DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE PROBABILIDADE DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

INTRODUÇÃO

As distribuições de probabilidades relativas a variáveis discretas e contínuas são modelos matemáticos que servem de base para a Estatística Inferencial, ou seja, para tirarem conclusões acerca da população, a partir de estatísticas descritivas de amostras.

Veremos alguns modelos de probabilidades que pressupõem uma variável discreta: Bernoulli, Binomial, Poisson e Hipergeométrica.

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Consideremos uma única tentativa de um experimento aleatório. Podemos ter sucesso ou fracasso nessa tentativa.

Seja p a probabilidade de sucesso e q a probabilidade de fracasso, com $p + q = 1$.

Seja X: número de sucessos em uma única tentativa do experimento.

X assume o valor 0 que corresponde ao fracasso, com probabilidade q, ou o valor 1, que corresponde ao sucesso, com probabilidade p.

$$X = \begin{cases} 0 \; fracasso \\ 1 \; sucesso \end{cases} \text{ com } P(X = 0) = q \text{ e } P(X = 1) = p$$

Nessas condições a variável aleatória X tem distribuição de BERNOULLI, e sua função de probabilidade é dada por:

$$P[X = x] = p^x(1 - p)^{1-x}, x = 0, 1$$

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI – ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Podemos calcular também a média e a variância da variável com distribuição de BERNOULLI, que é dada por:

$$\begin{cases} E(X) = p \\ Var(X) = pq \end{cases}$$

DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI – EXEMPLO

Uma urna contém 20 bolas brancas e 30 bolas vermelhas. Uma bola é retirada da urna e a variável aleatória X denota o número de bolas vermelhas obtidas. Calcule a $E(X), Var(X),$ desvio padrão e determine a $P(X)$.

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Consideremos n tentativas independentes de um mesmo experimento aleatório. Cada tentativa admite apenas dois resultados: fracasso com probabilidades q e sucesso com probabilidade p, $p + q = 1$.

As probabilidades de sucesso e fracasso são as mesmas para cada tentativa.

Seja X: número de sucessos em n tentativas.

A função de probabilidade da variável X, isto é, P(X = k) é:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

A variável X tem distribuição binomial, com parâmetros n e p, e indicaremos pela notação: X: B(n, p).

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL – ESPERANÇA E VARIÂNCIA

Para o cálculo da Esperança Matemática na distribuição Binomial usaremos a seguinte expressão:

$$E(X) = n.p$$

Para o cálculo da Variância na distribuição Binomial usaremos a expressão:

$$Var(X) = n.p.q$$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL – EXEMPLO

Admitindo-se a igualdade de probabilidade para o nascimento de menino e menina, qual a probabilidade de que, em quatro nascimentos:

a) apenas um nascituro seja menino;

b) pelo menos um seja menino.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A Distribuição de Poisson é útil na resolução de problemas de dois tipos:

1) quando os eventos ocorrem num contínuo de tempo ou espaço, como chamadas numa central telefônica, utilização em determinado intervalo de tempo de serviços de caixa automática de um banco, número de erros no manuscrito de um livro, etc.;

2) quando os eventos são raros, sendo n suficientemente grande.

O que caracteriza a distribuição de Poisson é que, no lugar das observações serem fixadas, os eventos ocorrem num contínuo de tempo ou espaço; além disso, os eventos são independentes e o processo é estacionário, ou seja, p permanece constante de um evento para outro.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A fórmula para se determinar a probabilidade de um determinado número de X de sucessos numa Distribuição de Poisson é:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

em que $e = 2{,}7183$ (constante), $\lambda =$ número médio de eventos e $k =$ número designado de sucessos.

ESPERANÇA MATEMÁTICA E VARIÂNCIA

$E(X) = \lambda$

$Var(X) = \lambda$

DISTRIBUIÇÃO POISSON – EXEMPLO

Em certa obra, de 600 páginas, ocorrem 450 erros tipográficos.

a) Qual a probabilidade de não haver erros em quatro páginas selecionadas?

b) Qual a probabilidade de haver três erros em quatro páginas selecionadas?

