NOÇÕES DE PROBABILIDADE

INTRODUÇÃO

Em suas origens, a estatística teve por função principal a organização e a apresentação de dados coletados empiricamente.

O desenvolvimento da teoria das probabilidades permitiu à estatística, a criação de técnicas mais adequadas de amostragem e formas de relacionar as amostras e as populações de onde provieram essas amostras.

Nas aulas anteriores, foi visto que a distribuição das frequências das observações de um fenômeno é recurso poderoso para entender a variabilidade do mesmo. Com a teoria da probabilidade pode-se criar um modelo teórico que reproduza muito bem a distribuição das frequências quando o fenômeno é observado diretamente. Tais modelos são chamados modelos de probabilidades ou distribuições de probabilidade e são consideradas a espinha dorsal da teoria estatística, pois todos os processos inferenciais são aplicações de tais modelos ou distribuições.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- Um experimento é um processo de observar um determinado fenômeno;
- Encontramos na natureza dois tipos de fenômenos:
  - Determinísticos
  - Aleatórios
- Se tomarmos um determinado sólido, sabemos que uma certa temperatura haverá a passagem para o estado líquido. Este exemplo caracteriza um fenômeno determinístico;
- Nos fenômenos aleatórios, os resultados não são previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno. Por exemplo: se considerarmos um pomar com centenas de laranjas, as produções de cada planta serão diferentes e não previsíveis, mesmo que as condições de temperatura, pressão, umidade solo, etc., sejam as mesmas para todas as árvores.
- Probabilidade é o estudo de experimentos aleatórios.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

Experimentos aleatórios: Podemos considerar os **experimentos aleatórios** como fenômenos produzidos pelo homem.

Nos experimentos aleatórios, mesmo que as condições iniciais sejam sempre as mesmas, os resultados finais de cada tentativa do experimento serão diferentes e não previsíveis.

Exemplo 1

a) Lançamento de uma moeda honesta;
b) Lançamento de um dado;
c) Lançamento de duas moedas;
d) Retirada de uma carta de um baralho completo de 52 cartas.

- A cada experimento aleatório está associado o resultado obtido, que não é previsível chamado **evento aleatório**.

No exemplo (a) os eventos associados são cara (k) e coroa (c);

No exemplo (b) poderá ocorrer uma das faces 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

Espaço Amostral

Espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados do experimento.

- Obs: Os elementos do espaço amostral serão chamados também de pontos amostrais;
- Representaremos o espaço amostral por Ω.
- No Exemplo 1 quais são os espaços amostrais?
- Ao lado temos o espaço amostral do experimento retirada de

uma carta de um baralho de 52 cartas.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

- O evento aleatório pode ser um único ponto amostral ou uma reunião deles, como veremos no exemplo a seguir.
- O próprio Ω, espaço amostral, é um evento chamado evento certo, o conjunto vazio também é um evento, chamado evento impossível. Eventos com apenas um elemento do espaço amostral é chamado evento simples.

Exemplo 2: Lançam-se dois dados. Enumerar os seguintes eventos:

- A: saída de faces iguais;
- B: saída de faces cuja soma seja igual a 10;
- C: saída de faces cuja soma seja menos que 2;
- D: saída de faces cuja soma seja menos que 15;
- E: saída de faces onde uma face é o dobro da outra.

DEFINIÇÕES BÁSICAS

Classe dos Eventos Aleatórios

A classe dos eventos aleatórios de um espaço amostral Ω, que denotaremos por $F(\Omega)$, é o conjunto de todos os eventos (isto é, de todos os subconjuntos) do espaço amostral.

Exemplo 3: Considere o espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ descrever $F(\Omega)$.

OBS: Se o número de pontos amostrais de um espaço amostral finito é n, então o número de eventos de F é 2^n.

OPERAÇÕES COM EVENTOS ALEATÓRIOS

Consideremos um espaço amostral finito $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Sejam A e B dois eventos de $F(\Omega)$. As seguintes operações são definidas:

União

Definição: $A \cup B = \{e_i\ (\in)\ \Omega\ |e_i\ \epsilon\ A\ ou\ e_i \in B\}$. O evento união é formado pelos pontos amostrais que pertencem a pelo menos um dos eventos.

Interseção

Definição: $A \cap B = \{e_i\ (\in)\ \Omega\ |e_i\ \epsilon\ A\ e\ e_i \in B\}$. O evento interseção é formado pelos pontos que pertencem simultaneamente aos eventos A e B. Se $A \cap B = \emptyset$, A e B são eventos mutuamente exclusivos.

