CAPÍTULO IV
CONDENSADORES Y DIELECRICOS

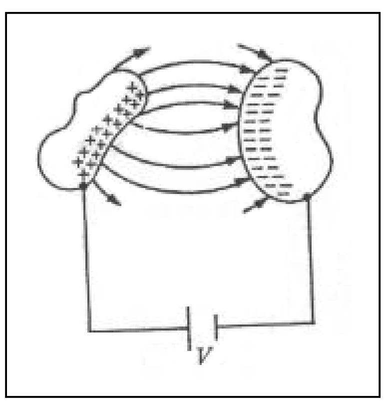
4.1. Definición de capacidad o capacitancia

Si dos conductores aislados se conectan a una *fem* como se muestra en la Fig., se produce una diferencia de potencial entre ellos; para producir esta diferencia de potencial se requiere llevar carga de un conductor al otro y por consiguiente realizar un trabajo, el cual es hecho por la fem. Todo el sistema tiene una carga neta cero ya que los conductores tienen igual carga pero signo contrario. La carga que tienen los conductores depende de la fem que los conecta y de otros factores tales como la distancia entre ellos, su tamaño y su forma geométrica. Es decir, que si todos estos factores permanecen constantes excepto la fem, entonces la carga es directamente proporcional a la diferencia de potencial producida por la *fem* entre los conductores, esto es:

$$q = CV \tag{4.1}$$

donde q es la magnitud de la carga en cada uno de los conductores, V es el potencial entre ellos y C es la constante de proporcionalidad que se define como la capacitancia; este hecho lo podemos comprobar experimentalmente. El arreglo de los conductores que se muestra en la siguiente figura se conoce como condensador.

La Ec. (4.1) define la capacidad o capacitancia de un condensador. Por otro lado, cuando se habla de carga en un condensador, se hace referencia a la carga en la placa positiva y no a la carga neta del condensador que es cero.



Los condensadores se representan esquemáticamente por el símbolo -----| |-----; la unidad de la capacitancia es el farad en honor de Michael Faraday; entonces, un condensador tiene una capacitancia de 1[Farad] =1[F] cuando la carga es de 1[C] y su diferencia de potencial es de 1[V], de modo que:

$$1\ [\mathrm{F}] = 1\ [\mathrm{C/V}]$$

debido a que las dimensiones geométricas de un condensador para que su capacitancia sea de un farad, son demasiado grandes, es conveniente usar submúltiplos del farad, tales como:

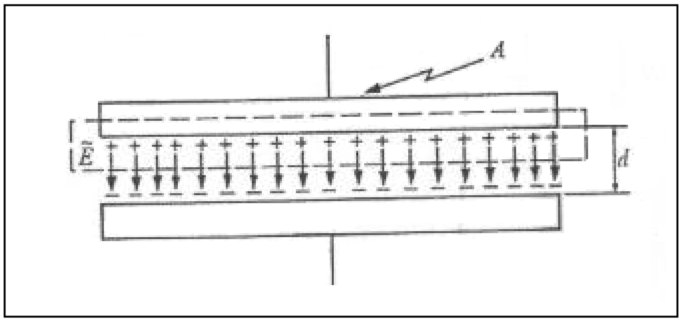
$$1\ [\text{microfarad}] = 1[\mu F] = 10^{-6}\ [F]$$

$$1\ [\text{PicoFarad}] = 1[PF] = 1[\mu\mu F] = 10^{-12}\ [F]$$

ya que la carga de un condensador dado, está en función únicamente del voltaje que se le aplica, tiene que haber un límite máximo en el voltaje, ya que de no ser así, se generaría tanta carga en los conductores que se produce un chispazo entre ellos, que comúnmente se conoce por cortocircuito. Los condensadores nos pueden generar campos eléctricos uniformes, que se utilizan para acelerar o desviar partículas cargadas, también dado que se pueden obtener campos eléctricos al cargar un condensador, entonces este último nos puede servir para almacenar energía eléctrica.

4.2. Condensador de placas paralelas

Uno de los condensadores que dado lo simple de su geometría, es muy fácil analizar, es el condensador de placas paralelas que se muestra en la Fig.. Este consiste en un par de placas paralelas de área *"A"* y separadas una distancia *"d";* para despreciar las deformaciones de las líneas de campo eléctrico en los bordes de las placas consideramos que *"d"* es muy pequeña comparada con las dimensiones de *"A"*, obteniendo un campo uniforme entre las placas. Al aplicar una diferencia de potencial a las placas, aparecerá una carga + q en un placa y una carga - q en la otra. Como existe una atracción entre las cargas, éstas aparecen en la cara interior de las placas obteniéndose entonces, un campo uniforme entre ellas.



Para calcular la capacidad del condensador de placas paralelas se aplica la Ley de Gauss, para obtener el campo eléctrico entre las placas se utiliza una superficie gaussiana de forma cilíndrica, una de las tapas del cilindro quedaría dentro de la placa y la otra entre las placas como se muestra en la figura anterior, donde vemos que el flujo eléctrico en la tapa superior del cilindro como en su superficie lateral es cero, en la primera porque dentro de la placa conductora no existe campo y en la superficie lateral porque el $d\vec{s}$ hace un ángulo de 90° con el campo eléctrico entre las placas; en la tapa inferior del cilindro que está entre las placas el flujo no es cero, ya que el campo es paralelo a la dirección del vector área, esto es:

$$\Phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\,A$$

y:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q / \varepsilon_0$$

entonces:

$$q = \varepsilon_0\, E\, A \tag{4.2}$$

como la capacitancia está definida en términos de carga y potencial, debemos expresar el campo eléctrico en función del potencial. Esto se puede hacer considerando que el trabajo necesario para llevar una carga prueba de la placa negativa a la placa positiva es:

$$W = q_0\, V$$

o a partir del producto de la fuerza $q_0\ E$ que hay que ejercer sobre la del carga prueba, por la distancia d, es decir:

$$W = (q_0\, E)\, d$$

igualando ambas expresiones y despejando V se tiene:

$$V = E\,d \tag{4.3}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.2) y (4.3) en la Ec. (4.1) se obtiene que:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0\,E\,A}{E\,d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{4.4}$$

