Transformações Geométricas 2D: Parte 2

Disciplina: Computação Gráfica (BCC35F)
Curso: Ciência da Computação

Prof. Walter T. Nakamura
waltertakashi@utfpr.edu.br

Campo Mourão - PR

Baseados nos materiais elaborados pelas professoras Aretha Alencar (UTFPR), Rosane Minghim (USP) e Pelo professor Aldo Von Wangenheim (UFSC)

Coordenadas Homogêneas

- As três transformações básicas podem ser expressas por:

$$P' = M_1 \cdot P + M_2$$

- $\mathbf{M_1}$**:** matriz 2 × 2 com fatores multiplicativos
- $\mathbf{M_2}$**:** matriz coluna com termos para translação
- Para se aplicar uma sequencia de transformações, esse formato não ajuda
  - Eliminar a adição de matrizes permite escrever uma sequência de transformações como uma multiplicação de matrizes

Coordenadas Homogêneas

- A ideia geral é a de que todo problema em um espaço **n-dimensional** possui pelo menos um equivalente em um espaço **(n+1)-dimensional**
  - A obtenção de um resultado no espaço (n+1)-dimensional é muitas vezes muito mais **fácil** do que em um espaço n-dimensional
  - Os resultados são então **projetados de volta** ao espaço n-dimensional
  - A representação em coordenadas homogêneas de um ponto em um espaço n-dimensional é a representação deste ponto em um espaço (n+1)-dimensional

