MEDIÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE COM UM PÊNDULO SIMPLES

O Relatório deste trabalho consiste no preenchimento dos espaços neste texto

1 – Fundamento Teórico

O pêndulo simples é constituído por um **corpo suspenso** num **fio** leve e inextensível. Quando é afastado da posição de equilíbrio e solto, o pêndulo oscila no plano vertical, em torno do ponto de fixação do fio, por acção da gravidade.

Na figura 1.1 a), o diagrama de corpo livre do corpo suspenso evidencia que o corpo está submetido a duas forças aplicadas no centro de massa: o peso, $m\vec{g}$, e a tensão do fio, $\vec{T}$.

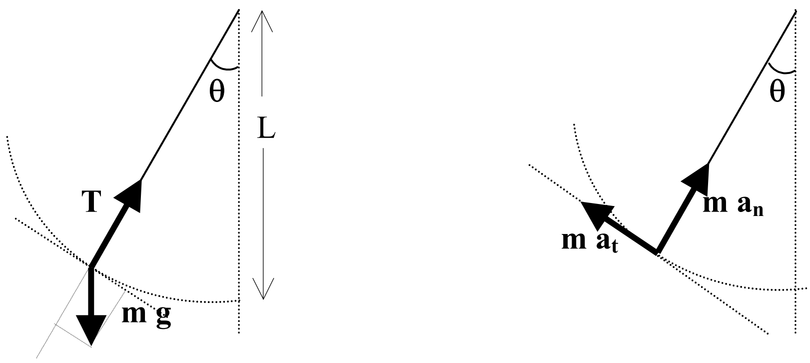

Figura 1.1 – (a) Diagrama de corpo livre do corpo suspenso, considerado como um ponto material localizado no centro de massa. **(b)** Decomposição do vector $m\vec{a}$ nas componentes tangencial e normal, quando o pêndulo se afasta da posição de equilíbrio.

Sendo $\Sigma F_t = ma_t$ a componente tangencial da equação $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, a figura 1.1 mostra que essa componente é:

$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}, \qquad \textbf{(1)}$$

onde θ é o ângulo entre a vertical e o fio.

Uma vez que o corpo suspenso executa movimento de rotação em torno do ponto de fixação do fio, a velocidade instantânea do seu centro de massa, v, satisfaz:

$$v = \omega L, \qquad \textbf{(2)}$$

onde L é o comprimento do pêndulo e $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ é a velocidade angular do pêndulo.

Para o caso de a oscilação ter uma amplitude pequena, de forma que $\sin\theta \approx \theta$ **(3)**, obtem-se, por substituição de **(2)** na equação **(1)**:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

A equação **(4)**, característica do movimento harmónico simples, é satisfeita por duas expressões particulares de θ:

$$\theta_1 = \sin\sqrt{\frac{g}{L}}t \qquad \text{e} \qquad \theta_2 = \cos\sqrt{\frac{g}{L}}t\,,$$

pelo que a solução geral da equação **(4)** é:

$$\theta = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right), \tag{5}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

A expressão **(5)** evidencia que o ângulo θ é uma função *periódica* do tempo e que θ varia com a frequência natural $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Então, o período da oscilação é:

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \tag{6}$$

sendo, assim, uma função exclusiva do comprimento do pêndulo e da aceleração da gravidade no local. O conhecimento do período e do comprimento do pêndulo permite calcular o valor da aceleração da gravidade no laboratório através de **(6)**, na medida em que sejam válidas as aproximações assumidas na dedução dessa expressão.

Se fôr necessária maior exactidão, devem utilizar-se expressões do período que têm em conta certos factores que não foram considerados na dedução de **(6)**:

a) Quando não é válida a aproximação referida em **(3)**, o período passa a depender da amplitude máxima, θ_0, da oscilação, através da expressão:

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{3^2}{4^2}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ldots\right]. \tag{7}$$

b) Tendo em conta a força de impulsão exercida pelo ar, o período do pêndulo passar a ter a expressão:

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho_{ar}}{\rho_{pêndulo}}\right) \tag{8}$$

em que ρ é a densidade.

c) Se a massa do fio de suspensão, m_f, não fôr desprezável em relação à massa do corpo suspenso, m_c, vem:

$$T = T_0\left(1 - \frac{m_f}{12m_c}\right). \tag{9}$$

d) Para pequenas oscilações, se fôr tido em conta o seu amortecimento, obtem-se:

$$T = T_0\left[1 - \left(\frac{T_0}{4\pi\tau}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{10}$$

em que τ é o tempo necessário para que a amplitude se reduza a $1/e$ do seu valor inicial (tempo de relaxação).

