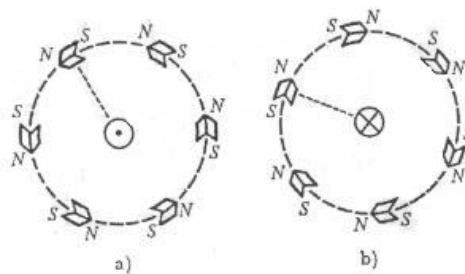


CAPÍTULO VII

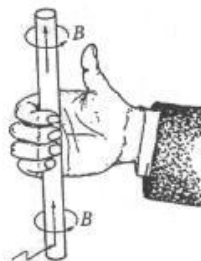
LEY DE AMPERE Y LEY DE BIOT-SAVART

7.1. Ley de Ampere

Oersted en 1820 fue quien descubrió experimentalmente, que una corriente que circula en un alambre produce efectos magnéticos sobre una brújula en su alrededor. Al realizar este experimento se observa que al colocar varias brújulas en los alrededores del alambre todas se orientan de tal forma que la dirección de las agujas de las brújulas forman ángulos rectos con la dirección de la distancia tomada del alambre a cada una de las brújulas, al colocar todas las brújulas a la misma distancia, las agujas nos dan la dirección tangencial del círculo que forman como se muestra en la Fig. a).



La dirección de la corriente que sale del plano de la hoja que se representa simbólicamente por un punto en el alambre (\bullet) y cuando entra por una cruz (\otimes); si cambiamos el sentido de la corriente entonces las agujas de los imanes dan un giro de 180° lo que significa que el campo magnético que las orienta cambió a 180° también en su dirección, Fig. b). De una forma práctica se adopta la regla de la mano derecha indicando con el pulgar la dirección de la corriente y la curvatura de los dedos alrededor del alambre indica la dirección del campo magnético como se muestra en la Fig. .



En este experimento (primera Fig.) se observa que al alejarnos del alambre con corriente el campo disminuye y al acercamos aumenta, mientras que al disminuir la intensidad de la corriente el campo magnético B , es menor, y al aumentarla, el campo magnético B es mayor; de donde se concluye que B es directamente proporcional a la corriente que circula por el alambre e inversamente a la distancia entre el alambre y el punto donde se desea determinar. De las anteriores observaciones se encuentra que la relación entre el campo magnético y la corriente en el conductor que se conoce como Ley de Ampere, y esta dada por la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.1)$$

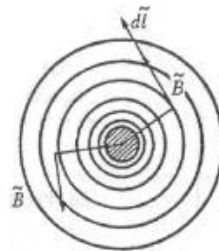
donde μ_0 es la constante de permeabilidad en el vacío y tiene un valor de:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{T m}{A} \right]$$

En la Ec. (7.1) I , es la corriente que pasa por el conductor y r es la distancia radial del centro del conductor al punto donde se desea calcular el campo, como se muestra en la Fig.. Dada la dependencia radial de B y debido a que r es constante sobre el círculo; la Ec. (7.1) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (7.2)$$

En la Fig. se observa que para cualquier punto de la trayectoria, la dirección de \vec{B} es la misma que para $d\vec{l}$ por lo tanto, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$ y si evaluamos la integral de la Ec. (7.2) y despejamos el campo obtenemos la Ec. (7.1). La corriente I es la corriente encerrada por la integral de línea. De aquí que cuando la corriente encerrada es cero, entonces el campo es cero en esa región.



La Ec. (7.2) es válida en general para cualquier arreglo de conductores con corriente, para cualquier trayectoria cerrada de integración y para cualquier campo B , siempre y cuando éste no esté variando con el tiempo. Al tratar de evaluar la integral en la Ec. 7.2 es donde surge el problema; ya que se puede evaluar sin dificultad para problemas que tienen simetría, de aquí que su aplicación sea muy limitada.

La Ec. 7.2 se puede escribir en función de la densidad de corriente de acuerdo a la Ec. (4.4).:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = \text{corriente encerrada.}$$

donde ds es el diferencial de superficie; por lo tanto, la Ec. (7.2) se puede escribir como:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.3)$$

donde la integral de superficie de la densidad de corriente corresponde al área encerrada por la integral de línea cerrada.

7.2. Campo de un conductor recto y largo, con corriente

Para calcular el campo magnético de un alambre recto y largo que lleva una corriente I lo podemos obtener con la Ec. (7.2). Si deseamos calcular el campo para puntos dentro del conductor es necesario utilizar la Ec. (7.3). Las líneas de inducción son círculos con centros en el alambre, como se muestra en la Fig. 7.3. De aquí que el campo magnético para $r > a$ donde a es radio del alambre es:

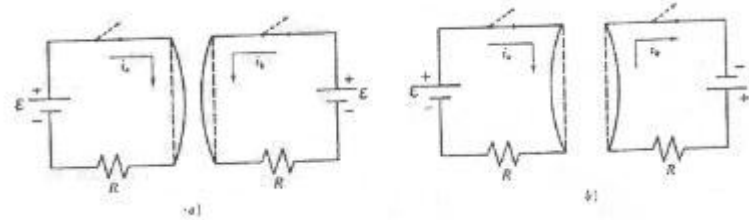
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.4)$$

que se obtiene a partir de la Ec. (7.2.)

7.3. Fuerza entre dos conductores paralelos

En la sección 6.5 veíamos que cuando un alambre transportaba una corriente y se encontraba en una región del espacio donde hay un campo magnético experimentaba una fuerza, siempre y cuando la dirección del campo no fuera paralela a la longitud del alambre; es decir, que si tenemos dos alambres rectos y largos paralelos que transportan corriente, estos se atraen o se

repelen mutuamente dependiendo de la dirección de la corriente. En la Fig. a), se muestran dos circuitos, cuando los interruptores se cierran los alambres experimentan una fuerza de atracción. Si cambiamos la dirección de una fuente como se muestra en la Fig. b), al cerrar los interruptores observamos que los alambres experimentan una fuerza de repulsión.