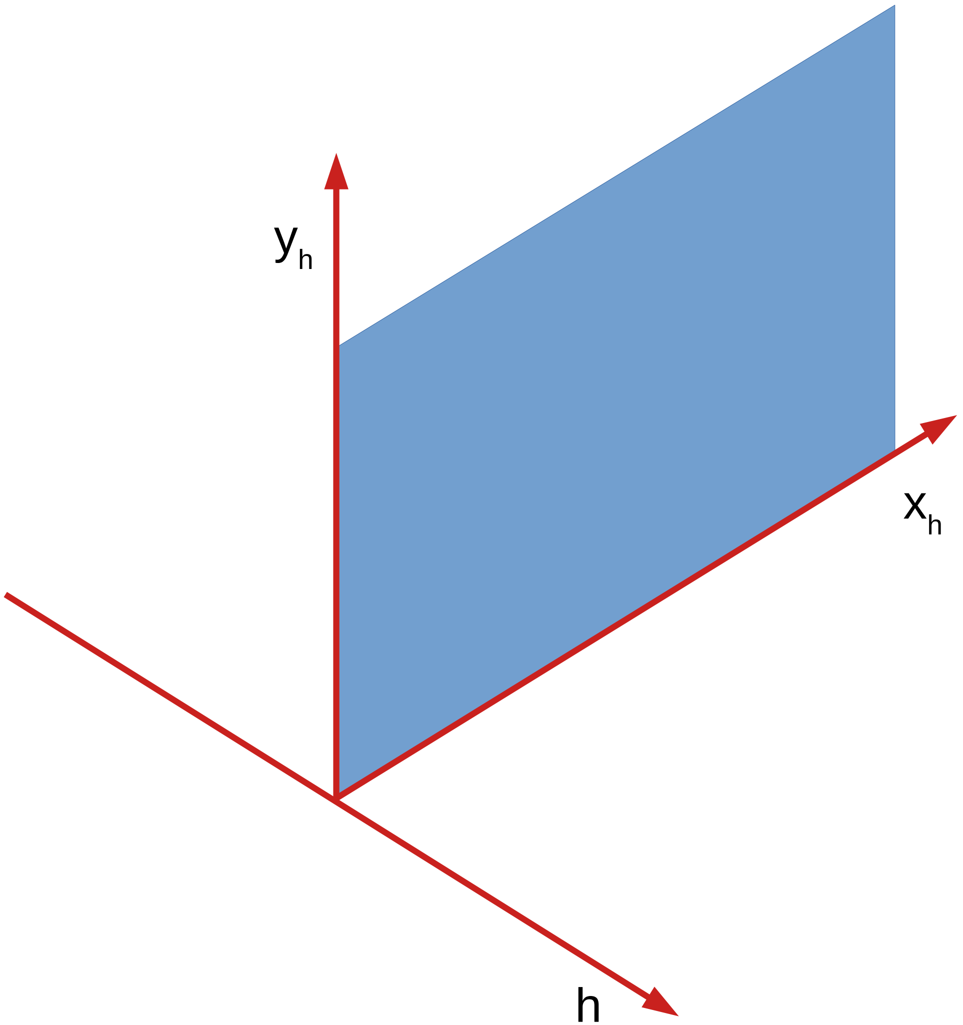
Coordenadas Homogêneas

- A representação de um ponto $P(x,y)$ em um sistema de coordenadas homogêneo é:

$$P(h \cdot x, h \cdot y, h) = P(x_h, y_h, h)$$

  - para qualquer $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$
  - h é chamado de **fator de escala** e $x = x_h/h$ e $y = y_h/h$
- Nós sempre utilizaremos $h = 1$ e a divisão acima é desnecessária
- Podemos imaginar um sistema de coordenadas homogêneo 2D como o posicionamento do plano $\mathbf{xy}$ na posição $\mathbf{h}$ do eixo $\mathbf{z}$ de um sistema 3D qualquer

Coordenadas Homogêneas



Coordenadas Homogêneas

- Assim, podemos representar **qualquer operação geométrica 2D** como uma matriz 3x3
  - Podemos realizar toda operação geométrica sobre um ponto como uma multiplicação de matrizes, onde uma é o ponto e a outra a matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas - Implicações

- Temos agora **três matrizes** que podemos usar para multiplicar os pontos e fazer uma **transformação** que usa sempre o <u>mesmo algoritmo</u>
  - Uma função transform() pode receber uma lista de pontos e uma matriz
    - A função não precisa saber o que está transformando
  - Se tudo é multiplicação de matrizes, é possível resolver o problema de **agilização das operações gráficas** para permitir operações em tempo real
    - A GPU possui um conjunto de processadores pequenos especializados em multiplicar matrizes
  - Possibilita a **composição/concatenação** de operações

Coordenadas Homogêneas: Translação 2D

- A **translação** no espaço homogêneo é dada por:

$$x_h' = 1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h$$

$$y_h' = 0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h$$

$$h = 0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h$$

- Por conveniência, com $h = 1$, definimos a **translação 2D** usando coordenadas homogêneas na forma matricial por:

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{t_x}, \boldsymbol{t_y}) \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas: Rotação 2D

- Uma **rotação 2D** pode ser definida usando coordenadas homogêneas na forma matricial:

$$\boldsymbol{P'} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas: Escala 2D

- Uma **escala 2D** pode ser definida usando coordenadas homogêneas na forma matricial:

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{s_x}, \boldsymbol{s_y}) \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação inversa

- Para a **translação inversa 2D**, inverte-se o sinal dos offsets:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação inversa

- Uma **rotação inversa 2D** é obtida trocando o ângulo de rotação por seu negativo:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Isso rotaciona no **sentido horário**
  - $R^{-1} = R^T$

Escala inversa

- O **inverso da escala 2D** é obtido trocando os parâmetros por seus inversos:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações 2D compostas

- Usando representações matriciais homogêneas, uma **sequência de transformações** pode ser representada como uma única matriz obtida a partir de multiplicações de matrizes de transformação

$$P' = M_2 \cdot M_1 \cdot P$$

$$P' = \left(M_2 \cdot M_1 \right) \cdot P$$

$$P' = M \cdot P$$

- A transformação é dada por M ao invés de M_1 e M_2

Compondo Translações

- Para se compor **duas translações** podemos fazer:

$$P' = T(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \{ T(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot P \}$$

$$P' = \{ T(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot T(t_{1_x}, t_{1_y}) \} \cdot P$$

$$P' = T(t_{2_x} + t_{1_x}, t_{2_y} + t_{1_y}) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2_x} + t_{1_x} \\ 0 & 1 & t_{2_y} + t_{1_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo Rotações

