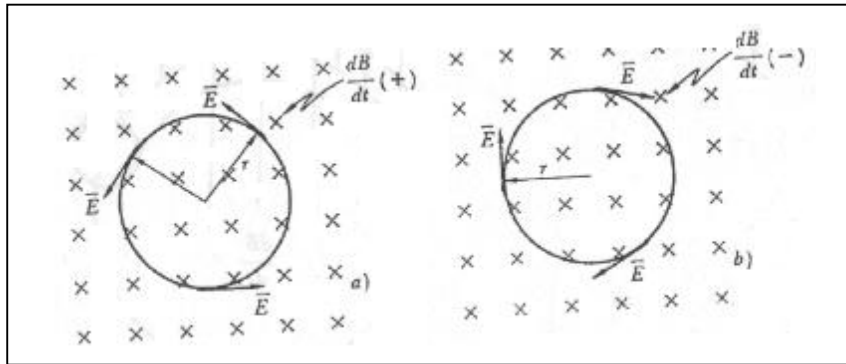
La fem está dada por $\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (8.5)

una forma más general de expresar la Ley de Faraday es a partir de las combinaciones de las ecuaciones (8.1) y (8.5), esto es

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (8.6)$$

de aquí se concluye que en que “un campo magnético que varía en función del tiempo nos induce un campo eléctrico”. De acuerdo a la Ec. (8.6) se tiene que el área encerrada por la trayectoria lineal cerrada sobre el campo eléctrico inducido equivale al área del flujo magnético.

La dirección del campo eléctrico inducido se puede obtener a partir de la Ley de Lenz, considerando que el campo eléctrico que produce la corriente inducida está en la misma dirección que está en la Fig. a), tenemos un campo magnético entrando al plano de la hoja y su razón de cambio respecto al tiempo es positivo, es decir, que B está aumentando, entonces se produce un campo eléctrico tangente a una trayectoria circular con una dirección que es contraria a la dirección de movimiento de las manecillas del reloj.



En la Fig. b), la razón del cambio del campo magnético respecto al tiempo es negativo, es decir, que B está decreciendo, entonces, la dirección de E es igual a la dirección del movimiento de las manecillas del reloj.

Algo que es muy importante hacer notar es la diferencia entre campos eléctricos producidos por carga eléctrica y los campos eléctricos inducidos que son producidos al variar un campo, magnético con respecto al tiempo, mientras que los campos eléctricos que son producidos por carga eléctrica “son conservativos”, es decir, que cualquier integral de línea cerrada sobre el campo E es cero, esto es

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{para campos eléctricos que son producidos por carga eléctrica})$$

Por otro lado, en los campos eléctricos inducidos la integral de línea cerrada sobre el campo E es igual a $-d\phi_B/dt$ de acuerdo a la Ley de Faraday, que se define matemáticamente por:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

es decir, que los campos eléctricos producidos por campos magnéticos en función del tiempo “no son conservativos”.

8.5. Problemas resueltos

Problema 8.1

Escriba la Ley de Faraday en forma diferencial

Solución:

La ley de Faraday escrita en forma integro-diferencial tiene la forma

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

donde $\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \right) \equiv \iint \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

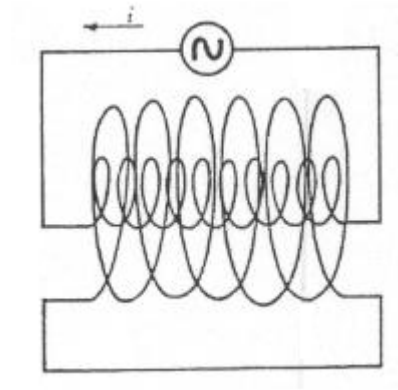
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La expresión anterior, se conoce con el nombre de forma diferencial de la Ley de Faraday, y forma parte de una de las ecuaciones de Maxwell, que a su vez corresponde a una de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo

Problema 8.2

Un solenoide de 0.20 [m] de longitud como se muestra en la Fig. tiene 200 vueltas, el radio de una de las vueltas es de 0.05 [m] y su resistencia es de 40 [Ω]. En su interior hay un solenoide de igual longitud y de 400 vueltas con un radio 0.02 [m] cada una de las vueltas. Si se conecta el solenoide interior a una fuente de corriente senoidal $i = i_0 \text{ sen } 2\pi \nu t$ donde ν es la frecuencia de la fuente de corriente y es de 60 [Hz], determine la máxima corriente que circula por el solenoide exterior

$$i_0 = 10 \text{ [A]}.$$

**Solución:**

De la Ec. 7.6 calculamos el campo magnético en el solenoide interior

$$B = \mu_0 n_1 i = \mu_0 \frac{N_1}{l} i$$

el flujo magnético lo determinamos a partir de la Ec. (6.1).

