Cálculo Numérico

Erro Absoluto, Erro Relativo e Propagação de Erros

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

21 de Junho de 2021

@correa.well

Aritmética de Ponto Flutuante

A seguinte definição descreve dois métodos para medir erros de aproximação.

Definição

Denotando a_{ex} por valor exato a_{aprox} o valor aproximado, o erro absoluto denotado por E_{abs} é:

$$E_{abs} = |a_{ex} - a_{aprox}|$$

e o erro relativo, dado por E_{rel} é:

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{a_{aprox}}$$

Erro absoluto e erro relativo

Observação

O erro relativo é geralmente uma medida melhor de precisão que o erro absoluto, já que leva em consideração o tamanho do número que está sendo aproximado.

Erro absoluto e erro relativo

Observação

O erro relativo é geralmente uma medida melhor de precisão que o erro absoluto, já que leva em consideração o tamanho do número que está sendo aproximado.

Exemplo

Nos itens a seguir, calcule o erro absoluto e relativo.

a) *Considere o valor exato* $a_{ex} = 2345,713$ *e o valor aproximado* $a_{aprox} = 2345,00$.

b) *Tome* $a_{ex} = 1,713$ *e* $a_{aprox} = 1,000$.

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Erro absoluto e erro relativo

Solução:

a)

$$
\begin{aligned}
E_{abs} &= |a_{ex} - a_{aprox}| \\
&= |2345,713 - 2345,000| \\
&= 0,713
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Erro absoluto e erro relativo

Solução:

a)

$$
\begin{aligned}
E_{abs} &= |a_{ex} - a_{aprox}| \\
&= |2345,713 - 2345,000| \\
&= 0,713
\end{aligned}
$$

e com respeito ao erro relativo, temos:

$$
\begin{aligned}
E_{rel} &= \frac{E_{abs}}{a_{aprox}} \\
&= \frac{0,713}{2345,000} \\
&= 0,0003040511 \approx 0,03\,\%\,.
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Erro absoluto e erro relativo

(b) Neste caso, temos que

$$E_{abs} = 0,713 \quad \text{e} \quad E_{rel} = 0,713 = 71,3\% \,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Erro absoluto e erro relativo

(b) Neste caso, temos que

$$E_{abs} = 0,713 \quad \text{e} \quad E_{rel} = 0,713 = 71,3\%\,.$$

Observação

Veja que nos exemplos (a) e (b) que o erro absoluto é o mesmo, embora o erro cometido pela aproximação seja muito mais significativo no exemplo (b), uma vez que no exemplo (a), o erro relativo é da ordem de 0,03 % e no exemplo (b), é de ordem de 71,3 %.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Propagação de Erros

Mostraremos por meio de exemplos, como os erros descritos anteriormente podem influenciar o desenvolvimento de um cálculo:

Propagação de Erros

Mostraremos por meio de exemplos, como os erros descritos anteriormente podem influenciar o desenvolvimento de um cálculo:

Exemplo

Supondo-se que as operações abaixo sejam processadas em uma máquina com quatro dígitos significativos e fazendo-se:

$$x_1 = 0,3491 \times 10^4$$
$$x_2 = 0,2345 \times 10^0$$

calcule $(x_2 + x_1) - x_1$ *e* $x_2 + (x_1 - x_1)$.

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Propagação de Erros

Solução: De fato, note que

$$(x_2 + x_1) - x_1 = (0,2345 \times 10^0 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4$$

Propagação de Erros

Solução: De fato, note que

$$
\begin{aligned}
(x_2 + x_1) - x_1 &= (0,2345 \times 10^0 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4 \\
&= (0,00002345 + 0,3491) \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

Solução: De fato, note que

$$
\begin{aligned}
(x_2 + x_1) - x_1 &= (0,2345 \times 10^0 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4 \\
&= (0,00002345 + 0,3491) \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \overset{0,3491}{\cancel{0,34912345}} \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