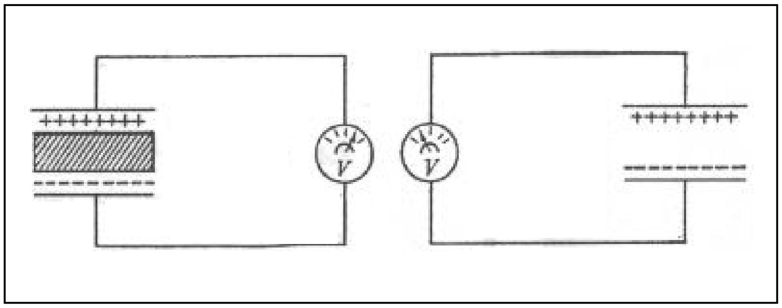
donde C es la capacidad del condensador de placas paralelas; y se puede observar que la capacidad depende únicamente de la geometría del condensador, esto es, si se mantiene constante el potencial entre las placas y se aumenta el área *A*, se incrementa la carga y por consiguiente la capacidad. Si mantenemos constante la carga y se incrementa la distancia *d* entre las placas, la diferencia de potencial aumenta y por consiguiente disminuye la capacidad.

4.3. Dieléctricos en condensadores

En la práctica la mayoría de los condensadores tienen material dieléctrico con el fin de que su capacidad de almacenamiento de carga aumente y por consiguiente la capacitancia del condensador.

Uno de los experimentos realizados por Faraday con condensadores consiste este aplica la misma diferencia de potencial a dos condensadores de placas paralelas de iguales dimensiones, geométricos uno al vacío y otro con un dieléctrico (plástico, porcelana, papel, etc.) que llene completamente la región entre las placas, y encontró que el condensador con dieléctrico almacena más carga que el condensador al vacío; si se realiza un experimento similar, pero en vez de aplicar el mismo potencial, proporcionando cargas iguales a cada condensador por separado y se les conecta a voltímetros de alta precisión tal comose muestra en la Fig., se puede ver que el voltímetro conectado al condensado al vacío marca un voltaje mayor V_0 que el voltaje V_d del condensador con dieléctrico. A partir de la ecuación (4.1) si se considera que las cargas son iguales, se tiene la siguiente relación:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V_d}$$



Esta relación se define como la constante dieléctrica *k*, entonces:

$$k \equiv \frac{C}{C_0} \tag{4.5}$$

Esto permite concluir que la capacidad de un condensador de placas paralelas con un dieléctrico que lo llene completamente es:

$$C = k\ C_0 = k\ \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{4.6}$$

la constante dieléctrica en el vacío es igual a la unidad.

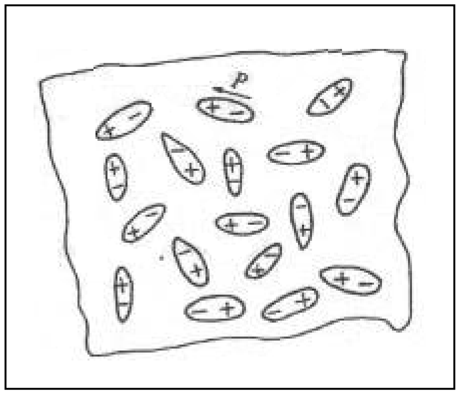
La constante dieléctrica

La capacidad de un condensador con dieléctrico se define como:

$$C = k\ C_0$$

donde k es la constante dieléctrica del material y C_0 es la capacitancia del condensador al vacío.

Existen dos modelos que han sido desarrollados cualitativamente, uno que corresponde a las moléculas polares que tienen un dipolo eléctrico permanente tales como el H_2O y HCl, etc. Otras moléculas que no tienen dipolo eléctrico permanente que se les conoce también por dieléctricos no polares; ejemplo: el propano, metano, etc.



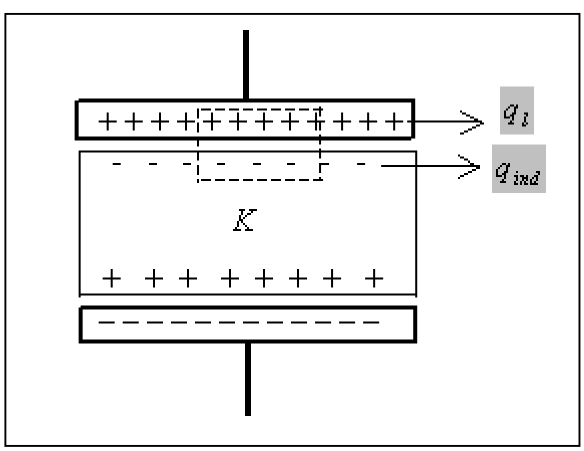
En la figura anterior, se representa esquemáticamente una sustancia Polar en la que se aprecian que los momentos de los dipolos no están orientados. Si se aplica un campo eléctrico externo tratarían de alinearse, dependiendo su grado de alineación, de la magnitud del campo eléctrico.

Ley de Gauss en dieléctricos

Consideremos un material dieléctrico de constante *K*, inserto dentro de un condensador de placas paralelas, al ubicar una superficie gaussiana (cilíndrica segmentada) tal que una de sus tapas esté contenida en la placa metálica del condensador y la otra dentro del dieléctrico (ver figura). Al aplicar la ley de Gauss se encuentra.

