Método das Diferenças Finitas

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

16 de agosto de 2021

Relembramos que um Problema de Valor Inicial (PVI) caracteriza-se por uma equação diferencial e condições extras fornecidas todas em um mesmo ponto. Por exemplo,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'),\ x < a \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

Problema de Valor de Contorno

Um Problema de Valor de Contorno (PVC) caracteriza-se por uma equação diferencial e condições extras fornecidas em mais de um ponto. No exemplo, novamente temos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, não-linear. Porém, uma das condições foi dada em $x = a$, enquanto que outra foi dada em $x = b$. Por exemplo,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'),\ a < x < b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \tag{2}$$

Para este tipo de problema, usamos o Método das Diferenças Finitas.

Método das Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas tenta aproximar apenas o valor da função incógnita em alguns pontos pré-determinados. Se o problema de valor de contorno está definido no intervalo $[a, b]$, então esse intervalo será fracionado em diversos subintervalos, em geral de tamanhos iguais.

Método das Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas tenta aproximar apenas o valor da função incógnita em alguns pontos pré-determinados. Se o problema de valor de contorno está definido no intervalo $[a, b]$, então esse intervalo será fracionado em diversos subintervalos, em geral de tamanhos iguais. Com efeito, tomamos n subintervalos de $[a, b]$, $n \geqslant 1$ e faz-se

Método das Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas tenta aproximar apenas o valor da função incógnita em alguns pontos pré-determinados. Se o problema de valor de contorno está definido no intervalo $[a, b]$, então esse intervalo será fracionado em diversos subintervalos, em geral de tamanhos iguais. Com efeito, tomamos n subintervalos de $[a, b]$, $n \geqslant 1$ e faz-se

$$x_j = x_0 + j \cdot h; \quad h = \frac{b-a}{n}, \tag{3}$$

onde $j = 0, 1, \ldots, n$, $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Método das Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas tenta aproximar apenas o valor da função incógnita em alguns pontos pré-determinados. Se o problema de valor de contorno está definido no intervalo $[a, b]$, então esse intervalo será fracionado em diversos subintervalos, em geral de tamanhos iguais. Com efeito, tomamos n subintervalos de $[a, b]$, $n \geqslant 1$ e faz-se

$$x_j = x_0 + j \cdot h; \quad h = \frac{b-a}{n}, \tag{3}$$

onde $j = 0, 1, \ldots, n, x_0 = a$ e $x_n = b$.

Como vimos no método de Euler, o conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é denominado malha ou rede de $[a, b]$. A distância entre estes nós da malha é denominada de passo de discretização, e será denotada por h. Dessa forma, o método de diferenças finitas há de aproximar $y(x_j)$, para $j = 0, 1, \ldots, n$. A essas aproximações, damos o nome de y_j .

A solvabilidade uma equação diferencial em geral é desafiadora, justamente por envolver derivadas da função incógnita, no método de diferenças finitas a estratégia é trocar essas derivadas por aproximações que envolvam apenas valores de função.

A solvabilidade uma equação diferencial em geral é desafiadora, justamente por envolver derivadas da função incógnita, no método de diferenças finitas a estratégia é trocar essas derivadas por aproximações que envolvam apenas valores de função.

Estratégia

- Aproximar $y'(x_j)$ e $y''(x_j)$ por diferenças utilizando apenas valor de função;

A solvabilidade uma equação diferencial em geral é desafiadora, justamente por envolver derivadas da função incógnita, no método de diferenças finitas a estratégia é trocar essas derivadas por aproximações que envolvam apenas valores de função.

Estratégia

- Aproximar $y'(x_j)$ e $y''(x_j)$ por diferenças utilizando apenas valor de função;
- A principal ferramenta matemática para a construção dos métodos de diferenças finitas é a expansão em série de Taylor.

A solvabilidade uma equação diferencial em geral é desafiadora, justamente por envolver derivadas da função incógnita, no método de diferenças finitas a estratégia é trocar essas derivadas por aproximações que envolvam apenas valores de função.

Estratégia

- Aproximar $y'(x_j)$ e $y''(x_j)$ por diferenças utilizando apenas valor de função;

- A principal ferramenta matemática para a construção dos métodos de diferenças finitas é a expansão em série de Taylor.

