UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profª Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

4 Aplicações de Vetores: Retas e Planos **106**

4.1 Equações Vetoriais, Paramétricas e Simétricas de Retas 106

4.1.1 Reta definida por dois pontos 110

4.1.2 Condição para que três pontos estejam em linha reta 111

4.1.3 Equações Reduzidas da Reta 112

4.1.4 Retas Horizontais e Retas Verticais 114

4.2 Ângulo entre Duas Retas 115

4.2.1 Condição de Paralelismo de Duas Retas 116

4.2.2 Condição de Ortogonalidade de Duas Retas 119

4.2.3 Posições Relativas de Duas Retas 120

Condição de Coplanaridade de Duas Retas 120

4.3 Equações Gerais, Vetoriais e Paramétricas de Planos 122

4.3.1 Equação Ponto-Normal e Geral do Plano 124

4.3.2 Determinação de um Plano 125

4.3.3 Planos Paralelos aos Eixos e aos Planos Coordenados 128

4.3.4 Equação Vetorial e Equações Paramétricas do Plano 130

4.4 Ângulo entre Dois Planos 133

4.4.1 Interseção de Dois Planos 135

4.5 Distâncias 135

4.5.1 Distância entre Dois Pontos 135

4.5.2 Distância de Um Ponto a Uma Reta 136

4.5.3 Distância entre Duas Retas 137

4.5.4 Distância de um Ponto a um Plano 139
4.5.5 Distância entre Dois Planos 140
4.5.6 Distância de uma Reta a um Plano 141
4.6 Exercícios sobre Retas, Planos e Distâncias 142

Referências Bibliográficas **146**

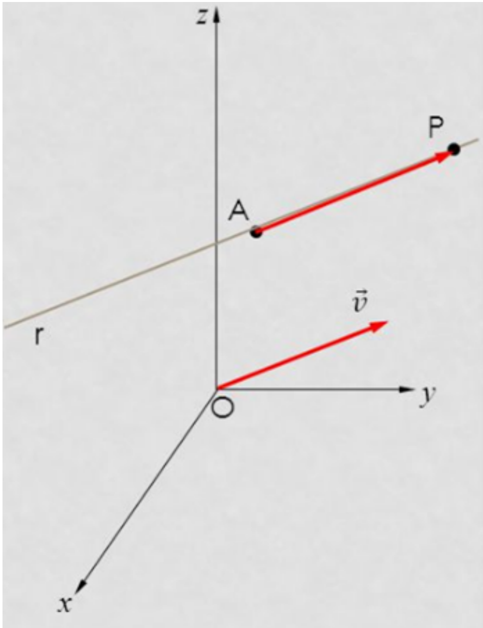
Capítulo 4

Aplicações de Vetores: Retas e Planos

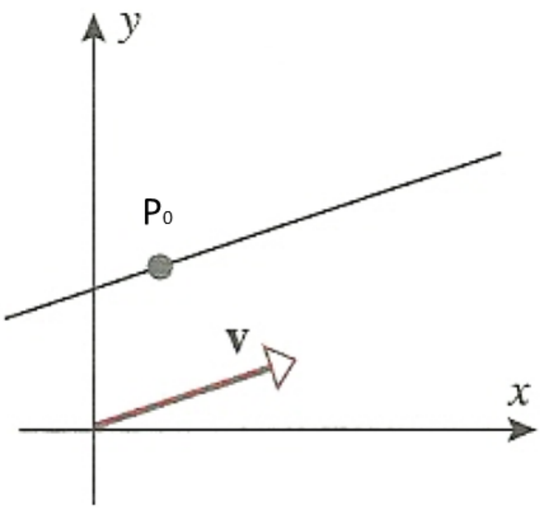
Neste capítulo faremos uso da teoria de vetores e produto de vetores, apresentados no capítulo anterior, para exibirmos as equações que descrevem analiticamente as retas e os planos. Desta maneira, usaremos expressões analíticas na resolução de problemas geométricos como o estudo do ângulo, da distância, das posições e das interseções entre retas e/ou planos.

4.1 Equações Vetoriais, Paramétricas e Simétricas de Retas

Para identificarmos geometricamente uma reta r, basta conhecermos um ponto A desta reta e sua direção.



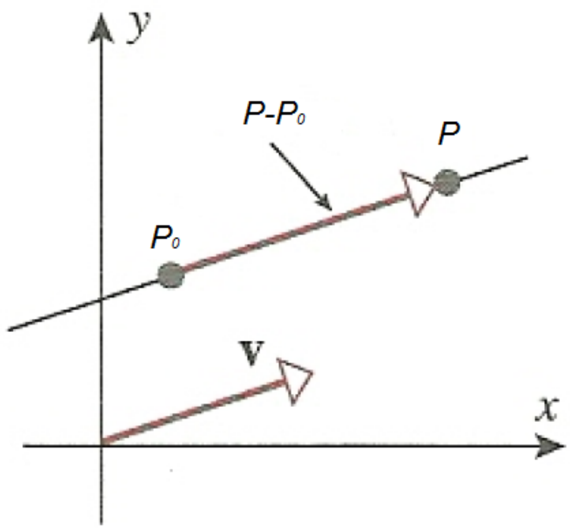
Dessa forma, uma reta em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ pode ser determinada de modo único especificando um ponto P_0 na reta e um vetor não-nulo v que é paralelo à reta.



Assim, se P é qualquer ponto da reta que passa pelo ponto P_0 e que é paralela a v, então o vetor $P - P_0$ é paralelo a v, de modo que

$$P - P_0 = tv$$

para algum escalar t.



Definição 1. *A equação*

$$P = P_0 + tv$$

é dita equação vetorial da reta pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$ *que é paralela ao vetor* $v = (a, b)$ *onde* v *é dito um vetor diretor e* t *um parâmetro tal que* $-\infty < t < \infty$.

Notação: $r : P = P_0 + tv$ ou $r : (x, y) = (x_0, y_0) + t\,(a, b),\ t \in \mathbb{R}$

Observação 4.1.1. *É fácil verificar que a cada valor de* t *na equação vetorial da reta corresponde um ponto particular* P *da reta* r*. Quando* t *varia de* $-\infty$ *a* $+\infty$*, o ponto* P *descreve a reta* r*. O número* t *é dito* ***parâmetro***.

Exemplo 4.1.1. *Determinar a equação vetorial da reta* r *que passa pelo ponto* $P_0(3, 0)$ *e tem a direção do vetor* $v = (2, 2)$.

Solução: *Link da solução.*

Observação 4.1.2. *Quando a reta passa pela origem obtemos* $r : P = tv$*, com* $-\infty < t < +\infty$.

A equação vetorial da reta pode ser reescrita, igualando as componentes correspondentes, ou seja, na forma paramétrica.

Definição 2. *Dado* $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ *a equação vetorial da reta pelo ponto* $P_0(x_0, y_0)$ *e paralela ao vetor* $v = (a, b)$*, definimos as equações paramétricas da reta por*

$$r : \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Exemplo 4.1.2. *Encontre as equações paramétricas da reta em* $\mathbb{R}^2$ *que passa pela origem e que é paralela ao vetor* $v = (-2, 3)$*.*

Solução: *Link da solução.*

Observação 4.1.3. *No* $\mathbb{R}^3$*, obtemos:*

1. $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$ *é a equação vetorial da reta pelo ponto* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e paralela ao vetor* $v = (a, b, c)$*.*
2. $r : \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \\ z = z_0 + c \cdot t \end{cases}$ *são as equações paramétricas da reta dada acima.*

Exemplo 4.1.3. *Encontre uma equação vetorial e as equações paramétricas da reta em* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelo ponto* $P_0(1, 2, -3)$ *e é paralela ao vetor* $v = (4, 5, -1)$*.*

Solução: *Link da solução.*

Exercício 4.1.1. *Determinar a equação vetorial da reta* r *que passa pelo ponto* $P_0(3, 0, -5)$ *e tem a direção do vetor* $v = (2, 2, -1)$*.*

Definição 3. *Dados $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em $\mathbb{R}^3$ e $v = (a, b, c)$ um vetor, definimos as equações simétricas da reta que passa pelo ponto P_0 e tem a direção do vetor v por*

$$r : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

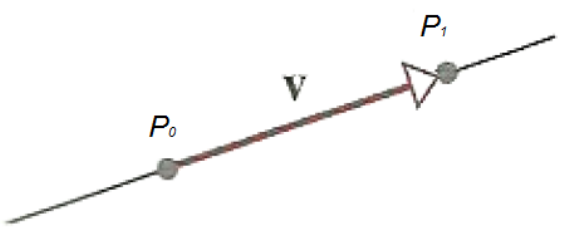
Exemplo 4.1.4. *Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $P_0(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $v = (2, 2, -1)$.*
Solução: *Link da solução.*

Exercício 4.1.2. *Determine as equações da reta r que passa pelo ponto $P_0(3, 0, -5)$ e tem a direção do vetor $v = (2, 2, -1)$.*
***Pergunta**: O ponto $P(7, 4, -7) \in r$?*

4.1.1 Reta definida por dois pontos

Definição 4. *Sejam P_0 e P_1 pontos distintos em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, definimos a equação vetorial da reta que passa pelos dois pontos P_0 e P_1 e, que é paralela ao vetor $v = \overrightarrow{P_0P_1}$ por*

$$P = P_0 + t \cdot \overrightarrow{P_0P_1}, \qquad -\infty < t < \infty$$



Exemplo 4.1.5. *Encontre as equações paramétricas da reta em* $\mathbb{R}^2$ *que passa pelos pontos* $P_0(0,7)$ *e* $P_1(5,0)$.

