CAPÍTULO XII

ECUACIONES DE MAXWELL Y ONDAS ELECTROMAGNETICAS

12.1. Campos eléctricos variables y campos magnéticos inducidos

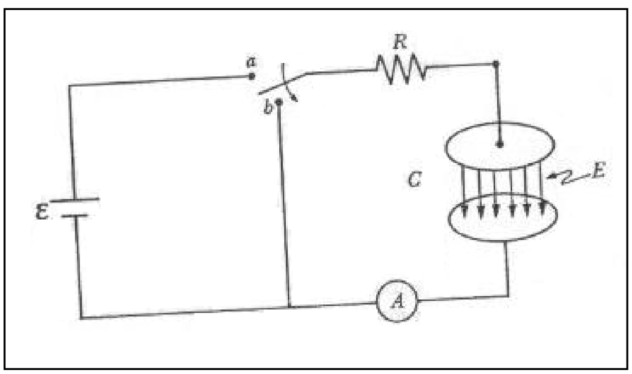
Según la Ley de Faraday cuando un campo magnético varía en función del tiempo, induce un campo eléctrico que está dado por

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} = \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

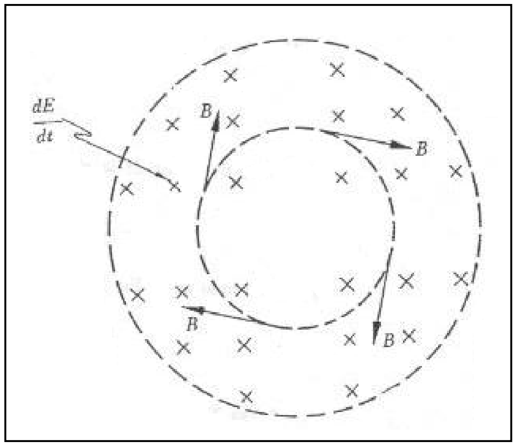
Se observa también que algo similar sucede cuando varía un campo eléctrico en función del tiempo, éste nos induce un campo magnético cuya ecuación (similar a la anterior) se expresa en la forma siguiente

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\ \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \qquad (12.1)$$

Donde el término $\varepsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}$, tiene la función de corriente al compararla con la Ley de Ampere.



Experimentalmente se puede comprobar que un campo eléctrico variable induce un campo magnético. Consideremos un circuito *RC* con una fem (ε) como se muestra en la figura anterior, al conectar el interruptor en *“a”* comienza a cargarse el condensador y a medida que se carga, el campo eléctrico entre placas va aumentando hasta llegar a un valor máximo, en el intervalo de tiempo en el que se carga el condensador varía el flujo eléctrico con respecto al tiempo y aparece el termino $\frac{\partial \phi_E}{\partial t}$ que multiplicado por ε_0 tiene unidades de corriente. La dirección del campo magnético inducido se puede determinar a partir de la regla de la mano derecha tal como se muestra en la siguiente figura.



12.2. El aporte de Maxwell (Ley de Ampere-Maxwell)

Se sabe que existen dos formas de producir campos magnéticos:

a) A través de corrientes continuas como lo establece la Ley de Ampere.

b) Mediante un campo eléctrico variable en el tiempo.

Cabe destacar que fue Maxwell quien modificó la Ley de Ampere introduciéndole la corriente de desplazamiento (i_d), siendo ésta una de sus mayores contribuciones a la electricidad y magnetismo, la corriente de desplazamiento se debe a la variación del campo eléctrico en función del tiempo, con lo cual la ***ecuación de Ampere generalizada (Ampere-Maxwell)*** se escribe en la forma siguiente:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \; I + \mu_0 \; I_d \tag{12.2}$$

donde

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} \tag{12.3}$$

Luego

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \; I + \mu_0 \; \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} \tag{12.4}$$

La relación anterior que se conoce con el nombre de ecuación de Ampere-Maxwell.