Complementação

Definição: $\Omega - A = \bar{A} = \{e_i\ (\in)\ \Omega\ |e_i\ \notin\ A\}$

OPERAÇÕES COM EVENTOS ALEATÓRIOS

Exemplo 4

Lançam-se duas moedas. Sejam A: saída de faces iguais e B: saídas de cara na primeira moeda. Determinar os eventos:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$
c) $\overline{A}$ d) $\overline{B}$
e) $(\overline{A \cup B})$ f) $(\overline{A \cap B})$
g) $\overline{A} \cap \overline{B}$ h) $\overline{A} \cup \overline{B}$
i) $B - A$ j) $A - B$
k) $\overline{A} \cap B$ l) $\overline{B} \cap A$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

Idempotentes

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Comutativas

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Associativas

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Distributivas

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Absorções

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

Identidades

- $A \cap \Omega = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

Complementares

- $\overline{\Omega} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = \Omega$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = \Omega$
- $\overline{(\overline{A})} = A$

Leis das dualidades ou Leis de Morgan

- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

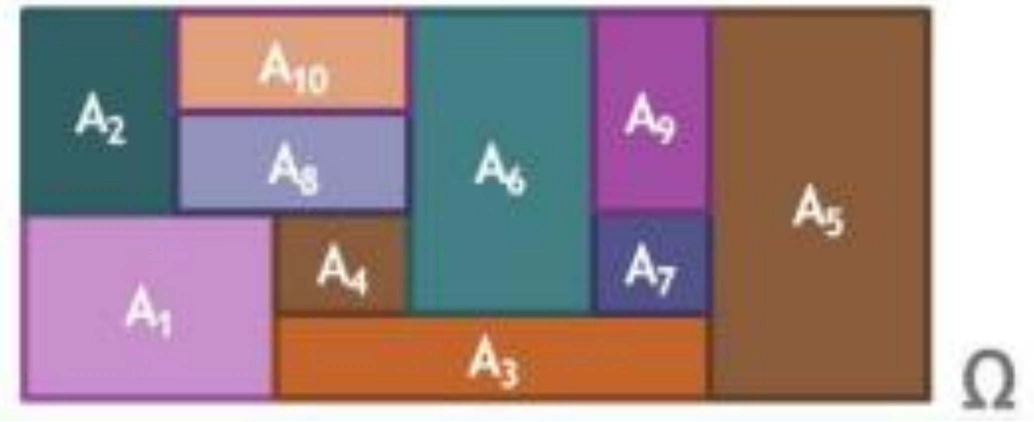
PARTIÇÃO DE UM ESPAÇO AMOSTRAL

Definição: Dizemos que os eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral Ω se:

a) $A_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n$ (não há eventos vazios);

b) $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$ (não há interseção entre os eventos);

c) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (a união de todos os eventos é o espaço amostral).



FUNÇÃO PROBABILIDADE

Seja Ω um espaço amostral, F a classe de eventos e P uma função de valor real definida em F. Então P é chamada de *função de probabilidade* e P(A), de *probabilidade do evento A*, se os seguintes axiomas valem:

1. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. O $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem, dois a dois, eventos mutuamente exclusivos.

TEOREMAS DE PROBABILIDADE

Teorema 1: Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral, então:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Teorema 2: Se $\emptyset$ é o evento impossível, então $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 3 (Teorema do evento complementar): Para todo evento $A \subset \Omega$,

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Teorema 4 (Teorema da soma): Sejam $A \subset \Omega$ e B $\subset \Omega$. Então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

TEOREMAS DE PROBABILIDADE

Teorema 5: Para $A \subset \Omega$ e B $\subset \Omega$ temos: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Exemplo 5

Consideremos um experimento aleatório e os eventos A e B associados, tais que P(A)=1/2, P(B)=1/3 e $P(A \cap B)$=1/4. Calcular:

a) $P(\bar{A})$ e $P(\bar{B})$

b) $P(A \cup B)$

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

d) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

e) $P(\bar{A} \cap B)$

EVENTOS EQUIPROVÁVEIS

Os eventos e_i, $i = 1, \ldots, n$, são equiprováveis quando $P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n) = p$, isto é, quando todos têm a mesma a probabilidade de ocorrer, onde *p=1/n*.

Logo, se os *n* pontos amostrais (eventos) são equiprováveis, a probabilidade de cada um dos pontos amostrais é *1/n*.

EXERCÍCIOS

1) Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três bolas vermelhas (V). Retira-se uma bola ao acaso da urna. Se for branca, lança-se uma moeda; se for vermelha, ela é devolvida à urna e retira-se outra. Dê um espaço amostral para o experimento.

2) Uma carta é retirada de um baralho comum, de 52 cartas, e, sem saber qual é a carta, é misturada com as cartas de um outro baralho idêntico ao primeiro. Retirando, em seguida, uma carta do segundo baralho, qual a probabilidade de se obter uma dama?

EXERCÍCIOS

3) Sejam A e B eventos com $P(A \cup B) = \frac{7}{8}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ e $P(\bar{A}) = \frac{5}{8}$. Encontre $P(A), P(B)$ e $P(A \cap \bar{B})$.

4) Em certo colégio, 25% dos estudantes foram reprovados em matemática, 15% em química e 10% em matemática e química ao mesmo tempo. Um estudante é selecionado aleatoriamente.

a) Se ele foi reprovado em química, qual é a probabilidade de ele ter sido reprovado em matemática?

b) Se foi reprovado em matemática, qual é a probabilidade de ter sido reprovado em química?

c) Qual é a probabilidade de ele ter sido reprovado em matemática ou química?