Solução: *Link da solução.*

Exemplo 4.1.6. *A reta* r*, determinada pelos pontos* $A(1,-2,-3)$ *e* $B(3,1,-4)$*, tem a direção do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,3,-1)$ *e as equações paramétricas*

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

representam a reta r*, passando pelo ponto* A*, com direção do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$*; analogamente, as equações paramétricas*

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -4 - t \end{cases}$$

ainda representam a mesma reta r*, passando pelo ponto* B*, com a direção do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Observação 4.1.4. *Se o vetor* v *é um vetor diretor da reta* r*, qualquer vetor* αv*,* $\alpha \neq 0$*, também o é.*

4.1.2 Condição para que três pontos estejam em linha reta

A condição para que três pontos $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e $A_3(x_3, y_3, z_3)$ estejam em linha reta é que os vetores $\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$ sejam colineares, isto é:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = k\overrightarrow{A_1A_3},$$

para algum $k \in \mathbb{R}$. Em outras palavras,

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Exemplo 4.1.7. *Os pontos $A_1(5, 2, -6)$, $A_2(-1, -4, -3)$ e $A_3(7, 4, -7)$ estão em linha reta?*

Solução: *Link da solução.*

4.1.3 Equações Reduzidas da Reta

Para as equações simétricas da reta

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

pode-se dar outra forma, isolando as variáveis y e z e expressando-as em função de x.

Assim, comparando dois a dois os termos da igualdade, temos:

$$\frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a}$$

$$y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_1$$

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_1 + y_1$$

fazendo

$$\frac{b}{a} = m$$

e

$$-\frac{b}{a}x_1 + y_1 = n,$$

$$\frac{z - z_1}{c} = \frac{x - x_1}{a}$$

$$z - z_1 = \frac{c}{a}(x - x_1)$$

$$z - z_1 = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_1$$

$$z = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_1 + z_1$$

fazendo

$$\frac{c}{a} = p$$

e

$$-\frac{c}{a}x_1 + z_1 = q,$$

segue que:

$$r : \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$$

são as ***equações reduzidas da reta*** **r**.

Exemplo 4.1.8. *Estabeleça as equações reduzidas da reta r que passa pelo ponto $A(2, 1, -3)$ e $B(4, 0, -2)$.*

Solução: *Link da solução.*

Observação 4.1.5.

1. *Nas equações reduzidas:*

$$r : \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q, \end{cases}$$

a variável x figura como variável independente. Se expressarmos as equações de forma que a variável independente seja y ou z, ainda assim as equações são chamadas de equações reduzidas. Por exemplo, as equações reduzidas da reta do exemplo anterior também podem ser expressas por:

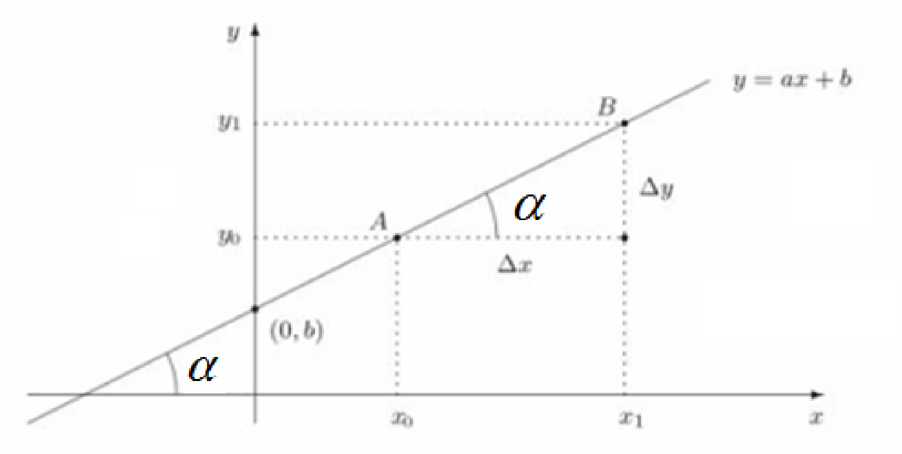
$$r : \begin{cases} x = 4 - 2y \\ z = -y - 2 \end{cases}$$

ou

$$r : \begin{cases} x = 2z + 8 \\ y = -z - 2 \end{cases}$$

Coeficiente Angular e Coeficiente Linear

Seja a reta r que passa pelos pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$, veja a Figura abaixo.



O ângulo α, formado pela reta e pelo eixo das abcissas no sentido positivo, denomina-se inclinação da reta. Recorda-se das aulas de trigonometria que o coeficiente angular é o valor da tangente dessa inclinação, ou seja,

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha).$$

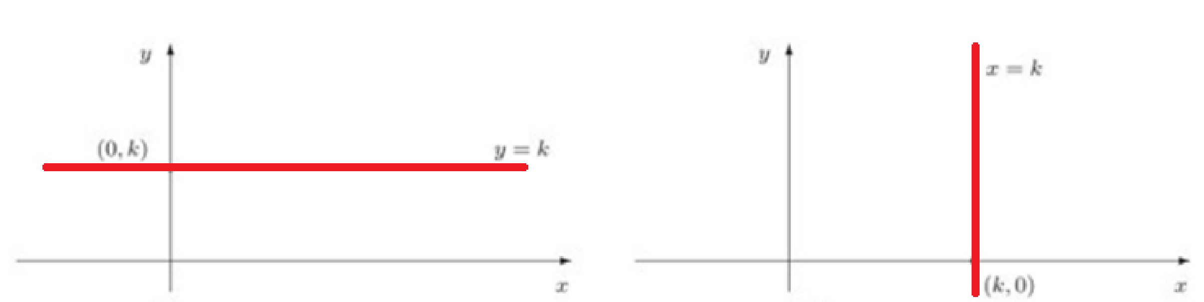
Por outro lado, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo y, ou seja, tomando $x = 0$ na equação $y = ax + b$ obtemos $y = b$. Isso significa que a reta passa pelo ponto $(0, b)$.

4.1.4 Retas Horizontais e Retas Verticais

Consideremos uma reta r dada pela equação reduzida $y = ax + b$.

Se a reta r for horizontal, veja a Figura abaixo à esquerda, então temos que sua inclinação é nula. Logo, seu coeficiente angular é zero. Consequentemente a equação da reta se reduz a $y = b$.

Observação 4.1.6. *Toda equação da forma $y =$constante é a equação de uma reta horizontal.*



Se a reta r for vertical, veja a Figura acima à direita, então temos que sua inclinação é de $90°$. Logo, seu coeficiente angular não existe ($\nexists \tan(90°)$). Consequentemente a equação da reta se reduz a $x =$constante.

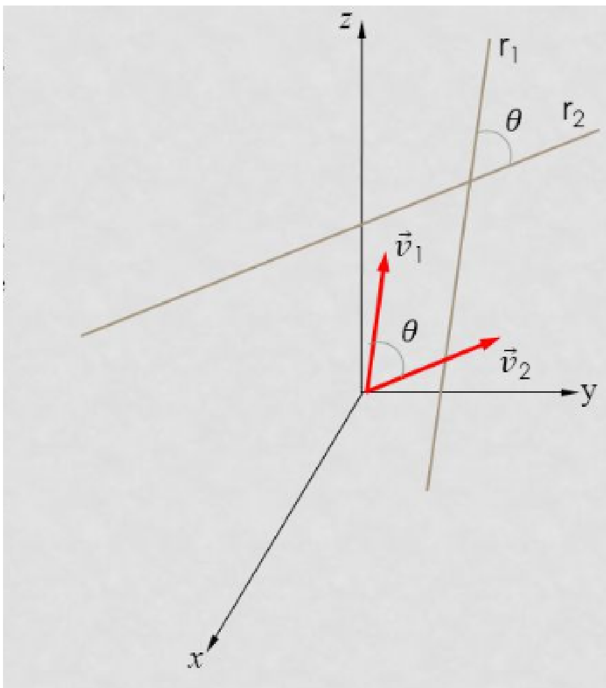
Observação 4.1.7. *Toda equação da forma $x =$constante é a equação de uma reta vertical.*

4.2 Ângulo entre Duas Retas

Definição 5. *Sejam as retas r_1, que passa pelo ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de um vetor $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$, e r_2, que passa pelo ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Chama-se* **ângulo entre duas retas $\mathbf{r_1}$** *e* **$\mathbf{r_2}$** *o menor ângulo formado entre um vetor diretor de r_1 e um vetor diretor de r_2. Sendo θ este ângulo, têm-se*

$$\cos(\theta) = \frac{|v_1 \cdot v_2|}{\|v_1\| \ \|v_2\|}$$

com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



Exemplo 4.2.1. *Calcular o ângulo entre as retas* $r_1 : \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = -1-2t \end{cases}$ *e* $r_2 : \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{1}$.
Solução: *Link da solução.*

4.2.1 Condição de Paralelismo de Duas Retas

A condição de paralelismo das retas r e s é a mesma dos vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, que definem as direções dessas retas.

