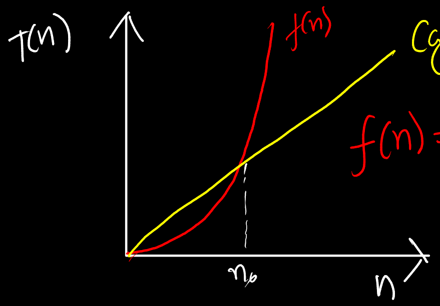
Notação Ω



$f(n) = \Omega(g(n))$

Definição (notação Ω)

$\Omega(g(n)) = \{ f(n)$: existem constantes positivas n_0 e c tais que
$cg(n) \leq f(n), \forall n \mid n \geq n_0 \}$

Exemplo $T(n) = n^3 + 2n$
$T(n) = \Omega(n^2)$?

Solução Por definição $T(n) = \Omega(n^2)$ se e somente se existem constantes positivas n_0 e C tais que
$cn^2 \leq n^3 + 2n, \forall n \mid n \geq n_0$.

$$\frac{cn^2}{n^2} \leq \frac{n^3}{n^2} + \frac{2n}{n^2}$$

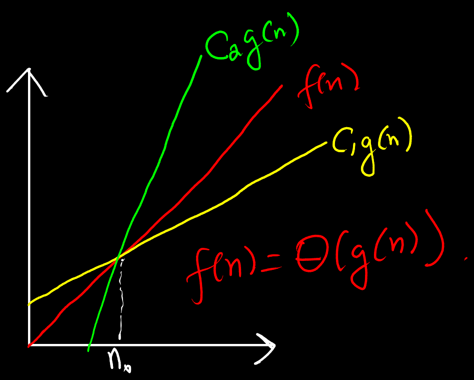
$$c \leq n + \frac{2}{n} \qquad \boxed{p/n = 1}$$

$$c \leq 1 + \frac{2}{1}$$

$$\boxed{c \leq 3}$$

Considerando $n_0 = 1$ e
$c = 3$, $cn^2 \leq T(n), \forall n \mid n \geq n_0$.
Portanto, $T(n) = \Omega(n^2)$.

Notação theta



Definição (Notação Θ)

$\Theta(g(n)) = \{ f(n) :$ existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \; \forall n \mid n \ge n_0 \}$$

$$\underbrace{c_1 g(n) \le f(n)}_{f(n) = \Omega(g(n))} \qquad \underbrace{f(n) \le c_2 g(n)}_{f(n) = O(g(n))}$$

Teorema dadas funções $f(n)$ e $g(n)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$$

Exemplo $T(n) = 2n + 1$

$T(n) = \Theta(n)$? " $T(n)$ tem o comportamento de n? (linear)"

" $T(n)$ tem limite ajustado em n"?

Solução Pela definição, $T(n) = \Theta(n)$ se existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0, tais que $c_1 n \le 2n + 1 \le c_2 n$, $\forall n \mid n \ge n_0$.

$$c_1 n \le 2n + 1 \le c_2 n$$

p/ lado esquerdo

$c_1 n \le 2n + 1$

$c_1 \le 2 + \frac{1}{n}$ $\boxed{p/ \, n = 1}$

$c_1 \le 2 + \frac{1}{1}$

$\boxed{c_1 \le 3}$

p/ o lado direito,

$\frac{2n + 1}{n} \le \frac{c_2 n}{n}$

$2 + \frac{1}{n} \le c_2$

$c_2 \ge 2 + \frac{1}{n}$, p/ $n = 1$

$c_2 \ge 2 + \frac{1}{1}$

$\boxed{c_2 \ge 3}$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2n^2 + 3n = \Theta(n) \\ 2n^2 + 3n = \Omega(n) \; ✓ \\ 2n^2 + 3n = O(n) \; ✗ \end{array}}$$

Teorema p/ qualquer polinômio $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$,

onde a_i são constantes e $a_d > 0$, $p(n) = \Theta(n^d)$.

Exemplo $4n^2 + 3n + 2 = \Theta(n^2)$. $(a_2 = 4, a_1 = 3, a_0 = 2)$.

$$\sum_{i=0}^{2} a_i n^i = a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0$$

Exemplo $3n^5 + 2n^3 + 4 = \Theta(n^5)$.

Exemplo $2n^4 + 3n^2 + 5n + 2 = \Theta(n^4)$

Exemplo $5 = \Theta(n^0) = \Theta(1)$.

Teste do Limite

Seja $L = \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

1- Se $L = 0$, então $f(n) = O(g(n))$

2- Se $L = \infty$, então $f(n) = \Omega(g(n))$

3- Se $L = cte$, $cte \neq 0$, então $f(n) = \Theta(g(n))$

Exemplo

algoritmo 1 $f(n) = n^2 + 20n + 10$

algoritmo 2 $g(n) = 2n^2 + 5n$

Solução Pelo teste do limite,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 20n + 10}{2n^2 + 5n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2n + 20}{4n + 5}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2}{4}$$

$$= 2/4$$

Como $L = 2/4$ é constante e $\neq 0$, temos o caso 3 do Teste do Limite. Portanto, $f(n) = \Theta(g(n))$. Assim, ambos algoritmos tem o mesmo custo assintótico. Logo, podemos usar qualquer um deles.

Exemplo algoritmo 1: $f(n) = n^2+2n$
algoritmo 2: $g(n) = n+4$

Solução Pelo teste do limite,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n+4}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2n+2$$
$$= \infty.$$

Como $L=\infty$, temos o caso 2 do teste do limite. Portanto $f(n) = \Omega(g(n))$. Portanto, como $f(n)$ é limitada inferiormente pela $g(n)$, então $g(n)$ é menos custosa. Portanto, devemos usar o algoritmo 2, com custo $g(n)$.

Teste do limite

Seja $L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

1- Se $L=0$, então $f(n) = O(g(n))$
2- Se $L=\infty$, então $f(n) = \Omega(g(n))$
3- Se $L = cte$, $cte \neq 0$, então $f(n) = \Theta(g(n))$

Propriedades

$f(n) = O(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n))$ (simetria transposta)
$f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n))$ (simetria)

Se $f(n) = \Theta(g(n)) \wedge g(n) = \Theta(h(n))$ então $f(n) = \Theta(h(n))$
Se $f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(h(n))$ então $f(n) = O(h(n))$
Se $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge g(n) = \Omega(h(n))$ então $f(n) = \Omega(h(n))$
} Transitividade

$f(n) = \Theta(f(n))$
$f(n) = O(f(n))$
$f(n) = \Omega(f(n))$
} Reflexão

Lembre-se

$f(n) = O(g(n))$ é análogo a $\overset{f(x)}{X} \le \overset{g(x)}{Y}$

$f(n) = \Omega(g(n))$ " " " $X \ge Y$

$f(n) = \Theta(g(n))$ " " " $X = Y$.