$$\phi_B = B A = \left(\mu_0 \frac{N_1}{l} i_0 \right) \pi r_1^2 \text{ sen } 2\pi \nu t$$

de la Ec. (8.1) tenemos que la fem inducida en el solenoide exterior es

$$\varepsilon = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt} = -N_2 \mu_0 \frac{N_1}{l} \pi r_1^2 i_0 2\pi f \cos 2\pi \nu t$$

Para el cálculo de la fem inducida se toma el radio del solenoide interior ya que podemos despreciar el campo magnético fuera de esta región.

De la Ec. (4.5) calculamos la corriente máxima inducida, esto es

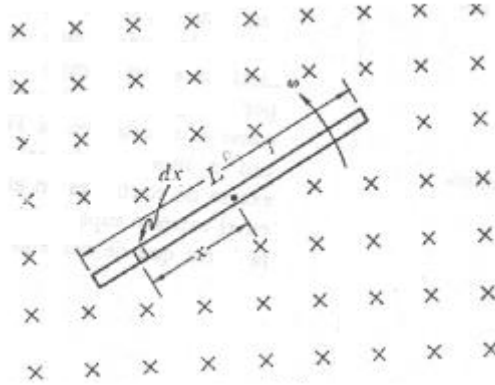
$$i_{m\acute{a}x} = \frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{\mu_0 2\pi^2 \nu N_1 N_2 r_1^2 i_0}{l R}$$

Sustituyendo valores

$$i_{m\acute{a}x} = 5.95 \times 10^{-2} \text{ [A]}.$$

Problema 8.3

Determine la diferencia de potencial entre el centro y uno de los extremos de una barra metálica de longitud L que gira con velocidad angular constante ω dentro de un campo magnético B uniforme como se muestra en la Fig.



Solución:

Si escogernos un pequeño diferencial de longitud de la barra a una distancia x del centro de rotación tendrá una velocidad tangencial $v = \omega x$, entre el centro y sus extremos se producirá una diferencia de potencial. De acuerdo a la Ec. (8.3) tenemos que:

$$d\varepsilon = Bv dx = B\omega x dx$$

entonces

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int_0^{L/2} B\omega x dx = B\omega \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{L/2} = \frac{B\omega L^2}{8}$$

Otro Método

De la ley de Faraday se tiene:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \iint B ds \quad (\vec{B} \uparrow \downarrow d\vec{s})$$

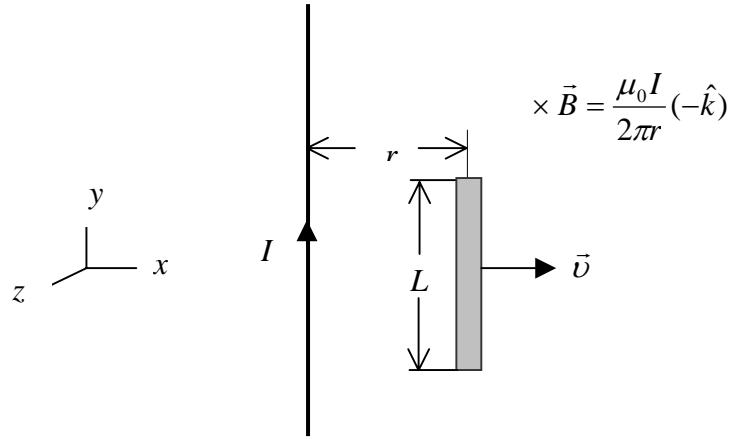
Dado que $B = \text{Cte}$, se tiene

$$\varepsilon = B \frac{d}{dt} \int_0^{l/2} \int_0^{\theta(t)} r dr d\theta = B \frac{l^2}{8} \frac{d\theta}{dt} = B \frac{l^2}{8} \omega$$

Problema 8.4

Una barra conductora de longitud L se mueve con velocidad v constante, perpendicular a un largo alambre recto que conduce una corriente I , tal como se muestra en la siguiente figura. Muestre que la magnitud de la *fem* generada entre los extremos de la barra es