- Para se compor **duas rotações** podemos fazer:

$$P' = R(\theta_2) \cdot \{R(\theta_1) \cdot P\}$$

$$P' = \{R(\theta_2) \cdot R(\theta_1)\} \cdot P$$

$$P' = R(\theta_2 + \theta_1) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -sen(\theta_2) & 0 \\ sen(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -sen(\theta_1) & 0 \\ sen(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_2+\theta_1) & -sen(\theta_2+\theta_1) & 0 \\ sen(\theta_2+\theta_1) & \cos(\theta_2+\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo Escalas

- Para se compor **duas escalas** podemos fazer:

$$P' = S(s_{2_x}, s_{2_y}) \cdot \{ S(s_{1_x}, s_{1_y}) \cdot P \}$$

$$P' = \{ S(s_{2_x}, s_{2_y}) \cdot S(s_{1_x}, s_{1_y}) \} \cdot P$$

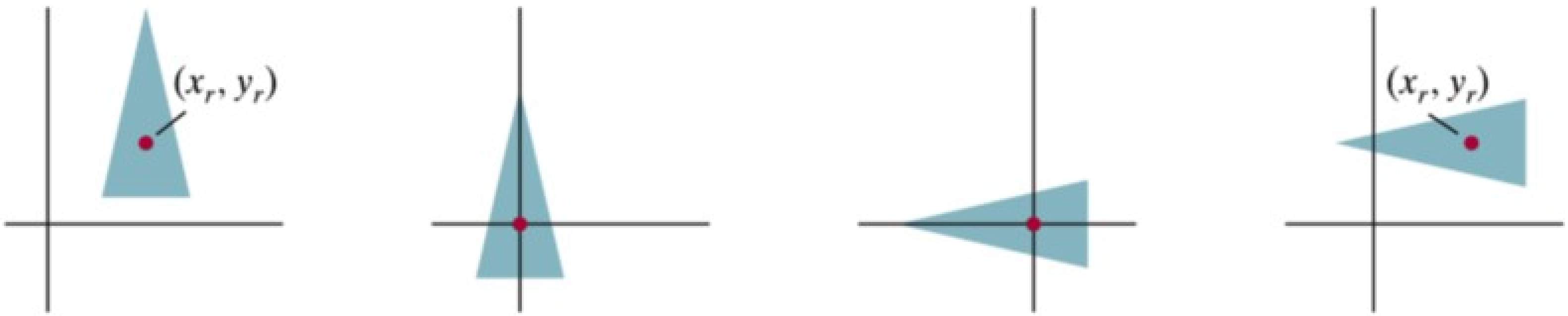
$$P' = S(s_{2_x} \cdot s_{1_x}, s_{2_y} \cdot s_{1_y}) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} s_{2_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{1_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{2_x} \cdot s_{1_x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2_y} \cdot s_{1_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Rotação com ponto de rotação (x_r, y_r) é feita combinando-se múltiplas transformações:
  - 1) Mova o ponto de rotação para a origem
  - 2) Execute a rotação
  - 3) Mova a ponto de rotação para a posição inicial



(a) Original Position of Object and Pivot Point

(b) Translation of Object so that Pivot Point (x_r, y_r) is at Origin

(c) Rotation about Origin

(d) Translation of Object so that the Pivot Point is Returned to Position (x_r, y_r)

Rotação 2D com Ponto de Rotação

- Rotação com ponto de rotação (x_r, y_r) é feita combinando-se múltiplas transformações:
  - 1) Mova o ponto de rotação para a origem
  - 2) Execute a rotação
  - 3) Mova a ponto de rotação para a posição inicial

$$R(x_r, y_r, \theta) = T(x_r, y_r) \cdot R(\theta) \cdot T^{-1}(x_r, y_r)$$

$$R(x_r, y_r, \theta) = T(x_r, y_r) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_r, -y_r) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala 2D com Ponto Fixo

- Escala com ponto fixo (x_f , y_f) também é feita combinando-se múltiplas transformações:
  - 1) Mova o ponto fixo para a origem
  - 2) Execute a escala
  - 3) Mova o ponto fixo para sua posição original

(a) Original Position of Object and Fixed Point

(b) Translate Object so that Fixed Point (x_f, y_f) is at Origin

(c) Scale Object with Respect to Origin

(d) Translate Object so that the Fixed Point is Returned to Position (x_f, y_f)