Em outras palavras, duas retas r e s são paralelas se, e somente se, seus vetores diretores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente, são paralelos.

$$r//s \iff u = kv \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Notação: $r//s$.

Exemplo 4.2.2. *Considere as retas* $r : (x, y, z) = (-3, 4, 2) + t(8, -6, 2)$ *e* $s : (x, y, z) = (-1, 2, -3) + t(-4, 3, -1)$. *A reta* r *é paralela a reta* s*?*
Solução: *Link da solução.*

Exercício 4.2.1. *Verifique que a reta* r_1*, que passa pelos pontos* $A_1(-3, 4, 2)$ *e* $B_1(5, -2, 4)$*, e a reta* r_2*, que passa pelos pontos* $A_2(-1, 2, -3)$ *e* $B_2(-5, 5, -4)$*, são paralelas.*

Observação 4.2.1. *Se as retas* r_1 *e* r_2 *forem expressas, respectivamente, pelas equações reduzidas:*

$$r_1 : \begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ z = p_1x + q_1 \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} y = m_2x + n_2 \\ z = p_2x + q_2 \end{cases}$$

cujas direções são dadas, respectivamentes, pelos vetores $v_1 = (1, m_1, p_1)$ *e* $v_2 = (1, m_2, p_2)$*, a condição de paralelismo permite escrever:*

$$\frac{1}{1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} \iff m_1 = m_2,\ p_1 = p_2$$

Exemplo 4.2.3. *As retas* $r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -4x + 5 \end{cases}$ *e* $r_2 : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -4x \end{cases}$ *são paralelas. Justifique.*

Solução: *Link da solução.*

Retas Paralelas aos Planos e aos Eixos Coordenados

Até agora apresentamos as possíveis equações de uma reta, considerando um ponto $A(x_1, y_1, z_1) \in r$ e o vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$, cujas componentes são diferentes de zero. Entretanto uma ou duas destas componentes podem ser nulas. Assim, temos dois casos:

1° ***Apenas uma das componentes de*** $\vec{v}$ ***é nula***

Neste caso, o vetor $\vec{v}$ é ortogonal a um dos eixos coordenados e, portanto, a reta r é paralela ao plano dos outros eixos.

(a) Se $a = 0$, $\vec{v} = (0, b, c) \perp Ox \therefore r \,//\, yOz$ (r pertence a um plano paralelo a yOz).

$$r : \begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

(b) Se $b = 0$, $\vec{v} = (a, 0, c) \perp Oy \therefore r \,//\, xOz$ (r pertence a um plano paralelo a xOz).

$$r : \begin{cases} y = y_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

(c) Se $c = 0$, $\vec{v} = (a, b, 0) \perp Oz \therefore r \,//\, xOy$ (r pertence a um plano paralelo a xOy).

$$r : \begin{cases} z = z_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} \end{cases}$$

Observação 4.2.2. *Tente visualizar geometricamente cada um desses casos, se necessário, utilize o link* `https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4`.

2° ***Duas das componentes de* $\vec{\mathbf{v}}$ *são nulas***

Neste caso o vetor $\vec{v}$ tem a direção dos vetores $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ou $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ou $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e , portanto a reta r é paralela ao eixo que tem a direção de $\vec{i}$ ou de $\vec{j}$ ou de $\vec{k}$. Assim:

(a) Se $a = b = 0$, $\vec{v} = (0, 0, c)//\vec{k} \quad \therefore \quad r//Oz$.

$$r : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Costuma-se dizer, simplesmente, que as equações da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$, subentendendo-se z variável.

(b) Se $a = c = 0$,$v = (0, b, 0)//\vec{j} \quad \therefore \quad r//Oy$.

$$r : \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 \end{cases} \text{ ou simplesmente, } r : \begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \end{cases} \text{ subentendendo-se } y \text{ variável.}$$

(c) Se $b = c = 0$, $\vec{v} = (a, 0, 0)//\vec{i} \quad \therefore \quad r//Ox$.

$$r : \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases} \text{ ou simplesmente, } r : \begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases} \text{ subentendendo-se } x \text{ variável.}$$

Observação 4.2.3. *Novamente tente visualizar geometricamente cada um desses casos, se necessário, utilize o link* **https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4**.

Os eixos $0x$, Oy e Oz são retas particulares.

O eixo Ox é uma reta que passa pela origem $O(0,0,0)$ e tem a direção do vetor $\vec{i} = (1,0,0)$. Logo, suas equações são $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

De forma análoga, as equações do eixo Oy são $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

E as equaçoes do eixo Oz são $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

4.2.2 Condição de Ortogonalidade de Duas Retas

A condição de ortogonalidade das retas r e s é a mesma dos vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ que definem as direções dessas retas, isto é, duas retas r e s são ortogonais se seus vetores diretores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$, respectivamente, são ortogonais, ou seja,

$$u \cdot v = 0.$$

Em outras palavras,

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Exemplo 4.2.4. *As retas* $r : \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x-3}{8} = \dfrac{z+1}{-6} \end{cases}$ *e* $s : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-3}{4}$ *são ortogonais?*

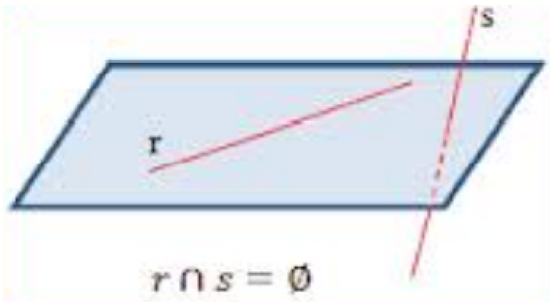
Solução: *Link da solução.*

4.2.3 Posições Relativas de Duas Retas

Duas retas r_1 e r_2 no espaço, $\mathbb{R}^3$, podem ser:

(I) coplanares: situada no mesmo plano.

(II) reversas: $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ (não situadas num mesmo plano).



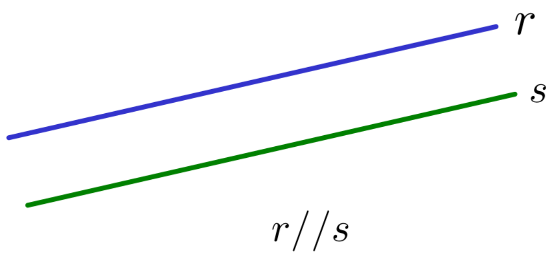
Condição de Coplanaridade de Duas Retas

A reta r_1, que passa por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $u = (a_1, b_1, c_1)$, e a reta r_2, que passa pelo ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de um vetor $v = (a_2, b_2, c_2)$, são coplanares se os vetores u, v e $\overrightarrow{P_1P_2}$ forem coplanares, isto é, se for nulo o produto misto

$$u \cdot (v \times \overrightarrow{P_1P_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Além disso, dentre as retas coplanares, podemos classificá-las como retas:

(a) ***paralelas***: $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

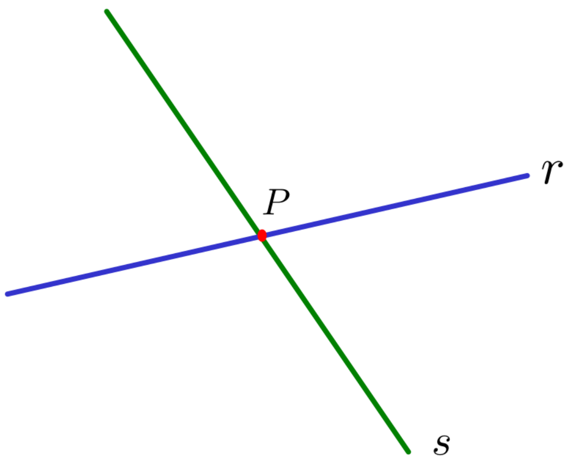


Para tanto, basta verificarmos que os vetores diretores são paralelos, ou seja:

$$u//v \Leftrightarrow u = kv$$

O caso de serem r_1 e r_2 ***coincidentes*** pode ser considerado como um caso particular de paralelismo.