- A expansão em série de Taylor nos dá a possibilidade de construir um polinômio de grau n, utilizando apenas informação (a imagem) da função em um ponto x, de maneira que seja possível aproximar o valor da função próximo a esse ponto, ou seja em $x + h$ para h pequeno.

Em outras palavras, se y tem $(n+1)$ derivadas, a série de Taylor truncada em n termos, obtemos:

$$y(x) = y(x_i) + \frac{(x - x_i)}{1!}\, y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!}\, y''(x_i) + \ldots + \frac{(x - x_i)^n}{n!}\, y^{(n)}(x_i)\,. \tag{4}$$

Considerando $x = x_{i+1} = x_i + h$, temos

Em outras palavras, se y tem $(n+1)$ derivadas, a série de Taylor truncada em n termos, obtemos:

$$y(x) = y(x_i) + \frac{(x-x_i)}{1!}\, y'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2!}\, y''(x_i) + \ldots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}\, y^{(n)}(x_i)\,. \tag{4}$$

Considerando $x = x_{i+1} = x_i + h$, temos

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!}\, y^{(n)}(x_i) \tag{5}$$

onde vimos anteriormente que o erro de truncamento é:

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\; y^{(n+1)}(\xi),\; \xi \in [x_n, x_{n+1}]\,. \tag{6}$$

Como h é pequeno podemos truncar a série no ponto indicado. Utilizaremos $y(x_{j+1})$ e $y(x_j)$ e, desprezando-se os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois, obtém-se a expressão da aproximação com diferença progressiva ou avançada:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(\xi) \tag{7}$$

Como h é pequeno podemos truncar a série no ponto indicado. Utilizaremos $y(x_{j+1})$ e $y(x_j)$ e, desprezando-se os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois, obtém-se a expressão da aproximação com diferença progressiva ou avançada:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(\xi) \tag{7}$$

$$\Rightarrow\ y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{h}{2}\, y''(\xi),$$

Como h é pequeno podemos truncar a série no ponto indicado. Utilizaremos $y(x_{j+1})$ e $y(x_j)$ e, desprezando-se os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois, obtém-se a expressão da aproximação com diferença progressiva ou avançada:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(\xi) \tag{7}$$

$$\Rightarrow\; y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{h}{2}\, y''(\xi),$$

logo, considerando $y(x_i) \approx y_i$, temos que

Diferença Progressiva

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\,. \tag{8}$$

Agora considerando $y(x_{i-1})$ e $y(x_i)$ para aproximar $y'(x_i)$, isto é, substituindo $x = x_{i-1} = x_i - h$ em (4), temos

Agora considerando $y(x_{i-1})$ e $y(x_i)$ para aproximar $y'(x_i)$, isto é, substituindo $x = x_{i-1} = x_i - h$ em (4), temos

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{(-h)^2}{2!}\, y''(x_i) + \ldots + \frac{(-h)^n}{n!}\, y^{(n)}(x_i) \tag{9}$$

Sendo h um valor pequeno, desprezando-se os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois, obteremos a expressão da aproximação com diferença regressiva ou atrasada:

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(\xi) \tag{10}$$

Agora considerando $y(x_{i-1})$ e $y(x_i)$ para aproximar $y'(x_i)$, isto é, substituindo $x = x_{i-1} = x_i - h$ em (4), temos

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\,y'(x_i) + \frac{(-h)^2}{2!}\,y''(x_i) + \ldots + \frac{(-h)^n}{n!}\,y^{(n)}(x_i) \tag{9}$$

Sendo h um valor pequeno, desprezando-se os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois, obteremos a expressão da aproximação com diferença regressiva ou atrasada:

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\,y''(\xi) \tag{10}$$

$$\Rightarrow\; y'(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2}\,y''(\xi),$$

logo, considerando $y(x_i) \approx y_i$, temos que

Diferença Regressiva

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \,. \tag{11}$$

logo, considerando $y(x_i) \approx y_i$, temos que

Diferença Regressiva

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\,. \tag{11}$$

Note que o termo desprezado, apesar de ter sinal trocado possui mesma ordem h daquele desprezado na diferença progressiva.

