EDC - 2ª prova em grupo (5 pts)

1. (1,5 pts) Encontre a solução $y(t)$ do problema de valor inicial abaixo.

$$y'' + y' - 2y = 8t^2 + 8t + 2, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -2$$

2. (1,5 pts) Considere a equação diferencial $\qquad y'' - 2xy' + 4y = 0.$

   Usando uma série de potências em torno de $x_0 = 0$, determine a relação de recorrência para os coeficientes. Escreva a solução geral $y(x)$ até pelo menos a potência x^5.

3. (2 pts) Encontre a solução $y(t)$ do problema de valor inicial abaixo.

$$y'' + 9\,y = \delta(t - \pi), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

   Calcule $y(\frac{\pi}{2})$ e $y(\frac{3\pi}{2})$.

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n, n inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n\mathrm{e}^{at}$, n inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\mathrm{e}^{at}\mathrm{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$\mathrm{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$\mathrm{senh}(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$u_c(t)$	$\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-cs}$
$u_c(t)f(t-c)$	$\mathrm{e}^{-cs}F(s)$
$(f * g)(t) = \int_o^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

EDC - 2ª Prova em grupo

① $y'' + y' - 2y = 8t^2 + 8t + 2 \qquad y(0) = 0, \; y'(0) = -2$

Equação Homogênea associada $\quad y'' + y' - 2y = 0$

$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + r - 2 = 0 \qquad \Delta = 9 \rightarrow r = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

solução geral $\quad y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$

Proposta de solução particular para a equação não homogênea.

$Y(t) = At^2 + Bt + C \rightarrow Y'(t) = 2At + B \quad , \quad Y''(t) = 2A$

$\rightarrow 2A + (2At + B) - 2(At^2 + Bt + C) = 8t^2 + 8t + 2$

$$\left.\begin{aligned} t^2 &: -2A = 8 \rightarrow A = -4 \\ t &: 2A - 2B = 8 \rightarrow B = -8 \\ 1 &: 2A + B - 2C = 2 \rightarrow C = -9 \end{aligned}\right\} \; Y(t) = -4t^2 - 8t - 9$$

Solução geral: $\quad y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} - 4t^2 - 8t - 9$

$\qquad\qquad\qquad y'(t) = c_1 e^{t} - 2c_2 e^{-2t} - 8t - 8$

$y(0) = c_1 + c_2 - 9 = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = 9$

$y'(0) = c_1 - 2c_2 - 8 = -2 \rightarrow \underline{c_1 - 2c_2 = 6} \; -$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 3c_2 = 3 \rightarrow c_2 = 1, \; c_1 = 8$

Solução do PVI: $\quad \boxed{y(t) = 8e^{t} + e^{-2t} - 4t^2 - 8t - 9}$

② $y'' - 2xy' + 4y = 0$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \; , \; y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \; , \; y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m} \underbrace{- 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{-2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$$\underbrace{(2a_2+4a_0)}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n-2)a_n\right]x^n = 0$$

$$2a_2+4a_0 = 0 \rightarrow a_2 = -2a_0$$

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - 2(n-2)a_n = 0 \qquad (n=1,2,\ldots) \rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{2(n-2)}{(n+2)(n+1)}a_n}$$

$$n=1:\quad a_3 = \frac{2(-1)}{3.2}a_1 = -\frac{1}{3}a_1$$

$$n=2:\quad a_4 = 0 \qquad (a_6 = a_8 = \ldots = 0)$$

$$n=3:\quad a_5 = \frac{2.1}{5.4}a_3 = \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{3}a_1\right) = -\frac{1}{30}a_1$$

$\Rightarrow$ solução $\boxed{y(t) = a_0(1-2x^2) + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \ldots\right)}$

③ $y'' + 9y = \delta(t-\pi)$, $\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

$$Y_{(s)} = \mathcal{L}\{y\}_{(s)} \rightarrow \left[s^2Y_{(s)} - s\underbrace{y(0)}_{=1} - \underbrace{y'(0)}_{=0}\right] + 9Y_{(s)} = e^{-\pi s}$$

$$(s^2+9)Y_{(s)} = s + e^{-\pi s} \rightarrow Y_{(s)} = \frac{s}{s^2+9} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+9}$$

$$Y_{(s)} = \frac{s}{s^2+3^2} + e^{-\pi s}\underbrace{\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}\right)} = \mathcal{L}\{\cos(3t)\}_{(s)} + e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)\}_{(s)}$$

$$F_{(s)} = \mathcal{L}\{\tfrac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)\}_{(s)} \rightarrow f(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t)$$

$$y(t) = \cos(3t) + u_\pi(t)\cdot\frac{1}{3}\underbrace{\operatorname{sen}[3(t-\pi)]}$$

$$\operatorname{sen}(3t-3\pi) = \operatorname{sen}(3t)\overbrace{\cos(3\pi)}^{=-1} - \overbrace{\operatorname{sen}(3\pi)}^{=0}\cos(3t)$$

$$= -\operatorname{sen}(3t)$$

$$\boxed{y(t) = \cos(3t) - \frac{u_\pi(t)}{3}\operatorname{sen}(3t)} \Rightarrow y(t) = \begin{cases} \cos(3t) & (t<\pi) \\ \cos(3t) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) & (t \geq \pi) \end{cases}$$

Portanto
$$\begin{cases} y(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0 \\ y(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{9\pi}{2}) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(\frac{9\pi}{2}) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$