Para calcular la fuerza de atracción entre los alambres de Fig. anterior a), se puede hacer utilizando las Ec. (6.13) y (7.2); se llama un alambre “a” que lleva una corriente i_a y otro alambre “b” que lleva una corriente i_b y a la distancia entre ellos d , además se debe considerar que los radios de los alambres son muy pequeños.

Para calcular el campo magnético del alambre b en el alambre a , se utiliza Ley de Ampere de modo que:

$$B_a = \frac{\mu_0 i_b}{2\pi d}$$

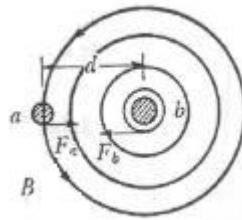
De la Ec. (6.13) tenemos que la fuerza de atracción que experimenta el alambre a es:

$$\vec{F}_a = i_a \times \vec{B}_a$$

como el campo magnético es perpendicular a \vec{l} entonces $|\vec{l} \times \vec{B}_a| = l B_a$, sustituyendo el valor de B_a en la Ec. (6.13) obtenemos que la fuerza por unidad de longitud en el alambre es:

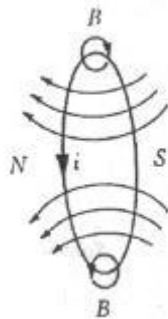
$$F_a / l = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} \quad (7.5)$$

que es exactamente igual a la fuerza de atracción que experimenta el alambre b . Para el caso en que las corrientes fueran en sentido contrario en los alambres como se ilustra en la Fig. anterior b), entonces los alambres experimentan una fuerza igual en magnitud a la de la Ec. (7.5), pero en sentido contrario, es decir, de repulsión.

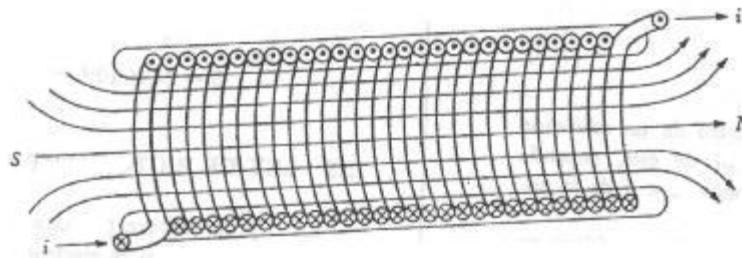


7.4. Campo de un Solenoide

Si hacemos pasar corriente por una espira ésta genera un campo magnético como se muestra en la Fig.

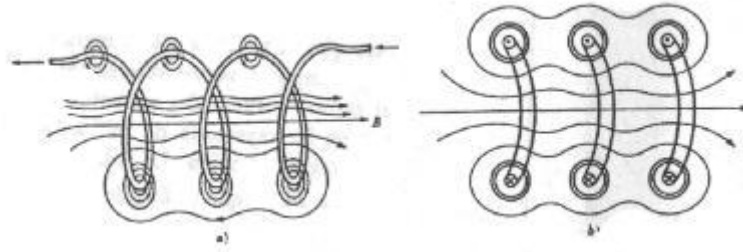


Si se tiene varias espiras, conectadas entre sí, de un mismo radio y se colocan como se muestran en la siguiente figura, se forma una bobina que tiene una longitud grande comparada con el radio de las espiras que la forman, este arreglo se conoce como solenoide (ver figura).

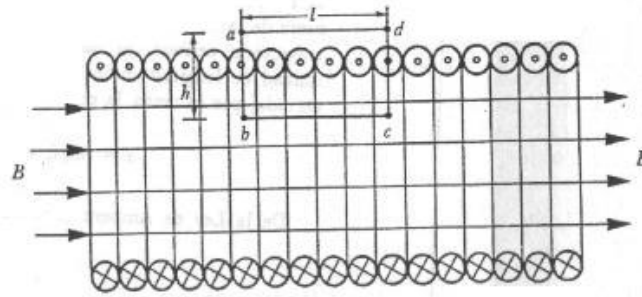


Solenoide (corte longitudinal).

Al pasar una corriente por el solenoide se genera un campo magnético uniforme excepto en los bordes, donde el campo empieza a abrirse. Para analizar por que el campo es uniforme dentro del solenoide y como es casi cero fuera de él, se puede hacer tornando unas espiras separadas por una distancia pequeña como se muestra en la Fig.



A medida que juntan las espiras el campo magnético dentro se hará más uniforme e intenso mientras que en el exterior tenderá a disminuir.



Para determinar el campo magnético en el solenoide se asume que el campo magnético es uniforme y que los efectos en los bordes (las terminales del solenoide) no son considerados.

Aplicando la Ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

a una trayectoria rectangular cerrada $a b c d$ de lados l y h como se ilustra en la Fig. anterior, entonces:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

ya que la integral cerrada de línea equivale a la suma de la integral de cada uno de los segmentos que forman la trayectoria, rectangular $a b c d$.

Al analizar cada una de las integrales del segundo miembro, se observa que la primera y la tercera integral son cero, ya que la región donde hay campo el vector diferencial de longitud forma un ángulo de 90° con el campo y fuera del solenoide no existe campo para la cuarta integral o sea en la trayectoria de “d” a “a” el campo vale cero y por consiguiente la integral

también. La integral de la trayectoria “ $b c$ ” no es cero y es igual a Bl ya que el ángulo entre $d\vec{l}$ y \vec{B} es 0° , por lo tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl$$

la corriente I que se encierra en la trayectoria $a b c d$, es igual a la suma de la corriente de cada espira o vuelta que se encuentra dentro de la trayectoria cerrada. Si se define que n sea el número de vueltas por unidad de longitud entonces, nl es el número de vueltas en la trayectoria cerrada, por lo tanto, la corriente encerrada I es igual a:

$$I_{enc} = (nl) I_0 = \text{corriente encerrada.}$$

De la Ley de Ampere Ec. (7.2) se tiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 nl I_0$$

de donde

$$B = \mu_0 n I_0 \quad (7.6)$$

En la Ec. (7.6) se ve que el campo magnético dentro de un solenoide ideal no depende de su diámetro ni de la longitud de éste, depende únicamente del número de vueltas por unidad de longitud n y de la corriente que pasa por el solenoide.