Recorrendo aos polinômios de Taylor de grau 2 avaliados em x_{i-1} e x_i, a saber, os polinômios (7) e (10), podemos construir uma aproximação para $y'(x_j)$ com melhor acurácia, chamada de diferença centrada:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\, y'''(\xi^+)$$

Recorrendo aos polinômios de Taylor de grau 2 avaliados em x_{i-1} e x_i, a saber, os polinômios (7) e (10), podemos construir uma aproximação para $y'(x_j)$ com melhor acurácia, chamada de diferença centrada:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\,y'''(\xi^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}\,y'''(\xi^-)$$

Recorrendo aos polinômios de Taylor de grau 2 avaliados em x_{i-1} e x_i, a saber, os polinômios (7) e (10), podemos construir uma aproximação para $y'(x_j)$ com melhor acurácia, chamada de diferença centrada:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\, y'''(\xi^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}\, y'''(\xi^-)$$

$$\Rightarrow\ y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + \frac{h^2}{3!}\, y'''(\xi),$$

Recorrendo aos polinômios de Taylor de grau 2 avaliados em x_{i-1} e x_i, a saber, os polinômios (7) e (10), podemos construir uma aproximação para $y'(x_j)$ com melhor acurácia, chamada de diferença centrada:

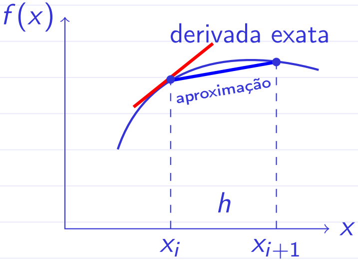
$$
\begin{aligned}
y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\, y'''(\xi^+) \\
y(x_{i-1}) &= y(x_i) - \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}\, y'''(\xi^-) \\
\Rightarrow\ y'(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + \frac{h^2}{3!}\, y'''(\xi),
\end{aligned}
$$

donde, considerando $y(x_i) \approx y_i$, temos que

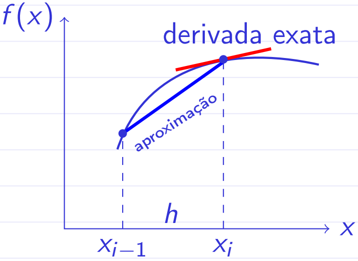
Diferença Centrada

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\,h}\,. \tag{12}$$

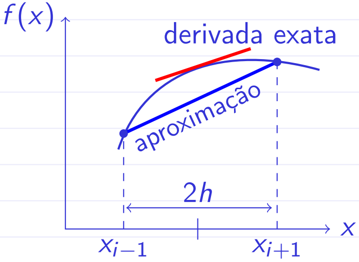
Observe agora que o termo desprezado na aproximação possui ordem h^2.



(a) Diferença Progressiva



(b) Diferença Regressiva



(c) Diferença Centrada

A seguir, exibiremos a derivada segunda de y em x_j. Para tanto, consideremos a expansão de série de Taylor de quarta ordem para $y(x_{j-1})$ e $y(x_{j+1})$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\, y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\, y''''(\xi^+)$$

,

A seguir, exibiremos a derivada segunda de y em x_j. Para tanto, consideremos a expansão de série de Taylor de quarta ordem para $y(x_{j-1})$ e $y(x_{j+1})$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\, y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\, y''''(\xi^+)$$
$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}\, y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\, y''''(\xi^-)$$

,

A seguir, exibiremos a derivada segunda de y em x_j. Para tanto, consideremos a expansão de série de Taylor de quarta ordem para $y(x_{j-1})$ e $y(x_{j+1})$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\, y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\, y''''(\xi^+)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}\, y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\, y''''(\xi^-)$$

$$\Rightarrow\ y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2\, y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12}\, y''''(\xi),$$

A seguir, exibiremos a derivada segunda de y em x_j. Para tanto, consideremos a expansão de série de Taylor de quarta ordem para $y(x_{j-1})$ e $y(x_{j+1})$:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{1!}\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}\,y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\,y''''(\xi^+)$$
$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \frac{h}{1!}\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}\,y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}\,y''''(\xi^-)$$
$$\Rightarrow\ y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2\,y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - \frac{h^2}{12}\,y''''(\xi),$$

donde, tendo em mente que $y(x_i) \approx y_i$, temos que

Diferença Centrada

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{h^2}\,. \qquad (13)$$

Veja que termo desprezado na aproximação também possui ordem h^2.

