

CAPÍTULO II

LEY DE GAUSS

La Ley de Gauss permite determinar el campo eléctrico cuando las distribuciones de cargas presentan simetría, en caso contrario se debe recurrir a la Ley de Coulomb.

2.1. Flujo eléctrico

El flujo eléctrico se define como el número de líneas de campo que atraviesa a una superficie dada y que depende únicamente de la carga encerrada, el cual está representado por la siguiente ecuación:

$$\Phi = \iint E \cos \theta \, ds \quad (2.1)$$

Donde θ es el ángulo entre el vector campo eléctrico \vec{E} y el vector área $d\vec{s}$, luego

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.2)$$

El flujo eléctrico para una superficie cerrada se expresa como:

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

2.2. Ley de Gauss

El flujo eléctrico producido por una carga puntual en una superficie imaginaria cerrada (superficie gaussiana) de radio r , se puede calcular con la ecuación (2.3) obteniéndose:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi \equiv \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico que cruza la superficie gaussiana es igual a la **carga neta encerrada** (q_{enc}) por la superficie por unidad de la constante de permitividad (ϵ_0).

La ley de Gauss puede ser expresada de forma más general de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq$$

donde $dq = \rho dv$ (para la carga en el volumen v), luego

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv$$

También se puede escribir:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma ds \quad (\text{para la carga en una superficie } dq = \sigma ds)$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dl \quad (\text{para la carga en una línea } dq = \lambda dl)$$

2.2. Problemas resueltos

Problema 2.1

Escriba la Ley de Gauss (eléctrica) en forma diferencial.

Solución:

La ley de Gauss escrita en forma integral está dada por

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv = \iiint (\rho / \epsilon_0) dv$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

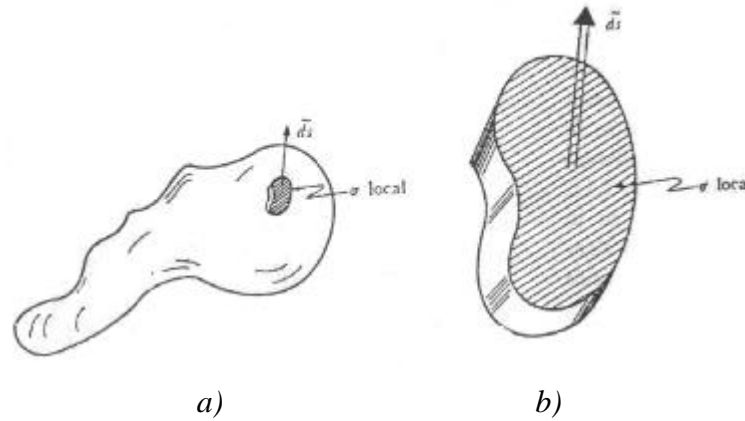
La expresión anterior, se conoce con el nombre de forma diferencial de la ley de Gauss eléctrica, y forma parte de una de las ecuaciones de Maxwell, que a su vez corresponde a una de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo.

Problema 2.2

Determine el campo eléctrico en la vecindad de un conductor de forma arbitraria.

Solución:

Consideremos un conductor de forma arbitraria como el de la siguiente figura a), sobre el cual queremos calcular el campo en un punto muy cercano a su superficie.



Si se considera una superficie gaussiana de la forma mostrada en la anterior b) se tiene que la carga encerrada es σds y aplicando la Ley de Gauss:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

donde

$$dq = \sigma ds$$

sustituyendo se tiene:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} ds ;$$

como el campo es paralelo al diferencial de superficie en la vecindad del conductor obtendremos:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Observe que el campo eléctrico para puntos cercanos a la superficie es constante.

Problema 2.3

Una **esfera maciza no conductora** de radio b , con una cavidad esférica de radio a , tiene una distribución uniforme de carga y su carga total es Q ; Determinar el campo eléctrico en las regiones que se indican:

$$a) r < a \qquad b) a < r < b \qquad c) r > b.$$

Solución:

a) Para $r < a$:

Primeramente se escoge una superficie gaussiana esférica de radio r , y aplicando la Ley de Gauss, ecuación (2.6) se tiene que la carga neta encerrada es cero, entonces, $E = 0$.

b) Para $a < r < b$:

Igual que en (a), se elige una superficie gaussiana esférica de radio r y de la Ley de Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Como la distribución de carga es uniforme, entonces:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \iiint_V dv = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - a^3)$$