Escala 2D com Ponto Fixo

- Escala com ponto fixo (x_f , y_f) também é feita combinando-se múltiplas transformações:
  - 1) Mova o ponto fixo para a origem
  - 2) Execute a escala
  - 3) Mova o ponto fixo para sua posição original

$$S(x_f, y_f, s_x, s_y) = T(x_f, y_f) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T^{-1}(x_f, y_f)$$

$$S(x_f, y_f, s_x, s_y) = T(x_f, y_f) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_f, -y_f)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matrizes é **associativa**:

$$M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 = (M_3 \cdot M_2) \cdot M_1 = M_3 \cdot (M_2 \cdot M_1)$$

- Na **pós-multiplicação**, as transformações são especificadas na <u>ordem inversa</u> em que são aplicadas (M3 → M2 → M1)
- O OpenGL também usa pós-multiplicação

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matrizes **não é comutativa**:

$$M_2 \cdot M_1 \neq M_1 \cdot M_2$$

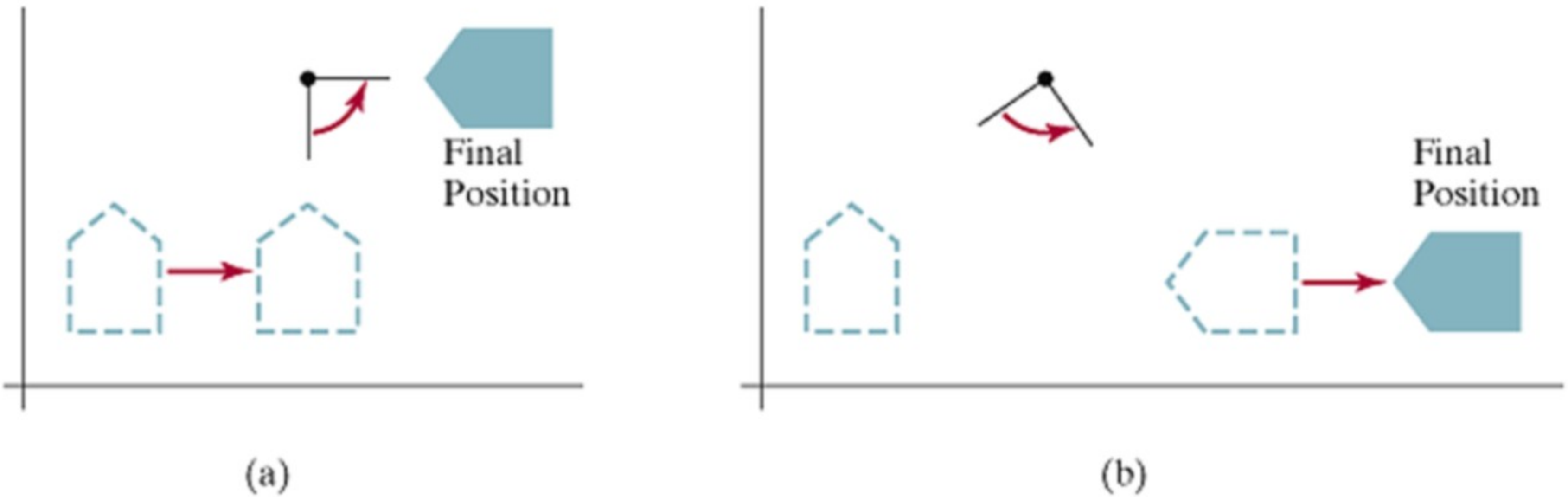


Figura: (a) primeiro o objeto é transladado depois rotacionado em 45º; (b) primeiro o objeto é rotacionado em 45º, depois transladado.

