**EDC** - 1ª prova em grupo (5 pts)

1. (2 pontos) Resolva os problemas de valor inicial a seguir.

a) $\begin{cases} x^2yy' = 3 \\ y(1) = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy' - 4y - x^5 e^x = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

2. (1 ponto) Se a dinâmica da variável população $P(t)$ é dada por

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^2 - \beta P,$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes positivas, obtenha as populações nos pontos de equilíbrio e informe se são instáveis ou estáveis.

3. (2 pontos) Encontre a solução $x(t)$ (posição) do Oscilador Harmônico Simples com massa $m > 0$, constante elástica $k > 0$, posição inicial $x_0$ e velocidade inicial $v_0$:

$$mx'' = -kx, \qquad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

---

**EDC** - 1ª prova em grupo (5 pts)

1. (2 pontos) Resolva os problemas de valor inicial a seguir.

a) $\begin{cases} x^2yy' = 3 \\ y(1) = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy' - 4y - x^5 e^x = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

2. (1 ponto) Se a dinâmica da variável população $P(t)$ é dada por

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P^2 - \beta P,$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes positivas, obtenha as populações nos pontos de equilíbrio e informe se são instáveis ou estáveis.

3. (2 pontos) Encontre a solução $x(t)$ (posição) do Oscilador Harmônico Simples com massa $m > 0$, constante elástica $k > 0$, posição inicial $x_0$ e velocidade inicial $v_0$:

$$mx'' = -kx, \qquad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

# EDC – 1ª prova em grupo

(1) a) $x^2 y y' = 3 \;,\; y(1) = -2$

$$\int y\,dy = \int \frac{3}{x^2}\,dx \rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{3}{x} + C$$

condição inicial: $\dfrac{(-2)^2}{2} = -\dfrac{3}{1} + C \Rightarrow C = 5$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{3}{x} + 5 \Rightarrow y = \pm\sqrt{10 - \frac{6}{x}} \Rightarrow \boxed{y(x) = -\sqrt{10 - \frac{6}{x}}}$$

compatível com a cond. inicial

b) $x y' - 4y - x^5 e^x = 0$

$y' - \dfrac{4}{x} y = x^4 e^x$ fator integrante $\mu(x) = e^{\int(-\frac{4}{x})dx} = e^{-4\ln|x|} = x^{-4}$

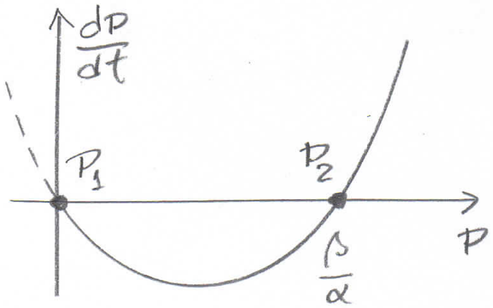
$$x^{-4} y' - 4x^{-5} y = e^x \rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{-4} y\right) = e^x \rightarrow x^{-4} y = e^x + C$$

$y(x) = x^4 (e^x + C)$ sol. geral

condição inicial: $y(1) = e + C = 0 \Rightarrow C = -e \Rightarrow \boxed{y(x) = x^4 (e^x - e)}$

(2) $\dfrac{dP}{dt} = \alpha P^2 - \beta P = \alpha P \left(P - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

Soluções de equilíbrio: $\boxed{P_1 = 0}$ e $\boxed{P_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}}$




$\dfrac{dP}{dt} = f(P)$ sistema autônomo, $f'(P) = 2\alpha P - \beta$

$$\begin{cases} f(P_1) = 0 \\ f'(P_1) = -\beta < 0 \end{cases}$$ equilíbrio <u>ESTÁVEL</u>

$$\begin{cases} f(P_2) = 0 \\ f'(P_2) = 2\alpha \dfrac{\beta}{\alpha} - \beta = \beta > 0 \end{cases}$$ equilíbrio <u>INSTÁVEL</u>

③ $m\ddot{x} = -kx \quad , \quad x(0) = x_0 \, , \; \dot{x}(0) = v_0$

$x(t) = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad mr^2 = -k$ (equação característica)

$r^2 = -\frac{k}{m} < 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ defina $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ frequência normal

Solução geral: $x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 C_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$$

Condições iniciais: $x(0) = C_1 = x_0$

$$\dot{x}(0) = \omega_0 C_2 = v_0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Portanto $\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \operatorname{sen}(\omega_0 t)} \, , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$