Dado que

$$\rho = \frac{Q}{(4\pi/3)(b^3 - a^3)}$$

Reemplazando este valor se obtiene

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)}$$

Además como $\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{s}$ se tiene que $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$ y como el modulo del campo eléctrico es constante en toda la superficie gaussiana, luego

$$E (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)}$$

de donde se encuentra

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)}$$

En notación vectorial:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{(r^3 - a^3)}{(b^3 - a^3)} \hat{e}_r$$

c) Para $r > b$:

Se elige también una superficie gaussiana de radio r , la carga neta encerrada es Q , entonces:

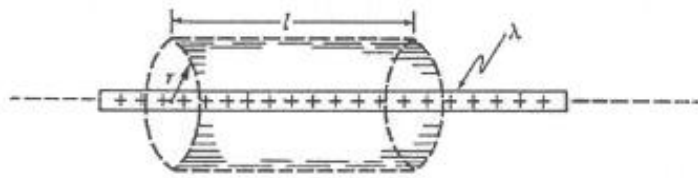
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Integrando y despejando E obtenemos que

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Problema 2.4

Línea de carga. En la siguiente figura, se tiene una **línea de carga de longitud infinita** con una densidad lineal de carga λ uniforme. ¿Cuál es el campo eléctrico E , a una distancia r de la línea?



Solución:

Una superficie gaussiana conveniente es un cilindro circular de radio r y una longitud l , como se muestra en la figura anterior. Aplicando la Ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dl$$

que se puede desarrollar en este caso para las tres partes del cilindro de la siguiente forma:

$$\iint_{\text{tapas circulares}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{sup. cilíndrica}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dl$$

para el primer término se puede ver que el producto punto es cero ($\vec{E} \perp d\vec{s}$)_{tapa}, entonces:

$$\iint_{\text{sup. cilíndrica}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^l \lambda dl = \lambda l$$

Dado que el campo eléctrico es constante en la superficie y ($\vec{E} \parallel d\vec{s}$), se encuentra

$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

de donde

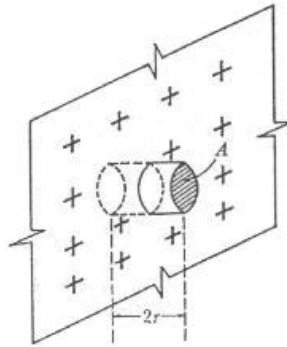
$$E = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

En notación vectorial:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \hat{e}_r$$

Problema 2.5

Lámina de carga. Se tiene una **lámina delgada no conductora** de dimensiones infinitas con una densidad de carga superficial σ (ver figura). Calcúlese el campo eléctrico E , a una distancia r del plano.



Solución:

Para este problema, podemos escoger como superficie gaussiana un cilindro circular de sección transversal A y largo $2r$, colocado como se muestra en la figura anterior. Aplicando la Ley de Gauss:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\text{Tapa Izq.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Manto.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Tapa derecha.}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma ds$$

Sabiendo que $(\vec{E} \perp d\vec{s})_{Manto}$, entonces, $(\vec{E} \cdot d\vec{s})_{Manto} = 0$, luego:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{Tapa\ Izq.} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{Tapa\ derecha.} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma ds$$

como $(\vec{E} \uparrow\uparrow d\vec{s})_{Tapas}$, se tiene que $(\vec{E} \cdot d\vec{s})_{Tapas} = E ds$, además que $E \equiv |\vec{E}|$ y σ son constantes, entonces:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \iint_A ds + E \iint_A ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \iint_A ds$$

Luego

$$EA + EA = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = Cte$$

Problema 2.6

Determine el campo eléctrico en las vecindades de una **lámina metálica delgada conductora**, de dimensiones infinitas, cargada con $\sigma = cte$

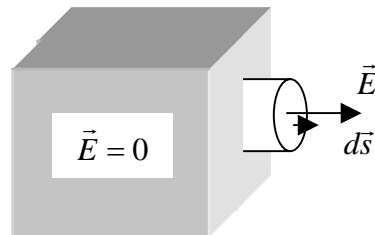
Solución:

Por tratarse una placa metálica pero que es delgada, ésta se comporta igual que la lámina delgada del **problema anterior**, debiéndose realizar el mismo cálculo para obtener

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = Cte$$

Problema 2.7 (Placa o lámina de carga gruesa)

Se tiene una **placa gruesa conductora** de dimensiones infinitas con una densidad de carga superficial σ (ver figura). Calcúlese el campo eléctrico E , a una distancia r del borde.