12.3 Ecuaciones de Maxwell

Fue James Clerk Maxwell en 1865, quien resumió en un conjunto de ecuaciones la generalización de los experimentos electromagnéticos observados, éstas son: *Ley de Gauss de la electricidad* (de la cual se deriva la Ley de Coulomb), *Ley de Gauss del magnetismo*, *Ley de Ampere* (modificada posteriormente por Maxwell) y la *Ley de Faraday* (Ver problema 1). Las cuales se representan matemáticamente (en forma diferencial) a través de:

Forma diferencial Ley de Gauss (Eléctrica) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ (1)	**Forma diferencial Ley de Faraday** $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (3)
Forma diferencial Ley de Gauss (Magnética) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (2)	**Forma diferencial Ley de Ampere-Maxwell** $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (4)

Donde: ε_0 y μ_0 representan la permitividad y permeabilidad del vacío respectivamente,

$$\varepsilon_0\vec{E}=\vec{D}\ , \qquad \vec{B}=\mu_0\vec{H}\ , \qquad \vec{J}=\sigma\vec{E}\ , \qquad \rho=\frac{dq}{d\upsilon}\ , \quad \mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}$$

Ecuaciones de Maxwell en el vacío **(** $\rho=0$ **;** $\vec{J}=0$ **)**

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ (1)	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (3)
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (2)	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (4)

12.4. Energía electromagnética

La densidad de energía eléctrica está dada por

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \equiv \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

En forma similar, la densidad de energía magnética se escribe como

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \equiv \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

En una región del espacio libre (vacío) donde existe campo eléctrico y campo magnético, la densidad de energía electromagnética está dada por

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$$

y la energía electromagnética se expresa como

$$U = \iiint (u_E + u_B)\,d\upsilon \equiv \frac{1}{2}\iiint (\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\,d\upsilon$$

12.5. Vector de Poynting

En la próxima sección se obtendrán las ecuaciones para las ondas electromagnéticas. Una de las características más importantes de estas ondas, es que son capaces de transportar energía de un punto a otro. El vector que nos entrega la dirección y la magnitud de la rapidez del flujo de energía electromagnética, por unidad de área y por unidad de tiempo, recibe el nombre de **vector de Poynting** y se define como

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = c^2\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$

12.6. Ondas electromagnéticas

Una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones de Maxwell, es la obtención de las ecuaciones de las ondas electromagnéticas; en las cuales se muestra que los campos eléctricos y magnéticos pueden propagarse en el espacio, en forma de ondas electromagnéticas.

Las ecuaciones de ondas electromagnéticas en el espacio libre ($\rho = 0$, $J = 0$) se obtienen de la siguiente manera

Al aplicar rotor a la ecuación de Maxwell (3) se escribe

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dado que $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$, también se puede escribir

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

reemplazando $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ por (4) se tiene

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Por otro lado, aplicando al primer miembro de la ecuación anterior, la propiedad de los operadores diferenciales vectoriales

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

y luego, teniendo presente la ecuación de Maxwell para el vacío es $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, se encuentra

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de onda que corresponde al campo eléctrico. Trabajando en forma similar, después de aplicar rotor a la ecuación (4) y desarrollar, para el campo magnético se encuentra una ecuación similar que está dada por

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Estas ecuaciones muestran la dependencia temporal de los campos eléctricos y magnéticos, cabe destacar la importancia que tiene el término incorporado por Maxwell (a la ecuación de Ampere) de corriente de desplazamiento en la obtención de estas ecuaciones.
Por otro lado, si comparamos la forma de las dos ecuaciones anteriores con la ecuación diferencial de una onda tridimensional, cuya forma es

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad \text{para} \quad \psi = \psi(\vec{r},t) \quad \text{(onda escalar cualquiera)}$$

$$\nabla^2\vec{A} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \quad \text{para} \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t) \quad \text{(Onda vectorial cualquiera)}$$

vemos que el caso vectorial tienen la misma forma y estructura, siempre que se cumpla que $\upsilon = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Si se asignan los valores numéricos a ε_0 y μ_0, se encuentra que $\upsilon \approx 3\times 10^8 m/s$, que coincide con el valor encontrado por Fizeau para la velocidad de la luz (en el vacío). De esta forma, el campo eléctrico y el campo magnético se pueden acoplar juntos como una sola onda electromagnética que se propaga a través del espacio con una velocidad igual a la velocidad de la luz en el vacío ($\upsilon = c$), con lo cual se concluye que la luz es una onda electromagnética.

