Cálculo Numérico

Erro na Interpolação

Wellington José Corrêa [1]

[1] Universidade Tecnológica Federal do Paraná,

Campo Mourão, Brasil

20 de Julho de 2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Introdução

Como vimos, sobre os pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, temos que

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, \; i = 0, 1, \ldots, n.$$

Introdução

Como vimos, sobre os pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, temos que

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Entretanto, nos pontos $\bar{x} \neq x_i$, a igualdade acima nem sempre é verdadeira.
Neste sentido surgem as seguintes indagações:

Introdução

Como vimos, sobre os pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, temos que

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Entretanto, nos pontos $\bar{x} \neq x_i$, a igualdade acima nem sempre é verdadeira. Neste sentido surgem as seguintes indagações:

(i) O polinômio interpolador é uma boa aproximação para $f(x)$?

Introdução

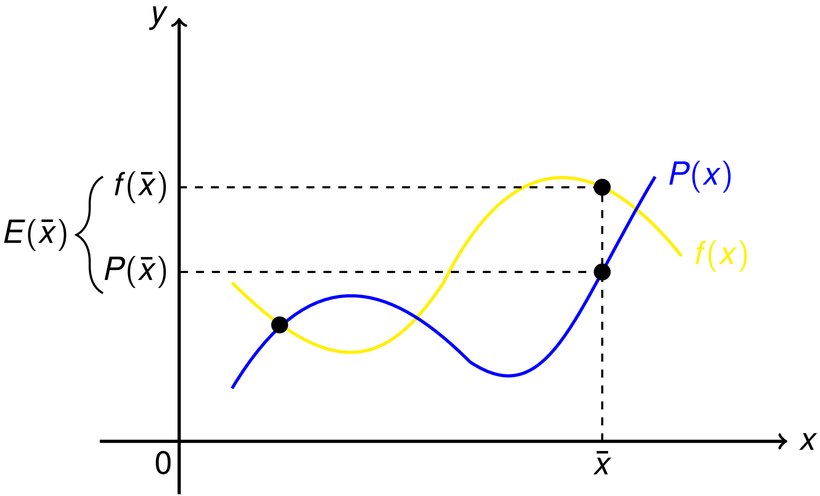
Como vimos, sobre os pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, temos que

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Entretanto, nos pontos $\bar{x} \neq x_i$, a igualdade acima nem sempre é verdadeira. Neste sentido surgem as seguintes indagações:

(i) O polinômio interpolador é uma boa aproximação para $f(x)$?

(ii) Podemos ter ideia do erro que cometemos quando substituímos $f(x)$ por $P(x)$?



y
$f(\bar{x})$
$E(\bar{x})$
$P(\bar{x})$
$P(x)$
$f(x)$
0
$\bar{x}$
x

Para responder essas questões, dividiremos em dois casos:

Para responder essas questões, dividiremos em dois casos:

- Quando $f(x)$ é conhecida;

Para responder essas questões, dividiremos em dois casos:

- Quando $f(x)$ é conhecida;
- Quando $f(x)$ não é conhecida, ou seja, quando tivermos somente uma tabela.

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Teorema 1.1

Seja $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$ e $(n+1)$ vezes diferenciável. Se $P(x)$ interpola $f(x)$ nestes pontos, então, o erro cometido $E(x)$ é dado por

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{\Psi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{1}$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Teorema 1.1

Seja $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$ e $(n+1)$ vezes diferenciável. Se $P(x)$ interpola $f(x)$ nestes pontos, então, o erro cometido $E(x)$ é dado por

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{\Psi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{1}$$

onde

$$\Psi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \quad e \quad \xi \in [x_0, x_n].$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Observação 1.1

(a) *Podemos calcular uma estimativa para o erro* $E(x)$ *somente quando tivermos a expressão analítica de* $f(x)$, *pois de acordo com a fórmula* (1), *necessitamos calcular* $f^{(n+1)}(x)$.

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Observação 1.1

(a) *Podemos calcular uma estimativa para o erro* $E(x)$ *somente quando tivermos a expressão analítica de* $f(x)$, *pois de acordo com a fórmula* (1), *necessitamos calcular* $f^{(n+1)}(x)$.