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} L$$

**Solución:**

De la ley de Faraday se tiene que $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$ con $\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$

De la Fig. se ve que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{s} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds$, además: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $ds = dx dy$, entonces

$$\phi_B = \iint B ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{x(t)} dx \int_0^L dy$$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r} x(t)$$

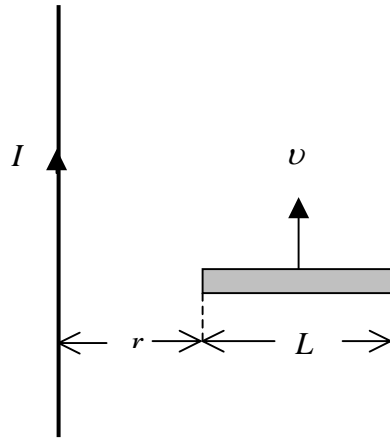
Sustituyendo en $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$, se encuentra

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 v I}{2\pi r} L \quad ; \quad v = \frac{dx(t)}{dt}$$

Problema 8.5

Una barra conductora de longitud L con velocidad v paralela a un largo alambre que conduce una corriente estable I . El eje de la barra se mantiene perpendicular al alambre con el extremo cercano a una distancia r , como se muestra en la siguiente figura. Demuestre que la magnitud de la *fem* en la barra es

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(1 + \frac{L}{r}\right)$$

**Solución:**

De la ley de Faraday se tiene que $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$ con $\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$

De la Fig. se ve que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{s} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds$, además: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $ds = dr dy$, entonces

$$\phi_B = \iint B ds = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr dy$$

Luego el flujo está dado por

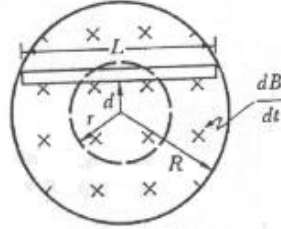
$$\phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{y(t)} dy \int_r^{r+L} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} y(t) \ln\left(\frac{r+L}{r}\right)$$

Sustituyendo en $\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$, se encuentra

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(1 + \frac{L}{r}\right) \quad ; \quad v = \frac{dy(t)}{dt}$$

Problema 8.6

Demuestre que el campo eléctrico inducido es constante en una barra metálica de longitud L , que se encuentre en una región cilíndrica de radio R en el espacio donde el campo magnético cambia con una rapidez dB/dt como se ilustra en la siguiente figura

**Solución:**

Para cualquier punto dentro de la región cilíndrica con respecto al centro, el campo eléctrico se puede obtener de la Ec. (8.6)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

La Ec. (8.6) se puede expresar también de la siguiente manera

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

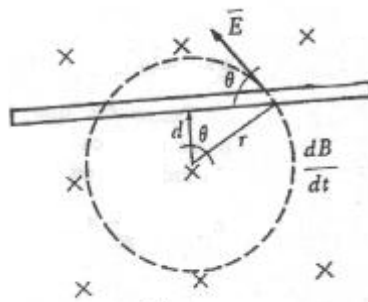
Evalutando ambas integrales tenemos

$$E \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Simplificando y despejando el campo eléctrico

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

d es la distancia perpendicular entre la barra y el centro de la región cilíndrica que se puede determinar del teorema de Pitágoras, esto es $d = \sqrt{R^2 - L^2/4}$



Para cualquier trayectoria circular de radio $d \leq r \leq R$ se puede obtener el campo E sobre la barra. De la Fig. anterior vemos que

$$E_{\text{barra}} = E \cos \theta$$

donde el $\cos \theta = \frac{d}{r}$ y $E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$, sustituyendo en la expresión anterior

$$E_{\text{barra}} = \left(-\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \right) \frac{d}{r}$$

Simplificando

$$E_{\text{barra}} = -\frac{d}{2} \frac{dB}{dt}$$

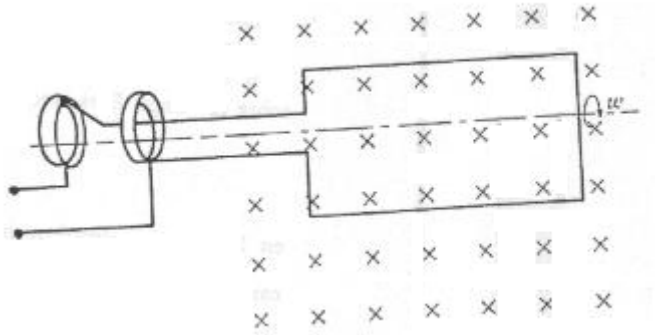
Sustituyendo el valor de d obtenemos

$$E_{\text{barra}} = -\frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \sqrt{R^2 - L^2/4}$$

de esta expresión observamos que el campo eléctrico para cualquier punto de la barra es constante.