Solução: De fato, note que

$$
\begin{aligned}
(x_2 + x_1) - x_1 &= (0,2345 \times 10^0 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4 \\
&= (0,00002345 + 0,3491) \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \cancel{0,34912345}^{\,0,3491} \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \cancel{0,3491 \times 10^4} - \cancel{0,3491 \times 10^4}
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

Solução: De fato, note que

$$\begin{aligned}
(x_2 + x_1) - x_1 &= (0,2345 \times 10^0 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4 \\
&= (0,00002345 + 0,3491) \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \cancel{0,34912345}^{\,0,3491} \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \cancel{0,3491 \times 10^4} - \cancel{0,3491 \times 10^4} \\
&= 0,0000
\end{aligned}$$

Propagação de Erros

Solução: De fato, note que

$$
\begin{aligned}
(x_2 + x_1) - x_1 &= (0,2345 \times 10^0 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4 \\
&= (0,00002345 + 0,3491) \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \overset{0,3491}{\cancel{0,34912345}} \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \cancel{0,3491 \times 10^4} - \cancel{0,3491 \times 10^4} \\
&= 0,0000
\end{aligned}
$$

e

$$
x_2 + (x_1 - x_1) = 0,2345 \times 10^0 + (\cancel{0,3491 \times 10^4} - \cancel{0,3491 \times 10^4})
$$

Propagação de Erros

Solução: De fato, note que

$$\begin{aligned}
(x_2 + x_1) - x_1 &= (0,2345 \times 10^0 + 0,3491 \times 10^4) - 0,3491 \times 10^4 \\
&= (0,00002345 + 0,3491) \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \cancelto{0,3491}{0,34912345} \times 10^4 - 0,3491 \times 10^4 \\
&= \cancel{0,3491 \times 10^4} - \cancel{0,3491 \times 10^4} \\
&= 0,0000
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
x_2 + (x_1 - x_1) &= 0,2345 \times 10^0 + (\cancel{0,3491 \times 10^4} - \cancel{0,3491 \times 10^4}) \\
&= 0,2345
\end{aligned}$$

Propagação de Erros

Os dois resultados são diferentes, quando não deveriam ser, pois a adição é uma operação distributiva. A causa desta diferença foi um arredondamento feito na adição $(x_2 + x_1)$, cujo resultado tem oito dígitos. Como a máquina só armazena quatro dígitos, os menos significativos dígitos foram desprezados.

Propagação de Erros

Os dois resultados são diferentes, quando não deveriam ser, pois a adição é uma operação distributiva. A causa desta diferença foi um arredondamento feito na adição $(x_2 + x_1)$, cujo resultado tem oito dígitos. Como a máquina só armazena quatro dígitos, os menos significativos dígitos foram desprezados.

Observação

As propriedades comutativa e associativa na adição e as propriedades comutativa e distributiva na multiplicação, consagradas no conjunto dos números reais, não são verdadeiras no sistema de ponto flutuante.

Propagação de Erros

Exemplo

Considere base decimal de dois dígitos e arredondamento e as seguintes somas

- (i) $S_1 = \sum_{k=1}^{10} 0,1 \; + 10$
- (ii) $S_2 = 10 + \sum_{k=1}^{10} 0,1 \, .$

É notório que nos números reais, $S_1 = S_2$. *Verifique a influência do erro de arredondamento para* S_1 *e* S_2.

Propagação de Erros

- Note que

$$S_1 = \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10$$

Propagação de Erros

- Note que

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10 \\
&= 0,2 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}} + 10
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

- Note que

$$S_1 = \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10$$

$$= 0,2 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}} + 10$$

$$= \overset{0,2 \times 10^0}{\cancel{0,2 \times 10^0}} + 0,1 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{7 termos}} + 10$$

Propagação de Erros

- Note que

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10 \\
&= 0,2 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}} + 10 \\
&= \cancelto{0,2 \times 10^0}{0,2 \times 10^0} + 0,1 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{7 termos}} + 10 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