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_l - q_{ind}\right)$$

donde: q_l corresponden a las cargas libres en la placa y q_{ind} son las cargas inducidas en el dieléctrico producto de la polarización de este mismo.



Determinación de la carga inducida

Según la ley de gauss en dieléctricos se puede escribir

$$EA = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_l - q_{ind}\right)$$

Por otro lado, dado que $E = \frac{E_0}{K}$ y $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q_l}{\varepsilon_0 A}$, luego

$$E = \frac{q_l}{\varepsilon_0 KA}$$

reemplazando este término se obtiene

$$\frac{q_l}{\varepsilon_0 K} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_l - q_{ind}\right)$$

Entonces

$$q_{ind} = q_l\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

Sustituyendo el valor de la carga inducida en la ley de Gauss, se encuentra

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_l}{\varepsilon_0 K}$$

También se puede escribir

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{s} = q_l \quad \text{(Ley de Gauss en dieléctricos)}$$

donde $\vec{D} = \varepsilon_0 K\vec{E}$ (vector desplazamiento)

Los tres vectores eléctricos

De la Ley de Gauss en dieléctricos se tiene que

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left(q_l - q_{ind}\right)$$

$$\varepsilon_0 E = \frac{q_l}{A} - \frac{q_{ind}}{A}$$

Definiendo: $D \equiv \frac{q_l}{A}$ y $P \equiv \frac{q_{ind}}{A}$ se tiene

$$\varepsilon_0 E = D - P$$

En forma vectorial se puede escribir

$$\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P}$$

donde: $\vec{D}$ recibe el nombre de vector desplazamiento eléctrico y $\vec{P}$ representa el vector de polarización eléctrica

Susceptibilidad eléctrica χ

Si el vector de polarización se puede expresar en la forma

$$\vec{P} = \chi \; \vec{E}$$

Entonces $\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \chi \vec{E}$. Luego

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 + \chi)\vec{E} \equiv \varepsilon \, \vec{E}$$

Comparando esta expresión con

$$\vec{D} = \varepsilon_0 K \vec{E}$$

se encuentra

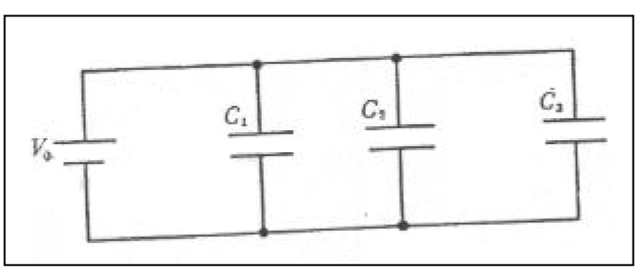
$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

donde $\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi$ representa la permitividad relativa

4.4. Conexión de condensador en serie y en paralelo

En el capítulo anterior se consideró cómo simplificar arreglos de resistencias mediante combinaciones equivalentes en serie y en paralelo. En esta sección se estudiará cómo simplificar arreglos de condensadores mediante combinaciones en serie y paralelo para obtener capacidades equivalentes.

En la siguiente Fig. se tienen tres condensadores con capacitancias C_1, C_2 y C_3, en paralelo, conectados a una fuente fem con voltaje V_0.



En la figura anterior, se observa que la diferencia de potencial es la misma para cada uno de los condensadores y utilizando la ecuación (4.1) se tiene que la carga en cada uno de los condensadores es:

$$q_1 = C_1\, V_0 \qquad q_2 = C_2\, V_0 \qquad q_3 = C_3\, V_0$$

Un condensador equivalente C_e es aquel que al mismo voltaje almacena igual cantidad de carga que la del arreglo al cual sustituye; la carga total o equivalente para una combinación de condensadores en paralelo es la suma de la carga de cada uno, esto es:

$$q_e = q_1 + q_2 + q_3$$

Según la Ec. (4.1):

$$q_e = C_e\, V_0$$

Sustituyendo el valor de la carga equivalente se tiene:

$$q_1 + q_2 + q_3 = C_e\, V_0$$

de la Ec. (4.1) vemos que:

$$C_1\, V_0 + C_2\, V_0 + C_3\, V_0 = C_e\, V_0$$

Para un arreglo de *N* condensadores en paralelo siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

$$C_e = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{4.7}$$

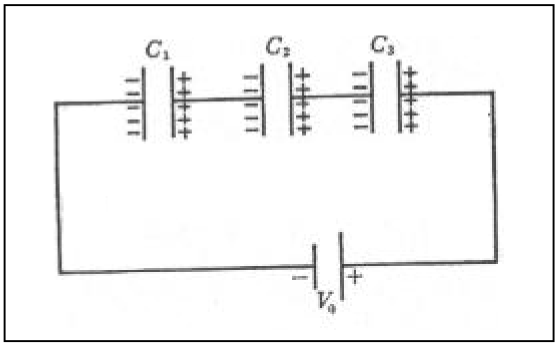
Para un arreglo de condensadores en serie conectadas a una fuente fem con voltaje V_0, como se muestra en la Fig. podemos calcular la capacitancia equivalente utilizando la segunda Ley de Kirchhoff (teorema de la trayectoria) la suma de la caída de voltaje en cada uno de los condensadores es igual al voltaje de la fem, esto es:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 \tag{4.8}$$

De la Ec. (4.1) se tiene que:

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} \qquad V_2 = \frac{q_2}{C_2} \qquad V_3 = \frac{q_3}{C_3}$$

recurriendo al principio de la conservación de la carga se observa que en el circuito de la Fig. la carga de la placa negativa de C_1, es de la misma magnitud que la carga de la placa positiva de C_3, y por inducción eléctrica se concluye que la carga en cada condensador es la misma; así como la carga del condensador equivalente, esto es:



Condensadores en serie.

y combinando las Ecs. (4.1) y (4.8) se tiene que:

$$\frac{q_e}{C_e} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3}$$

y como todas las cargas son iguales, entonces:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Para un arreglo de N condensadores en serie siguiendo el mismo método se obtiene:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \tag{4.9}$$

La capacitancia equivalente de un arreglo en serie será menor que cualquiera de las capacitancias que forman el arreglo, así como en un arreglo de capacitancias en paralelo la capacitancia equivalente, siempre será mayor que cualquiera de las capacitancias del arreglo.