Caso Linear

Consideremos a equação

$$\begin{cases} y'' = p(x)\,y' + q(x)\,y + r(x) \\ y(a) = \alpha;\ y(b) = \beta \end{cases} \tag{14}$$

onde as funções p, q e r são conhecidas.

Caso Linear

Consideremos a equação

$$\begin{cases} y'' = p(x)\, y' + q(x)\, y + r(x) \\ y(a) = \alpha;\ y(b) = \beta \end{cases} \tag{14}$$

onde as funções p, q e r são conhecidas.

Exemplo

Dada a e.d.o.

$$\begin{cases} y'' - 5\,x\,y' + x^2\,y = \mathrm{e}^x \\ y(0) = 3;\ y(1) = 0, \end{cases}$$

temos que

$$p(x) = 5\,x;\ q(x) = -x^2;\ r(x) = \mathrm{e}^x;\ a = 0;\ b = 1;\ \alpha = 3;\ \beta = 0.$$

Nos pontos da malha interiores x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, a equação diferencial (14) a ser aproximada é

$$y''(x_i) = p(x_i)\, y'(x_i) + q(x_i)\, y + r(x_i) \tag{15}$$

com

$$y(x_0) = \alpha;\; y(x_n) = \beta\,. \tag{16}$$

As derivadas de y em x_i são substituídas pelas fórmulas (8), (11) e (12). Relembrando que:

Nos pontos da malha interiores x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, a equação diferencial (14) a ser aproximada é

$$y''(x_i) = p(x_i)\, y'(x_i) + q(x_i)\, y + r(x_i) \tag{15}$$

com

$$y(x_0) = \alpha;\; y(x_n) = \beta\,. \tag{16}$$

As derivadas de y em x_i são substituídas pelas fórmulas (8), (11) e (12). Relembrando que:

- obtemos somente uma aproximação para a derivada segunda, a saber, a aproximação (13) com erro de ordem $O(h^2)$;

Nos pontos da malha interiores x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, a equação diferencial (14) a ser aproximada é

$$y''(x_i) = p(x_i)\, y'(x_i) + q(x_i)\, y + r(x_i) \tag{15}$$

com

$$y(x_0) = \alpha;\; y(x_n) = \beta\,. \tag{16}$$

As derivadas de y em x_i são substituídas pelas fórmulas (8), (11) e (12). Relembrando que:

- obtemos somente uma aproximação para a derivada segunda, a saber, a aproximação (13) com erro de ordem $O(h^2)$;
- para a derivada primeira, três opções foram construídas, a saber, as diferenças progressiva, regressiva e centrada. Aqui, utilizaremos a diferença centrada por ser a única de ordem h^2, compatível com a ordem do erro da derivada segunda;

Nos pontos da malha interiores x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, a equação diferencial (14) a ser aproximada é

$$y''(x_i) = p(x_i)\, y'(x_i) + q(x_i)\, y + r(x_i) \tag{15}$$

com

$$y(x_0) = \alpha;\; y(x_n) = \beta\,. \tag{16}$$

As derivadas de y em x_i são substituídas pelas fórmulas (8), (11) e (12). Relembrando que:

- obtemos somente uma aproximação para a derivada segunda, a saber, a aproximação (13) com erro de ordem $O(h^2)$;
- para a derivada primeira, três opções foram construídas, a saber, as diferenças progressiva, regressiva e centrada. Aqui, utilizaremos a diferença centrada por ser a única de ordem h^2, compatível com a ordem do erro da derivada segunda;
- Note que as condições de contorno, neste caso, nos dão diretamente o valor de y nos extremos do intervalo.