La Ec. (7.6) se puede usar para calcular campos magnéticos en puntos internos cerca del centro, para solenoides reales con una aproximación muy buena. En el cálculo del campo magnético para los bordes de un solenoide real, la Ec. (7.6) no sirve.

7.5. Ley de Biot- Savart

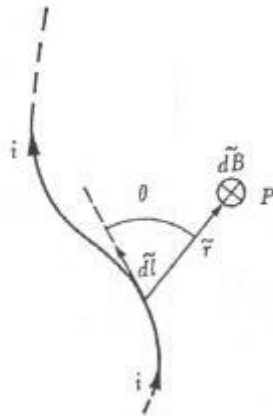
La Ley de Ampere presenta una dificultad en magnetismo muy similar a la Ley de Gauss en electrostática, que es la evaluación de la integral, y por consiguiente sólo para los casos en que existe suficiente simetría para evaluar la integral se puede utilizar. Esto no significa que la Ley de Ampere, no se pueda aplicar en todos los casos, sino que simplemente es muy difícil evaluar la integral. En algunos casos en electrostática veíamos que la Ley de Gauss se puede usar para que de una forma simple y directa calcular el campo eléctrico, por ejemplo una varilla larga con una distribución de carga uniforme, pero en el caso de un anillo con una

distribución de carga uniforme la única forma de encontrar el campo para puntos sobre el eje, era mediante una integración directa a partir de la Ley de Coulomb con diferenciales de carga.

En forma similar se establece la Ley de Biot-Savart en magnetismo para calcular el campo magnético por integración directa para una distribución de corriente con respecto a un punto considerado, y que se escribe como:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2} \quad (7.7)$$

donde cada dl es un diferencial de longitud del conductor con corriente i aportando un dB y r es el vector distancia entre el punto P , donde se desea determinar el campo magnético, y el diferencial de longitud dl ; θ es el ángulo entre el vector distancia \vec{r} y la dirección de dl , como se muestra en la Fig. La dirección del campo magnético en P está dada por $dl \times \vec{r}$ que concuerda con la regla de la mano derecha.



La Ley de Biot-Savart, la podemos escribir en forma vectorial de la siguiente forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (7.8)$$

Problemas resueltos

Problema 7.1

Escriba la Ley de Ampere en forma diferencial

Solución

La ley de Ampere escrita en forma integral tiene la forma

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Dado que la corriente se puede escribir como $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \equiv \iint (\mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{s}$$

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Como $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, también se puede escribir

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

La expresión anterior, se conoce con el nombre de forma diferencial de la Ley de Ampere, y forma parte (sólo de una parte) de una de las ecuaciones de Maxwell, será él quien escribirá una ecuación general (completa) al respecto.

Problema 7.2

Calcule el campo magnético para puntos dentro de un ($a < r < b$) cable coaxial, si el conductor central tiene un radio a y el conductor exterior tiene un radio interior b y radio exterior c , como se muestra en la Fig.. Por los conductores pasan corrientes iguales pero de sentidos contrarios.

Solución:

De acuerdo a la Ley de Ampere la única corriente que produce campo magnético para $a < r < b$ es la del conductor interno ya que es la corriente encerrada, de la Ec. 7.2, tenemos que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

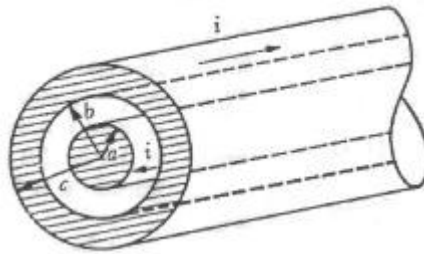
de donde:

$$B 2\pi r = \mu_0 i$$

obteniendo:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

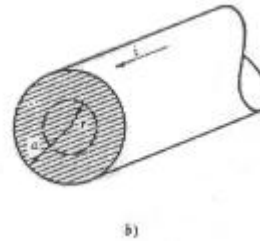
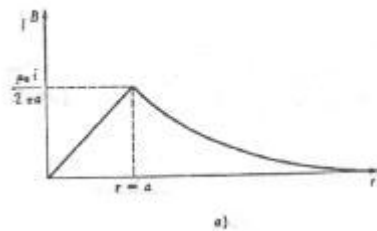
¿Qué valor cree usted que tiene el campo para puntos fuera del cable coaxial?



Cable coaxial.

Problema 7.3

Un conductor recto y largo de radio a lleva una corriente i uniformemente distribuida. a) Calcule el campo magnético, para puntos dentro del alambre. (Vea Fig. b) Grafique B vs r para $a < r < \infty$.



Solución:

Primero se obtiene la densidad de corriente i de la Ec. (4.3), esto es:

$$J = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi a^2}$$

de la Ec. (7.3) se tiene que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

evaluando para círculos con $r < a$ tenemos:

$$B 2\pi r = \mu_0 J \pi r^2$$

despejando B y sustituyendo el valor de J :

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2}$$

en la superficie del alambre esta ecuación se reduce a la misma ecuación que se obtiene a partir de la Ec. (7.2)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

b) Gráfico del campo B en función de r .

En esta gráfico observamos que el campo máximo es en $r = a$ y que el campo es cero para $r = 0$ y el campo tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$.

De la Ec. (7.4) obtenemos

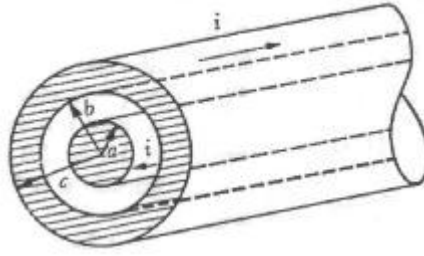
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

para $r > a$.

Problema 7.4

Considere un cable coaxial, de tal forma que tal que el conductor central tiene un radio a y el conductor exterior tiene un radio interior b y radio exterior c , como se muestra en la Fig. Si por los conductores circulan corrientes iguales pero de sentidos opuestos. determine el campo magnético en todas las regiones, esto es:

a) $B(r < a)$; b) $B(a < r < b)$; c) $B(b < r < c)$; d) $B(r > b)$



Cable coaxial.