(b) ***concorrentes****:* $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ $\quad$ (P é o ponto de interseção das duas retas);



Assim, diante do exposto e da condição de coplanaridade, podemos sintetizar:

1. Se r_1 e r_2 forem paralelas, serão coplanares, ou seja, $u \cdot (v \times \overrightarrow{P_1P_2}) = 0$.

2. Se r_1 e r_2 não forem paralelas, a igualdade $u \cdot (v \times \overrightarrow{P_1P_2}) = 0$ exprime a condição de concorrência dessas retas.

3. Se $u \cdot (v \times \overrightarrow{P_1P_2}) \neq 0$ as retas são reversas.

Exemplo 4.2.5. *Estude a posição relativa das retas* $r_1 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-5}{4}$ *e*

$$r_2 : \begin{cases} x &= 5 + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 7 - 2t \end{cases}$$

Solução: *Link da solução.*

Exercício 4.2.2. *Estudar as posições relativas das retas:*

a) $r_1 : \begin{cases} y &= 2x - 3 \\ z &= -x \end{cases}$ *e* $r_2 : \begin{cases} x &= 1 - 3t \\ y &= 6 - 6t \\ z &= 3t \end{cases}$

b) $r_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = z$ *e* $r_2 : \begin{cases} x &= 2 - 4t \\ y &= 2t \\ z &= 1 - 2t \end{cases}$

c) $r_1 : \begin{cases} y &= 3 \\ z &= 2x \end{cases}$ *e* $r_2 : x = y = z$

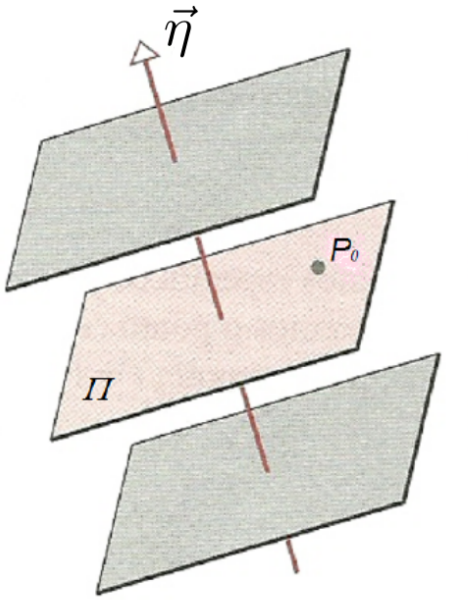
d) $r_1 : \begin{cases} y &= -3x + 2 \\ z &= 3x - 1 \end{cases}$ *e* $r_2 : \begin{cases} x &= -t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= -2t \end{cases}$

Observação 4.2.4. *Para um auxílio na visualização das retas, e consequentemente das posições relativas calculadas no exercício acima, acesse o link* `https://www.geogebra.org/m/RqkquH6P`

4.3 Equações Gerais, Vetoriais e Paramétricas de Planos

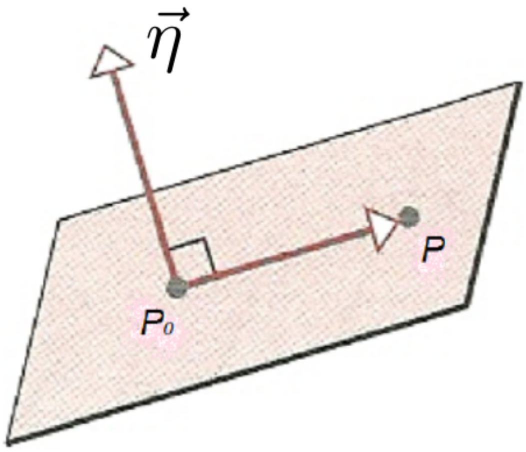
Da mesma maneira que apresentamos um tratamento geométrico e algébrico para as retas, apresentaremos a seguir as possíveis equações que descrevem um plano e auxiliam na resolução de problemas geométricos, como cálculo de distância, ângulo e interseções.

Um plano Π, em $\mathbb{R}^3$, pode ser determinado de modo único especificando um ponto P_0 no plano e um vetor não-nulo $\overrightarrow{\eta}$ que é perpendicular ao plano, onde $\overrightarrow{\eta}$ é dito vetor normal ao plano.



Se P é um ponto qualquer deste plano, então o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é ortogonal a $\overrightarrow{\eta}$, ou seja,

$$\overrightarrow{\eta} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$



E reciprocamente, qualquer ponto P que satisfaz esta equação está neste plano.

4.3.1 Equação Ponto-Normal e Geral do Plano

Definição 6. *A equação do plano* Π *que passa por* P_0 *com normal* $\overrightarrow{\eta}$ *é dada por*

$$\overrightarrow{\eta} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

e é dita equação ponto-normal.

Observação 4.3.1. *Em termos de componentes temos* $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e* $\overrightarrow{\eta}$ *segue que:*

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Exemplo 4.3.1. *Determine a equação ponto-normal do plano que passa pelo ponto* $(3, -1, 7)$ *e tem normal* $\overrightarrow{\eta} = (4, 2, -5)$.
Solução: *Link da solução.*

Definição 7. *A equação* $ax + by + cz + d = 0$ *é dita a equação geral de um plano, onde* a, b *e* c *não todos nulos.*

Exemplo 4.3.2. *Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto* $(3, -1, 7)$ *e tem normal* $\overrightarrow{\eta} = (4, 2, -5)$.
Solução: *Link da solução.*

Observação 4.3.2.

1. *É importante observar que os três coeficientes* a, b *e* c *da equação geral* $ax + by + cz + d = 0$ *representam as componentes de um vetor normal ao plano.*

Exemplo 4.3.3. *Se um plano* Π *é dado por* $\Pi : 3x + 2y - 4z + 5 = 0$*, um de seus vetores normais é* $\vec{\eta} = (3, 2, -4)$*. Este mesmo vetor* $\vec{\eta}$ *é também normal a qualquer plano paralelo a* Π*.*

2. *Assim, todos os infinitos planos paralelos a* $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ *têm equação geral do tipo* $\Pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$*, na qual* d_1 *é o elemento que diferencia um plano de outro. O valor de* d *está identificado quando se conhece um ponto do plano.*

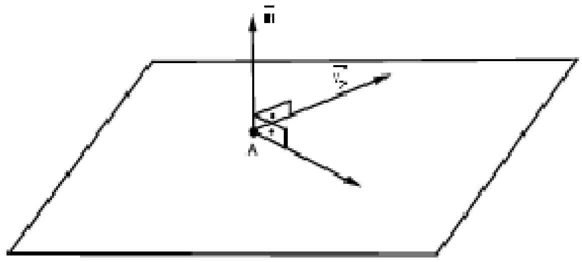
Exemplo 4.3.4. *Escrever a equação geral do plano* Π *que passa pelo ponto* $A(3, 1, -4)$ *e é paralelo ao plano* $\Pi_1 \ : \ 2x - 3y + z - 6 = 0$*.*
Solução: *Link da solução.*

Exemplo 4.3.5. *Determinar a equação geral do plano que passa pelo ponto* $A(2, 1, -2)$ *e é perpendicular à reta* $r : \begin{cases} x &= -4 + 3t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= t \end{cases}$.
Solução: *Link da solução.*

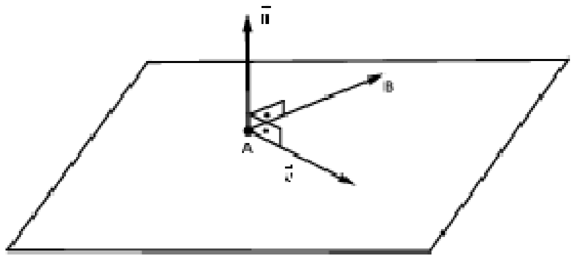
4.3.2 Determinação de um Plano

Recordamos que um plano é determinado por um dos seus pontos e por um vetor normal a ele. Existem outras formas de determinação de um plano nas quais estes dois elementos (ponto e vetor normal) ficam bem evidentes. Algumas destas formas serão apresentadas a seguir.

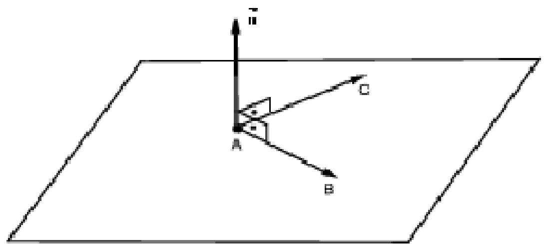
1. $A \in \Pi$ e $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são vetores não colineares paralelos a Π.