Solución:

Aplicando la Ley de Gauss a la superficie cilíndrica de la figura, se tiene que

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} \equiv \iint_{\text{Tapa Izquierda}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Manto}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{\text{Tapa Derecha}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q/\epsilon_0$$

Dado que: $\vec{E}_{\text{Tapa Izquierda}} = 0$ (la tapa está dentro del material conductor)

$$\vec{E}_{\text{Manto}} \perp d\vec{s} \Rightarrow (\vec{E} \cdot d\vec{s})_{\text{Manto}} = 0$$

Entonces, sólo queda el campo en la tapa circular derecha

$$\iint_{\text{Tapa derecha}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q/\epsilon_0$$

Dado que el campo y el vector de área, son paralelos y además el campo es constante, se obtiene:

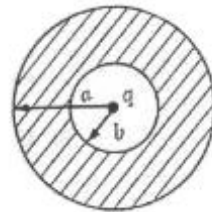
$$EA = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

En notación vectorial:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{e}_r$$

Problema 2.8

Una esfera metálica maciza de radio exterior a , con una cavidad esférica de radio b , tiene una carga puntual q en su centro como se muestra en la siguiente figura, calcule el flujo eléctrico para: a) $r < b$, b) $b < r < a$ y c) $r > a$.



Solución:

a) De la Ley de Gauss se tiene que

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} \equiv \frac{q_{\text{Encerrada}}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi(r < b) = \frac{q}{\epsilon_0} ; q_{\text{encerrada}} = q$$

$$b) \quad \Phi(b < r < a) = 0 \quad ; \quad q_{encerrada} = q - q = 0$$

$$c) \quad \Phi(r > a) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad ; \quad q_{encerrada} = q$$

Problema 2.9

Dentro de una esfera maciza no conductora de radio a , hay un campo eléctrico (E_0) radial de magnitud constante. Demuestre que la distribución de carga está dada por:

$$\rho = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r} \quad \text{para} \quad 0 < r < a$$

Solución:

Utilizando la Ley de Gauss escrita en la forma diferencial,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

Expresando la divergencia en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi)$$

Dado que el campo sólo tiene una componente radial, $E_r = E_0 = Cte$, se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_0) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Luego

$$\frac{2E_0}{r} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \rho(r) = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r}$$

Problema 2.10

Considere el caso de un **cilindro de longitud infinita**, de radio R , **uniformemente cargado** con densidad volumétrica de carga ρ . Determine

a) $E(r < R)$; (r es la distancia de un punto cualquiera al eje del cilindro)

b) $E(r > R)$

Solución:

a) De la Ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dv$$

se tiene que

$$E(2\pi rh) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi r^2 h$$

De donde se encuentra que

$$E(r < R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

b) En este caso, de la Ley de Gauss se obtiene

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dv$$

$$E(2\pi rh) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi R^2 h$$

$$E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Problema 2.11

Considere el caso de un **cilindro macizo muy largo**, de radio R , cargado con densidad volumétrica de carga variable dada por $\rho = \rho_0 r$. Determine

a) $E(r < R)$; (r es la distancia de un punto cualquiera al eje del cilindro)b) $E(r > R)$ **Solución:**

a) De la Ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dv$$

se tiene que

$$E(2\pi rh) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho_0 r \, r \, dr \, d\phi \, dz$$

De donde se encuentra que
$$E(2\pi rh) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} 2\pi h \frac{r^3}{3}$$

$$E(r < R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r^2$$

b) En este caso, de la Ley de Gauss se obtiene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dv$$

En coordenadas cilíndricas se tiene $dv = r dr d\phi dz$, entonces

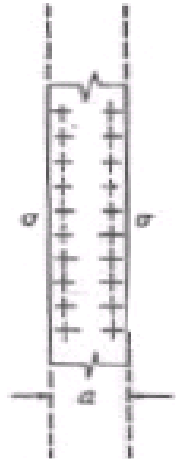
$$E(2\pi rh) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_0 r dr d\phi dz$$

De donde se encuentra que
$$E(2\pi rh) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} 2\pi h \frac{R^3}{3}$$

$$E(r > R) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Problema 2.12

Dos láminas paralelas conductoras con una distribución de carga uniforme σ , cargadas positivamente, están separadas una distancia como se muestra en la siguiente figura. Encuentre a) el campo entre las láminas b) Fuera de las láminas. Considere la distancia entre las láminas muy pequeñas, comparada con las dimensiones de las láminas.