12.7. Problemas resueltos

Problema 12.1

Obtenga las ecuaciones de Maxwell escrita en forma diferencial, a partir de las leyes básicas de Gauss (eléctrica y magnética), de Faraday y de Ampere- Maxwell.

Solución:

La ley de Gauss (eléctrica) escrita en forma integral está dada por

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\upsilon}\rho\, d\upsilon = \iiint_{\upsilon}(\rho/\varepsilon_0)\, d\upsilon$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \iiint(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, d\upsilon$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

(1) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ (Primera ecuación de Maxwell)

La ley de Gauss (magnética) escrita en forma integral está dada por

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{s}=0$$

Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{s}=\iiint(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\,d\upsilon$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

(2) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$ (Segunda ecuación de Maxwell)

Ley de Faraday en forma diferencial forma integro-diferencial tiene fa forma

$$\varepsilon=\oint E\cdot d\vec{l}=-\frac{d\phi_B}{dt}$$

donde $\phi_B=\iint\vec{B}\cdot d\vec{s}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\oint E\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\left(\iint\vec{B}\cdot d\vec{s}\right)\equiv\iint(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})\cdot d\vec{s}$$

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\iint(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{s}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

(3) $$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ (Tercera ecuación de Maxwell)

La ley de Ampere-Maxwell escrita en forma integro diferencial tiene fa forma

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\ I+\mu_0\ \varepsilon_0\ \frac{\partial\phi_E}{\partial t}$$

Dado que la corriente se puede escribir como $I=\iint\vec{J}\cdot d\vec{s}$, $\phi_E=\iint\vec{E}\cdot d\vec{s}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\iint(\mu_0\vec{J})\cdot d\vec{s}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\vec{E}\cdot d\vec{s}\right)$$

También $$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint (\mu_0 \vec{J})\cdot d\vec{s} + \iint (\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{s}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint (\mu_0 \vec{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{s}$$

Utilizando el teorema de Stokes

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{s}$$

Comparando las dos últimas ecuaciones, se encuentra

(4) $$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ (Cuarta ecuación de Maxwell)

Como $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, también se puede escribir

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Problema 12.2

Mostrar que las amplitudes de los campos $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ deben ser perpendiculares a la dirección de propagación $\vec{k}$.

Solución:

Consideremos las siguientes ondas que son soluciones de las ecuaciones de diferenciales de onda, cuyas formas están dadas por

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varepsilon)}$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varepsilon)}$$

Utilizando la ecuación de Maxwell, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ se tiene

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varepsilon)}\right) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

de donde

$$\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}\perp\vec{k}$$

de esta manera $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la dirección de propagación $\vec{k}$
En forma similar, utilizando, $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, se encuentra

$$\vec{k}\cdot\vec{B}=0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{B}\perp\vec{k}$$

también, $\vec{B}$ debe ser perpendicular a la dirección de propagación $\vec{k}$. Por lo tanto $\vec{E}$ y $\vec{B}$, ambos, son vibraciones transversales.