APROXIMAÇÃO DA BINOMIAL PELA POISSON

Para n grande e p pequeno, podemos aproximar a distribuição Binomial pela distribuição de Poisson. Ou seja, se X tem distribuição binomial, tal que $np \leq 7$, então:

$$P(X = k) \approx \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}$$

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

Ao extrairmos uma amostra aleatória de n elementos de uma população dicotômica, com reposição, temos uma distribuição binomial. Entretanto, é relativamente comum que não possamos obter uma amostra com reposição. É o caso da realização de uma pesquisa de opinião, visto que não nos interessa entrevistar um indivíduo mais de uma vez. Torna-se necessário, então, modificar o modelo binomial (com reposição), para um modelo em que a seleção da amostra é feita sem reposição, resultando na distribuição hipergeométrica. Na amostragem sem reposição a probabilidade de X modifica-se a cada nova extração; assim, se queremos entrevistar 20 pessoas numa amostra de 100, a probabilidade de sortear a primeira pessoa é de $\frac{1}{100}$, de sortear a segunda pessoa é de $\frac{1}{99}$ (pois a primeira pessoa não volta a fazer parte da amostra), de sortear a terceira pessoa é de $\frac{1}{98}$, e assim por diante. À medida que os indivíduos são retirados da população, a probabilidade de sucesso se altera.

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

A probabilidade X é determinada pela seguinte fórmula:

$$P(X; k; N; n) = \frac{\binom{k}{X}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

X = nº de sucessos desejados

k = nº total de sucessos na população

N = nº de indivíduos ou objetos da população

n = nº de indivíduos ou objetos da amostra

ou seja, é a probabilidade de que n objetos selecionados de uma população contendo N objetos tenham a característica X, que se apresenta em k elementos dessa população.

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA – EXEMPLO

Cinco indivíduos devem ser selecionados dentre 20 de uma Associação para representa-la num Congresso. Destes 20, quatro são reconhecidamente radicais em suas posições ideológicas. Qual a probabilidade de o grupo ser composto de dois membros radicais e três não radicais?

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

A distribuição hipergeométrica aproxima-se da binomial quando a população é grande e a amostra relativamente pequena; nesta situação, a falta de reposição influi pouco na probabilidade de sucesso de cada tentativa. Uma regra possível de ser adotada para essa aproximação é que o tamanho da amostra seja menor que 5% do tamanho da população.

EXERCÍCIOS

1) Os acidentes em uma fábrica tem aproximadamente a distribuição de Poisson, com média de 3 acidentes por mês. Determine a probabilidade de que em um dado mês:

a) Não ocorra nenhum acidente.

b) Ocorra no mínimo 3 acidentes.

c) Ocorra 3 ou 4 acidentes.

EXERCÍCIOS

2) A probabilidade de um arqueiro acertar um alvo com uma única flecha é de 0,20. Lança 8 flechas no alvo. Qual a probabilidade de:

a) Exatamente 4 acertarem o alvo?

b) Pelo menos 3 acertarem o alvo?

EXERCÍCIOS

3) A mesa telefônica de uma grande empresa recebe cerca de 300 telefonemas por dia, dos quais 100 correspondem a chamadas incorretas. Qual a probabilidade de, numa sequência de cinco telefonemas, não ocorrer nenhum engano?

EXERCÍCIOS

4) A experiência mostra que determinado aluno A tem probabilidade 0,9 de resolver e acertar um exercício novo que lhe é proposto. Doze novos exercícios são apresentados ao aluno A para serem resolvidos.

a) Qual a probabilidade de acertar no máximo 9 exercícios?

b) Qual a probabilidade de errar no mínimo 2 exercícios?

c) Determine o número médio de acertos e o desvio padrão.