Solución:

a) Aplicando la Ley de Gauss y teniendo presente el problema (2.6), se tiene que el campo eléctrico producido por una lámina conductora es sus cercanías (vecindades) es:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Entonces del principio de superposición para un punto ubicado entre las placas conductoras, se tiene

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

donde \vec{E}_1 es el campo producido por la placa del lado izquierdo en el punto considerado, en donde se asume ubicada una carga de prueba que es positiva por definición). Luego teniendo presente la **ley de polaridad**, se tiene

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\hat{i})$$

Por otro lado, si \vec{E}_2 es el campo producido por la placa del lado derecho en el punto considerado, de igual forma al caso anterior se encuentra

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{i})$$

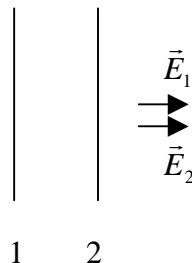
Sustituyendo en $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ los valores de los campos respectivos se obtiene

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\hat{i}) + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{i}) = 0$$

b) De igual forma que para el caso anterior, para un punto fuera de las láminas se tiene

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Supongamos que el punto donde estamos determinado el campo está fuera (lado derecho, ver figura)



Donde:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\hat{i}) \quad \text{y} \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\hat{i}) \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

Entonces

$$\vec{E} = 2\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(\hat{i}) \quad (\text{lado exterior derecho})$$

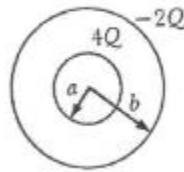
$$\vec{E} = 2\vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(\hat{i}) \quad (\text{lado exterior izquierdo})$$

De donde se obtiene que la magnitud del campo para cualquier punto (cercano) fuera de las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Problema 2.13

Dos cascarones esféricos de radios a y b concéntricos tienen cargas $4Q$ y $-2Q$ respectivamente. Encuentre el campo eléctrico para a) $r < a$, b) $a < r < b$, c) $r > b$ (ver figura).



Solución:

En todos los casos considerados, los cascarones se comportan como cargas puntuales, luego el campo eléctrico después de aplicar la Ley de Gauss se puede expresar en la forma:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{Encerrada}}}{r^2}$$

Luego

$$a) \quad E(r < a) = 0 \quad (q_{\text{Encerrada}} = 0)$$

$$b) \quad E(a < r < b) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (q_{\text{Encerrada}} = 4Q)$$

$$c) \quad E(r > b) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (q_{\text{Encerrada}} = 4Q - 2Q = 2Q)$$

Problema 2.14

Dos placas metálicas paralelas de dimensiones grandes comparadas con su separación que es de 0.01 m, tienen una densidad de carga uniforme $\sigma = 10^{-5} \text{ C/m}^2$. Calcule la fuerza por unidad de área que ejerce una placa sobre la otra.

Solución:

De la Ley de Coulomb, la fuerza ejercida sobre una carga (placa cargada) está dada por:

$$F = q_{\text{placa}} E$$

En este caso $q_{\text{placa}} = \sigma A$ y el campo obtenido a partir de la Ley de Gauss es $E = \sigma / \epsilon_0$ (ver problema 2.5), entonces

$$F = \sigma A \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

de donde se encuentra

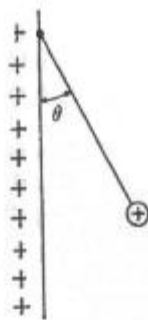
$$\frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$$

Reemplazando los valores respectivos, se obtiene

$$\frac{F}{A} = 11.3 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

Problema 2.15

Una esfera de 10 g de masa y con una carga de 10^{-6} C , se encuentra suspendida de un hilo que forma un ángulo de 30° con **una superficie conductora muy grande** que tiene una distribución de carga σ constante y de la cual pende la esfera (ver figura). Encuentre el valor de σ .

