EDC - 1ª prova individual (30 pts)

1. $N(t)$ é número de pessoas infectadas em uma epidemia, com dinâmica dada pela equação $\dfrac{dN}{dt} = \alpha\sqrt{N}$, onde $\alpha > 0$ é constante.
   (a) (4 pts) Forneça a solução geral da equação.
   (b) (4 pts) Sabendo que no instante inicial há 100 indivíduos infectados e após 10 dias já são 400, encontre os valores das constantes e parâmetros e assim determine quando teremos 10 mil infectados.
2. (7 pts) Resolva o problema $y' + 3y = 3t^2\,\mathrm{e}^{-3t}, \quad y(0) = 2.$
3. (a) (6 pts) Resolva o problema $y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$
   (b) (2 pts) Construa o gráfico de $y(t)$ para $t \geq 0$.
4. (7 pts) Forneça a solução geral da equação $y'' + y' + \dfrac{5}{2}\,y = 0.$

EDC - 1ª prova individual (30 pts)

1. $N(t)$ é número de pessoas infectadas em uma epidemia, com dinâmica dada pela equação $\dfrac{dN}{dt} = \alpha\sqrt{N}$, onde $\alpha > 0$ é constante.
   (a) (4 pts) Forneça a solução geral da equação.
   (b) (4 pts) Sabendo que no instante inicial há 100 indivíduos infectados e após 10 dias já são 400, encontre os valores das constantes e parâmetros e assim determine quando teremos 10 mil infectados.
2. (7 pts) Resolva o problema $y' + 3y = 3t^2\,\mathrm{e}^{-3t}, \quad y(0) = 2.$
3. (a) (6 pts) Resolva o problema $y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$
   (b) (2 pts) Construa o gráfico de $y(t)$ para $t \geq 0$.
4. (7 pts) Forneça a solução geral da equação $y'' + y' + \dfrac{5}{2}\,y = 0.$

EDC - 1ª prova individual

① $\frac{dN}{dt} = \alpha\sqrt{N}$ $\quad (\alpha > 0)$

(a) $\int N^{-\frac{1}{2}} dN = \int \alpha\, dt \rightarrow 2N^{\frac{1}{2}} = \alpha t + C$

solução geral $\boxed{N(t) = \left(\frac{\alpha t + C}{2}\right)^2}$ C constante arbitrária

(b) $N(0) = \left(\frac{C}{2}\right)^2 = 100 \Rightarrow C = 20$

$N(10) = \left(\frac{10\alpha + 20}{2}\right)^2 = 400 \Rightarrow \frac{10\alpha + 20}{2} = 20$ (pois $\alpha > 0$)

$10\alpha + 20 = 40 \Rightarrow \alpha = 2$ Portanto $N(t) = (t+10)^2$

Queremos obter t tal que $N(t) = (t+10)^2 = 10000$

$\Rightarrow t + 10 = 100 \Rightarrow \boxed{t = 90 \text{ dias}}$

② $y' + 3y = 3t^2 e^{-3t}$, $y(0) = 2$

equação linear com fator integrante $\mu(t) = e^{\int 3dt} = e^{3t}$

$e^{3t} y' + (3e^{3t})y = 3t^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{3t} y) = 3t^2$

$\Rightarrow e^{3t} y = t^3 + C \Rightarrow y(t) = (t^3 + C)e^{-3t}$

$y(0) = C = 2 \Rightarrow \boxed{y(t) = (t^3 + 2)e^{-3t}}$

3 (a) $y'' + 6y' + 5y = 0 \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

$y(t) = e^{rt} \Rightarrow$ eq. característica $\quad r^2 + 6r + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 20 = 16 \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{-6 \pm 4}{2}$ $\nearrow -1$, $\searrow -5$

Solução geral $\quad y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$

$\qquad y'(t) = -c_1 e^{-t} - 5c_2 e^{-5t}$

Condições iniciais: $\quad y(0) = c_1 + c_2 = 1$

$y'(0) = -c_1 - 5c_2 = 3 \quad +$

$-4c_2 = 4 \quad \rightarrow \quad c_2 = -1,\ c_1 = 2$

$$\boxed{y(t) = 2e^{-t} - e^{-5t}}$$

(b) $y'(t) = -2e^{-t} + 5e^{-5t} = 0$

$\Downarrow$

$5e^{-5t} = 2e^{-t}$

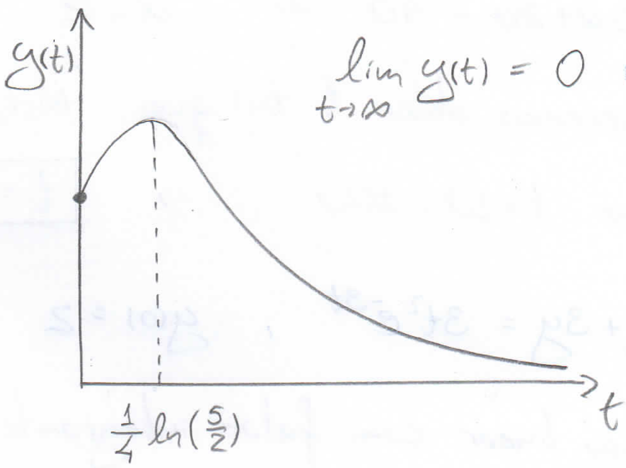
$\Downarrow$

$\frac{5}{2} = e^{4t}$

$\Downarrow$

$t = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$



4 $\quad y'' + y' + \frac{5}{2} y = 0$

$y(t) = e^{rt} \Rightarrow$ eq. característica $\quad r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$

$\Delta = 1 - 10 = -9 \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{-1 \pm i3}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{3}{2}$

Solução geral:

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[c_1 \cos\left(\tfrac{3}{2}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{2}t\right)\right]}$$

ou

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{3}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{1}{2} - i\frac{3}{2}\right)t}}$$