Solución:

a) El valor del campo en esta región, está dado por el resultado obtenido en el problema anterior (ver problema anterior)

$$B(r < a) = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} \right) r$$

b) En esta región se tiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

de donde:

$$B 2\pi r = \mu_0 i$$

luego:

$$B(a < r < b) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

c)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

donde la corriente encerrada en este es $i_{enc} = i - \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$, entonces

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i - \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \right)$$

dado que $\vec{B} \uparrow\uparrow d\vec{l}$ y $\vec{J} \uparrow\uparrow d\vec{s}$, se tiene que

$$\oint B dl = \mu_0 \left(i - \iint J ds \right)$$

como los módulos de B y J son constantes, se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i - \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \right)$$

$$B2\pi r = \mu_0 [i - J\pi(r^2 - b^2)] \quad \text{donde } J = \frac{i}{\pi(c^2 - b^2)}$$

Reemplazando, se encuentra

$$B(b < r < c) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \left[1 - \frac{(r^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} \right]$$

d)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 (i - i) = 0$$

Dado que en esta región no hay corriente encerrada entonces el campo magnético es cero.
Luego

$$B(r > c) = 0$$

Problema 7.5

Un conductor recto, largo y de radio a , conduce una corriente I_0 , se ha diseñado de tal forma que la densidad de corriente dentro del conductor varía de acuerdo a la expresión

$$J = \left(\frac{3I_0}{2\pi a^3} \right) r. \text{ Determine:}$$

- a) El campo magnético para puntos dentro del conductor: $B(r < a)$
- b) El campo magnético para puntos fuera del conductor: $B(r > a)$
- c) Construya gráfico $B = B(r)$

Solución:

a) De la Ley de Ampere se tiene que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

dado que $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ y $\vec{J} \uparrow \uparrow d\vec{s}$, se puede escribir

$$\oint B dl = \mu_0 \iint J ds$$

Teniendo presente que $ds = r dr d\theta$ y sustituyendo el valor de J se obtiene

$$B2\pi r = \mu_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(\frac{3I_0}{2\pi a^3} \right) r dr d\theta$$

$$B(r < a) = \mu_0 \frac{3I_0}{4\pi^2 a^3 r} \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta$$

Integrando:

$$B(r < a) = \mu_0 \frac{3I_0}{4\pi^2 a^3 r} \frac{r^3}{3} 2\pi = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^3} \right) r^2$$

b) En esta caso la corriente encerrada es I_0 , además es fácil ver que

$$I_{enc} = \iint J ds = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{3I_0}{2\pi a^3} \right) r r dr d\theta$$

$$I_{enc} = \left(\frac{3I_0}{2\pi a^3} \right) \frac{a^3}{3} 2\pi = I_0$$

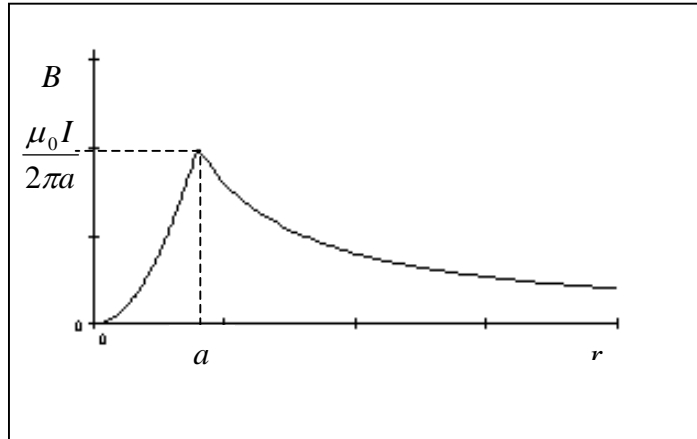
entonces

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0$$

luego

$$B(r < a) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

c)



Problema 7.6

Demuestre que cuando un par de conductores paralelos de longitud infinita y separados un metro que llevan una corriente de un ampere cada uno en la misma dirección, experimentan una fuerza de atracción por unidad de longitud de $2 \times 10^{-7} \text{ [N/m]}$

Solución:

De la Ec. (7.5) tenemos que:

$$F/l = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d}$$

como $i_a = i_b = i$ entonces:

$$F/l = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}$$

sustituyendo datos tenemos que:

$$F/l = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ tesla} \cdot \text{m/amp}) (1\text{amp})^2}{2\pi (1\text{ m})}$$

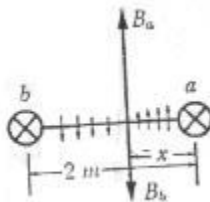
$$\frac{F}{l} = 2 \times 10^{-7} \text{ [N/m]}$$

Problema 7.7

Determine el punto o puntos donde el campo magnético entre dos conductores a y b , separados una distancia de 2 [m] que llevan una corriente de 1 [A] y 4 [A] en la misma dirección respectivamente, es cero.

Solución:

En la Fig. se muestra esquemáticamente como el campo magnético resultante que disminuye hasta llegar a un punto en el cual es cero y después se invierte su dirección.



Para cualquier punto sobre el eje que une a los alambres el campo magnético resultante es la suma del campo de cada uno de los alambres, esto es:

$$\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_b$$

De la Ec. (7.2) el campo para el alambre a es:

$$B_a = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

para el alambre b :

$$B_b = \frac{\mu_0 i}{2\pi (d - x)}$$

Para que el campo magnético resultante sea cero en un punto sobre el eje es necesario que:

$$B_a = B_b$$

en magnitud y determinar el valor de x esto es:

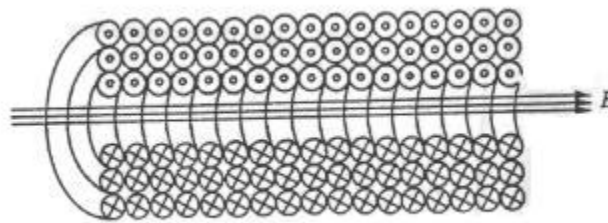
$$\frac{\mu_0 i_a}{2\pi x} = \frac{\mu_0 i_b}{2\pi (d - x)}$$

de donde:

$$x = \frac{d}{5} = \frac{2}{5} [m].$$

Problema 7.8

Un solenoide como el que se muestra en la Fig. tiene 0.60 m de largo, se diseñó con tres capas y cada capa tiene 500 vueltas y lleva una corriente de 2 amperes. Determine el campo magnético B en el centro del solenoide.



