Aula Síncrona - 22/04 - Computação

Ex1)

a) Todo subespaço vetorial é também um espaço vetorial. Verdadeiro

b) Todo espaço vetorial V possui pelo menos dois subespaços vetoriais. $\{\vec{0}\}$ e V → triviais Verdadeiro

c) Existe subconjunto, de um espaço vetorial, que não é LI e também não é LD. Falsa.

Obs: 1) $(V, +, \cdot) = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

I) i) $u + v \overset{?}{=} v + u$

Supor $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\parallel$

$v + u = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$

$(1, 2) + (3, 0) = (4, 2) = (3, 0) + (1, 2)$

2) $W \subset (V, +, \cdot)$ é um subespaço vetorial

se i) $\vec{0} \in W$

ii) $\forall u, v \in W \Longrightarrow u + v \in W$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W \Longrightarrow \alpha u \in W$

3) $v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, $B = \{v_1, v_2\}$

$v = c_1 v_1 + c_2 v_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = \vec{0}$$

$\Longleftrightarrow$ $c_1 = c_2 = 0$ ou $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$

B é L.I B é L.D.

Ex 2) $W \subset (V, +, \cdot)$ é subespaço

i) $\vec{0} \in W$ ✓

ii) $\forall u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$ ✓

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in W \Rightarrow \alpha u \in W$ ✓

Obs: W é LI e $[W] = V$

$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_k w_k = v$

Ex 3) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

subespaços triviais: $\{\vec{0}\}$ ✓ e $\mathbb{R}^2$ ✓

Obs: 1) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ é subespaço?

Não, pois $\vec{0} = (0,0) \notin S_1$.

2) $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ é subespaço? Sim, pois:

i) $\vec{0} = (0,0) \in S_2$

ii) $u = (x_1, 0)$, $v = (x_2, 0) \in S_2$

$\Rightarrow u + v = (x_1 + x_2, 0) \in S_2$

iii) $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = (x_1, 0) \in S_2$

$\Rightarrow \alpha u = (\alpha x_1, 0) \in S_2$

3) $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underline{x + y = 0}\}$ é subespaço? Sim, pois:

i) $\vec{0} = (0,0) \in S_3$

ii) $u=(x_1,y_1)$, $v=(x_2,y_2) \in S_3$

$\Rightarrow u+v=(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \in S_3$, pois

$\Rightarrow (x_1+x_2)+(y_1+y_2) = 0+0 = 0$

iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u=(x_1,y_1) \in S_3 \Rightarrow x_1+y_1=0$

Note que $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1) \in S_3$, pois

$\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1+y_1) = \alpha \cdot 0 = 0$

Ex 4)

$$\begin{cases} x-y-z-t=0 \\ 3x-y+2z-4t=0 \\ 2y+5z+t=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x-y-z-t=0 \\ 0+2y+5z-t=0 \\ 2y+5z+t=0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x-y-z-t=0 \xRightarrow[t=0]{t\,e\,y} x-(-5/2)z-z=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}z \\ 2y+5z-t=0 \xRightarrow{t=0} 2y+5z=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}z \\ 0+0+2t=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S=\{(-3/2\,z,\ -5/2\,z,\ z,\ 0) \,/\, z\in\mathbb{R}\}$

Note que:

$(-\frac{3}{2}z, -\frac{5}{2}z, z, \overset{0z}{0}) = z(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 1, 0)$

$\Rightarrow S=[(-3/2,-5/2,1,0)]$

Tome $B=\{(-3/2,-5/2,1,0)\} \Rightarrow [B]=S$

e B é L.I, pois $c_1(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2},1,0)=\vec{0}=(0,0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3/2\, c_1 = 0 \\ -5/2\, c_1 = 0 \\ c_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow c_1 = 0$$

Note que $[B] = S$ e B é L.I $\Rightarrow$ B é uma base de S.

Obs: $(\mathbb{R}^2, +, \cdot) \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = \underline{\underline{2}}$

$B_1 = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ e $B_2 = \{(1,1), (0,-3)\}$

são bases do $\mathbb{R}^2$ $\qquad [B_i] = \mathbb{R}^2$ e B_i é L.I.

$\underline{c_1} v_1 + \underline{c_2} v_2 = (x, y)$

$v_{B_1} = (\; , \;)$ $\qquad v_{B_2} = (\; , \;)$