4.5. Energía almacenada por un condensador

En la sección 5.1 al conectar los conductores a la fuente fem, ésta realiza un trabajo al llevar carga de un conductor a otro; sí se desea llevar un diferencial de carga dq de un conductor a otro, entonces la fuente tiene que realizar un diferencial de trabajo dW , es decir:

$$dW = V\ dq$$

de la Ec. (5.1) se tiene:

$$dW = \frac{q}{C}\,dq$$

la cantidad de trabajo que tiene que realizar la fuente para llevar una carga total q y la carga inicial de los conductores es cero, entonces:

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q}{C}\,dq = \frac{q^2}{2C} \qquad (4.10)$$

esta ecuación también se puede escribir en función de la diferencia de potencial entre los conductores a partir de la Ec. 5.1, esto es:

$$W = \tfrac{1}{2}CV^2 \qquad (4.11)$$

al realizar la fuente el trabajo de llevar carga de un conductor a otro se establece un campo eléctrico entre éstos y por consiguiente se almacena energía potencial eléctrica que es equivalente al trabajo realizado por la fuente.

$$W_E \equiv U_E = \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \tfrac{1}{2}\,CV^2 \qquad (4.12)$$

Lo más razonable es que esta energía esté almacenada en el campo eléctrico y por consiguiente es necesario introducir el concepto de densidad de energía del campo eléctrico y para obtenerla en forma sencilla se considera un condensador de placas paralelas despreciando las distorsiones del campo-en los bordes de las placas, es decir, que el campo eléctrico es uniforme y constante entre las placas. La densidad de energía se define como la energía potencial eléctrica entre el volumen, esto es:

$$u_E = \frac{W_E}{Ad} = \frac{\tfrac{1}{2}\,CV^2}{Ad}$$

donde (A d) es el volumen entre las placas del condensador y sustituyendo la capacitancia del condensador de placas paralelas:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

en la expresión anterior se tiene:

$$u_E = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2$$

donde *V/d* es la intensidad del campo eléctrico de la Ec. (3.2), de tal forma que la densidad de energía eléctrica u_E se expresa como:

$$u_E = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2 \tag{4.13}$$

aunque esta expresión se derivó para un condensador de placas paralelas, es una ecuación general que se aplica en cualquier caso; es decir que en cualquier región del espacio en el vacío, hay una cantidad de energía almacenada por unidad de volumen cuando existe un campo eléctrico E en esa región.

Para regiones con dieléctricos la densidad de energía eléctrica se expresa por:

$$u_E = \tfrac{1}{2}\, K\, \varepsilon_0\, E^2 \tag{4.14}$$

A partir de la Ec. (4.6).

Comentario:

En general la densidad de energía eléctrica se define como

$$u_E = \frac{dW_E}{d\upsilon}$$

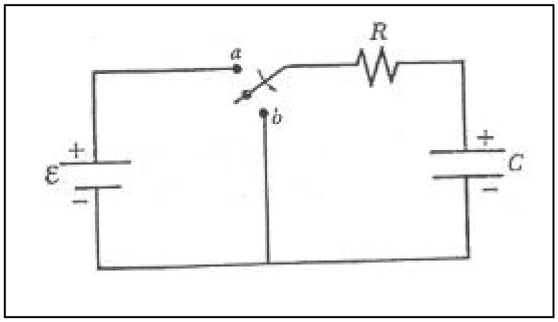
De donde se desprende que la energía eléctrica u_E (energía eléctrica W_E por unida de volumen υ) queda determinada a través de la siguiente ecuación

$$W_E = \iiint u_E\, d\upsilon$$

Si ocurre que u_E es constante, entonces se obtiene $W_E = u_E \upsilon$

4.6. Circuitos RC

Hasta ahora hemos estudiado circuitos con corrientes estables, es decir, corrientes que no cambian con el tiempo, en esta sección vamos a estudiar circuitos simples que tengan resistencias y condensadores para obtener corrientes variables en el tiempo. En la Fig. un condensador y una resistencia están conectados en serie a una fuente fem ε. Si inicialmente el interruptor está abierto la carga en el condensador es cero, es decir, que no existe ningún voltaje en el condensador.



Al pasar el interruptor al punto *a*, fluye una carga en el sentido de las manecillas del reloj, de tal forma que el condensador se empieza a cargar produciéndose una diferencia de potencial en el condensador que tiende a ser de igual magnitud al de la fuente a medida que el tiempo transcurre y el flujo de carga tiende a cero. Usando el teorema de la trayectoria podemos obtener una expresión de cómo varía la diferencia de potencial del condensador en función del tiempo, siguiendo una trayectoria en la dirección de las manecillas del reloj tenemos que:

$$\varepsilon - IR - V_c = 0 \qquad (4.15\ a)$$

donde el voltaje lo podemos expresar en función de la carga y la corriente de acuerdo a las ecuaciones (3.2) y (4.1) entonces, la Ec. (4.15 *a)*, la podemos expresar como:

$$R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} - \varepsilon = 0 \qquad (4.15\ b)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden, la cual podemos resolver tomando como condiciones del circuito *RC* que para $t = 0$, $q = 0$ y para un tiempo *t* en el que el interruptor está en la posición *"a"*, el condensador adquiere una carga *q*. Resolviendo la Ec. (4.15) *b*:

$$dq = \frac{\varepsilon C - q}{RC}\,dt$$

de donde:

$$\frac{dq}{\varepsilon C - q} = \frac{1}{RC}\,dt$$

integrando:

$$\int_0^a \frac{dq}{\varepsilon C - q} = \frac{1}{RC}\int dt$$

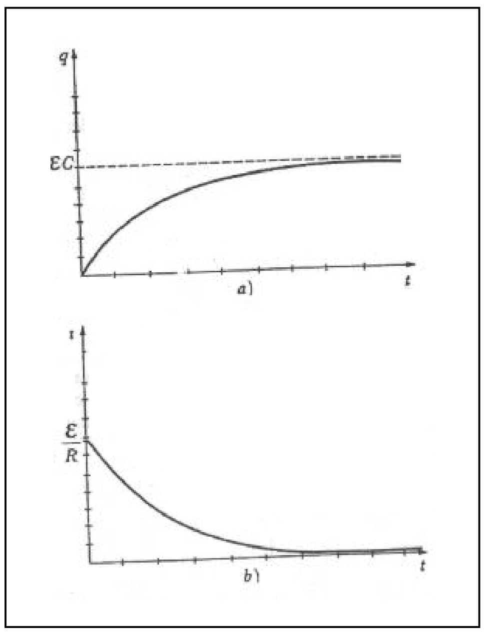
se obtiene que:

$$Ln\,(\varepsilon C - q)\Big]_0^a = -\frac{1}{RC}\,t\Big]_0^t$$

evaluando y despejando q se obtiene la expresión que nos da la carga almacenada en el condensador en un tiempo t, esto es:

$$q = \varepsilon \; c \; (1 - e^{-t/RC}) \tag{4.16}$$

al analizar la ecuación (4.16) se ve que para un tiempo t = 0, o sea antes de conectar el interruptor en el punto a de la figura anterior, la carga en el condensador es cero, si el interruptor permanece indefinidamente conectado, entonces $t \to \infty$ y la carga almacenada tiende a εC; en la Fig. siguiente (*a)*, se puede ver la variación de la carga con respecto al tiempo que es la representación gráfica de la Ec. anterior. Si deseamos obtener la razón de flujo de carga por unidad de tiempo o corriente que circula en el circuito, si se deriva (5.16) con respecto al tiempo se obtiene:



$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-t/RC} \tag{4.17}$$

Se observa en Ec. (5.17) que la máxima corriente se obtiene en el preciso momento en el cual el circuito RC se conecta a la fuente fem o sea para t = 0, $I = \varepsilon / R$.

Si el interruptor permanece por un largo tiempo en esa posición, es decir, que $t \to \infty$ entonces, $I \to 0$ que lo podemos ver al graficar la ecuación (45.17), Fig. *b*.

El producto RC que se encuentra en el exponente de las ecuaciones (4.16) y (4.17) tiene unidades de tiempo ya que el exponente no debe tener unidades, este producto RC se conoce como constante de tiempo capacitiva (comúnmente se representa por τ_c), y nos determina la razón con la cual el condensador se carga.

Si el interruptor ha permanecido por un largo periodo de tiempo ($t >> \tau_c$) conectado en el punto a y se cambia al punto b. entonces, tendríamos que en el circuito RC el condensador actúa como fuente corriente circula en la dirección opuesta a las manecillas de] reloj; cando el teorema de la trayectoria, tenemos que:

$$\frac{q}{C} + IR = 0$$

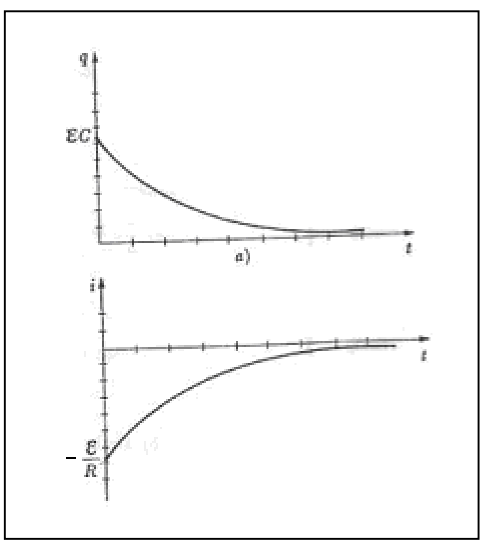
con la Ec. 3.2 tenemos:

$$\frac{dq}{dt} = - \frac{q}{RC}$$

Integrando la Ec. 4.18 b y considerando que para t = 0 el condensador almacena una carga εC y para un tiempo t la carga es q obtenemos que:

$$q = \varepsilon\, C\, e^{-t/RC}$$

donde podemos ver que si el interruptor permanece indefinidamente conectado la carga en el condensador tiende a cero, así como también se comprueba que para un tiempo cero la carga inicial en el condensador es εC (Fig. a). Si se desea saber el voltaje de la fuente se divide la carga entre la capacitancia.



La corriente en el circuito se puede obtener al derivar la Ec. 4.19 con respecto al tiempo esto es:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{\varepsilon}{R}\, e^{-t/RC}$$

de esta ecuación observamos que la máxima corriente la tenemos para $t = 0$ y es $-\varepsilon / R$; para $t >> RC$ la corriente tiende a cero como lo podemos apreciar en la gráfica de la Fig. *b*.

4.7. Problemas resueltos

Problema 4.1

Calcule el radio de un cascarón esférico para que tenga la capacidad de 1 Farad.