Problema 8.7 (Generador de corriente alterna)

Una bobina rectangular de N vueltas de lados l y h gira con una frecuencia f en un campo magnético uniforme B como se muestra en la siguiente. Determine el voltaje inducido en las terminales de la bobina.



Solución:

El flujo magnético está dado

$$\phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Evaluando la integral

$$\phi_B = AB \cos \theta$$

El ángulo $\theta = \omega t$ que es el ángulo entre B y el vector área A , que está variando con respecto al tiempo, entonces

$$\phi_B = BA \cos \omega t$$

derivando con respecto al tiempo obtenemos la fem que se induce

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = BA \omega \sin \omega t$$

Sustituyendo el valor de la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$ y el área de la espira $A = lh$, se obtiene la fem inducida

$$\varepsilon = (2\pi lh B \nu) \sin 2\pi \nu t$$

definiendo

$$\varepsilon_0 = \text{voltaje máximo inducido}$$

o sea

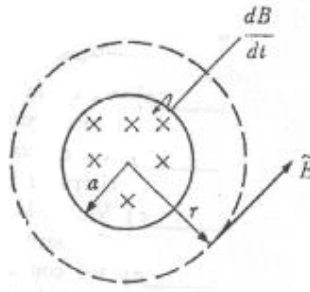
$$\varepsilon_0 = 2\pi lh B \nu$$

Entonces la fem inducida se puede escribir nuevamente por

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin 2\pi \nu t$$

Problema 8.8

En una región cilíndrica en el espacio de radio a , un campo magnético varía con una rapidez dB/dt . Calcule el campo eléctrico para trayectorias circulares con radio r mayor que a . (ver Fig.).



Solución:

De la ecuación 8.6 tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

El flujo magnético se determina de la Ec. 6.1. Esto es $\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Para este caso $\phi_B = B A$

Sustituyendo en la Ec. 8.6 y considerando que sólo B varía con el tiempo, obtenemos que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d(B A)}{dt} = A \left(\frac{-dB}{dt} \right)$$

evaluando

$$E \cdot 2\pi r = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

Simplificando y despejando

$$E = -\frac{a^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

Problema 8.9

Un cilindro (largo) conductor de conductividad σ , de radio R y longitud h , está rodeado por un solenoide de iguales dimensiones que tiene n espiras por unidad de longitud y está recorrido por una corriente $I = I_0 \sin \omega t$. Determine:

- El campo magnético creado por el solenoide
- El campo eléctrico inducido
- La densidad de corriente inducida en el cilindro.

Solución:

a) De la ley de Ampere $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

dado que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{l} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$, además $B = |\vec{B}| = Cte$, luego

$$\oint B dl = B \oint dl = Bl = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I_0 \sin \omega t$$

b) De la ley de Faraday escrita en la forma

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{l} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$ ($E = \text{Cte}$), se tiene que

$$\oint E dl = E \oint dl = E 2\pi r = - \frac{d}{dt} \left[\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} \right]$$

$$E 2\pi r = - \frac{d}{dt} \left[\oint B ds \right] = - \frac{d}{dt} (BA)$$

Dado que $A = \pi r^2$, y $B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I_0 \sin \omega t$, entonces se encuentra

$$E = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} = - \mu_0 n I_0 \frac{\omega r}{2} \cos \omega t$$

c) Como

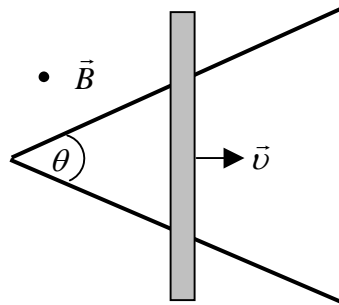
$$J = \sigma E$$

se obtiene

$$J = - \sigma \mu_0 n I_0 \frac{\omega r}{2} \cos \omega t$$

Problema 8.10

Dos rieles conductores forman un ángulo θ en donde se unen sus extremos. Una barra conductora en contacto con los rieles y formando un triángulo isósceles con ellos empieza a moverse en el vértice en el instante $t = 0$, y se mueve con rapidez constante v hacia la derecha, como se muestra en la figura. Un campo magnético uniforme \vec{B} apunta hacia fuera de la página. Determine el flujo y la *fem* inducida.