Vejamos através de exemplos numéricos, o uso do método das diferenças finitas:

Exemplo

Recorrendo ao método de diferenças finitas, aproxime a solução do seguinte problema de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Solução: Temos que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

Solução: Temos que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

e desde que $x_0 = 0$ e $x_i = x_0 + i\,h$ temos que

$$x_i = i\,h,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{17}$$

Solução: Temos que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

e desde que $x_0 = 0$ e $x_i = x_0 + i\,h$ temos que

$$x_i = i\,h,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{17}$$

Uma vez que são conhecidos os valores de $y_0 = 0$ e $y_n = -1$, as incógnitas aqui consideradas são $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Substituindo as aproximações (12) e (13) com erro de truncamento de ordem $O(h^2)$, a e.d.o. é assim discretizada:

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_{+} y_{i-1}}{h^2} + \cancel{2}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{\cancel{2}\,h}\right] + y_i = x_i$$

Substituindo as aproximações (12) e (13) com erro de truncamento de ordem $O(h^2)$, a e.d.o. é assim discretizada:

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_{+} y_{i-1}}{h^2} + \cancel{2}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{\cancel{2}\,h}\right] + y_i = x_i$$

$$\Rightarrow y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1} + h\,(y_{i+1} - y_i) + h^2\,y_i = h^2\,\underbrace{x_i}_{=i\,h},$$

Substituindo as aproximações (12) e (13) com erro de truncamento de ordem $O(h^2)$, a e.d.o. é assim discretizada:

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_{+}y_{i-1}}{h^2} + \cancel{2}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{\cancel{2}\,h}\right] + y_i = x_i$$

$$\Rightarrow y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1} + h\,(y_{i+1} - y_i) + h^2\,y_i = h^2 \underbrace{x_i}_{=i\,h},$$

$$\Rightarrow (1-h)y_{i-1} + (h^2-2)y_i + (1+h)y_{i+1} = i\,h^3,\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{18}$$

Substituindo as aproximações (12) e (13) com erro de truncamento de ordem $O(h^2)$, a e.d.o. é assim discretizada:

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_{+}y_{i-1}}{h^2} + \cancel{2}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{\cancel{2}\,h}\right] + y_i = x_i$$

$$\Rightarrow y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1} + h\,(y_{i+1} - y_i) + h^2\,y_i = h^2\,\underbrace{x_i}_{=i\,h},$$

$$\Rightarrow (1-h)y_{i-1} + (h^2-2)y_i + (1+h)y_{i+1} = i\,h^3,\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{18}$$

Tendo em mente a condição inicial $y(0) = 0$, considerando $i = 1$ em (18), temos:

$$\cancel{(1-h)y_0}^{\,0} + (h^2-2)y_1 + (1+h)y_2 = h^3\,. \tag{19}$$

Agora, fazendo uso da outra condição de contorno, a saber, $y(1) = y_n = -1$ para $i = n - 1$ em (18), resulta que

$$(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} + (1+h)\underbrace{y_n}_{=-1} = (n-1)\,h^3$$

Agora, fazendo uso da outra condição de contorno, a saber, $y(1) = y_n = -1$ para $i = n - 1$ em (18), resulta que

$$
\begin{aligned}
&(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} + (1+h)\underbrace{y_n}_{=-1} = (n-1)\,h^3 \\
\Rightarrow &(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} = (n-1)\,h^3 + (1+h)\,.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Agora, fazendo uso da outra condição de contorno, a saber, $y(1) = y_n = -1$ para $i = n - 1$ em (18), resulta que

$$\begin{aligned} &(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} + (1+h)\underbrace{y_n}_{=-1} = (n-1)\,h^3 \\ \Rightarrow &(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} = (n-1)\,h^3 + (1+h)\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Assim, para determinar $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, combinando as equações (18), (19) e (20), temos o seguinte sistema:

Agora, fazendo uso da outra condição de contorno, a saber, $y(1) = y_n = -1$ para $i = n - 1$ em (18), resulta que

$$\begin{aligned} &(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} + (1+h)\underbrace{y_n}_{=-1} = (n-1)\,h^3 \\ \Rightarrow &(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} = (n-1)\,h^3 + (1+h)\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Assim, para determinar $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, combinando as equações (18), (19) e (20), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (h^2-2)y_1 + (1+h)y_2 = h^3 \\ (1-h)y_{i-1} + (h^2-2)y_i + (1+h)y_{i+1} = i\,h^3,\ 2 \le i \le n-2 \\ (1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} = (n-1)\,h^3 + (1+h) \end{cases} \tag{21}$$