Solución:

de la ecuación (4.1) se tiene:

$$C = q / V$$

dado que

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

como el campo es $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$, sustituyendo e integrando, se encuentra

$$V = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0\, r}$$

Luego $$C = \frac{q}{V} = 4\pi\,\varepsilon_0\, r = 1[\mathrm{F}]$$

y despejando

$$r = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} = 9\times 10^{9} \ [\mathrm{m}].$$

El resultado anterior muestra que el farad es una unidad extremadamente grande y por consiguiente en la práctica es necesario usar submúltiplos.

Problema 4.2

Determine la capacidad de un **condensador de caras o placas paralelas.**

Solución:

Según la definición de capacidad $C = \dfrac{q}{V}$

En esta caso $V = Ed$ y $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{\varepsilon_0 A}$, entonces

$$V = Ed = \frac{q\,d}{\varepsilon_0 A}$$

Reemplazando del valor del potencial en la ecuación de la capacidad, se encuentra

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\dfrac{q\,d}{\varepsilon_0 A}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Luego

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Problema 4.3

Determine la capacidad de un **condensador esférico**.

Solución:

Un condensador esférico está formado por dos cascarones esféricos metálicos concéntricos de radios: a el interior y cargado con $+q$, y radio b el exterior cargado con $-q$.

Utilizando la expresión $C = \dfrac{q}{V}$

la diferencia de potencial entre los cascarones a partir de $V_{ba} = -\int_b^a E dr$

Dado que es campo entre los cascarones esféricos es $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$, se tiene

$$V_{ba} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2}$$

Integrando, se encuentra

$$V_{ba} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Sustituyendo en la ecuación para la capacidad, se obtiene

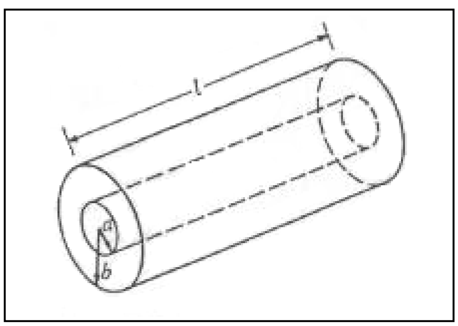
$$C = \frac{q}{V_{ba}} = \frac{q}{\dfrac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}$$

luego

$$C = 4\pi\,\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

Problema 4.4

Un **condensador cilíndrico** consiste en dos cascarones cilíndricos coaxiales de radios *a* y *b* respectivamente y longitud *l* (Fig.), calcular su capacitancia despreciando las irregularidades en los extremos.



Solución:

De (4.1): $C = q/V$

de (2.3) para el potencial tenemos que

$$V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

donde *E* entre los cascarones se puede obtener mediante la Ley de Gauss; esto es

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

entonces $$E(2\pi r l) = q/\varepsilon_0$$
y
$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

Sustituyendo en la Ec. (2.3) para obtener el potencial

$$V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r l}$$

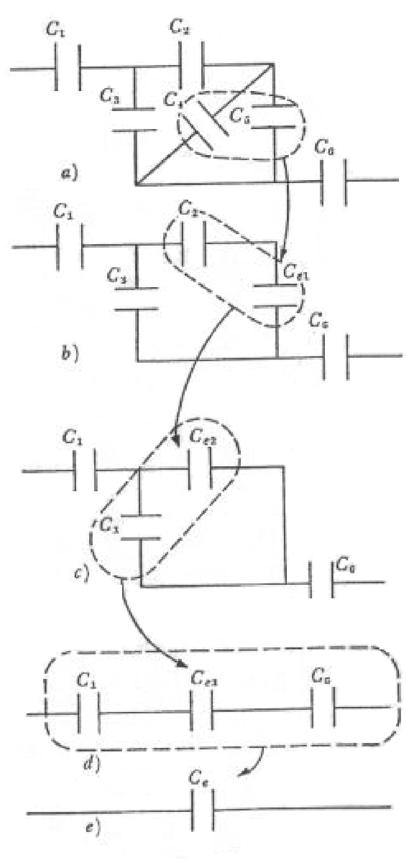
integrando y evaluando

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} Ln\, r\Big]_a^b = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} Ln\frac{b}{a}$$

Sustituyendo en la Ec. (4.1) para obtener la capacitancia $C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{Ln\, b/a}$

Problema 4.5

Calcular la capacitancia equivalente del arreglo de condensadores de la Fig. *a*, donde $C_1 = 1\,\mu F$,$C_2 = 4\,\mu F$, $C_3 = 1\,\mu F$, $C_4 = 3\,\mu F$, $C_5 = 1\,\mu F$ y $C_6 = 3/2\,\mu F$.



Solución:

De la parte *a)* de la figura vemos que los condensadores encerrados en el lazo están en paralelo, entonces de la Ec. (4.7), la capacitancia equivalente de estos es

$$C_{e1} = C_4 + C_5 = 3\,\mu F + 1\,\mu F = 4\,\mu F$$

A su vez ésta está en serie con la capacitancia de $4\,\mu F$ como se muestra en la parte *b);* entonces aplicamos la Ec. (4.9) y obtenemos que

$$\frac{1}{C_{e2}} = \frac{1}{C_{e1}} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\,\mu F} + \frac{1}{4\,\mu F} = \frac{2}{4\,\mu F} = \frac{1}{2\,\mu F} \Rightarrow C_{e2} = 2\,\mu F.$$

En la parte *c)* vemos que C_{e2}, está en paralelo con C_3, encerramos ambos en el lazo, entonces

$$C_{e3} = C_{e2} + C_3 = 3\,\mu F$$

Por último, en la parte *d)* vemos que los tres condensadores están en serie, entonces

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_{e3}} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_6} = \frac{6}{3\,\mu F} = \frac{2}{1\,\mu F}$$

de dónde

$$C_e = \tfrac{1}{2}[\mu F].$$

Problema 4.6

En un **condensador de placas paralelas se colocan 3 materiales dieléctricos distintos** como se muestra en la Fig. *a*. Calcule la capacitancia de este condensador.