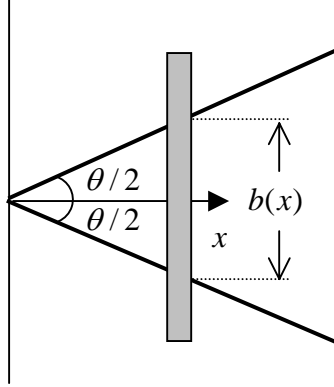


Solución:

Según la ley de Faraday, la *fem* inducida está dada por

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

donde $\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$



como el campo es paralelo con el vector área y \vec{B} es constante, se tiene

$$\Phi_m = BA(x)$$

de la figura se tiene que $A(x) = \frac{1}{2}bx$, reemplazando en el flujo se obtiene

$$\Phi_m = \frac{1}{2}Bbx$$

de la figura se encuentra que $\tan(\theta/2) = \frac{b/2}{x}$, $\Rightarrow b(x) = 2x \tan(\theta/2)$

luego $\Phi_m = Bx^2 \tan(\theta/2)$

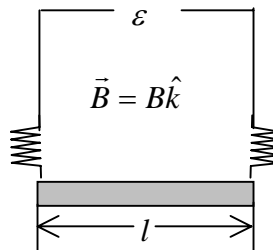
reemplazando en la ley de Faraday, se encuentra

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bx^2 \tan(\theta/2)) \\ \mathcal{E} &= -2xvB \tan(\theta/2) \end{aligned}$$

Problema 8.11

Una barra está oscilando de acuerdo con la siguiente expresión $y(t) = 20\sin(2\pi t)$, dentro de un campo magnético de 10[T] que apunta hacia fuera del plano de la hoja.

Determine la fem inducida en los extremos de la barra.



Solución:

La fem está dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

donde

$$\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint B ds ; (\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{s})$$

como $ds = dxdy$, se tiene

$$\Phi_m = B \int_0^l \int_0^{y(t)} dxdy = Bl y(t)$$

luego

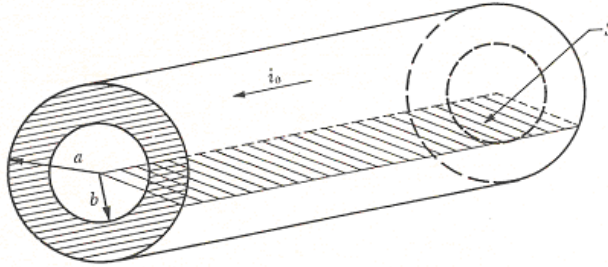
$$\Phi_m = Bl2\pi \sin(2\pi t)$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo y luego sustituyendo, se encuentra

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -40\pi Bl \cos(2\pi t)$$

Problema 8.12

Para el conductor de la figura, determine el flujo magnético por unidad de longitud a través de la superficie S , asuma que el conductor transporta una corriente $i_0 = I$ uniformemente distribuida

**Solución:**

Al aplicar la ley de Ampere se encuentra que el campo magnético $B(b < r < a)$, está dado por

$$B = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r} \frac{(r^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)}$$

De la definición de flujo magnético

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \equiv \iint B ds$$

al reemplazar el valor del campo magnético y $ds = drdl$ se obtiene

$$\Phi_B = \iint \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r} \frac{(r^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)} drdl$$

$$\frac{\Phi_B}{l} = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \frac{1}{(a^2 - b^2)} \int_b^a \frac{(r^2 - b^2)}{r} dr$$

$$\frac{\Phi_B}{l} = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \frac{1}{(a^2 - b^2)} \left[\int_b^a r dr - \int_b^a b^2 \frac{dr}{r} \right]$$

Integrando se encuentra

$$\frac{\Phi_B}{l} = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi(a^2 - b^2)} \left[\left(\frac{a^2 - b^2}{2} \right) - b^2 \ln(a/b) \right]$$