Exemplo

- Dado um quadrado bidimensional com vértices $P1 = (4, 4)$, $P2 = (6, 4)$, $P3 = (4, 6)$ e $P4 = (6, 6)$, dê a matriz composta de transformação geométrica necessária para rotacioná-lo em 45º usando o centroide do quadrado como ponto de rotação
- Dê também as coordenadas finais do quadrado após essa transformação
- **Dicas:** $\cos 45^{\circ} = \mathrm{sen}\ 45^{\circ} = \sqrt{2}/2$

Exemplo - Solução

- Dado um quadrado bidimensional com vértices P1 = (4, 4), P2 = (6, 4), P3 = (4, 6) e P4 = (6, 6), dê a matriz composta de transformação geométrica necessária para rotacioná-lo em 45º usando o centroide do quadrado como ponto de rotação
- **Dicas:** cos 45º = sen 45º = √2/2

$$R(x_r, y_r, \theta) = R(5, 5, 45^\circ) = T(5,5) \cdot R(45^\circ) \cdot T(-5,-5)$$

$$R(5,5,45^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(5,5,45^\circ) = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 5 \\ 0.7071 & 0.7071 & -2.0710 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Solução

- Dê também as coordenadas finais do quadrado após essa transformação
  - **Lembrando:** P1 = (x_1, y_1) = (4, 4)

$$P1' = R(5,5,45^\circ) \cdot P1$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 5 \\ 0.7071 & 0.7071 & -2.0710 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5 \\ 3.5857 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Solução

- Dê também as coordenadas finais do quadrado após essa transformação
  - **Lembrando:** P2 = (x_2, y_2) = (6, 4)

$$P2' = R(5,5,45^\circ)\cdot P2$$

$$\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 5 \\ 0.7071 & 0.7071 & -2.0710 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 6.4142 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Solução

- Dê também as coordenadas finais do quadrado após essa transformação
  - **Lembrando:** P3 = $(x_3, y_3) = (4, 6)$

$$P3' = R(5, 5, 45^\circ) \cdot P3$$

$$\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 5 \\ 0.7071 & 0.7071 & -2.0710 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3.5857 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Solução

- Dê também as coordenadas finais do quadrado após essa transformação
  - **Lembrando:** P4 = (x_4, y_4) = (6, 6)

$$P4' = R(5,5,45^\circ) \cdot P4$$

$$\begin{bmatrix} x'_4 \\ y'_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 5 \\ 0.7071 & 0.7071 & -2.0710 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'_4 \\ y'_4 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5 \\ 6.4142 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo - Solução

- Dê também as coordenadas finais do quadrado após essa transformação

$$P1' \approx (5, 3.5857)$$
$$P2' \approx (6.4142, 5)$$
$$P3' \approx (3.5857, 5)$$
$$P4' \approx (5, 6.4142)$$

Exercício

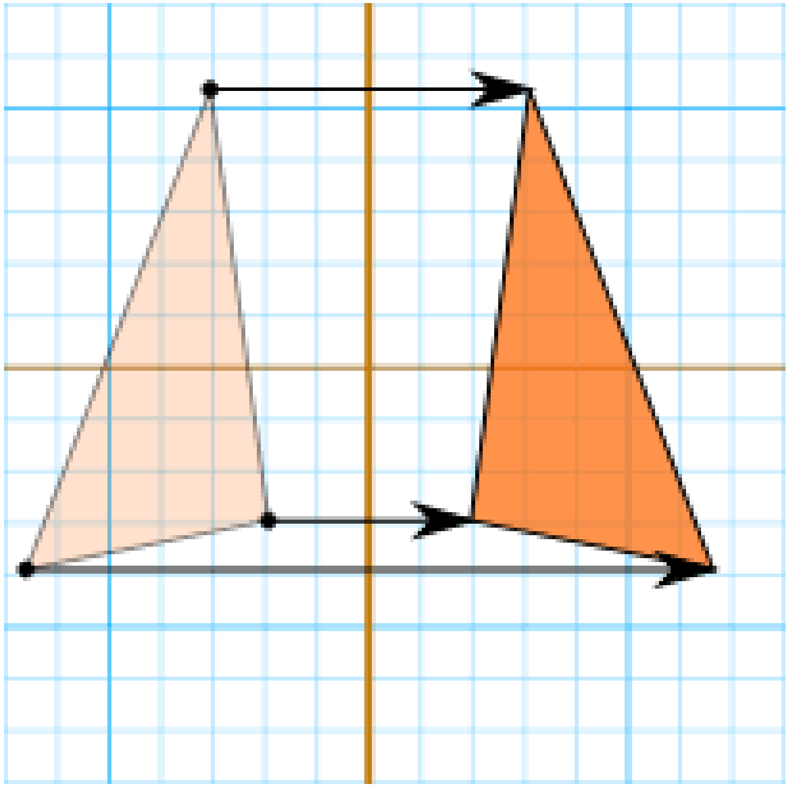
- Dado um triângulo 2D com vértices P1 = (3, 3), P2 = (7, 3) e P3 = (5, 7), dê a matriz composta de transformação geométrica necessária para rotacioná-lo em 60º usando o vértice P3 como ponto de rotação. Dê também as coordenadas finais do triângulo após essa transformação.
- **Dicas:** cos 60º = 1/2   sen 60º = √3/2