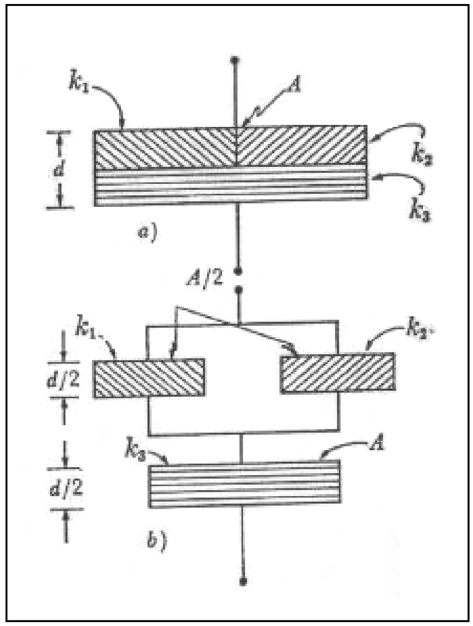
Solución:

Un arreglo lógico equivalente de este condensador es el mostrado en la parte *b* de la figura; de la Ec. (4.6) tenemos que

$$C_1 = \frac{k_1\,\varepsilon_0 A}{d} \qquad C_2 = \frac{k_2\,\varepsilon_0 A}{d} \qquad C_3 = \frac{k_3\,\varepsilon_0 A}{(d/2)} = \frac{2k_3\,\varepsilon_0 A}{d}$$

como C_1 y C_2 están en paralelo la combinación de éstos es su suma; entonces

$$C_{e(1,2)} = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\,(k_1 + k_2)$$



y éste a su vez está en serie con C_3, entonces C_e, la capacitancia equivalente, está dada por

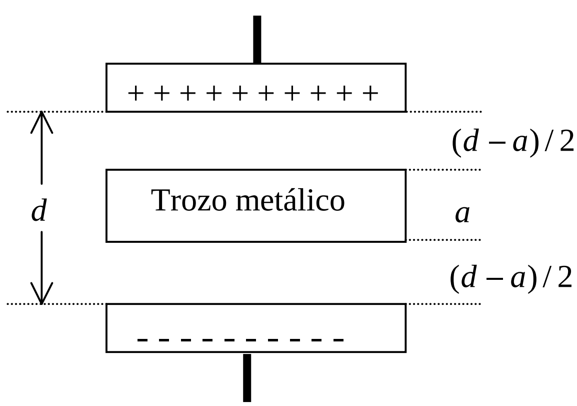
$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_{e(1,2)}} + \frac{1}{C_3} = \frac{d}{\varepsilon_0 A(k_1 + k_2)} + \frac{d}{2k_3 \varepsilon_0 A}$$

de donde resulta

$$C_e = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{2k_3 (k_1 + k_2)}{k_1 + k_2 + 2k_3}\right)$$

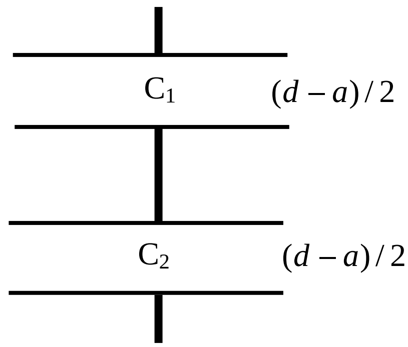
Problema 4.7

Un condensador de caras paralelas tiene una separación d y una sección de área A. Un trozo metálico descargado de espesor a se introduce en la parte media entre las placas. Determine la capacidad del sistema



Solución:

El sistema de la figura anterior es equivalente a dos condensadores conectados en serie, cada uno con separación de $(d.-a)/2$



Dado que los condensadores están en serie, se tiene que la capacidad equivalente es:

$$\frac{1}{C_E}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

Utilizando el resultado del problema 4.2. se tiene:

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 A}{(d-a)/2} \quad \text{y} \quad C_2=\frac{\varepsilon_0 A}{(d-a)/2} \quad \Rightarrow \quad C_1=C_2$$

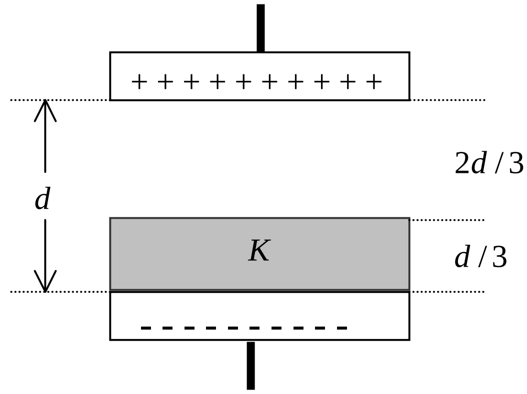
Entonces

$$\frac{1}{C_E}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}=\frac{2}{C_1} \quad \Rightarrow$$

$$C_E=C_1/2\equiv\frac{\varepsilon_0 A}{(d-a)}$$

Problema 4.8

Considere un condensador de placas paralelas con una separación d, que tiene una capacidad $C_0=\varepsilon_0 A/d$ cuando se encuentra sin dieléctrico. Determine la capacidad cuando se introduce un material dieléctrico de constante dieléctrica K y espesor $d/3$ entre las placas.