2 – Procedimento experimental

2.1 - *Construa o pêndulo utilizando o fio mais curto. Determine cuidadosamente o comprimento, L, do pêndulo.*

2.2 – *Desloque o pêndulo da posição de equilíbrio e meça o tempo necessário para realizar 10 oscilações. Repita esta medida 5 vezes. Determine o valor médio do período do pêndulo, T, e o respectivo erro estatístico, ΔT, tomando para este último a média do módulo dos desvios:* $\Delta T = \frac{1}{n}\Sigma\left|T_i - T\right|$.

*Repita as instruções **2.1** e **2.2**, utilizando os restantes fios.*

2.1 – <u>Determinação do comprimento de cada pêndulo</u>

Definição rigorosa do comprimento do pêndulo, L: O comprimento do pêndulo , L, é a

distância do ………………………………..……..………..……………………………………………….

até ao ……...………………..……………………………………………………………………………..

Comprimentos medidos directamente, usados para a determinação de L**:**

Símbolo	Nome	Definição (explicando como foi feita a medida)
l_f	Comprimento do fio	Distância do ponto de fixação do fio no suporte até ao ponto de fixação do fio à argola do corpo, medida com o corpo pendente na vertical.

Desenho do pêndulo mostrando o feitio do corpo suspenso e assinalando o comprimento do pêndulo, L, e ainda os comprimentos medidos directamente (l_f, etc) designados pelos símbolos da lista anterior:

Tabela 2.1.1 – Comprimentos medidos directamente (comprimentos l_f, etc designados pelos símbolos da lista anterior)**:**

	$l_f \pm \Delta l_f$ m	$\pm\Delta$ m	$\pm\Delta$ m	$\pm\Delta$ m
1º pênd.	$\pm$			
2º pênd.	$\pm$			
3º pênd.	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$
4º pênd.	$\pm$			
5º pênd.	$\pm$			

Justificação do valor atribuído a Δl_f :

O erro de <u>leitura</u> na medição de l_f foi ….………. m porque o instrumento usado nesta medida foi uma ………………… com a qual podíamos medir a distância mínima de …………… m.

O erro <u>total</u> na medição de l_f foi Δl_f = ……………... m porque.. ……………………………………………………………………………………………………

Justificação do valor atribuído a Δ… :

O erro de <u>leitura</u> na medição de …..... foi …..……….. m porque o instrumento usado nesta medida foi uma ………………………… com a qual podíamos medir a distância mínima de …………… m.

O erro <u>total</u> na medição de …..... foi Δ.... = …………… m porque...…..........

……………………………………………………………………………………………………

Justificação do valor atribuído a Δ… :

O erro de <u>leitura</u> na medição de …..... foi …..……….. m porque o instrumento usado nesta medida foi uma ………………………… com a qual podíamos medir a distância mínima de …………… m.

O erro <u>total</u> na medição de …..... foi Δ.... = …………… m porque...…..........

……………………………………………………………………………………………………

Expressão do comprimento do pêndulo, L**,** em função dos comprimentos directamente medidos (l_f, etc)**:**

$L =$

Expressão do erro ΔL que afecta o comprimento do pêndulo, em função dos erros dos comprimentos directamente medidos (Δl_f, etc)**:**

$\Delta L =$

Tabela 2.1.2 - Comprimento medido para cada pêndulo:

	L m	ΔL m
1º pêndulo		
2º pêndulo		
3º pêndulo		
4º pêndulo		
5º pêndulo		

2.2 – <u>Determinação do período de cada pêndulo</u>

Tabela 2.2 – Tempos medidos para 10 períodos (10 T_i) e para o período (T) de cada pêndulo:

	1º pênd.	**2º pênd.**	**3º pênd.**	**4º pênd.**	**5º pênd.**
10 T_1 s					
10 T_2 s					
10 T_3 s					
10 T_4 s					
10 T_5 s					
T s					
ΔT s					

3 - Cálculo da aceleração da gravidade no Laboratório

3.1 *- Determine a relação experimental entre $4\pi^2 L$ e T^2, através da equação da recta que melhor se ajusta aos valores encontrados para estas grandezas. Disponha os resultados num gráfico.*

3.2 *- Relacione a expressão calculada em **3.1** com a expressão teórica **(6)**, para determinar o valor **g ± Δg** da aceleração da gravidade no Laboratório.*

3.3 *- Atribua aos fios dos 5 pêndulos a mesma massa, m_f, do fio mais comprido e utilize as expressões teóricas **(9)** e **(6)** para calcular **g ± Δg**. Compare com o resultado obtido em **3.2**. Daí, conclua se teria valido a pena não desprezar a massa dos vários fios pendulares para obter um valor de **g** mais exacto.*

3.1 – <u>Determinação da relação experimental entre $4\pi^2$L e T^2</u>

Expressão do erro $\Delta(4\pi^2 L)$ em função de ΔL, calculada através da propagação de erros:

$$\Delta(4\pi^2 L) =$$

Expressão do erro $\Delta(T^2)$ em função de ΔT, calculada através da propagação de erros:

$$\Delta(T^2) =$$

Tabela 3.1 – Valores de $4\pi^2$L e T^2:

	$y = 4\pi^2 L$ m	$\Delta(4\pi^2 L)$ m	$x = T^2$ s^2	$\Delta(T^2)$ s^2
1º pênd.				
2º pênd.				
3º pênd.				
4º pênd.				
5º pênd.				