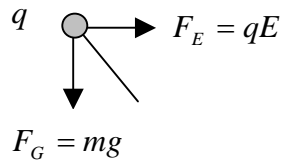


Solución:

A partir de la aplicación de la Ley de Gauss para una superficie conductora muy grande (ver problema 2.5), se encuentra que el campo eléctrico en sus vecindades está dado por:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Del DCL en la carga positiva:



Se tiene

$$F_E = F_G \tan \theta$$

Sustituyendo los valores de las fuerzas

$$qE = mg \tan \theta$$

reemplazando el valor del campo se tiene

$$q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = mg \tan \theta$$

de donde se encuentra

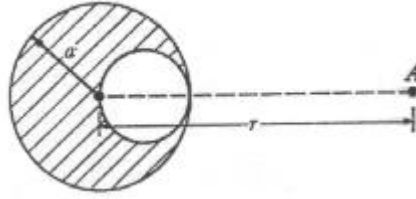
$$\sigma = \frac{\epsilon_0}{q} mg \tan \theta$$

Sustituyendo los valores respectivos, se obtiene

$$\sigma = 5.0 \times 10^{-7} [C / m^2]$$

Problema 2.16

Una **esfera no conductora** de radio a con una densidad de carga uniforme ρ tiene una **cavidad** esférica como se muestra en la siguiente figura, calcule el campo eléctrico en el punto A.

**Solución:**

Utilizando el principio de superposición, se tiene que

$$E_A = E_{Esfera} + E_{Cavidad}$$

Aplicando la ley de Gauss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc.}}{\epsilon_0}$$

para la esfera no conductora, como $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{s}$ se tiene

$$\oiint E ds = \frac{q_{Esfera}}{\epsilon_0}$$

dado que $E = |\vec{E}| = Cte$ sobre todos los puntos de la superficie Gaussiana, entonces

$$E \oiint ds = E 4\pi r^2 = \frac{q_{Esfera}}{\epsilon_0}$$

de donde:

$$E_{Esfera} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{Esfera}}{r^2}$$

$$q_{Esfera} = \rho v_{Esfera} = \rho 4\pi a^3 / 3$$

$$q_{Cavidad} = -\rho v_{Cavidad} = -\rho 4\pi (a/2)^3 / 3$$

Entonces:

$$E_{Esfera} = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\rho a^3}{r^2}$$

Trabajando en forma análoga, para la cavidad se obtiene

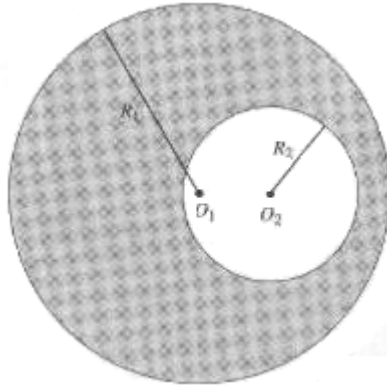
$$E_{Cavidad} = -\frac{1}{24\epsilon_0} \frac{\rho a^3}{(r - a/2)^2}$$

Sustituyendo ambos campos (esfera y cavidad) en E_A , se encuentra

$$E_A = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{8(r - a/2)^2} \right)$$

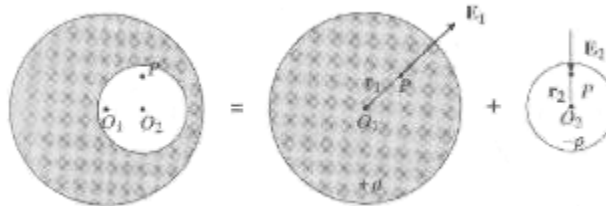
Problema 2.17

Una esfera de radio R_1 , que está cargada con densidad de carga uniforme ρ , tiene una cavidad esférica de radio R_2 no concéntrica con la esfera. Calcular el campo eléctrico en el interior de la cavidad.



Solución:

Se aplica el principio de superposición. La esfera con la cavidad se puede considerar como la superposición de una esfera de radio R_1 , uniformemente cargada con densidad cúbica de carga $+\rho$ y otra esfera de radio R_2 , uniformemente cargada con densidad cúbica de carga $-\rho$. El campo eléctrico en un punto cualquiera del interior de la cavidad será la suma de los campos creados por las dos esferas en dicho punto.