- Note que

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10 \\
&= 0,2 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}} + 10 \\
&= \cancelto{0,2 \times 10^0}{0,2 \times 10^0} + 0,1 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{7 termos}} + 10 \\
&\vdots \\
&= (0,9 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0) + 10
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Propagação de Erros

- Note que

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10 \\
&= 0,2 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}} + 10 \\
&= \cancel{0,2 \times 10^0} + 0,1 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{7 termos}} + 10 \qquad {\color{red} 0,2 \times 10^0} \\
&\;\vdots \\
&= (0,9 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0) + 10 \\
&= 1 + 10
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

- Note que

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10 \\
&= 0,2 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}} + 10 \\
&= \overset{\color{red}{0,2 \times 10^0}}{\cancel{0,2 \times 10^0}} + 0,1 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{7 termos}} + 10 \\
&\vdots \\
&= (0,9 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0) + 10 \\
&= 1 + 10 = 0,01 \times 10^2 + 0,1 \times 10^2
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

- Note que

$$S_1 = \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10$$

$$= 0,2 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}} + 10$$

$$= \cancel{0,2 \times 10^0} + 0,1 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{7 termos}} + 10$$

$$0,2 \times 10^0$$

$$\vdots$$

$$= (0,9 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0) + 10$$

$$= 1 + 10 = 0,01 \times 10^2 + 0,1 \times 10^2 = 0,11 \times 10^2$$

Propagação de Erros

- Note que

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}} + 10 \\
&= 0,2 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}} + 10 \\
&\qquad {\color{red} 0,2 \times 10^0} \\
&= \cancel{0,2 \times 10^0} + 0,1 \times 10^0 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{7 termos}} + 10 \\
&\vdots \\
&= (0,9 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0) + 10 \\
&= 1 + 10 = 0,01 \times 10^2 + 0,1 \times 10^2 = 0,11 \times 10^2 = 11\,.
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

(ii) Por outro lado,

$$S_2 = 10 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}}$$

Propagação de Erros

(ii) Por outro lado,

$$S_2 = 10 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}}$$

$$= 0,1 \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{9 termos}}$$

Propagação de Erros

(ii) Por outro lado,

$$S_2 = 10 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{10 termos}}$$

$$= 0,1 \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{9 termos}}$$

$$= \cancel{0,101} \xrightarrow{} 0,10 \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{\text{8 termos}}$$

Propagação de Erros

(ii) Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
S_2 &= 10 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{10 \text{ termos}} \\
&= 0,1 \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{9 \text{ termos}} \\
&= \cancelto{0,10}{0,101} \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{8 \text{ termos}} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Propagação de Erros

(ii) Por outro lado,

$$S_2 = 10 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{10 \text{ termos}}$$

$$= 0,1 \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{9 \text{ termos}}$$

$$= \overset{0,10}{\cancel{0,101}} \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{8 \text{ termos}}$$

$$\vdots$$

$$= \overset{0,10}{\cancel{0,101}} \times 10^2 + 0,001 \times 10^2$$

Propagação de Erros

(ii) Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
S_2 &= 10 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{10 \text{ termos}} \\
&= 0,1 \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{9 \text{ termos}} \\
&= \cancelto{0,10}{0,101} \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 + \underbrace{(0,1 \times 10^0 + 0,1 \times 10^0 + \ldots + 0,1 \times 10^0)}_{8 \text{ termos}} \\
&\vdots \\
&= \cancelto{0,10}{0,101} \times 10^2 + 0,001 \times 10^2 \\
&= \cancelto{0,10}{0,101} \times 10^2 = 0,10 \times 10^2 = 10\,.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Observe a seguinte identidade:

$$f(x) = \frac{(1+x)-1}{x} = 1,\ x \neq 0\,.$$

Recorrendo à sua calculadora, obtenha o valor da expressão para $x = 10$, $x = 1$, $x = 10^{-1}$, $x = 10^{-5}$, $x = 10^{-10}$, $x = 10^{-11}$ *e* $x = 10^{-12}$.