Cálculo da equação da recta $y = ax + b$ que melhor se ajusta aos pontos experimentais (x, y), usando o método dos desvios quadráticos mínimos:

$$a = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum(x_i)\sum(y_i)}{n\sum(x_i)^2 - (\sum x_i)^2} \quad , \qquad b = \frac{\sum(y_i) - a\sum(x_i)}{n}$$

e sendo os erros estatísticos associados aos parâmetros a e b :

$$\Delta a = \sqrt{\frac{n}{(n-2)} \cdot \frac{\sum(y_i - ax_i - b)^2}{n\sum(x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \quad , \qquad \Delta b = \Delta a\sqrt{\frac{\sum(x_i)^2}{n}}$$

Resultados obtidos:

$a \pm \Delta a = (............. \pm ....)$ …..

$b \pm \Delta b = (............. \pm ....)$ …..

Relação experimental entre $4\pi^2 L$ e T^2, em unidades do Sistema Internacional**:**

$4\pi^2$L = …………. T^2 + ………

Gráfico 3.1 - Valores experimentais obtidos para $4\pi^2 L$ (em ordenadas) em função dos valores experimentais obtidos para T^2 (em abcissas). Neste gráfico é traçada a recta que foi obtida pelo método dos desvios quadráticos mínimos. Este gráfico deve ser inserido como página 6A.

3.2 – Resultado obtido para a aceleração da gravidade no Laboratório:

Significado físico do parâmetro a, justificado por comparação da relação teórica (6) com a relação experimental entre $4\pi^2 L$ e T^2:

Discussão do valor obtido para o parâmetro b, comparando o valor teórico de b na relação (6) com o resultado experimental $b \pm \Delta b$:

Resultado da nossa experiência:
Aceleração da gravidade medida no Laboratório, com base no significado físico de a deduzido acima, foi:

g = (……… ± …..) …..

(este resultado final deve apresentar apenas os algarismos e as casas decimais significativas)

3.3 – Influência da massa do fio na medida da aceleração da gravidade

Designe a massa do fio pendular por m_f e a massa do corpo suspenso por m_c.

Atribua aos 5 fios pendulares a mesma massa, m_f, medida para o fio mais longo.

Massas medidas:

$$m_f = (................\pm...........).........$$

$$m_c = (................\pm..........)..........$$

Expressão de g, em função de m_f, m_c e do parâmetro $a = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$, calculada através das expressões teóricas **(6)** e **(9)**:

$$g =$$

Expressão do erro Δg, em função dos erros Δm_f, Δm_c e Δa, calculada através da propagação de erros:

$$\Delta g =$$

Aceleração da gravidade no Laboratório, calculada para uma massa dos fios pendulares superior à real –visto ter-se admitindo que os 5 fios tinham a massa do fio mais longo – e utilizando o valor $a \pm \Delta a = (.............\pm.........)$ ….. **:**

g = (……….. ± ..….) …….

Conclusão acerca da utilidade de ter em conta a massa dos fios pendulares na medição que realizou, com base na comparação entre os resultados obtidos para **g** em **3.3** e em **3.2:**

4 – Conclusões

4.1 - *Compare o resultado obtido em* ***3.2****, com o valor:*

$$g = (9{,}8010814 \pm 0{,}0000001)\ m.s^{-2}$$

obtido experimentalmente para a aceleração da gravidade em Lisboa, ao nível do mar. Diga se há concordância ou discrepância entre os dois resultados, justificando.
4.2 - *Discuta o resultado* ***3.2*** *obtido na experiência que realizou.*
4.3 - *Apresente sugestões de soluções concretas para a realização desta experiência com melhores resultados.*

4.1 – Comparação com o resultado de outra experiência:

4.2 – Discussão do resultado da nossa experiência:

4.3 – Sugestões:

Data - …./…./…….

Nº - ……… **Nome -** ……………………………..……… **Assinatura -** ……………..
Nº - ……… **Nome -** ………………………………..… **Assinatura -** ……………..
Nº - ……… **Nome -** ………………………………..… **Assinatura -** ……………..