Universidade Federal de Roraima
Departamento de Ciência da Computação
Disciplina: Análise de Algoritmos
Aluno: Philip Mahama Akpanyi

Relatório de Trabalho Final – Caixeiro Viajante

Introdução

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é um problema que tenta determinar a menor rota para percorrer uma série de cidades (visitando uma única vez cada uma delas), retornando à cidade de origem. Ele é um problema de otimização NP-difícil (isto é, não existem algoritmos com limitação polinomial capazes de resolvê-lo) inspirado na necessidade dos vendedores em realizar entregas em diversos locais (as cidades) percorrendo o menor caminho possível, reduzindo o tempo necessário para a viagem e os possíveis custos com transporte e combustível.

O problema foi formulado pela primeira vez em 1930 e é um dos problemas de otimização mais intensamente estudados. É usado como referência para muitos métodos de otimização. Mesmo que o problema seja computacionalmente difícil, muitas heurísticas e algoritmos exatos são conhecidos, de modo que algumas instâncias com dezenas de milhares de cidades podem ser resolvidas completamente e até mesmo problemas com milhões de cidades podem ser aproximados em uma pequena fração de 1%.

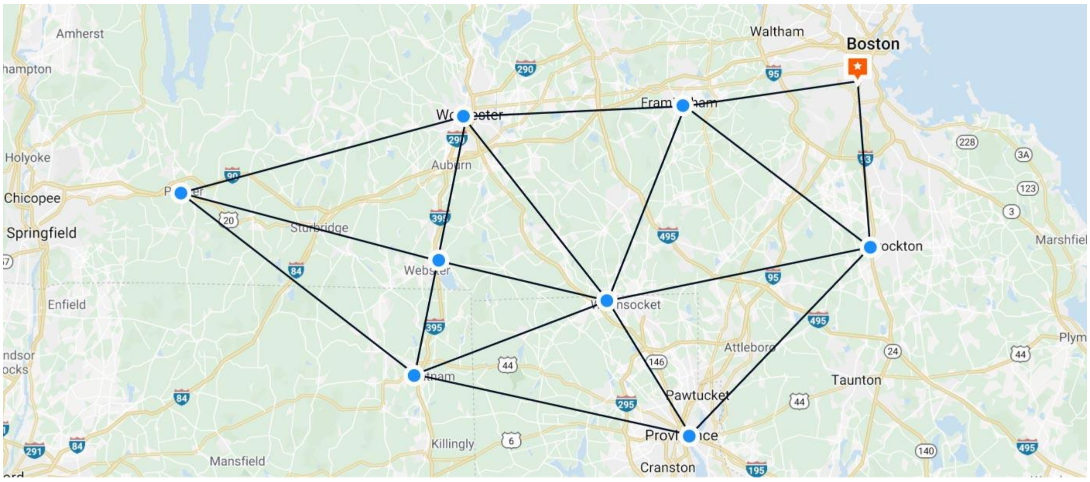

Fig. 1 Exemplo de rotas entre cidades

Em geral, o TSP inclui dois tipos diferentes, o TSP simétrico e o TSP assimétrico. Na forma simétrica conhecida como STSP, há apenas um caminho entre duas cidades adjacentes, ou seja, a distância entre as cidades A e B é igual à distância entre as cidades B e A (Fig. 1.1). Mas no ATSP (Asymmetric TSP) não existe tal simetria e é possível ter dois custos ou distâncias diferentes entre duas cidades. Portanto, o número de passeios no ATSP e STSP em *n* vértices (cidades) é *(n-1)!* e *(n-1)! / 2*, respectivamente. Observe que os gráficos que representam esses TSPs são gráficos completos.

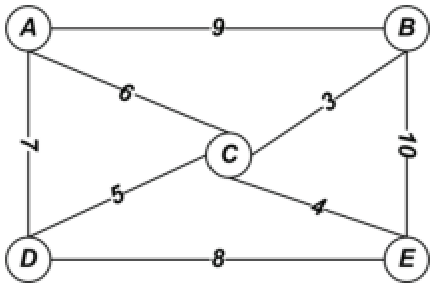

Fig. 1.1 Representação em grafo de rotas entre cidades

Histórico

A origem do nome "problema do caixeiro viajante" é desconhecida. Não parece haver nenhum documento que comprove o autor do nome do problema. Merril Flood, da Universidade de Princeton, um dos pesquisadores mais destacados nas primeiras aplicações do problema, no entanto, fez o seguinte comentário: "I don´t know who coined the peppier name "Traveling Salesman Problem" for Whitney's problem,.." (*Não sei quem inventou o nome mais vigoroso de "Problema do caixeiro viajante" para o problema de Whitney*)

Nos anos 1800, problemas relacionados ao PCV começaram a ser desenvolvidos por dois matemáticos: o escocês William Rowan Hamilton e o britânico Thomas Penyngton Kerkman. A forma geral da PCV parece ter sido estudada pela primeira vez por matemáticos na década de 1930 em Harvard e em Viena. O problema foi posteriormente estudado por Hassler Whitney e Merril Flood em Princeton. Na década de 1950, o nome do problema se tornou conhecido mundialmente.