P1: (7.46, 3.26)
P2: (9.46, 6.73)
P3: (5, 7)

$$R(x_r, y_r, \theta) = T(x_r, y_r) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_r, -y_r) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P' = R(\theta) \cdot P}$$

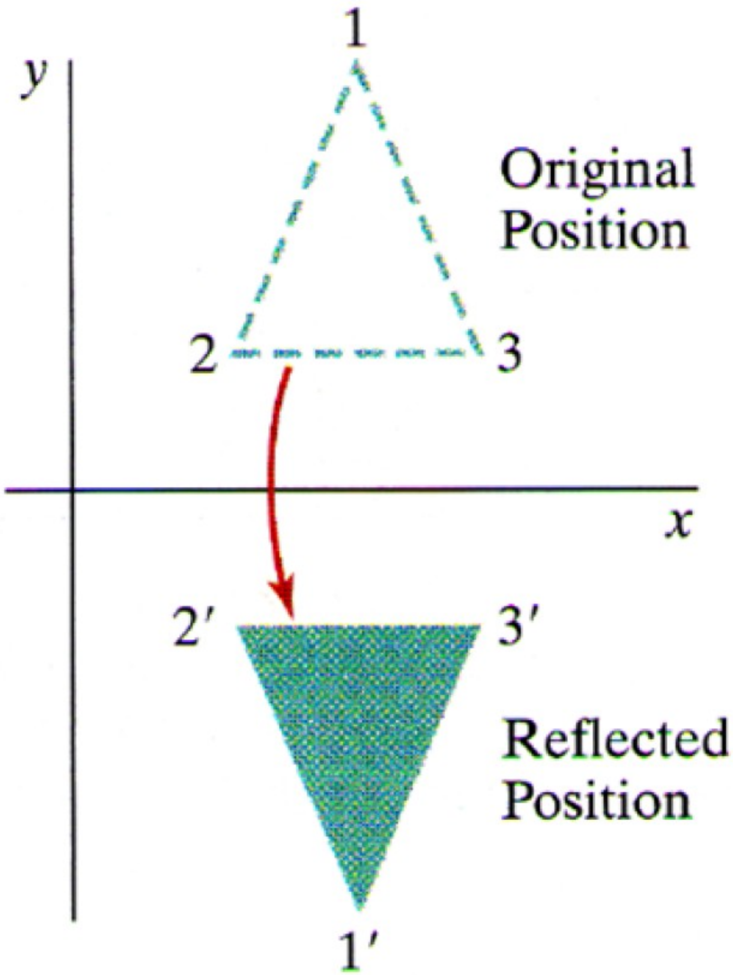


Outras Transformações 2D

Reflexão

- **Espelha-se** as coordenadas de um objeto relativo a um <u>eixo de reflexão</u>, rotacionando em um ângulo de **180º**
- Reflexão em $y = 0$:

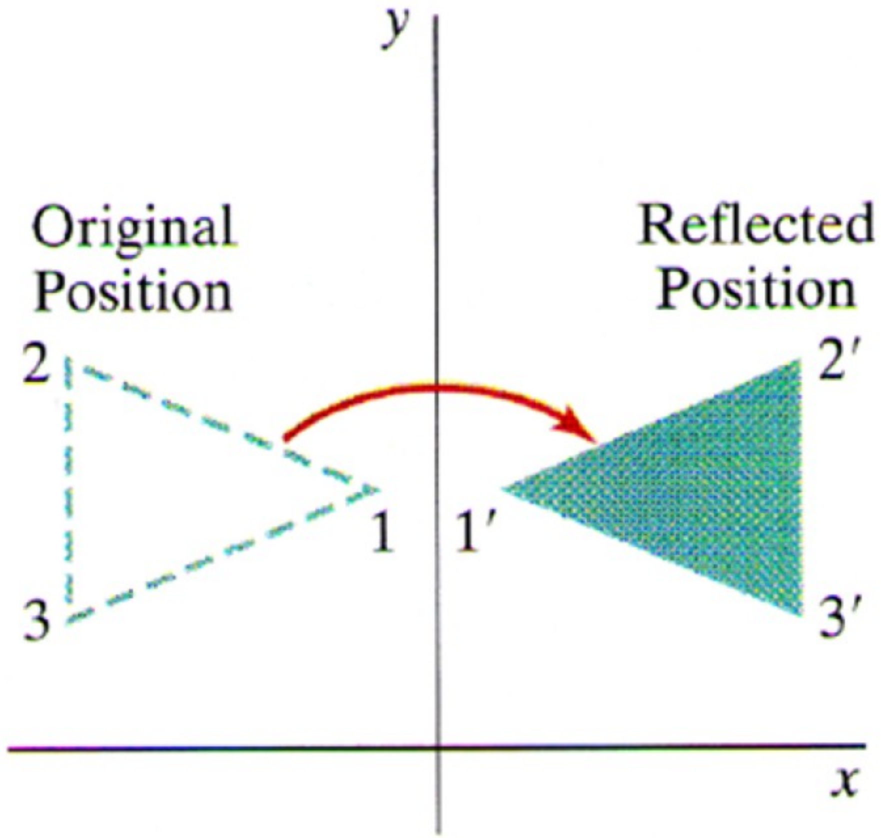
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexão

- **Espelha-se** as coordenadas de um objeto relativo a um eixo de reflexão, rotacionando em um ângulo de **180º**
- Reflexão em $x = 0$:

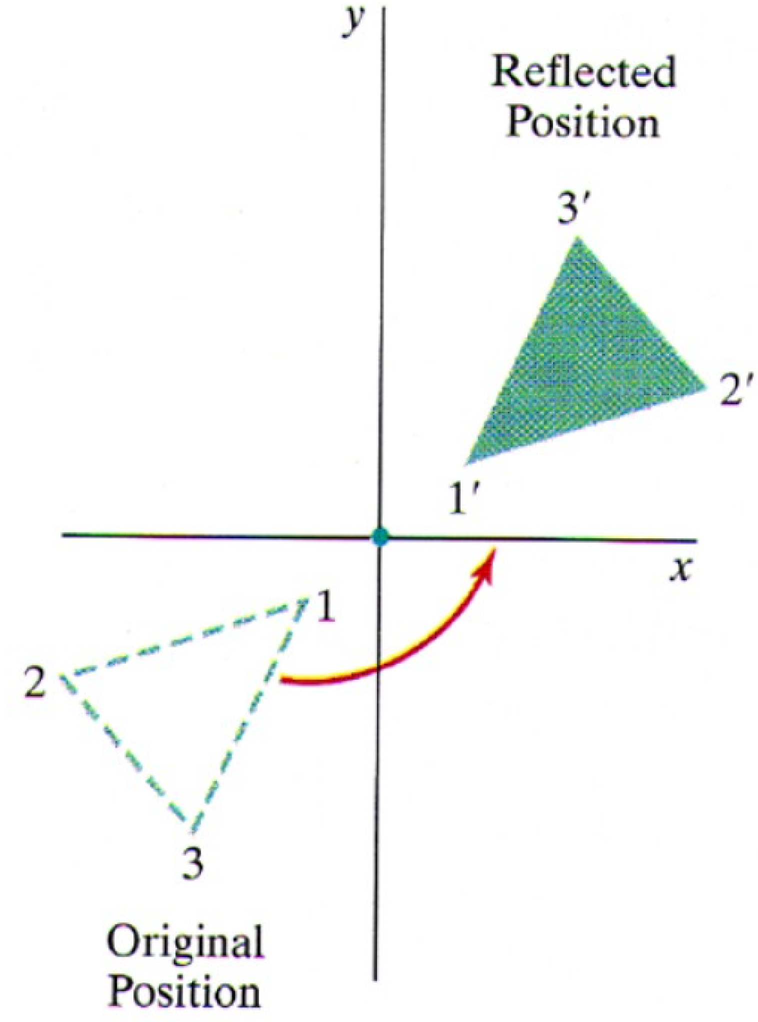
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reflexão