(b) *Na expressão dada em* (1), *o parâmetro* ξ *não é conhecido no intervalo* $[x_0, x_n]$ *e, portanto, não é possível calcular o valor numérico de* $f^{(n+1)}(\xi)$. *Contudo, é possível apresentar uma estimativa para* $E(x)$:

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Usando a fórmula (1), note que:

$$|E(x)| = \left| \frac{\Psi(x)}{(n+1)!} \, f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Usando a fórmula (1), note que:

$$|E(x)| = \left| \frac{\Psi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right|$$
$$= \frac{|\Psi(x)|}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Usando a fórmula (1), note que:

$$
\begin{aligned}
|E(x)| &= \left| \frac{\Psi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \\
&= \frac{|\Psi(x)|}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \\
&\leq \frac{|\Psi(x)|}{(n+1)!} M,
\end{aligned}
$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Usando a fórmula (1), note que:

$$
\begin{aligned}
|E(x)| &= \left| \frac{\Psi(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \\
&= \frac{|\Psi(x)|}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \\
&\leq \frac{|\Psi(x)|}{(n+1)!} M,
\end{aligned}
$$

onde

$$
M = \text{máx}\left\{ \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| ; \xi \in [x_0, x_n] \right\} .
$$

O caso em $f(x)$ é conhecida?

Portanto, um limitante para o erro é

(2) $$E(x) \leq \frac{|\Psi(x)|}{(n+1)!} M \, .$$

O caso em $f(x)$ é conhecida?

Portanto, um limitante para o erro é

(2) $$E(x) \leq \frac{|\Psi(x)|}{(n+1)!} M .$$

Observação 1.2

Quando estudamos a fórmula de Newton para interpolação, vimos que o erro é dado por

$$f(x) - P(x) = R_n(x) := (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] .$$

O caso em $f(x)$ é conhecida?

Portanto, um limitante para o erro é

$$E(x) \leq \frac{|\Psi(x)|}{(n+1)!} M\,. \tag{2}$$

Observação 1.2

Quando estudamos a fórmula de Newton para interpolação, vimos que o erro é dado por

$$f(x) - P(x) = R_n(x) := (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\,.$$

Pode-se mostrar que f nas mesmas condições do Teorema 1.1 que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi}{(n+1)!}, \; \xi \in [x_0, x_n]$$

e assim, obtemos a mesma fórmula dada em (1) *podendo obter a estimativa*

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Exemplo 1.1

Considere a função $f(x) = \dfrac{3+x}{1+x}$ *definida nos pontos conforme a tabela:*

x	0,1	0,2	0,4
$f(x)$	2,82	2,67	2,43

Estime $f(0,25)$ *e obtenha um limitante superior para o erro.*

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Exemplo 1.1

Considere a função $f(x) = \dfrac{3+x}{1+x}$ *definida nos pontos conforme a tabela:*

x	0,1	0,2	0,4
$f(x)$	2,82	2,67	2,43

Estime $f(0,25)$ *e obtenha um limitante superior para o erro.*

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Solução: Como feito na aula anterior, recorrendo à fórmula de Lagrange, podemos mostrar que o polinômio interpolador é

$$P(x) = x^2 - 1,8 \cdot x + 2,99 \, .$$

Assim,

$$f(0,25) \approx P(0,25) = 2,6025 \, .$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Agora, vamos obter uma estimativa para o erro $E(x)$.

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Agora, vamos obter uma estimativa para o erro $E(x)$.
Com efeito, pela fórmula (2), tendo em mente que $n = 2$, resulta que

$$
\begin{aligned}
|E(x)| &\leq \left| \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{3!} \right| \cdot M \\
&= \left| \frac{(x - 0,1) \cdot (x - 0,2) \cdot (x - 0,4)}{6} \right| \cdot M, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

onde

$$M = \text{máx}\left\{ \left| f'''(\xi) \right| ; \, \xi \in [0.1, 0.4] \right\} .$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Agora, vamos obter uma estimativa para o erro $E(x)$.
Com efeito, pela fórmula (2), tendo em mente que $n = 2$, resulta que

$$
\begin{aligned}
|E(x)| &\leq \left| \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{3!} \right| \cdot M \\
&= \left| \frac{(x - 0,1) \cdot (x - 0,2) \cdot (x - 0,4)}{6} \right| \cdot M,
\end{aligned} \tag{3}
$$

onde

$$M = \text{máx}\left\{ \left| f'''(\xi) \right| ; \, \xi \in [0.1, 0.4] \right\} .$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Desde que $\left|f'''(x)\right| = \dfrac{12}{(1+x)^4}$ é uma função decrescente no intervalo [0.1,0.4], resulta que $|f'''(x)|$ assume o valor máximo em $x = 0,1$, ou seja,

$$M = \text{máx}\left|f'''(x)\right| = \frac{12}{(1+0,1)^4} = 8,196161464\,.$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Desde que $\left|f'''(x)\right| = \dfrac{12}{(1+x)^4}$ é uma função decrescente no intervalo [0.1,0.4], resulta que $|f'''(x)|$ assume o valor máximo em $x = 0,1$, ou seja,

$$M = \text{máx}\left|f'''(x)\right| = \frac{12}{(1+0,1)^4} = 8,196161464\,.$$

Combinando o valor de M na estimativa (3), obtemos:

$$\begin{aligned}|E(0,25)| &\leq \left|\frac{(0,25-0,1)\cdot(0,25-0,2)\cdot(0,25-0,4)}{6}\right|\cdot M\\ &= 0,0015367802\,.\end{aligned}$$