Solución:

De la Ec. (7.6) se tiene que:

$$B = \mu_0 n i_0$$

donde $n = \frac{N}{l}$ y N es el número de vueltas en el solenoide que es igual a 1500 vueltas y l la longitud del solenoide, entonces:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

Sustituyendo datos se obtiene:

$$B = \left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{tesla} \cdot \text{m}}{\text{ampere}} \right) \left(\frac{1500}{0.6 \text{ m}} \right) (2 \text{ ampere})$$

$$B = 2\pi \times 10^{-3} [\text{T}]$$

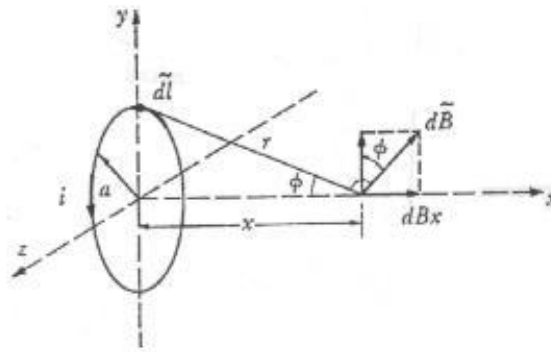
Problema 7.9

Calcule el campo magnético B para puntos sobre el eje axial de una espira con corriente i y radio a como se muestra en la Fig.

Solución:

De la Fig. 7.15 observamos que $d\vec{l}$ y \vec{r} son perpendiculares, por lo tanto la Ec. (7.7) se escribe así:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$



donde dB tiene la dirección que se muestra, pero solamente la componente dB_x contribuye al campo magnético resultante en p ya que la componente dB_y se anula por su componente simétrica y opuesta, así que:

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl}{r^2} \sin\phi$$

como $\sin \phi = \frac{a}{r}$ y $r = (a^2 + x^2)^{1/2}$ de la Fig.

Sustituyendo se tiene:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{a}{r^3} \int_0^{2\pi a} dl$$

evaluando:

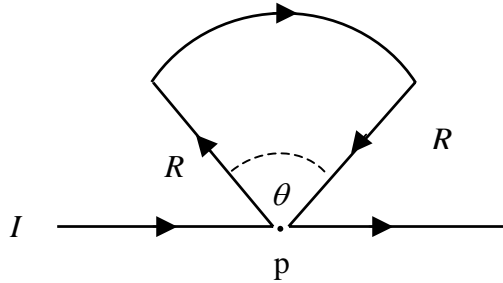
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{a}{r^3} 2\pi a$$

simplificando y reemplazando r por su valor:

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2 (a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Problema 7.10

Determine que el campo magnético en el punto p , producido por el conductor de la figura que transporta una corriente constante I , está dado por $B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$



Solución

El campo en el punto p , está dado por el aporte de cada uno de los segmentos del conductor, esto es

$$B_p = (B_p)_{Seg. rectos} + (B_p)_{Seg. curvo}$$

Por otro lado, según la ley de Biot-Savart se puede escribir

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. rectos} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. curvo} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

De la figura se observa que para todos los segmento rectos se cumple que

$$(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. rectos} = 0$$

luego en el punto p , solo aporta el campo producido por la corriente del segmento curvo

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. curvo} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Para este segmento curvo se cumple que

$$(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. curvo} = dl \hat{u} = R d\theta \hat{u}$$

donde \hat{u} es un vector unitario que entra al plano de la página, además $r = R = Cte$, luego

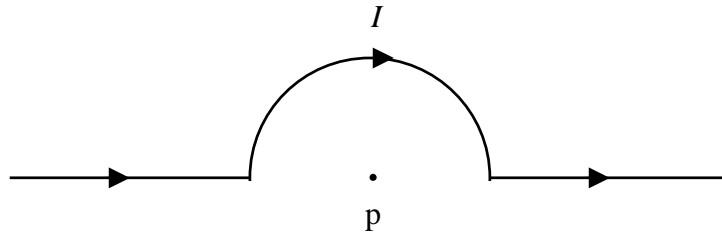
$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{u} \int_{Seg. curvo} \frac{R d\theta}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta \hat{u}$$

El módulo del campo es

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta : \quad \forall \theta \text{ en radianes}$$

Problema 7.11

Determine el campo magnético en el punto p de la figura



Solución

Teniendo presente que los segmentos rectos no aportan al campo en el punto p , puesto que $(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. rectos} = 0$, entonces se puede aplicar directamente la relación obtenida para segmentos circulares.

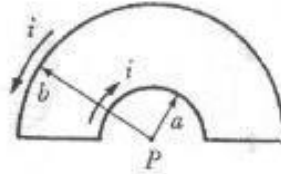
$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$$

En este caso $\theta = \pi$, de donde se encuentra

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Problema 7.12

Determine el campo magnético en el punto p, producido por el conductor de la figura



Solución

El campo en el punto p , está dado por el aporte de cada uno de los segmentos del conductor, esto es

$$B_p = (B_p)_{Seg. rectos} + (B_p)_{Seg. curvos}$$

Por otro lado, según la ley de Biot-Savart, para $i = I$, se puede escribir

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. rectos} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. curvos} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

De la figura notamos que para todos los segmentos rectos se cumple que

$$(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. rectos} = 0$$

Luego

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. curvos} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg(a)} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg(b)} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Aplicando la relación para segmentos circulares, se puede escribir

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \theta_1(-\hat{u}) + \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \theta_2(\hat{u})$$