El próximo paso es encontrar una relación entre las amplitudes de los campos $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$, para lo cual se usan las siguientes relaciones

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-i\vec{k}\times\vec{E} \quad \text{y} \qquad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=i\omega\vec{B}$$

sustituyendo en la ecuación de Maxwell, $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ se encuentra

$$\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}=\vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B}=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}$$

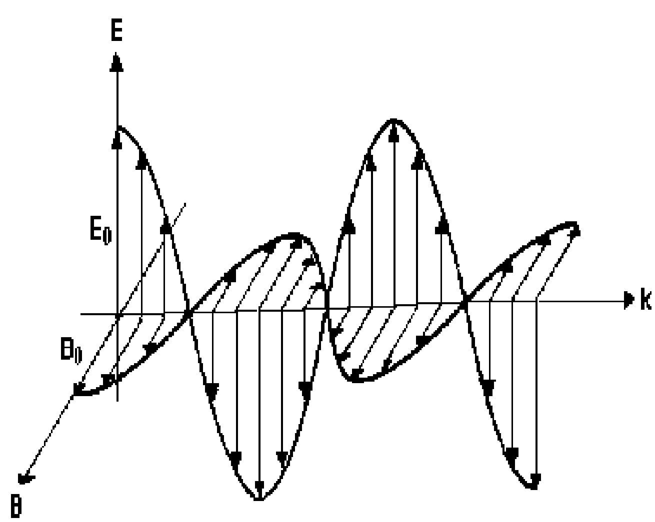
También para las amplitudes se puede escribir

$$\vec{B}_0=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0$$

En forma análoga, a partir de la ecuación de Maxwell (4) con *J=0* se puede obtener que

$$\vec{E}=-\frac{c^2}{\omega}\vec{k}\times\vec{B}$$

La ecuaciones anteriores indican que $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{E}$, y $\vec{B}$ está en fase con $\vec{E}$. Los tres vectores $\vec{E}$, $\vec{B}$ y $\vec{k}$ forman un sistema de coordenadas cartesiano como se muestra en la siguiente figura.



Problema 12.3

Consideremos el caso de una onda armónica plana propagándose en la dirección positiva del eje x, de tal forma que el campo eléctrico asociado sea paralelo al eje y, se puede escribir como

$$E_y(x,t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

Determine el campo magnético asociado a esta onda.

Solución:

El campo magnético asociado se puede determinar utilizando la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donde

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \left(0,\, 0,\, \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$$

y

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

Reemplazando en la ecuación se Maxwell y comparando componentes se encuentra

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

de donde

$$B_z = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = E_{oy}\, k \int \text{sen}(kx - \omega t + \varepsilon) dt + Cte$$

luego

$$B_z(x,t) = \frac{k}{\omega} E_{0y}\cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

dado que $\omega / k = c$, entonces

$$B_z(x,t) = \frac{1}{c} E_{0y}\cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

También se puede escribir

$$E_y(x,t) = cB_z(x,t)$$

Vemos que estas componentes tienen la misma dependencia temporal y difieren sólo por un escalar c. Así los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares y están en fase tal como se muestra en la figura del problema anterior.

Problema 12.4

Para la componente del campo eléctrico de una onda electromagnética que está dada por

$$E_y(x,t) = E_y = E_{0y}\cos(kx - \omega t + \varepsilon)$$

Determine el campo magnético asociado, utilizando directamente la ecuación

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}$$

Solución:

Para esta caso se tiene que $\vec{E} = \hat{j}\,E_y \quad \vec{k} = \hat{i}\,k$, entonces

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega}\hat{i}\,k \times \hat{j}\,E_y$$

$$\vec{B}_z = \frac{1}{\omega}kE_y(\hat{i} \times \hat{j}) = \frac{k}{\omega}E_y\,\hat{k}$$

$$\vec{B}_z = \frac{1}{c}E_y\,\hat{k}$$

Problema 12.5

Para el caso de una onda plana armónica linealmente polarizada, que se propaga en el vacío dada por

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Determine:

a) Vector de Poynting.

b) La Irradiancia.