Solución:

El sistema de la figura anterior es equivalente a dos condensadores conectados en serie, uno al vació C_1, con una separación de $2d/3$, y el otro (el inferior) C_2 con dieléctrico, y con una separación de $d/3$

Dado que los condensadores están en serie, se tiene que la capacidad equivalente es

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Utilizando el resultado del problema 5.2. se tiene:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d/3} \qquad \text{y} \qquad C_2 = K\frac{\varepsilon_0 A}{d/3}$$

Entonces

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_0 A}{2d/3}} + \frac{1}{K\dfrac{\varepsilon_0 A}{d/3}} = \frac{2d}{3\varepsilon_0 A} + \frac{d}{3K\varepsilon_0 A}$$

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{3}\left(\frac{1+2K}{K}\right)\left(\frac{d}{\varepsilon_0 A}\right)$$

Luego

$$C_E = \left(\frac{3K}{1+2K}\right)\frac{\varepsilon_0 A}{d} \equiv \left(\frac{3K}{1+2K}\right)C_0$$

Problema 4.9

La diferencia de potencial entre dos cascarones esféricos metálicos concéntricos de radios $a = 1$ [m] y $b = 2$ [m] es de 9000 [V]. Calcule la energía electrostática almacenada en el espacio que existe entre los cascarones.

Solución:

Sabiendo que la diferencia de potencial entre las esferas (ver problema 4.3) es:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

despejando q:

$$q = \frac{4\pi\varepsilon_0 (ab)}{(b-a)} V$$

sustituyendo valores se tiene:

$$q = 2\times 10^{-6} \text{ [C]}$$

de la Ley de Gauss:

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

se obtiene que el campo entre las dos esferas:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

de la Ec. (4.13), la densidad de energía es:

$$u_E = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

La energía total W_E se obtiene integrando el producto de la densidad de energía por el diferencial de volumen esférico entre las esferas, esto es:

$$W_E = \iiint u_E \, d\upsilon$$

donde $$d\upsilon = r^2 dr\, sen\theta\, d\theta\, d\phi$$

En este caso, dado que u_E sólo depende de r, se tiene que

$$d\upsilon = 4\pi r^2 dr$$

luego

$$W_E = \iiint u_E \, d\upsilon = \int_a^b \frac{q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 \, dr$$

integrando y evaluando

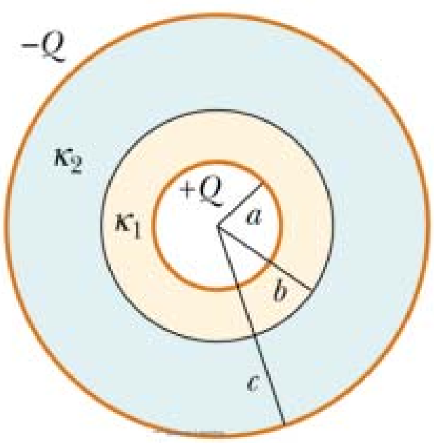
$$W_E = \int_a^b \frac{q^2}{8\pi \varepsilon_0 r^2} dr$$

sustituyendo valores

$$W_E = 9\times10^{-3} \text{ [J].}$$

Problema 4.10

Un condensador esférico está formado por dos cascarones (esféricos) de radio interior a y radio exterior c. El espacio comprendido entre estas dos superficies está completamente lleno con dieléctrico, de tal forma que entre a y b la constante dieléctrica es K_1 y entre b y c es K_2. Determine la capacidad equivalente de este sistema.



Solución:

Según resultado de problema anterior, se puede escribir que capacidad de un condensador esférico de radio interior a y radio exterior b, está dada por

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

En este caso tenemos dos condensadores con dieléctricos **conectados en serie,** entonces la capacidad del sistema se puede expresar en la forma

$$\frac{1}{C_e}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

Dado que $C_d = KC_0$, se puede escribir: $C_1 = K_1 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{ab}{b-a}$ y $C_2 = K_2 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{bc}{c-b}$

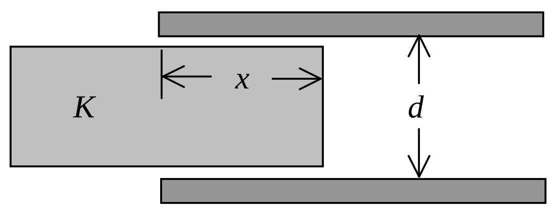
Reemplazando estos valores en la expresión anterior se encuentra

$$C_e = \frac{4\pi K_1 K_2 abc\varepsilon_0}{K_2 bc - K_1 ab + (K_1 - K_2)ac}$$

Problema 4.11

Utilizando dos placas cuadradas de lado l separadas por una distancia d se construye un condensador, en el cual se inserta en su interior un material dieléctrico de constante K, a cierta distancia x tal como se muestra en la figura, suponiendo que $d << x$ y que la diferencia de potencial entre las placas es V . Determine;

a) La capacidad equivalente
b) La energía almacenada
c) La fuerza ejercida sobre el dieléctrico



Solución:

a) El sistema anterior se puede considerar eqivalente a dos consensadores conectados en paralelo, uno con dieléctrico (C_1) y el otro al vacío (C_2), donde

$$C_1 = K\frac{\varepsilon_0 A_1}{d} = K\frac{\varepsilon_0 l\, x}{d} \quad ; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A_2}{d} = \frac{\varepsilon_0 l(l-x)}{d}$$

Dado que los condensadores están en paralelo se tiene

$$C_e = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0}{d}\left(l^2 + lx(K-1)\right)$$

b) $$W_E = \frac{1}{2} C_e V^2$$

Entonces

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2d}\left(l^2 + lx(K-1)\right)V^2$$

La fuerza está dada por $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, en este caso $\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{i}$, dado que $U = W_E$, se tiene que

$$\vec{F} = -\left(\frac{dW_E}{dx}\right)\hat{i} = \frac{\varepsilon_0 V^2 l}{2d}\left(K-1\right)$$