O caso em que $f(x)$ é conhecida

Exercício 1.1

Considere a função $f(x) = \mathrm{e}^{x} + \operatorname{sen}(x)$ *tabelada como segue:*

x	0	0,5	1
$f(x)$	1	2,12	3,55

Avalie $f(0,7)$ *e obtenha um limitante superior para o erro.*

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

Se tivermos apenas uma tabela do tipo

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

não podemos aplicar o método anterior, pois não conhecemos $y = f(x)$ e deste modo, não podemos calcular $f^{(n+1)}(x)$.

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

Se tivermos apenas uma tabela do tipo

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

não podemos aplicar o método anterior, pois não conhecemos $y = f(x)$ e deste modo, não podemos calcular $f^{(n+1)}(x)$.

Neste caso, o erro da interpolação polinomial pode ser estimado recorrendo ao conceito de diferenças finitas, aproximando $f^{(n+1)}(x)$ pelo maior valor absoluto das diferenças divididas de ordem $n + 1$.

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

Vimos na última aula que

$$
\begin{aligned}
R_n(x) &:= |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \, f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] \\
&\approx |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \, M,
\end{aligned} \tag{4}
$$

onde M é o maior valor absoluto das diferenças divididas de ordem $n+1$.

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

Exemplo 1.2

Considere a tabela

x	$0,2$	$0,34$	$0,4$	$0,52$	$0,6$	$0,72$
y	$0,16$	$0,22$	$0,27$	$0,29$	$0,32$	$0,37$

(i) *Aproxime* $f(0,47)$ *usando um polinômio de grau 2.*

(ii) *Apresente uma estimativa para o erro de interpolação.*

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

Solução: De fato, inicialmente, construamos a tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0,2	0, 16			
		0,4285714286		
0,34	0,22		2.023809524	
		0,8333333333		-17.89847884
0,4	**0,27**		-3,703703704	
		0,1666666666		18,25142450
0,52	0,29		**1,041666667**	
		0,375		-2,6041666667
0,6	0,32		0,2083333333	
		0,4166666667		
0,72	0, 37			

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

(i) Desde que o ponto a ser avaliado é $x = 0,47$ e $n = 2$, escolhamos os três pontos destacados em vermelho na tabela anterior.

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

(i) Desde que o ponto a ser avaliado é $x = 0,47$ e $n = 2$, escolhamos os três pontos destacados em vermelho na tabela anterior.
Deste modo, o polinômio interpolador torna-se:

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

(i) Desde que o ponto a ser avaliado é $x = 0,47$ e $n = 2$, escolhamos os três pontos destacados em vermelho na tabela anterior.
Deste modo, o polinômio interpolador torna-se:

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= 0,27 + (x - 0,4) \cdot 0,1666666666 \\
&\quad + (x - 0,4) \cdot (x - 0,52) \cdot 1.041666667 \\
&= 1.041666667\, x^2 - 0,7916666667\, x + 0,42 \\
\Rightarrow \; P_2(0,47) &= 0,278020833\,.
\end{aligned}
$$

Quando $f(x)$ é dada por uma tabela

(i) Desde que o ponto a ser avaliado é $x = 0,47$ e $n = 2$, escolhamos os três pontos destacados em vermelho na tabela anterior.
Deste modo, o polinômio interpolador torna-se:

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= 0,27 + (x - 0,4) \cdot 0,1666666666 \\
&\quad + (x - 0,4) \cdot (x - 0,52) \cdot 1.041666667 \\
&= 1.041666667\, x^2 - 0,7916666667\, x + 0,42 \\
\Rightarrow\ P_2(0,47) &= 0,278020833\,.
\end{aligned}
$$

(ii) Sendo $n = 2$, note que o valor de M é 18,2, logo, recorrendo à expressão (4), resulta que

$$
\begin{aligned}
R_2(0,47) &\approx |(0,47 - 0,4)(0,47 - 0,52)(0,47 - 0,6)| \cdot 18,25142450 \\
\Rightarrow\ R_2(0,47) &\approx 0.0083043981\,.
\end{aligned}
$$