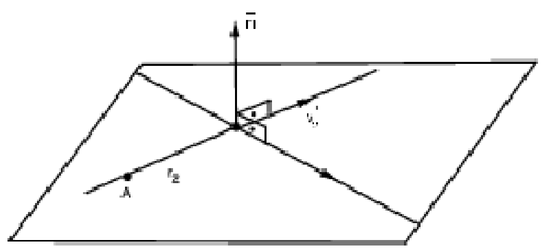
2. A, $B \in \ \pi$ e $\vec{v}$ é paralelo a Π e não colinear a $\overrightarrow{AB}$.



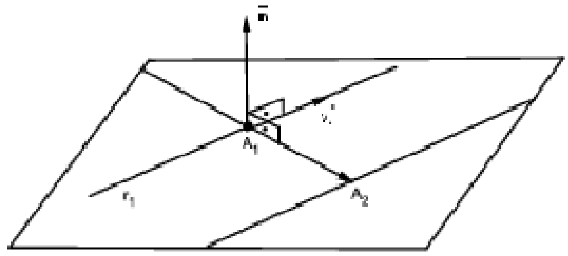
3. A, B e $C \ \in \ \Pi$ e não estão em linha reta.



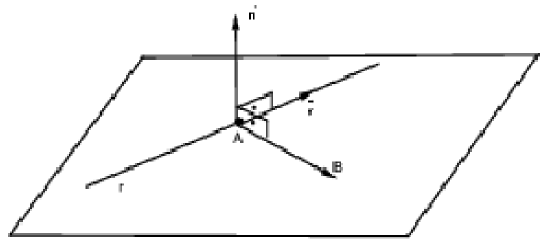
4. Π contém duas retas r_1 e r_2 concorrentes.



5. Π contém duas retas r_1 e r_2 paralelas.



6. Π contém uma reta r e um ponto $B \notin r$.



Exemplo 4.3.6. *Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto $A(1, -3, 4)$ e é paralelo aos vetores $u = (3, 1, -2)$ e $v = (1, -1, 1)$.*

Solução: *Link da solução.*

Observação 4.3.3. *Utilizamos, no exemplo dado acima, para determinar a equação geral do plano, um vetor normal $\vec{\eta}$ obtido através do produto vetorial de dois vetores-base desse plano. Vamos mostrar, retomando o exemplo dado, um outro modo de se obter a equação geral do plano.*

Nesse problema, o plano passa pelo ponto $A(1, -3, 4)$ e é paralelo aos vetores $u = (3, 1, -2)$ e $v = (1, -1, 1)$.

Notemos que se $P(x, y, z)$ é um ponto qualquer do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, u e v são coplanares e, portanto, o produto misto deles é nulo, isto é: $\overrightarrow{AP} \cdot (u \times v) = 0$.

Assim, obtemos a equação geral do plano desenvolvendo o determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x+5y+4z-2=0.$$

Exercício 4.3.1. *Estabeleça a equação geral do plano determinado pelos pontos* $A(2,1,-1)$*,* $B(0,-1,1)$ *e* $C(1,2,1)$*.*

4.3.3 Planos Paralelos aos Eixos e aos Planos Coordenados

Dado um plano Π, cuja equação geral é dada por

$$\Pi : ax+by+cz+d=0$$

onde $\overrightarrow{\eta}=(a,b,c)$ é um vetor normal a Π e a, b e c não são todos nulos.

Nesta subseção exibimos os casos particulares quando uma ou duas componentes de $\overrightarrow{\eta}$ são nulas ou quando $d=0$.

Observação 4.3.4. *Para um auxílio na visualização dos casos particulares, que são apresentados abaixo, acesse o link* `https://www.geogebra.org/m/VXMuWTtE`

Planos que passam pela origem

Se o plano $ax+by+cz+d=0$ passa pela origem obtemos que $d=0$. Logo, a equação

$$ax+by+cz=0$$

representa a equação de um plano que passa pela origem.

Planos Paralelos aos Eixos Coordenados

Se apenas uma da componentes do vetor normal $\overrightarrow{\eta}=(a,b,c)$ é nula, então o vetor é ortogonal a um dos eixos coordenados. Portanto, o plano Π é paralelo ao mesmo eixo.

(I) Se $a = 0$ obtemos $\overrightarrow{\eta} = (0, b, c) \perp Ox$, logo $\Pi // Ox$ e a equação geral dos planos paralelos ao eixo Ox são da forma

$$by + cz + d = 0.$$

(II) Se $b = 0$ obtemos $\overrightarrow{\eta} = (a, 0, c) \perp Oy$, logo $\Pi // Oy$ e a equação geral dos planos paralelos ao eixo Oy são da forma

$$ax + cz + d = 0.$$

(III) Se $c = 0$ obtemos $\overrightarrow{\eta} = (a, b, 0) \perp Oz$, logo $\Pi // Oz$ e a equação geral dos planos paralelos ao eixo Oz são da forma

$$ax + by + d = 0.$$

Observação 4.3.5.

1. *A variável ausente na equação indica que o plano é paralelo ao eixo desta variável.*

2. *A equação $ax + by + d = 0$ representa um plano paralelo ao eixo Oz no espaço $\mathbb{R}^3$. Entretanto, esta mesma equação, interpretada no plano $\mathbb{R}^2$, representa uma reta.*

Planos Paralelos aos Planos Coordenados

Se duas das componentes do vetor normal $\overrightarrow{\eta} = (a, b, c)$ são nulas, então o vetor $\overrightarrow{\eta}$ é colinear a um dos vetores $\overrightarrow{i}$ ou $\overrightarrow{j}$ ou $\overrightarrow{k}$. Portanto, o plano Π é paralelo ao plano dos outros dois vetores.

(I) Se $a = b = 0$ obtemos $\overrightarrow{\eta} = (0, 0, c) = c(0, 0, 1) = c\overrightarrow{k}$, logo $\Pi \parallel xOy$ e a equação geral dos planos paralelos ao plano xOy é da forma

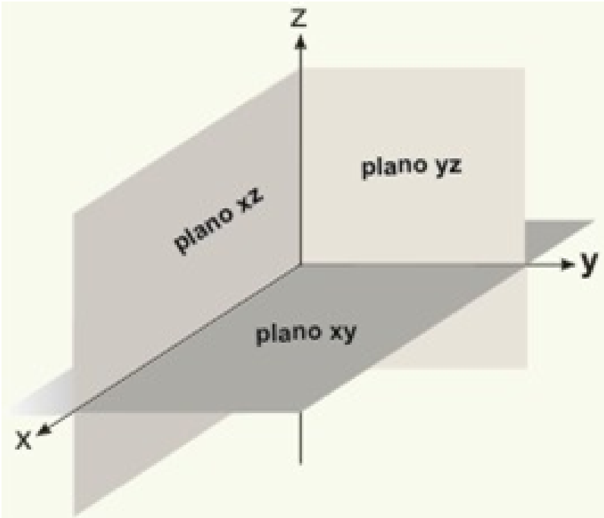
$$z = k.$$

(II) Se $a = c = 0$ obtemos $\overrightarrow{\eta} = (0, b, 0) = b(0, 1, 0) = b\overrightarrow{j}$, logo $\Pi \parallel xOz$ e a equação geral dos planos paralelos ao plano xOz é da forma

$$y = k.$$

(III) Se $b = c = 0$ obtemos $\overrightarrow{\eta} = (a, 0, 0) = a(1, 0, 0) = a\overrightarrow{i}$, logo $\Pi \parallel yOz$ e a equação geral dos planos paralelos ao plano yOz é da forma

$$x = k.$$



Observação 4.3.6. *Os planos coordenados são planos particulares destes e suas equação são:*

plano xOy *tem a equação da forma* $z = 0$*;*

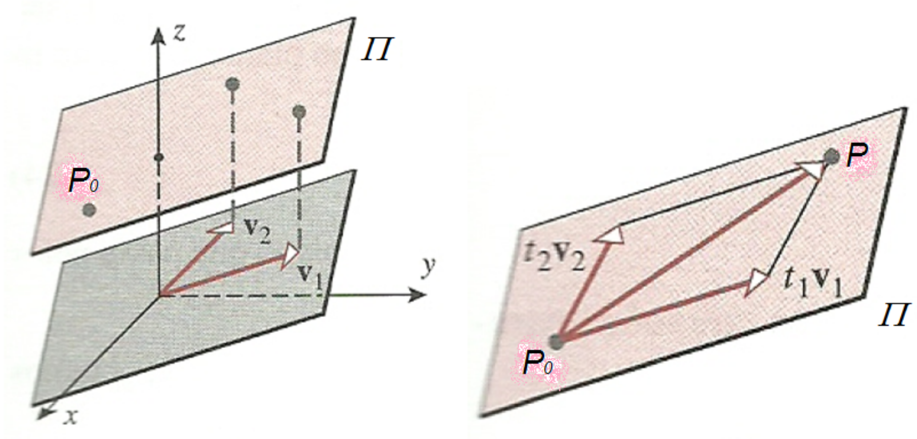
plano xOz *tem a equação da forma* $y = 0$*;*

plano yOz *tem a equação da forma* $x = 0$*.*

4.3.4 Equação Vetorial e Equações Paramétricas do Plano

Embora as equações ponto-normais de plano sejam úteis, existem muitas aplicações nas quais é preferível ter equações vetoriais ou paramétricas de um plano.