Formulação do problema do Caixeiro Viajante

Um caixeiro viajante deve visitar *n* cidades diferentes iniciando e terminando o seu percurso em uma mesma cidade, não importando a ordem na qual as cidades são visitadas. Considerando que todas as *n* cidades são interligadas, o problema do caixeiro viajante consiste em se determinar um caminho que torna mínima a viagem total. Considerando que o caixeiro parte de uma cidade determinada, a próxima escolhida deve ser retirada do conjunto das $(n - 1)$ cidades restantes. A seguinte, obviamente, do conjunto das $(n - 2)$ cidades restantes. Dessa forma, através de um raciocínio combinatorial simples e clássico, concluí-se que o conjunto de rotas possíveis, do qual o caixeiro deve escolher a menor, possui cardinalidade dada por: $(n - 1) * (n - 2) * (n - 3) * ... * 2 * 1$ ou seja, o caixeiro deve escolher sua menor rota de um conjunto de $(n - 1)!$ Possibilidades. Por exemplo, para um pequeno problema com apenas 20 cidades, o número de rotas possíveis seria 19!, ou seja, 121645100408832000 caminhos possíveis. Se for considerado que a cidade inicial (e final) também deva ser aleatório, o número de rotas possíveis, para *n* cidades, passa a ser dado por n!.

O método de resolução utilizado

A premissa básica do PCV é a definição uma rota, com menor custo, para contemplar uma visita a todas as cidades e retorno a cidade de partida. De acordo com a descrição acima, uma estratégia seria a geração de cada uma das n! rotas possíveis e, calcular o comprimento total das viagens entre cidades sucessivas de cada rota e verificar qual rota possui o menor comprimento. Por se tratar de um problema NPCompleto, o número de rotas cresce exponencialmente à medida que aumenta o número de cidades visitadas, o que tornaria inviável encontrar uma solução ótima em um espaço de tempo adequado.

Uma abordagem do problema é tentar desenvolver um processo heurístico de solução, ou seja, um processo que usualmente funciona e que se caracteriza por sair buscando soluções cada vez melhores até, se houver sucesso, achar a melhor de todas.

Embora não seja garantido encontrar a melhor de todas as soluções, é possível apresentar uma solução aceitável em função do tempo disponível.

Algoritmo 2 Ótimo(vertice v, nivel)

```
Entrada: um vértice v e o nível de profundidade
Saída: Um ciclo Hamiltoniano [c1, ..., cn] de custo mínimo
v ← explorado
ciclo[nivel] ← v
if nivel = n then
  comprimento ← custo(ciclo)
  if comprimento < minimo then
    minimo ← comprimento
    melhorciclo ← ciclo
  end if
end if
for i = 1 até n do
  if vértice i é inexplorado then
    Ótimo(i, nivel+1)
    vértice i ← inexplorado
  end if
end for
```

Fig. 2 Algoritmo de caixeiro viajante

Complexidade

O conjunto de rotas possíveis é o resultado de todas as combinações possíveis e pode ser calculado por (n −)!1 , sendo n o número de nós.

Este problema pertence à classe de problemas conhecida por NP-Hard, isto é, não existem algoritmos com limitação polinomial capazes de resolvê-lo. Assim a quantidade de passos de um algoritmo para solucioná-lo otimamente, não pode ser dada por uma função polinomial. Logo, apenas os problemas de pequeno porte podem ser solucionados de forma ótima. Problemas de grande porte tornam-se inviáveis se forem utilizados métodos exatos, em virtude do esforço computacional que seria exigido para resolvê-los. Muitas abordagens de algoritmos heurísticos, que fornecem soluções factíveis próximas da ótima, têm sido desenvolvidas para resolver os problemas NP-Hard. Estes algoritmos vêm apresentando soluções parciais e ótimas para o problema, visto que, devido ao grande número de grandezas que influenciam o processamento computacional, tais como a capacidade de carga, a velocidade, o número de veículos, o tempo e a distância, esses precisariam de uma grande capacidade computacional para apresentar soluções exatas.

Referências

1) Problema de caixeiro-viajante - https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_do_caixeiro-viajante#:~:text=O%20Problema%20do%20Caixeiro%20Viajante,retornando%20%C3%A0%20cidade%20de%20origem.
2) Fig. 1 - https://cdn.optimoroute.com/wp-content/uploads/2020/07/Traveling-salesman-problem3.jpg
3) Fig. 2 - https://homepages.dcc.ufmg.br/~nivio/cursos/pa03/tp2/tp22/img60.png
4) Aplicação de heurísticas e metaheurísticas para o problema do caixeiro viajante em um problema real de roteirização de veículos, Benevides, Paula Francis - https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/26793