**EDC** - 2ª prova individual - tipo A (30 pts)

1. (10 pts) Escreva a solução geral para $y'' + 6\,y' + 9\,y = 13\cos(2t)$.

2. (10 pts) Resolva a equação $(1+x^2)y'' - 4xy' + y = 0$ usando uma série de potências em torno de $x_0 = 0$, escreva a relação de recorrência para os coeficientes e a solução geral até pelo menos a potência $x^5$. Escreva a solução para condições iniciais $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$.

3. (10 pts) Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$y'' - 4\,y = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{para } t \geq \pi \end{cases}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

| $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $\mathrm{e}^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $t^n$, $n$ inteiro positivo | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $t^n\mathrm{e}^{at}$, $n$ inteiro positivo | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| $\mathrm{sen}(bt)$ | $\frac{b}{s^2+b^2}$ |
| $\cos(bt)$ | $\frac{s}{s^2+b^2}$ |
| $\mathrm{e}^{at}\mathrm{sen}(bt)$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ |
| $\mathrm{e}^{at}\cos(bt)$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ |
| $\mathrm{senh}(bt)$ | $\frac{b}{s^2-b^2}$ |
| $\cosh(bt)$ | $\frac{s}{s^2-b^2}$ |
| $u_c(t)$ | $\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-cs}$ |
| $u_c(t)f(t-c)$ | $\mathrm{e}^{-cs}F(s)$ |
| $(f * g)(t) = \int_o^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ | $F(s)G(s)$ |
| $\delta(t-c)$ | $\mathrm{e}^{-cs}$ |
| $f'(t)$ | $sF(s) - f(0)$ |
| $f''(t)$ | $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ |

# EDC - 2ª prova individual - TIPO A

① $y'' + 6y' + 9y = 13\cos(2t)$

Equação homogênea associada: $y'' + 6y' + 9y = 0$ Proposta: $y(t) = e^{rt}$

$\Rightarrow r^2 + 6r + 9 = 0\ ,\ \Delta = 0\ ,\ r = \frac{-6}{2} = -3$

Solução geral da eq. homogênea: $y_h(t) = e^{-3t}(c_1 + c_2 t)$

Método dos Coeficientes Indeterminados: $Y_{(t)} = A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)$

$Y'_{(t)} = -2A\,\text{sen}(2t) + 2B\cos(2t)\ ,\ Y''_{(t)} = -4A\cos(2t) - 4B\,\text{sen}(2t)$

$\Rightarrow [-4A\cos(2t) - 4B\,\text{sen}(2t)] + 6[-2A\,\text{sen}(2t) + 2B\cos(2t)] +$

$+ 9[A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)] = 13\cos(2t)$

$A = \frac{5}{12}B$

$\cos(2t):\ -4A + 12B + 9A = 13 \rightarrow 5A + 12B = 13$

$\text{sen}(2t):\ -4B - 12A + 9B = 0 \rightarrow -12A + 5B = 0$

$\left(\frac{25}{12} + 12\right)B = 13$

$\frac{169}{12}B = 13 \Rightarrow B = \frac{12}{13}\ ,\ A = \frac{5}{13} \Rightarrow Y_{(t)} = \frac{5}{13}\cos(2t) + \frac{12}{13}\text{sen}(2t)$

Solução geral: $\boxed{y(t) = e^{-3t}(c_1 + c_2 t) + \frac{5}{13}\cos(2t) + \frac{12}{13}\text{sen}(2t)}$

② $(1+x^2)y'' - 4xy' + y = 0$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,\ y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\ ,\ y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

$(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 4x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{m=n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$

$(2a_2 + a_0) + (\underbrace{6a_3 - 4a_1 + a_1}_{6a_3 - 3a_1})x + \sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + [n(n-1) - 4n + 1]a_n\}}_{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - 5n + 1)a_n}x^n = 0$

Todos os coeficientes são nulos: $2a_2+a_0=0 \rightarrow a_2=-\frac{1}{2}a_0$

$6a_3-3a_1=0 \rightarrow a_3=\frac{1}{2}a_1$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n^2-5n+1)a_n=0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2}=\frac{5n-n^2-1}{(n+2)(n+1)}a_n} \quad (n\geq 2)$$

Relação de recorrência

$n=2: \ a_4=\frac{5}{12}a_2=-\frac{5}{24}a_0$, $\ n=3: \ a_5=\frac{5}{20}a_3=\frac{1}{8}a_1$

Solução geral até potência $x^5$:

$$\boxed{y(x)=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4+\ldots\right)+a_1\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5+\ldots\right)}$$

Condições iniciais: $y(0)=a_0=2$, $y'(0)=a_1=-4$

$$\boxed{y(x)=2-4x-x^2-2x^3-\frac{5}{12}x^4-\frac{1}{2}x^5+\ldots}$$

③ $y''-4y=\begin{cases}1 & (0\leq t<\pi)\\ 0 & (t\geq\pi)\end{cases}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

$$y''-4y=1-u_\pi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y_{(s)}-s\overset{=1}{\overline{y(0)}}-\overset{=0}{\overline{y'(0)}}-4Y_{(s)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-\pi s}$$

$$(s^2-4)Y_{(s)}=s+\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-\pi s} \Rightarrow Y_{(s)}=\frac{s}{s^2-4}+\frac{1}{s(s^2-4)}-\frac{1}{s(s^2-4)}e^{-\pi s}$$

$$\frac{1}{s(s^2-4)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2-4}=\frac{A(s^2-4)+(Bs+C)s}{s(s^2-4)} \Rightarrow \begin{array}{l} s^2: \ A+B=0 \rightarrow B=\frac{1}{4} \\ s: \ C=0 \qquad \uparrow \\ 1: \ -4A=1 \rightarrow A=-\frac{1}{4}\end{array}$$

$$\frac{1}{s(s^2-4)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\frac{s}{s^2-4}$$

$$=\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cosh(2t)\right\}_{(s)}$$

$$Y_{(s)}=\mathcal{L}\left\{\cosh(2t)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cosh(2t)\right\}_{(s)}-\mathcal{L}\left\{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cosh(2t)\right\}_{(s)}e^{-\pi s}$$

$$\boxed{y(t)=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\cosh(2t)+\frac{1}{4}u_\pi(t)\left\{1-\cosh[2(t-\pi)]\right\}}$$

Ou seja,

$$y(t)=\begin{cases}-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\cosh(2t) & (0\leq t<\pi)\\ \frac{5}{4}\cosh(2t)-\frac{1}{4}\cosh[2(t-\pi)] & (t\geq\pi)\end{cases}$$