Observação 4.3.7. *Recorde que um plano* Π *pode ser determinado de modo único especificando um ponto* P_0 *em* Π *e dois vetores não nulos* v_1 *e* v_2 *que são paralelos a* Π *e não são múltiplos escalares um do outro.*



Se P é um ponto qualquer do plano Π e se v_1 e v_2 estão posicionados com seus pontos iniciais em P_0, então tomando multiplos escalares convenientes de v_1 e v_2, podemos criar um paralelogramo com lados adjacentes t_1v_1 e t_2v_2 no qual $\overrightarrow{P_0P}$ é a diagonal dada pela soma $\overrightarrow{P_0P} = t_1v_1 + t_2v_2$.

Por fim, note que à medida que as variáveis t_1 e t_2, que são parâmetros, variam de $-\infty$ a ∞, o ponto P nessa fórmula varre todo o plano Π.

Definição 8. *A equação $P = P_0 + t_1v_1 + t_2v_2 \quad (-\infty < t_1 < \infty$ e $-\infty < t_2 < \infty)$ é dita uma equação vetorial do plano pelo ponto P_0 que é paralelo a v_1 e v_2.*

Notação: $\Pi: \ P = P_0 + t_1v_1 + t_2v_2$

Observação 4.3.8. *Em termos de componentes*

$$\Pi : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t_1(a_1, b_1, c_1) + t_2(a_2, b_2, c_2)$$

Definição 9. *Dado $\Pi : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t_1(a_1, b_1, c_1) + t_2(a_2, b_2, c_2)$ a equação vetorial do plano pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ que é paralelo a $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$, definimos as equações paramétricas do plano por:*

$$\Pi : \begin{cases} x = & x_0 + a_1t_1 + a_2t_2 \\ y = & y_0 + b_1t_1 + b_2t_2 \\ z = & z_0 + c_1t_1 + c_2t_2 \end{cases}, \quad -\infty < t_1 < \infty \text{ e } -\infty < t_2 < \infty.$$

Exemplo 4.3.7. *Encontre uma equação vetorial e as equações paramétricas do plano* Π *que passa pela origem de* $\mathbb{R}^3$ *e é paralelo aos vetores* $v_1 = (1, -2, 3)$ *e* $v_2 = (4, 0, 5)$*. Depois determine 3 pontos no plano obtido.*

Solução: *Link da solução.*

Exemplo 4.3.8. *Encontre uma equação vetorial do plano* Π*, cujas equações paramétricas são* $\Pi : \begin{cases} x = 4 + 5t_1 - t_2 \\ y = 2 - t_1 + 8t_2 \\ z = t_1 + t_2 \end{cases}$.

Solução: A partir das equações paramétricas do plano Π *obtemos* $P_0 = (4, 2, 0) \in \Pi$ *e,* $v_1 = (5, -1, 1)$ *e* $v_2 = (-1, 8, 1)$ *vetores paralelos ao plano* Π.

Logo, a equação vetorial do plano Π *é dada por*

$$\Pi : \quad (x, y, z) = (4, 2, 0) + t_1(5, -1, 1) + t_2(-1, 8, 1), \qquad t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3.9. *Encontre as equações paramétricas do plano* $\Pi : x - y + 2z = 5$.

Solução: Note que o plano Π *é dado pela equação geral, ou seja, temos uma equação com três variáveis.*

Assim, podemos isolar umas das variáveis, por exemplo, ao isolarmos a variável x*, obtemos* $x = y - 2z + 5$.

Como a variável x *é dependente de duas variáveis, podemos tomar* $t_1 = y$ *e* $t_2 = z$*. Consequentemente, obtemos que as equações paramétricas do plano* Π *são dadas por*

$$\Pi : \begin{cases} x = 5 + t_1 - 2t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases} \qquad t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercício 4.3.2. *Encontre as equações paramétricas do plano que passa* $A(2, 1, 3)$ *e é paralelo aos vetores* $u = (-3, -3, 1)$ *e* $v = (2, 1, -2)$.

Exercício 4.3.3. *Determinar as equações paramétricas do plano determinado pelos pontos* $A(5,7,-2), B(8,2,-3)$ *e* $C(1,2,4)$.

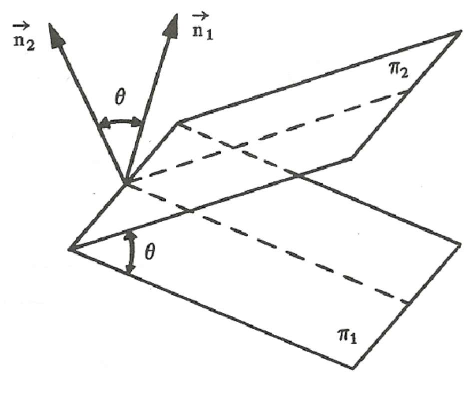
4.4 Ângulo entre Dois Planos

Definição 10. *Sejam os planos* $\Pi_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ *e* $\Pi_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$, *com vetores normais* $\vec{\eta_1} = (a_1, b_1, c_1)$ *e* $\vec{\eta_2} = (a_2, b_2, c_2)$, *respectivamente.*

Chama-se **ângulo de dois planos** $\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ *e* $\Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ *o menor ângulo que o vetor normal* $\overrightarrow{\eta_1} = (a_1, b_1, c_1)$ *de* Π_1 *forma com o vetor normal* $\overrightarrow{\eta_2} = (a_2, b_2, c_2)$ *de* Π_2. *Sendo* θ *este ângulo, tem-se:*

$$\cos\theta = \frac{|\vec{\eta_1} \cdot \vec{\eta_2}|}{||\vec{\eta_1}||.||\vec{\eta_2}||}$$

com $0 \leq \theta \leq \dfrac{\Pi}{2}$.

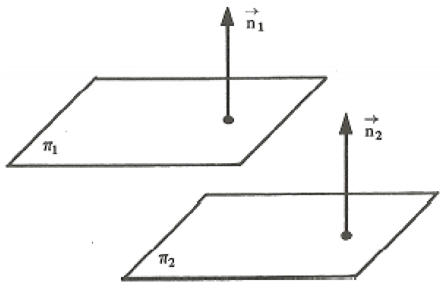


Condição de Paralelismo e Perpendicularismo de Dois Planos

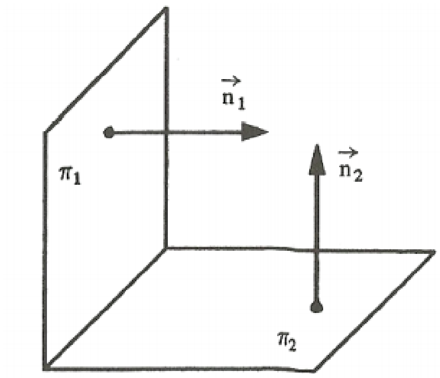
Sejam Π_1 e Π_2 planos com $\overrightarrow{\eta_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{\eta_2} = (a_2, b_2, c_2)$ vetores normais, respectivamente.

1. $\Pi_1 // \Pi_2$, se $\vec{\eta_1} // \vec{\eta_2}$. Isto é, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

   Se além dessas igualdades tivermos $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$ os planos são coincidentes.



2. $\Pi_1 \perp \Pi_2$, se $\vec{\eta_1} \perp \vec{\eta_2}$. Isto é, se $\overrightarrow{\eta_1} \cdot \overrightarrow{\eta_2} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.



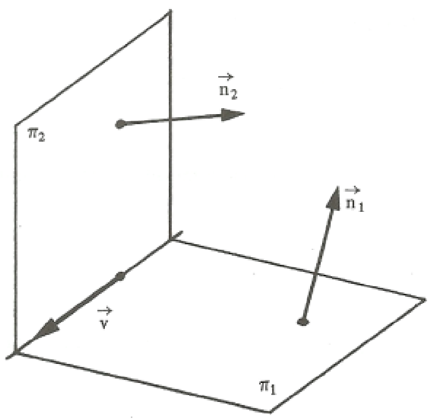
Observação 4.4.1. *As condições de paralelismo e perpendicularismo de dois planos são as mesmas de seus respectivos vetores normais.*

Exemplo 4.4.1. *Determinar o ângulo entre os planos* $\Pi_1 : 2x - 3y + 5z - 8 = 0$ *e* $\Pi_2 : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$.

Solução: *Link da solução.*

4.4.1 Interseção de Dois Planos

A interseção de dois planos não paralelos é uma reta r. E mais, recorde que uma reta está determinada quando se conhece dois de seus pontos ou um ponto e seu vetor diretor. E, assim um ponto pertence à reta interseção se suas coordenadas satisfazem simultaneamente as equações dos dois planos.