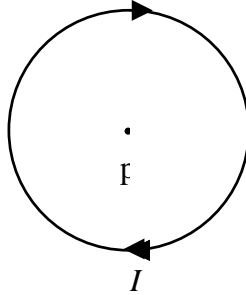
Donde \hat{u} es un vector unitario que sale del plano de la hoja, además de la figura se ve que $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, luego

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4a} (-\hat{u}) + \frac{\mu_0 I}{4b} (\hat{u}) = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) (\hat{u})$$

También se puede escribir (para el módulo) $B_p = \frac{\mu_0 I}{4} (1/b - 1/a)$

Problema 7.13

Calcule el campo magnético en el centro de una espira circular que transporta una corriente I



Solución

Teniendo presente que para segmentos circulares se puede aplicar directamente la relación

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$$

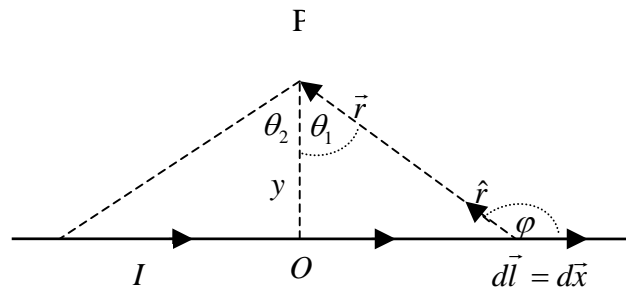
dado que para este caso $\theta = 2\pi$, se encuentra

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Problema 7.14

Demuestre que el campo magnético en el punto p, producido por la corriente que circula por los **segmentos rectos** correspondientes a los ángulos θ_1 y θ_2 está dado por:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$



Solución

$$B_p = (B_p)_{\text{Lado derecho}} + (B_p)_{\text{Lado izquierdo}}$$

donde

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Lado derecho}} \frac{|\vec{dl} \times \hat{r}|}{r^2}$$

De la figura se tiene que

$$|\vec{dl} \times \hat{r}| = dx \sin \varphi = dx \sin(\theta_1 + \pi/2) \equiv dx \cos \theta_1$$

luego

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Lado derecho}} \frac{dx \cos \theta_1}{r^2}$$

También de la figura se obtiene

$$\frac{x}{y} = \tan \theta_1 \Rightarrow x = y \tan \theta_1 \Rightarrow dx = y \sec^2 \theta_1 d\theta_1; (y = \text{cte})$$

$$\cos \theta_1 = \frac{y}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{y^2}{\cos^2 \theta_1} = y^2 \sec^2 \theta_1$$

Sustituyendo los valores de r^2 y de dx se encuentra

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Lado derecho}} \frac{dx \cos \theta_1}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Lado derecho}} \frac{y \sec^2 \theta_1 d\theta_1 \cos \theta_1}{y^2 \sec^2 \theta_1}$$

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \int_0^{\theta_1} \cos \theta_1 d\theta_1$$

de donde se obtiene

$$(B_p)_{\text{Lado derecho}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \sin \theta_1$$

En forma análoga se puede encontrar que $(B_p)_{\text{Lado izquierdo}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} \sin \theta_2$

$$B_p = (B_p)_{\text{Lado derecho}} + (B_p)_{\text{Lado izquierdo}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

Otro Método. De la ley de Biot Savart, se tiene que

$$dB_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y}{r^3} dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

Integrando

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} y \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} y \left[\frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{x_1}^{x_2}$$

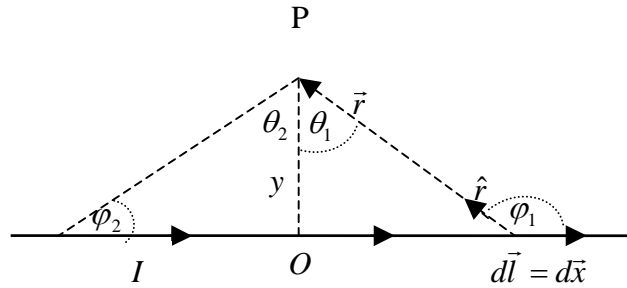
Para un alambre de longitud infinita se encuentra

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} y \left[\frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

Problema 7.15

Demuestre que el campo magnético en el punto p, producida por la corriente que circula el segmento recto, se puede expresar en términos de los ángulos φ_1 y φ_2 en la forma:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$



Solución

Utilizando el resultado obtenido en el problema anterior

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

para esta caso, de la figura se tiene $\theta_1 = \varphi_1 - \pi/2$; $\theta_2 = -\varphi_2 + \pi/2$, entonces sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene

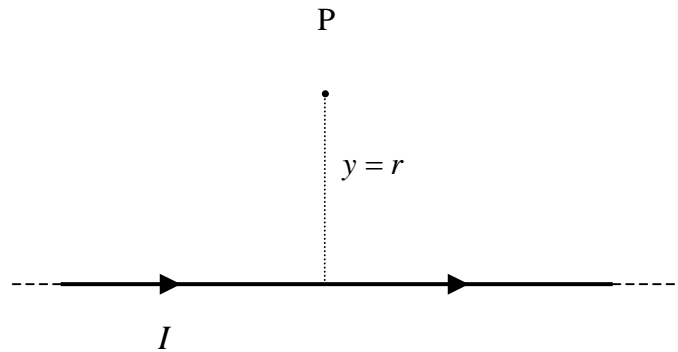
$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\sin(\varphi_1 - \pi/2) + \sin(-\varphi_2 + \pi/2))$$

de donde se encuentra

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$

Problema 7.16

- Utilice la expresión encontrada para determinar el campo producido por segmentos rectos con corriente, para calcular el campo producido por un **conductor recto de longitud infinita** en un punto p, ubicado a una distancia $y = r$ del conductor
- Utilice la **ley de ampere** par realizar el cálculo anterior



Solución

La expresión para segmentos rectos está dada por

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

De la figura anterior, es fácil ver que para que el conductor recto tenga longitud infinita se debe cumplir que

$$\theta_1 = \theta_2 \equiv \frac{\pi}{2}$$

Luego, reemplazando estos valores se obtiene

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

b) de la ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Se tiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = \mu_0 I ; \text{ dado que } B = Cte$$