- **Espelha-se** as coordenadas de um objeto relativo a um <u>eixo de reflexão</u>, rotacionando em um ângulo de **180º**
- Reflexão em $x = 0$ e $y = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cisalhamento

- **Distorce o formato** do objeto na direção de x ou y
- Cisalhamento na direção de x:

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O que transforma as coordenadas como:

$$x' = x + sh_x \cdot y$$
$$y' = y$$

Cisalhamento

- **Distorce o formato** do objeto na direção de x ou y
- Cisalhamento na direção de y:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O que transforma as coordenadas como:

$$x' = x$$

$$y' = y + sh_y \cdot x$$

Cisalhamento

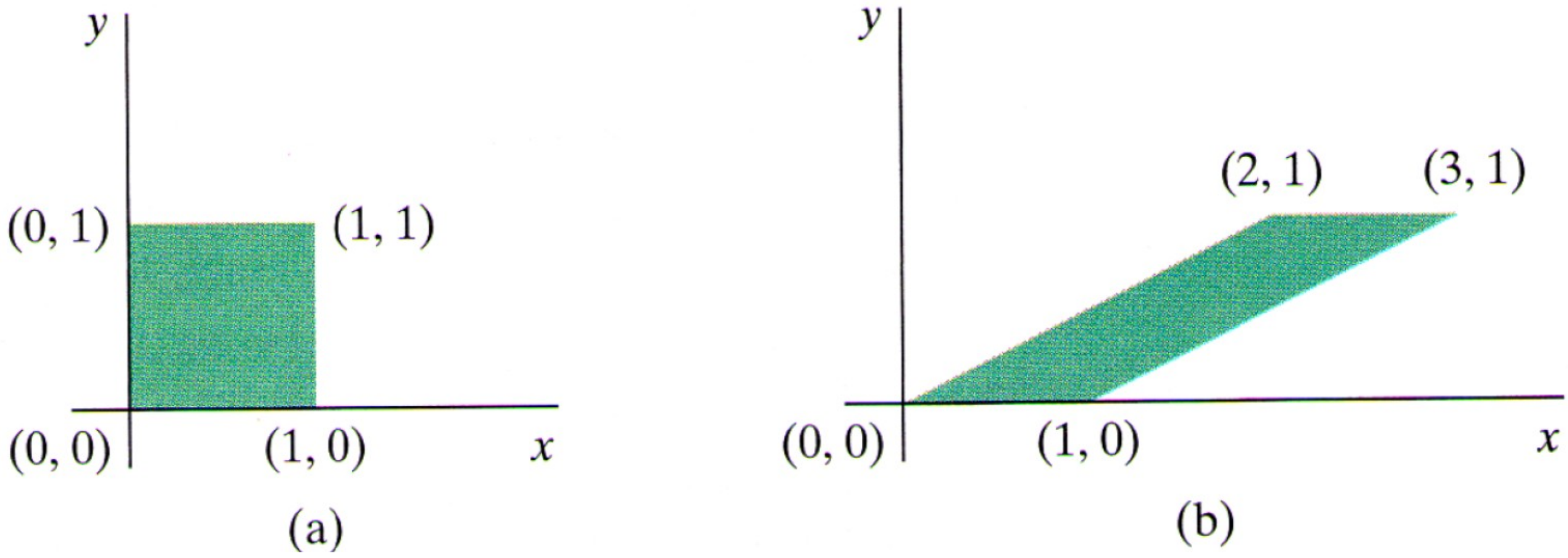


Figura: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando um cisalhamento na direção x com $sh_x = 2$.