EDC - 2^a prova individual - tipo B (30 pts)

1. (10 pts) Escreva a solução geral para $y'' + y' - 2y = -4t^2 + 4.$

2. (10 pts) Resolva a equação $y'' - xy' + 2y = 0$ usando uma série de potências em torno de $x_0 = 0$, escreva a relação de recorrência para os coeficientes e a solução geral até pelo menos a potência x^6. Escreva a solução para condições iniciais $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$.

3. (10 pts) Usando a transformada de Laplace, resolva o problema de valor inicial a seguir.

$$y'' + 4y = 3\mathrm{e}^{-t} - \delta(t-2), \qquad y(0) = 2, \;\; y'(0) = 0.$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n, n inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n\mathrm{e}^{at}$, n inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\mathrm{e}^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$\mathrm{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$\operatorname{senh}(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$u_c(t)$	$\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-cs}$
$u_c(t)f(t-c)$	$\mathrm{e}^{-cs}F(s)$
$(f * g)(t) = \int_o^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

EDC - 2ª prova individual - TIPO B

① $y'' + y' - 2y = -4t^2 + 4$

Equação homogênea associada: $y'' + y' - 2y = 0$ Proposta: $y(t) = e^{rt}$

$\Rightarrow r^2 + r - 2 = 0$, $\Delta = 9$, $r = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{matrix}$

Solução geral da eq. homogênea: $y_h(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$

Método dos Coeficientes Indeterminados: $Y(t) = At^2 + Bt + C$

$Y'(t) = 2At + B$, $Y''(t) = 2A$

$\Rightarrow 2A + 2At + B - 2(At^2 + Bt + C) = -4t^2 + 4$

$$\left.\begin{aligned} t^2 &: -2A = -4 \rightarrow A = 2 \\ t &: 2A - 2B = 0 \rightarrow B = A \rightarrow B = 2 \\ 1 &: 2A + B - 2C = 4 \rightarrow 6 - 2C = 4 \rightarrow C = 1 \end{aligned}\right\} Y(t) = 2t^2 + 2t + 1$$

Solução geral: $\boxed{y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} + 2t^2 + 2t + 1}$

② $y'' - xy' + 2y = 0$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}_{m = n-2} - \underbrace{x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m$$

$$(2a_2 + 2a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n-2) a_n \right] x^n = 0$$

Todos os coeficientes são nulos: $2a_2 + 2a_0 = 0 \rightarrow a_2 = -a_0$

$(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n-2) a_n = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{n-2}{(n+2)(n+1)} a_n}$ $(n \geq 1)$

Relação de recorrência

$n=1: \quad a_3 = -\frac{1}{6}a_1$

$n=2: \quad a_4 = 0$

$n=3: \quad a_5 = \frac{1}{20}a_3 = -\frac{1}{120}a_1$

$n=4: \quad a_6 = \frac{1}{15}a_4 = 0$

Solução geral até potência x^6:

$$\boxed{y(x) = a_0(1-x^2) + a_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \dots\right)}$$

Condições iniciais: $\quad y(0) = a_0 = -3 \;, \; y'(0) = a_1 = 2$

$$\boxed{y(x) = -3 + 2x + 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{60}x^5 + \dots}$$

③ $y'' + 4y = 3e^{-t} - \delta(t-2) \quad , \quad y(0) = 2 \,, \, y'(0) = 0$

$$\mathcal{L} \hookrightarrow \quad s^2 Y_{(s)} - s\overset{=2}{y(0)} - \overset{=0}{y'(0)} + 4Y_{(s)} = \frac{3}{s+1} - e^{-2s}$$

$$(s^2+4)Y_{(s)} = 2s + \frac{3}{s+1} - e^{-2s} \Rightarrow Y_{(s)} = 2\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{(s+1)(s^2+4)} - \frac{1}{s^2+4}e^{-2s}$$

$$\frac{3}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{A(s^2+4)+(Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+4)}$$

$s^2: \; A+B=0 \;\rightarrow\; B=-A \;\rightarrow\; B = -\frac{3}{5}$

$s: \; B+C=0 \;\rightarrow\; C=-B=A \;\rightarrow\; C=\frac{3}{5}$

$1: \; 4A+C=3 \;\rightarrow\; 5A=3 \;\rightarrow\; A=\frac{3}{5}$

$$\frac{3}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{3/5}{s+1} + \frac{-3/5\, s + 3/5}{s^2+4} = \frac{3}{5}\frac{1}{s+1} - \frac{3}{5}\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y_{(s)} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{7}{5}\frac{s}{s^2+4} + \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right)e^{-2s}$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{3}{5}e^{-t} + \frac{7}{5}\cos(2t) + \frac{3}{10}\operatorname{sen}(2t)\right\}_{(s)} - \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right\}_{(s)} e^{-2s}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{7}{5}\cos(2t) + \frac{3}{10}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{2}u_2(t)\operatorname{sen}[2(t-2)]}$$

Ou seja,

$$y(t) = \begin{cases} \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{7}{5}\cos(2t) + \frac{3}{10}\operatorname{sen}(2t) & (0<t<2) \\ \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{7}{5}\cos(2t) + \frac{3}{10}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}[2(t-2)] & (t \geq 2) \end{cases}$$