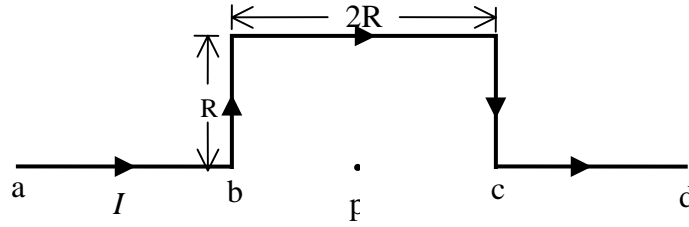
$$B \oint dl = B 2\pi r = \mu_0 I$$

De donde se encuentra

$$B = B_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Problema 7.17

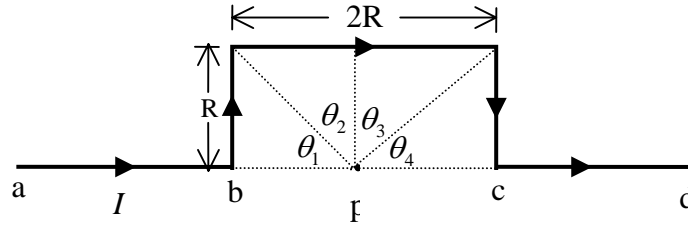
Determine el campo magnético en el punto p, producido por el conductor de la figura por el cual circula una corriente I



Solución:

Según la ley de Biot-Savart el campo en p está dado por

$$\begin{aligned}\vec{B}_p = & \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. a \rightarrow b} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. R \uparrow} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. 2R} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \\ & + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. R \downarrow} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. c \rightarrow d} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}\end{aligned}$$



De la figura notamos que para los segmentos $a \rightarrow b$ y $c \rightarrow d$, se cumple que

$$(d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. a \rightarrow b} = (d\vec{l} \times \hat{r})_{Seg. c \rightarrow d} = 0$$

Entonces

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. R \uparrow} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. 2R} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Seg. R \downarrow} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

De la figura se puede apreciar que cada segmento recto de longitud R, le corresponde un ángulo de $\theta = \pi/4$. Aplicando la expresión obtenida anteriormente

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} (\text{sen } \theta_i + \text{sen } \theta_j)$$

Para este caso se tiene $y = R$

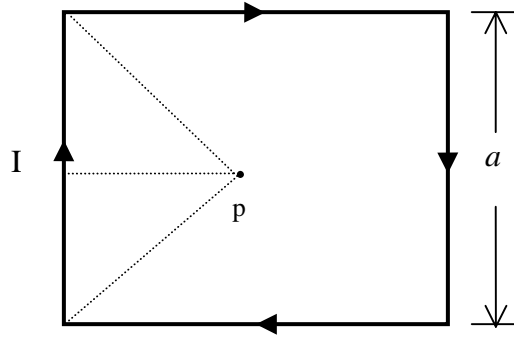
$$B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{sen } \theta_1 + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\text{sen } \theta_2 + \text{sen } \theta_3) + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{sen } \theta_4$$

Dado que todos los ángulos son iguales a $\pi/4$, se encuentra

$$B_p = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{sen}(\pi/4) = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problema 7.18

Determine el campo magnético en el centro de una espira cuadrada de lado a , por la cual circula una corriente I



Solución

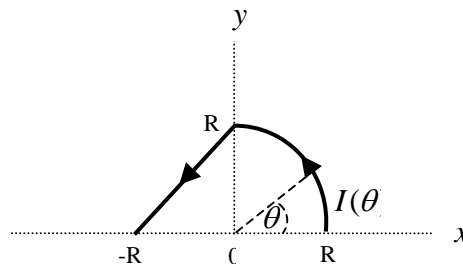
Teniendo presente el problema anterior, y la figura de la espira cuadrada, para $y = a/2$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$, se encuentra que

$$B_p = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi(a/2)} (\text{sen}(\pi/4) + \text{sen}(\pi/4))$$

$$B_p = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

Problema 7.19

Una corriente no uniforme dada por $I(\theta) = I_0 \cos(\theta/2)$; $0 \leq \theta \leq \pi$, circula por un conductor que tiene un lado recto y un lado semicircular de radio R .



- Calcular el campo magnético \vec{B} en el origen de coordenadas generado por el lado semicircular.
- Si el sistema completo se somete a un campo magnético externo uniforme $\vec{B}_{ext} = (B_0, B_0)$; $B_0 = Cte > 0$. Calcular la fuerza sobre todo el conductor debido al campo magnético aplicado

Solución:

Según la ley de Boit-Savart se tiene que

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}; \quad I = (\theta)$$

Para el lado semicircular $d\vec{l} \times \hat{r} = dl \hat{k} \equiv R d\theta \hat{k}$; $r = R = Cte$. Entonces con estas consideraciones y sustituyendo el valor de $I = (\theta)$, se obtiene

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 \cos(\theta/2)}{4\pi} \frac{R d\theta}{R^2} \hat{k}$$

luego

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi R} \hat{k} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2) d\theta$$

- El elemento de fuerza está dado por

$$d\vec{F} = I(\theta) d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$$

En este caso $d\vec{l} = dl(-\sin\theta, \cos\theta)$, donde $dl = R d\theta$, luego

$$d\vec{l} \times \vec{B}_{ext} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -dl \sin\theta & dl \cos\theta & 0 \\ B_0 & B_0 & 0 \end{vmatrix} = -B_0 dl (\sin\theta + \cos\theta) \hat{k}$$

Sustituyendo e integrando, se encuentra

$$d\vec{F} = I(\theta) d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$$

$$\vec{F} = -I_0 B_0 R \hat{k} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2) (\sin\theta + \cos\theta) d\theta$$

$$\vec{F} = -I_0 B_0 R \hat{k} \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2) \sin \theta d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos(\theta/2) \cos \theta d\theta \right\}$$

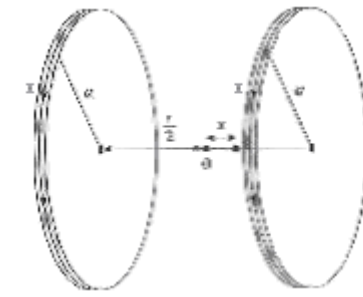
Problema 7.20

Dos carretes circulares iguales de radio a y N espiras, por los cuales circulan corrientes iguales I , son coaxiales y están separados una distancia r , calcular:

- El campo magnético B en un punto del eje común a una distancia x del centro del sistema.
- Demostrar que si $r = a$ (carretes de Helmholtz)

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0$$

- Calcular, en el caso en que $r = a$, el cociente entre los valores del campo para $x = a/4$ y para $x = 0$.