Exemplo 4.4.2. *Determine a intersecção dos planos não paralelos* $\Pi_1 : 5x-2y+z+7 = 0$ *e* $\Pi_2 : 3x - 3y + z + 4 = 0$.

Solução: *Link da solução.*

4.5 Distâncias

Nesta seção estudamos as distâncias entre pontos, entre pontos e retas, entre pontos e planos, entre retas, entre retas e planos e, finalmente entre planos.

4.5.1 Distância entre Dois Pontos

Definição 11. *A distância entre dois pontos* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *é dada por*

$$d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

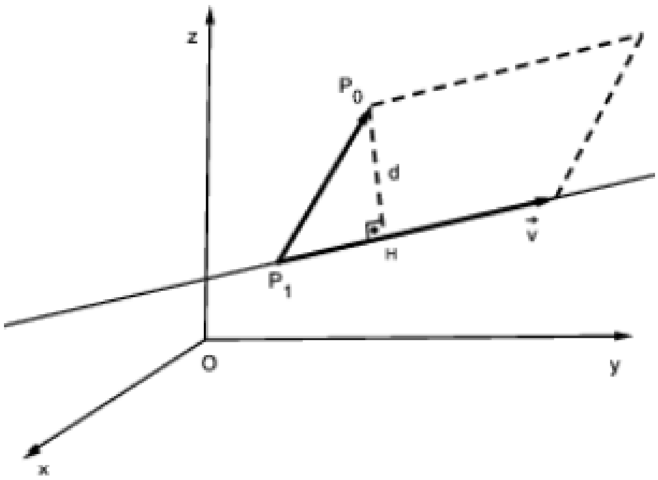
Exemplo 4.5.1. *Dado $P_1(1,2)$ e $P_2(3,2)$, calcule $d(P_1, P_2)$.*

Solução: *Link da solução.*

Exercício 4.5.1. *Dado $P_1(7,3,4)$ e $P_2(1,0,6)$, calcule $d(P_1, P_2)$.*

4.5.2 Distância de Um Ponto a Uma Reta

Seja r uma reta definida por um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ e seja $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer do espaço. Os vetores v e $\overrightarrow{P_1P_0}$ determinam um paralelogramo cuja altura corresponde distância d de P_0 a r.



Assim, temos a seguinte definição.

Definição 12. *A distância entre o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e a reta r dada por $r: P = P_1 + tv = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$ é*

$$d(P_0, r) = \frac{\|v \times \overrightarrow{P_1P_0}\|}{\|v\|}.$$

Exemplo 4.5.2. *Calcular a distância do ponto $P_0(2,0,7)$ à reta* $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{1}$.
Solução: *Link da solução.*

4.5.3 Distância entre Duas Retas

Considere as retas $r:\ P = P_0 + tu$ e $s:\ P = P_1 + tv$.

1. Se r e s são **retas concorrentes**, a distância d entre r e s é nula, ou seja,

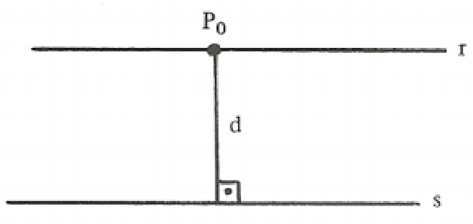
$$d(r,s) = 0$$

2. Se r e s são **retas paralelas**, a distância d entre r e s é a distância de um ponto qualquer P_0 de uma de uma delas à outra, isto é:

$$d(r,s) = d(P_0, s), P_0 \in r$$

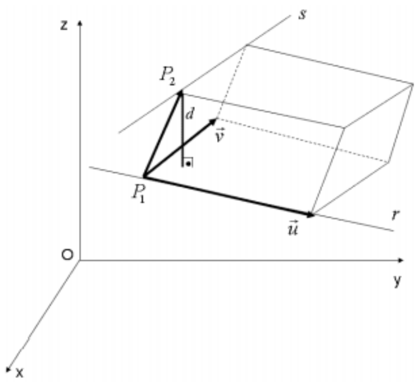
ou

$$d(r,s) = d(P_0, r), P_0 \in s$$



Assim, a distância entre duas retas paralelas se reduz ao cálculo da distância de um ponto à uma reta, ou seja, $d(P_0, r) = \dfrac{\|v \times \overrightarrow{P_1P_0}\|}{\|v\|}$.

3. Se r e s são **retas reversas** com vetores diretores u e v, respectivamente, e com $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$, temos que os vetores u, v e $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ determinam um paralelepípedo, cuja base é definida pelos vetores u e v e a altura corresponde à distância d entre as retas r e s, pois a reta s é paralela ao plano da base do paralelepípedo, uma vez que sua direção é a do vetor v.



Assim,

$$\text{Volume do Paralelepípedo } = \|u \times v\| \cdot d = |u \cdot (v \times \overrightarrow{P_1P_2})|,$$

e consequentemente obtemos

$$d = \frac{|(u \cdot (v \times \overrightarrow{P_1P_2}))|}{\|u \times v\|}.$$

Portanto,

$$d(r,s) = \frac{|(u \cdot (v \times \overrightarrow{P_1P_2})|}{\|u \times v\|}$$

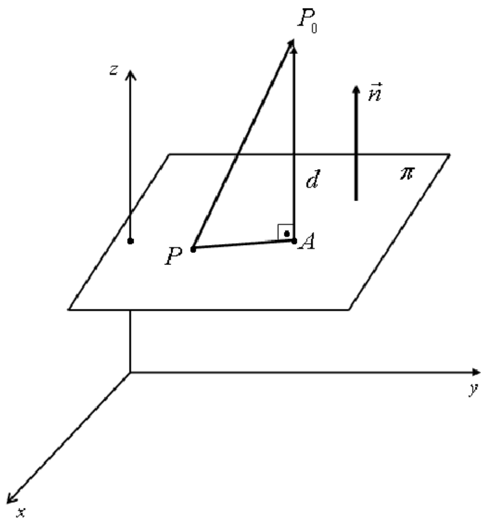
Exemplo 4.5.3. *Calcular a distância entre as retas* $r : \begin{cases} y &= 1 \\ x+2 &= \dfrac{z-4}{-2} \end{cases}$ *e* $s : \begin{cases} x &= 3 \\ y &= 2t-1 \\ z &= -t+3 \end{cases}$.

Solução: *Link da solução.*

Exercício 4.5.2. *Calcular a distância entre as retas* $r : \begin{cases} y &= -2x+3 \\ z &= 2x \end{cases}$ *e* $s : \begin{cases} x &= -1-2t \\ y &= 1+4t \\ z &= -3-4t \end{cases}$.

4.5.4 Distância de um Ponto a um Plano

Seja um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e um plano $\Pi : ax + by + cz + d = 0$. Seja A o pé da perpendicular conduzida por P_0 sobre o plano Π e $P(x, y, z)$ um ponto qualquer desse plano.



O vetor $\vec{\eta} = (a, b, c)$ é normal ao plano Π e, por conseguinte, o vetor $\overrightarrow{AP_0}$ tem a mesma direção de $\vec{\eta}$.

A distância d do ponto P_0 ao plano Π é:

$$d(P_0, \Pi) = ||\overrightarrow{AP_0}||$$

Observando que o vetor $\overrightarrow{AP_0}$ é a projeção do vetor $\overrightarrow{PP_0}$ na direção de $\vec{\eta}$, temos:

$$d(P_0, \Pi) = ||\overrightarrow{AP_0}|| = \left| \overrightarrow{PP_0} . \frac{\vec{\eta}}{||\vec{\eta}||} \right|$$

Mas, $\overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$

e

$$\frac{\vec{\eta}}{||\vec{\eta}||} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Logo,

$$d(P_0, \Pi) = \left|(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z).\frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 - ax + by_0 - by + cz_0 - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Em virtude de $P \in \Pi$ temos:

$d = -ax - by - cz$

portanto,

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Definição 13. *A distância entre um ponto* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *e um plano* $\Pi :\ ax+by+cz+d = 0$ *é dada por*

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemplo 4.5.4. *Determinar a distância do ponto* $P_0(-4, 2, 5)$ *ao plano* $\Pi : 2x + y + 2z + 8 = 0$.

Solução: *Pela definição, obtemos*

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|2 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|12|}{\sqrt{9}} = 4.$$

Portanto, $d(P_0, \Pi) = 4$.

4.5.5 Distância entre Dois Planos

A distância entre dois planos é definida somente para planos paralelos.

Definição 14. *Dados dois planos* $\Pi_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ *e* $\Pi_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$*, paralelos, a distância entre eles é dada por*

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1, \Pi_2),\ P_1 \in \Pi_1$$

ou

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_2, \Pi_1),\ P_2 \in \Pi_2.$$

Exemplo 4.5.5. *Dados os planos paralelos* $\Pi_1 : 2x - 2y + z - 5 = 0$ *e* $\Pi_2 : 4x - 4y + 2z + 14 = 0$ *verifique que* $d(\Pi_1, \Pi_2) = 4$.