Solución:

a) El vector de Poynting, está definido a través de

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Reemplazando los campos respectivos y sabiendo que $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, se encuentra

$$\vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

b) La Irradiancia está definida como el promedio temporal del módulo del vector de Poynting

$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle \equiv \left\langle S \right\rangle$$

de a) se tiene que $S = c^2 \varepsilon_0 \left| \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \right| \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, entonces

$$I = \langle S \rangle \equiv c^2 \varepsilon_0 \mid \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \mid \left\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\rangle$$

Por otro lado, teniendo presente que el valor medio de una función cualquiera del tiempo $f(t)$, se define como

$$\left\langle f \right\rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt$$

con τ representando el intervalo de tiempo, se encuentra que:

$$\left\langle \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\rangle = \frac{1}{2} \equiv \left\langle sen^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right\rangle$$

Con esto, se encuentra que la Irradiancia queda expresada a través de

$$I = \frac{c^2 \varepsilon_0}{2} \mid \vec{E}_0 \times \vec{B}_0 \mid = \frac{c^2 \varepsilon_0}{2} E_0 B_0$$

dado que $B_0 = E_0 / c$, se puede escribir

$$I = \frac{c \varepsilon_0}{2} E_0{}^2$$

Problema 12.6

A partir de las ecuaciones de Maxwell, obtenga la **Ecuación de continuidad**.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \;\; ; \text{(conservación de la carga)}$$

Solución:

La densidad de corriente eléctrica $\vec{J}$ y la densidad volumétrica de carga ρ no son magnitudes independientes, sino que están relacionadas en cada punto por una ecuación diferencial, llamada *ecuación de continuidad.* Esta relación tiene su origen en el hecho que la carga eléctrica no puede crearse ni destruirse, y dentro de este contexto, puede ser obtenida a partir de las ecuaciones de Maxwell, en la forma siguiente.

Apliquemos la divergencia a la ecuación de Maxwell (3):

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

dado que la divergencia de un rotor es cero, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = 0$, entonces

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

Utilizando el hecho que $\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})$. La ecuación anterior se escribe como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 0$$

Teniendo presente la ecuación de Maxwell (2), se encuentra

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Problema 12.7

(Interpretación de la ecuación de continuidad)

Muestre que a partir de la ecuación de continuidad se puede obtener que la corriente está dada por $I = dq/dt$.

Solución:

Para interpretar lo que representa la ecuación de continuidad, integremos esta ecuación en un volumen υ.

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\upsilon + \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d\upsilon = 0$$

Como se está considerando un volumen fijo y la derivada respecto del tiempo actúa sólo sobre ρ, es posible escribir

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\upsilon + \frac{d}{dt}\iiint \rho\, d\upsilon = 0$$

(No obstante que ρ, es función de la posición así como del tiempo, de modo que la derivada con respecto al tiempo se convierte de parcial en total)

Apliquemos el teorema de la divergencia al primer miembro de la ecuación anterior.

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, d\upsilon = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

esto permite escribir

$$\iint \vec{J} \cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt}\iiint \rho\, d\upsilon = 0$$

Teniendo presente que la intensidad de corriente es $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$ y que la carga eléctrica se puede expresar como $q = \iiint \rho\, d\upsilon$. Entonces de encuentra

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

de donde se ve que I no se crea de manera espontánea, para que esto suceda, es necesario que exista una carga eléctrica que esté variando en el tiempo.

Problema 12.8

Calcular el promedio temporal de la densidad de energía $\langle u \rangle$, y encontrar una relación entre este de este último con la Irradiancia.

Solución:

Consideremos el caso de las dos ondas planas armónicas, en estas condiciones, el promedio temporal de la densidad de energía, a partir de su definición se escribe como

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\left\langle \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \left\langle E^2 \right\rangle + \frac{1}{\mu_0}\left\langle B^2 \right\rangle \right)$$

dado que

$$\left\langle E^2 \right\rangle = E_0{}^2 \left\langle \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \right\rangle = E_0{}^2 / 2$$

y

$$\left\langle B^2 \right\rangle = B_0{}^2 \left\langle \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \right\rangle = B_0{}^2 / 2$$

sustituyendo se tiene $$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\left[\varepsilon_0 E_0{}^2 + \frac{1}{\mu_0} B_0{}^2 \right]$$

como entre las componentes se cumple que $E_0 = cB_o$, además que $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ entonces sustituyendo, se encuentra

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\left[\varepsilon_0 E_0{}^2 + \varepsilon_0 E_0{}^2 \right] = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0{}^2$$

Comparando esta expresión de la Irradiancia $I = \frac{c\varepsilon_0}{2} E_0{}^2$, se encuentra que

$$I = c\langle u \rangle$$

Problema 12.9

En una región cilíndrica del espacio de radio *R* un campo eléctrico está variando en función del tiempo, determine la dirección y magnitud del campo magnético inducido para $r < R$..