Solución

- El campo magnético producido por un carrete circular de radio a y N espiras recorrido por una corriente I en un punto del eje que dista b del centro del carrete tiene la dirección del eje y su módulo es

$$B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

En este caso, el campo producido por el sistema de carretes en un punto que dista de cada carrete

$$(r/2 - x) \quad \text{y} \quad (r/2 + x)$$

respectivamente, es

$$|B| = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{[(r/2 - x)^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(r/2 + x)^2 + a^2]^{3/2}} \right\}$$

-

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{-2(r/2 - x)}{[(r/2 - x)^2 + a^2]^{5/2}} + \frac{2(r/2 + x)}{[(r/2 + x)^2 + a^2]^{5/2}} \right\}$$

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{r}{2} - x \right)^2 + a^2 \right]^{5/2}} + \frac{5}{2} \frac{-2 \left(\frac{r}{2} - x \right) \left(\frac{r}{2} - x \right)}{\left[\left(\frac{r}{2} - x \right)^2 + a^2 \right]^{7/2}} + \right. \\ \left. \frac{1}{\left[\left(\frac{r}{2} + x \right)^2 + a^2 \right]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2 \left(\frac{r}{2} + x \right) \left(\frac{r}{2} + x \right)}{\left[\left(\frac{r}{2} + x \right)^2 + a^2 \right]^{7/2}} \right\}$$

si $r = a$ y para $x = 0$:

$$\left(\frac{d^2 B}{dx^2} \right)_{r=a}^{x=0} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left(5a^2/4 \right)^{5/2}} - 5 \frac{a^2/4}{\left(5a^2/4 \right)^{7/2}} + \frac{1}{\left(5a^2/4 \right)^{5/2}} - 5 \frac{a^2/4}{\left(5a^2/4 \right)^{7/2}} \right\} = 0$$

c) El valor del campo para $r = a$ y para $x = 0$

$$B_{x=0} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{2}{\left(5a^2/4 \right)^{3/2}} \right\} = \frac{8}{5^{3/2}} \frac{\mu_0 N I}{a} = 0,716 \frac{\mu_0 N I}{a}$$

y para $x = a/4$:

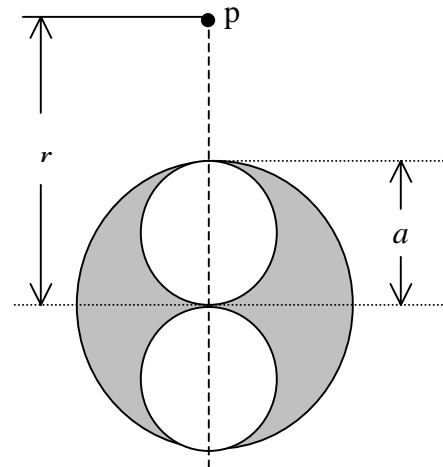
$$B_{x=a/4} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{a}{2} - a/4 \right)^2 + a^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{a}{2} + a/4 \right)^2 + a^2 \right]^{3/2}} \right\} = 0,714 \frac{\mu_0 N I}{a}$$

$$\frac{B_{x=a/4}}{B_{x=0}} = 0,997$$

es decir, para $x = a/4$ el campo es $\cong 99,7\%$ del campo en el centro. De modo que los carretes de Helmholtz producen un campo muy uniforme en su región central.

Problema 7.21

Un largo conductor cilíndrico de radio a tiene dos cavidades cilíndricas de diámetro a a lo largo de toda su longitud. Una corriente I se dirige hacia afuera de la página y es uniforme por toda la sección transversal del conductor. Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en el punto p, en función de I , r y a .



Solución:

El campo magnético en el punto p (por superposición)

está dado por

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 - \vec{B}_2 - \vec{B}_3$$

donde: \vec{B}_1 corresponde al campo del cilindro sin cavidades

$\vec{B}_{2,3}$ corresponden a los campos de las cavidades (superior e inferior respectivamente)

Entonces, según la Ley de Ampere, para \vec{B}_1 se tiene que

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = \mu_0 I_{1\text{ enc}}$$

dado que $\vec{B}_1 \uparrow \uparrow d\vec{l}_1$ e $I_{1\text{ enc}} = 2I$, se tiene que

$$\oint B_1 dl_1 = B_1 2\pi r \equiv \mu_0 (2I) \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi r}$$

de igual forma para \vec{B}_2 , se puede escribir

$$\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \mu_0 I_{2\text{ enc}}$$

dado que $\vec{B}_2 \uparrow \uparrow d\vec{l}_2$ e $I_{2\text{ enc}} = I_{3\text{ enc}} \equiv I/2$, se tiene que

$$\oint B_2 dl_2 = B_2 2\pi(r - a/2) \equiv \mu_0 (I/2) \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(r - a/2)}$$

En forma análoga se encuentra que

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(r + a/2)}$$

Reemplazando los valores obtenidos en $\vec{B}_p = \vec{B}_1 - \vec{B}_2 - \vec{B}_3$, se encuentra:

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{\pi r} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(r - a/2)} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(r + a/2)}$$

$$B_p = \frac{\mu_0 I}{\pi r} \left(\frac{2r^2 - a^2}{4r^2 - a^2} \right)$$

Notamos que el campo en el punto p apunta hacia la izquierda