EDC - 3ª prova em grupo (5 pts)

1. (1,5 pontos) Calcule a série de Fourier gerada por $f(x)$ e desenhe o gráfico da função para a qual a série converge no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$:

$$f(x) = x \quad \text{para } x \in (-\pi, \pi), \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

2. (1,5 pontos) Uma barra de ferro ($\alpha^2 = 0,12\,\mathrm{cm}^2/s$) com 10 cm é aquecida uniformemente até 200 °C. Após isso, suas extremidades são submetidas a 0 °C constante. Estime a temperatura no centro da barra após 10 segundos usando apenas os dois primeiros termos não-nulos da solução

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{-(n\pi\alpha/L)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

3. Considere o problema de valores de contorno abaixo.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0 & (0 < x < 1,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

   (a) (1 ponto) Obtenha a solução estacionária $v(x)$ do problema.

   (b) (1 ponto) Separe as variáveis com $u(x,t) = X(x)T(t)$. Escreva as equações diferenciais e condições de contorno para $X(x)$ e $T(t)$, sem resolvê-las.

Fourier
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \\ a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Integrais
$$\begin{cases} \displaystyle\int x\cos(kx)\,dx = \frac{x}{k}\operatorname{sen}(kx) + \frac{1}{k^2}\cos(kx) + C \\ \displaystyle\int x\operatorname{sen}(kx)\,dx = -\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\operatorname{sen}(kx) + C \\ \displaystyle\int x^2\cos(kx)\,dx = \frac{2x}{k^2}\cos(kx) + \left(\frac{x^2}{k} - \frac{2}{k^3}\right)\operatorname{sen}(kx) + C \\ \displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{2x}{k^2}\operatorname{sen}(kx) + \left(-\frac{x^2}{k} + \frac{2}{k^3}\right)\cos(kx) + C \end{cases}$$

EDC - 3ª PROVA EM GRUPO

① $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$, $f(x+2\pi) = f(x)$ período $2\pi \Rightarrow L = \pi$

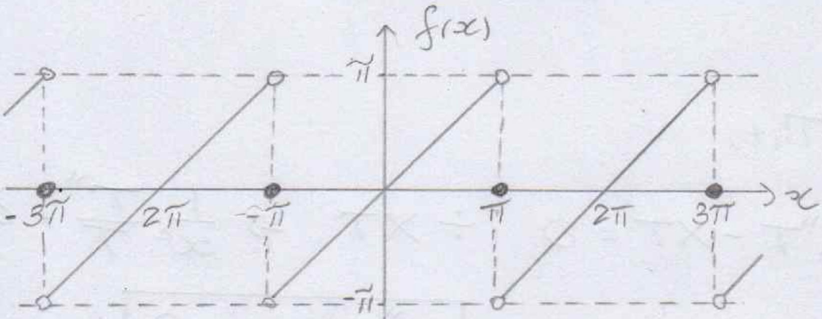
$f(x)$ ímpar $\Rightarrow a_0 = 0$, $a_n = 0 \quad \forall n$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \,\text{sen}(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\text{sen}(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\overbrace{\text{sen}(n\pi)}^{=0} + 0\right] = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

série de Fourier:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}(nx) \\ &= 2\,\text{sen}\,x - \text{sen}(2x) + \frac{2}{3}\,\text{sen}(3x) - \dots \end{aligned}}$$



Nos pontos de descontinuidade a série converge para a média dos limites laterais

② ferro $\alpha^2 = 0{,}12\ \text{cm}^2/\text{s}$, $L = 10$ cm , $u(x,0) = 200 \quad (0<x<10)$

$u(0,t) = u(10,t) = 0 \quad (\forall t>0)$

$$b_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} 200\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)dx = 40\left[-\frac{10}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{10}\right)\right]_0^{10}$$

$$= -\frac{400}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \dfrac{800}{n\pi} & n \text{ ímpar} \rightarrow n = 2K+1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{800}{\pi}\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{2K+1} e^{-(2K+1)^2 \frac{\pi^2 0{,}12}{100} t}\,\text{sen}\left[(2K+1)\frac{\pi x}{10}\right]$$

$$u(5,10) = \frac{800}{\pi}\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{2K+1} e^{-(2K+1)^2 0{,}012\pi^2}\,\text{sen}\left[(2K+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{800}{\pi} e^{-0{,}012\pi^2} - \frac{800}{3\pi} e^{-9(0{,}012\pi^2)} + \dots$$

$$\simeq 226{,}206\dots - 29{,}234\dots = \boxed{196{,}97\ ^\circ C}$$

③ $$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0 & (0<x<1,\ t>0) \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & (t>0) \end{cases}$$

a) solução estacionária $v(x)$

$$\frac{1}{x^2}\cdot 0 + v'' - v = 0 \Rightarrow v'' - v = 0 \rightarrow r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1$$

$v(0) = 0$, $v'(1) = 0$

solução geral $v(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$v'(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \\ v'(1) = c_1 e - c_2 e^{-1} = 0 \Rightarrow c_2 = e^2 c_1 \end{array}\right\} c_2 = -c_1 = e^2 c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

solução estacionária: $\boxed{v(x) \equiv 0}$

b) $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} X T'' + X'' T - XT = 0 \quad \div XT \Rightarrow \frac{1}{x^2}\frac{T''}{T} + \frac{X''}{X} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{T''}{T}}_{t} = \underbrace{x^2\left(1 - \frac{X''}{X}\right)}_{x} = \lambda \rightarrow \boxed{T'' - \lambda T = 0}$$

$$1 - \frac{X''}{X} = \frac{\lambda}{x^2} \rightarrow \frac{X''}{X} = 1 - \frac{\lambda}{x^2}$$

$$\rightarrow \boxed{X'' + \left(\frac{\lambda}{x^2} - 1\right) X = 0}$$

condições de contorno

$u(0,t) = X(0)\,T(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$

$u_x(1,t) = X'(1)\,T(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \boxed{X'(1) = 0}$