Do exposto, o sistema de equações resultantes é expresso na forma de matriz tridiagonal $(n-1) \times (n-1)$

$$A\,Y = B, \ \text{donde,}$$

$$A = \begin{pmatrix} h^2-2 & 1+h & 0 & \cdots & 0 \\ 1-h & h^2-2 & 1+h & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1+h \\ 0 & \cdots & 0 & 1-h & h^2-2 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} h^3 \\ 2\,h^3 \\ \vdots \\ (n-2)\,h^3 \\ (n-1)\,h^3 + (1+h) \end{pmatrix}$$

Do exposto, o sistema de equações resultantes é expresso na forma de matriz tridiagonal $(n-1) \times (n-1)$

$$A\,Y = B, \ \text{donde},$$

$$A = \begin{pmatrix} h^2-2 & 1+h & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1-h & h^2-2 & 1+h & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1+h \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-h & h^2-2 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} h^3 \\ 2\,h^3 \\ \vdots \\ (n-2)\,h^3 \\ (n-1)\,h^3 + (1+h) \end{pmatrix}$$

Assim, atribuindo o valor de h (e consequentemente de n), obtemos a solução numérica ao resolver o sistema acima.

Exemplo

Recorrendo ao método de diferenças finitas, aproxime a solução do seguinte problema de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) = y(x)\,\mathrm{sen}(y(x)) + x\,y \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Exemplo

Recorrendo ao método de diferenças finitas, aproxime a solução do seguinte problema de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) = y(x)\,\mathrm{sen}(y(x)) + x\,y \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Solução: Discretizando a e.d.o., temos:

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{h^2} = y_i\,\mathrm{sen}(y_i) + x_i\,y_i\,. \qquad (23)$$

Exemplo

Recorrendo ao método de diferenças finitas, aproxime a solução do seguinte problema de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) = y(x)\,\mathrm{sen}(y(x)) + x\,y \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Solução: Discretizando a e.d.o., temos:

$$\frac{y_{i+1} - 2\,y_i + y_{i-1}}{h^2} = y_i\,\mathrm{sen}(y_i) + x_i\,y_i\,. \qquad (23)$$

Tendo em mente que $x_0 = 0$, logo, $x_i = i\,h$, resulta que

$$y_{i-1} - y_i\,\left[2 + h^2\,\mathrm{sen}(y_i) + ih\right] + y_{i+1} = 0,\; i = 1, 2, \ldots\; n-1\,. \qquad (24)$$

juntamente com a condição inicial $y(0) = 0$, considerando $i = 1$ em (23), temos:

$$\underbrace{y_0}_{=1} - y_1\,\left[2 + h^2\,\mathrm{sen}(y_1) + h\right] + y_2 = 0\,. \qquad (25)$$

Usando a outra condição de contorno $y(1) = y_n = 5$ para $i = n - 1$ em (24), vem que

$$y_{n-2} - y_{n-1} \left[2 + h^2 \operatorname{sen}(y_{n-1}) + (n-1)\,h\right] + \underbrace{y_n}_{=5} = 0\,. \qquad (26)$$

Usando a outra condição de contorno $y(1) = y_n = 5$ para $i = n - 1$ em (24), vem que

$$y_{n-2} - y_{n-1}\,\left[2 + h^2\,\mathrm{sen}(y_{n-1}) + (n-1)\,h\right] + \underbrace{y_n}_{=5} = 0\,. \qquad (26)$$

Assim, para determinar $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, do exposto, temos o seguinte sistema:

Usando a outra condição de contorno $y(1) = y_n = 5$ para $i = n - 1$ em (24), vem que

$$y_{n-2} - y_{n-1}\ \left[2 + h^2 \operatorname{sen}(y_{n-1}) + (n-1)\,h\right] + \underbrace{y_n}_{=5} = 0\,. \qquad (26)$$

Assim, para determinar $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, do exposto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 - y_1\ \left[2 + h^2 \operatorname{sen}(y_1) + h\right] + y_2 = 0 \\ y_{i-1} - y_i\ \left[2 + h^2 \operatorname{sen}(y_i) + ih\right] + y_{i+1} = 0,\ i = 2, \ldots\ n-2 \\ y_{n-2} - y_{n-1}\ \left[2 + h^2 \operatorname{sen}(y_{n-1}) + (n-1)\,h\right] + 5 = 0 \end{cases}$$