Solução: *Link da solução.*

4.5.6 Distância de uma Reta a um Plano

A distância de uma reta a um plano é definida somente quando a reta é paralela ao plano, ou seja, o vetor diretor de r é paralelo ao plano Π.

Definição 15. *A distância de uma reta* $r : P = P_0+tv$ *a um plano* $\Pi : ax+by+cz+d = 0$ *é dada por*

$$d(r, \Pi) = d(P_0, \Pi),\ P_0 \in r.$$

Observação 4.5.1. $d(P_0, \Pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exemplo 4.5.6. *Estude a distância da reta* $r : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ *ao planos* xOz *e* yOz.

Solução: *Link da solução.*

4.6 Exercícios sobre Retas, Planos e Distâncias

Exercício 4.6.1. *Esboce a reta cuja equação vetorial é dada por:*

(a) $(x, y) = t(2, 3)$ *(b)* $(x, y) = (1, 1) + t(1, -1)$.

Exercício 4.6.2. *Encontre equações vetoriais e paramétricas da reta determinada pelos pontos dados:*

(a) $(1, 2)$ *e* $(-5, 6)$ *(b)* $(1, 2, 3)$ *e* $(-1, -2, -3)$.

Exercício 4.6.3. *Determine equações vetoriais e paramétricas da reta que é paralela a u e passa pelo ponto P. Use a equação vetorial para encontrar dois pontos da reta distintos de* P_0.

(a) $u = (1, 2)$ *e* $P_0(1, 1)$ *(b)* $u = (1, -1, 1)$ *e* $P_0(2, 0, 3)$.

Exercício 4.6.4. *Determine a equação ponto-normal do plano que passa por P e tem normal* $\overrightarrow{\eta}$.

(a) $\overrightarrow{\eta} = (3, 2, 1)$ *e* $P(-1, -1, -1)$ *(b)* $\overrightarrow{\eta} = (1, 1, 4)$ *e* $P(3, 5, -2)$

Exercício 4.6.5. *(a) Encontre a equação vetorial da reta cujas equações paramétricas são* $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$

(b) Encontre a equação vetorial do plano cujas equações paramétricas são $\begin{cases} x = 1 + 2t_1 + t_2 \\ y = -2 - t_1 + 5t_2 \\ z = 4t_1 - t_2 \end{cases}$

(c) Encontre equações paramétricas do plano $3x + 4y - 2z = 4$.

Exercício 4.6.6. *Um plano pode ser determinado de modo único especificando três pontos não colineares. Se P_0, P_1 e P_2 são três pontos não-colineares, então os vetores $v_1 = \overrightarrow{P_0P_1}$ e $v_2 = \overrightarrow{P_0P_2}$ são paralelos aos planos de modo que uma equação vetorial do plano é*

$$P = P_0 + t_1v_1 + t_2v_2$$

Use este resultado para encontrar a equação vetorial e as equações paramétricas do plano que passa pelos pontos:

(a) $P(2,-4,5), Q(-1,4,-3), R(1,10,-7)$ *(b)* $P(1,2,4), Q(1,-1,6), R(1,4,8)$.

Exercício 4.6.7. *Encontre equações paramétricas do plano que é paralelo ao plano $3x + 2y - z = 1$ e passa pelo ponto $P(1,1,1)$.*

Exercício 4.6.8. *Quais dos seguintes planos são paralelos ao plano $3x + y - 2z = 5$, se houver algum?*

(a) $x + y - z = 3$ *(b)* $3x + y - 2z = 0$.

Exercício 4.6.9. *Encontre equações paramétricas da reta que é perpendicular ao plano $x + y + z = 0$ e passa pelo ponto $P(2,0,1)$.*

Exercício 4.6.10. *Determine as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $P(-2,1,7)$ e é perpendicular à reta de equações paramétricas* $\left\{\begin{array}{c} x = 4 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -5t \end{array}\right.$.

Exercício 4.6.11. *Os planos abaixo são paralelos?*

(a) $\pi_1 : 3x - y + z - 4 = 0$, $\pi_2 : x + 2z = -1$;

(b) $\pi_1 : x - 2y + 3z = 4$, $\pi_2 : -2x + 5y + 4z = -1$.

Exercício 4.6.12. *Determine equações paramétricas da reta de intersecção dos planos dados, se houver intersecção.*

(a) $7x-2y+3z=-2$ *e* $-3x+y+2z+5=0$; *(b)* $2x+3y-5z=0$ *e* $4x+6y-10z=8$.

Exercício 4.6.13. *Verifique se os pontos* $P(5,-5,6)$ *e* $Q(4,-1,12)$ *pertencem a reta*

$$r:\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-2}.$$

Exercício 4.6.14. *Determine um ponto e um vetor diretor em cada uma das seguintes retas:*

(a) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}=\frac{z-3}{4} \\ y=1 \end{cases}$ *(b)* $\begin{cases} x=2y \\ z=3 \end{cases}$ *(c)* $\begin{cases} x=2t \\ y=-1 \\ z=2-t \end{cases}$.

Exercício 4.6.15. *Determinar o ângulo entre as seguintes retas:*

(a) $r:\begin{cases} x=-2-2t \\ y=2t \\ z=3-4t \end{cases}$ *e* $s:\frac{x}{4}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-1}{2}$

(b) $r:\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ *e* $s:\begin{cases} x=1 \\ \frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{3} \end{cases}$

(c) $r:\begin{cases} y=-2x-1 \\ z=x+2 \end{cases}$ *e* $s:x=2;\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-3}$.

Exercício 4.6.16. *Determine a equação geral do plano paralelo ao plano* $\Pi:2x-3y-z+5=0$ *e que contém o ponto* $A(4,-1,2)$.

Exercício 4.6.17. *Mostrar que o ponto* $P_1(2,2,3)$ *é equidistante dos pontos* $P_2(1,4,-2)$ *e* $P_3(3,7,5)$.

Exercício 4.6.18. *Calcule a distância do ponto* $P(1,2,3)$ *à reta* $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Exercício 4.6.19. *Seja o triângulo* ABC *de vértices* $A(-3,1,4)$, $B(-4,-1,0)$ *e* $C(-4,3,5)$. *Calcule a medida da altura relativa ao lado* BC.

Exercício 4.6.20. *Calcular a distância entre as retas* r *e* s *nos seguintes casos:*

(a) $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ *e* $s : \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ *(b)* $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -t \end{cases}$ *e* s *: eixo dos* x.

(c) $r : x = y = z - 2$ *e* $s : \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x - 3 \end{cases}$.

Exercício 4.6.21. *Determinar a distância do ponto* $P(2,-1,2)$ *a cada um dos planos:*

(a) $\Pi : 2x - 2y - z + 3 = 0$ *(b)* $\Pi : 2x + y = 3$.

Exercício 4.6.22. *Achar a distância da origem a cada um dos planos:*

(a) $\Pi : 2x - 4y + 20 = 0$ *(b)* $\Pi : \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = 1 + 3h - t \\ z = -t \end{cases}$.

Exercício 4.6.23. *Escrever as equações dos planos paralelos ao plano* $\Pi : 3x - 2y - 6z - 5 = 0$ *que distam 3 unidades da origem.*

Exercício 4.6.24. *Calcule a distância entre os planos paralelos:*

(a) $\Pi_1 : 2x + 2y + 2z - 5 = 0$ *e* $\pi_2 : x + y + z - 3 = 0$

(b) $\Pi_1 : x - 2z + 1 = 0$ *e* $\pi_2 : 3x - 6z - 8 = 0$.

Exercício 4.6.25. *Calcule a distância entre as retas:* $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ *e* $s : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$.

Exercício 4.6.26. *Calcule a distância do ponto* $P(1,0,2)$ *ao plano* $x + y - z = 0$.

Exercício 4.6.27. *Seja a reta* r *que passa pelos pontos* $A(1,0,1)$ *e* $B(0,1,1)$. *Calcule a distância do ponto* $C(2,1,2)$ *à reta* r.

Exercício 4.6.28. *Seja* α *o plano que passa pela origem e é perpendicular à reta que une os pontos* $A(1,0,0)$ *e* $B(0,1,0)$. *Determine a distância do ponto* $C(0,0,1)$ *ao plano* α.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BIANCHINI, Waldecir. *Planos.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/VXMuWTtE

[3] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[4] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[5] CASSOL, Henrique L. G. *Equações Paramétricas da reta.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/RqkquH6P

[6] LEMKE, Raiane. *Retas no $\mathbb{R}^3$: Parametrização e gráfico de retas no $\mathbb{R}^3$.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4

[7] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[8] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[9] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[10] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[11] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[12] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.