El campo eléctrico en un punto interior de una esfera cargada uniformemente con densidad de carga ρ se calcula aplicando el teorema de Gauss a una superficie esférica de radio $r < R$,

concéntrica con la esfera cargada. Debido a la simetría el campo es radial y tiene el mismo módulo en todos los puntos de la superficie gaussiana

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0},$$

de donde se obtiene el campo eléctrico

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Superponiendo los campos de las dos esferas, cargadas con cargas $+\rho$ y $-\rho$, en el punto P que dista r_1 y r_2 , de los centros O_1 y O_2 de las esferas, se obtiene el campo en el punto P de la cavidad

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r_1 - r_2)$$

siendo $r_1 - r_2 = \overline{O_1 O_2}$, resulta

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overline{O_1 O_2}$$

El campo eléctrico en el interior de la cavidad es uniforme y tiene la dirección de la recta que une los centros de las esferas.

$$E(2\pi r h) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi R^2 h$$

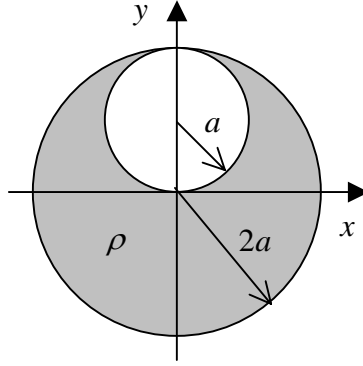
luego

$$E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Problema 2.18

Una esfera de radio $2a$ está hecha de un material no conductor que tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ . (Suponga que el material no afecta al campo eléctrico). Una cavidad de radio a se separa después de la esfera, como de muestra en la figura. Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por $(E_x)_{Cavidad} = 0$ y

$$(E_y)_{Cavidad} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a.$$



Solución:

El campo en la cavidad está dado por la superposición de los campos

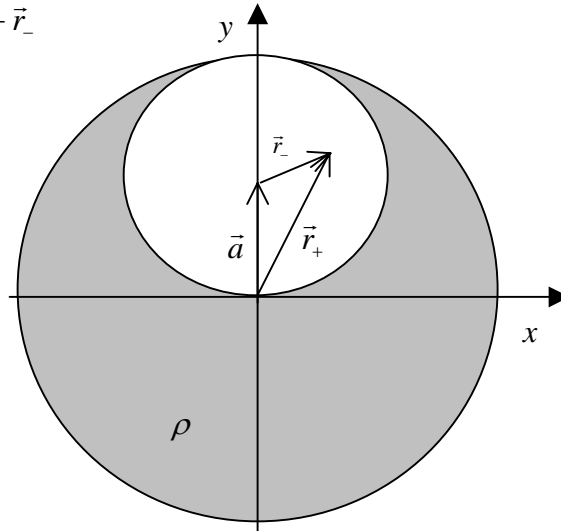
$$\vec{E}_{Cavidad} = \vec{E}^+(+\rho) + \vec{E}^-(-\rho)$$

Donde:

r_+ es el radio de una superficie Gaussiana para la esfera con densidad $+\rho$ (Ver figura)

r_- es el radio de una superficie Gaussiana para la esfera con densidad $-\rho$ (Ver figura)

De la figura se cumple que $\vec{r}_+ = \vec{a} + \vec{r}_-$



Aplicando la Ley de Gauss para la esfera con $+\rho$, se tiene

$$\oiint \vec{E}^+ \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint (+\rho) dv$$

de donde se encuentra

$$E^+ 4\pi r_+^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} r_+^3$$

luego

$$E^+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_+$$

en forma vectorial

$$\vec{E}^+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_+$$

Trabajando en forma análoga, para la esfera con $-\rho$ se obtiene

$$\vec{E}^- = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_-$$

Sustituyendo los campos anteriores en

$$\vec{E}_{Cavidad} = \vec{E}^+(+\rho) + \vec{E}^-(-\rho)$$

se encuentra

$$\vec{E}_{Cavidad} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_+ + \frac{(-\rho)}{3\epsilon_0} \vec{r}_-$$

Dado que $\vec{r}_+ = \vec{a} + \vec{r}_- \Rightarrow \vec{r}_- = \vec{r}_+ - \vec{a}$, luego

$$\vec{E}_{Cavidad} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_+ + \frac{(-\rho)}{3\epsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{a}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$$

De la figura se aprecia que en sistema (x,y): $\vec{a} = 0\hat{i} + a\hat{j}$, entonces

$$\vec{E}_{Cavidad} = 0\hat{i} + \frac{\rho}{3\epsilon_0} a\hat{j} \equiv E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$$

de esta forma se obtiene que :

$$(E_x)_{Cavidad} = 0 \quad ; \quad (E_y)_{Cavidad} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a$$