Solución:

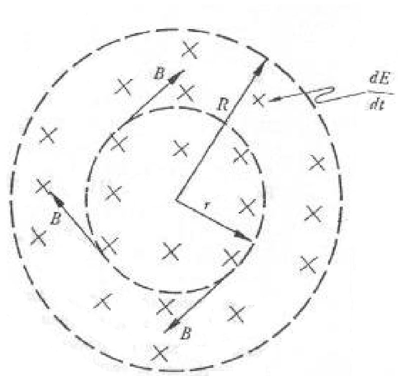
De la ley de Faraday tenemos que

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \ \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

de donde $$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \ \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$$

Integrando para $r < R$ ambos lados de la ecuación se tiene que

$$B\, 2\pi r = \mu_0 \ \varepsilon_0 \ \pi r^2 \ \frac{\partial E}{\partial t}$$



Luego

$$B = \mu_0\ \varepsilon_0\ \frac{r}{2}\frac{\partial E}{\partial t}$$

Problema 12.10

A partir de la ecuación de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (4), muestre que $\vec{E} = -\dfrac{c^2}{\omega}\vec{k} \times \vec{B}$

Solución:

Asumiendo una soluciones generales de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varepsilon)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varepsilon)}$$

se tiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\vec{k} \times \vec{B}$$

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0 (i\omega \vec{E})$$

Sustituyendo en (4), se encuentra

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \times \vec{B} \quad ; \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

Valores de algunas constantes

Cantidad	**Símbolo**	**Valor**
Permitividad del vacío	ε_0	$8.854 \times 10^{-12}\ C^2\ /\ N\ m^2$
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2.998 \times 10^{8}\ m\ /\ s$
Permeabilidad del vacío	$\mu_0 = 1/(\varepsilon_0\ c^2)$	$4\pi \times 10^{-7}\ N\ /\ A^2$
Constante de Plack	h	$6.626 \times 10^{-34}\ J\ s$
Cte. de Planck racionalizada	$\hbar$	$1.055 \times 10^{-34}\ J\ s$
Masa del electrón	m_e	$9.109 \times 10^{-31}\ kg$
Masa del protón	m_p	$1.673 \times 10^{-27}\ kg$
Masa del neutrón	m_n	$1.675 \times 10^{-27}\ kg$
Carga elemental	e	$1.602 \times 10^{-19}\ C$
Radio de Bohr	a_0	$0.529 \times 10^{-10}\ m$
Longitud de onda Compton	λ_C	$2.426 \times 10^{-12}\ m$
Electrón-volt	eV	$1.602 \times 10^{-19}\ J$
Energía de Bohr	E_1	$-13.6\ eV$
Constante de Boltzmann	k_B	$1.381 \times 10^{-23}\ J/{}^0K$
Constante de Coulomb	$K = 1/4\pi\varepsilon_0$	$8.988 \times 10^{9}\ N\ m^2\ /\ C^2$
Energía del electrón (reposo)	$m_e\ c^2$	$0.511\ MeV$
Energía del protón (reposo)	$m_p\ c^2$	$938.3\ MeV$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.671 \times 10^{-8}\ W\ /\ m^2\ {}^0K^4$
Unidad de masa atómica	Uma	$1.661 \times 10^{-27}\ kg$
Número de Abogadro	N_A	$6.022 \times 10^{23}\ /\ mol$
Constante de los gases	$R = N_A\ k_B$	$8.314\ m^2 kg\ /\ s^2\ {}^0K\ \ mol$