Método de Euler

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

9 de agosto de 2021

Leonhard Euler

Leonhard Paul Euler (1707–1783), matemático e físico suíço, passou a maior parte na da sua vida na Rússia (São Petersburgo) e Alemanha (Berlim).

- Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e também é considerado como um dos grandes matemáticos de todos os tempos, assim como Isaac Newton, Arquimedes e Carl Friedrich Gauss.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Leonhard Euler

Leonhard Paul Euler (1707–1783), matemático e físico suíço, passou a maior parte na da sua vida na Rússia (São Petersburgo) e Alemanha (Berlim).

- Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e também é considerado como um dos grandes matemáticos de todos os tempos, assim como Isaac Newton, Arquimedes e Carl Friedrich Gauss.
- Em 1738, ficou quase cego do olho direito. Era chamado de “Cyclops”. A matemática era uma paixão tão grande para Euler que, ao final da vida, quando ficou quase cego, ele disse: “Suponho que agora terei menos distrações".

Leonhard Euler

Leonhard Paul Euler (1707–1783), matemático e físico suíço, passou a maior parte na da sua vida na Rússia (São Petersburgo) e Alemanha (Berlim).

- Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII e também é considerado como um dos grandes matemáticos de todos os tempos, assim como Isaac Newton, Arquimedes e Carl Friedrich Gauss.
- Em 1738, ficou quase cego do olho direito. Era chamado de “Cyclops”. A matemática era uma paixão tão grande para Euler que, ao final da vida, quando ficou quase cego, ele disse: “Suponho que agora terei menos distrações".
- No entanto, sua condição parece ter pouco efeito sobre sua produtividade, em muitas áreas, aumentou. Produziu, em média, **um artigo matemático durante todas as semanas** do ano 1775. Estima-se que Euler produziu mais de 800 artigos.

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Leonhard Euler

- Por 50 anos após sua morte, a Academia de Ciências de São Petersburgo ainda publicava seus artigos inéditos;

Leonhard Euler

- Por 50 anos após sua morte, a Academia de Ciências de São Petersburgo ainda publicava seus artigos inéditos;
- Foi o primeiro a escrever $f(x)$ para função, introduziu a notação moderna das funções trigonométricas, o número e para os logaritmos, a letra grega Σ para os somatórios e a notação $i = \sqrt{-1}$.
- Resolveu o famoso problema da Basileia em 1735:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Leonhard Euler

- Por 50 anos após sua morte, a Academia de Ciências de São Petersburgo ainda publicava seus artigos inéditos;
- Foi o primeiro a escrever $f(x)$ para função, introduziu a notação moderna das funções trigonométricas, o número e para os logaritmos, a letra grega Σ para os somatórios e a notação $i = \sqrt{-1}$.
- Resolveu o famoso problema da Basileia em 1735:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi}{6} \,.$$

- É de Euler a equação mais famosa da Matemática:

$$\mathrm{e}^{i\,\pi} + 1 = 0 \,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Leonhard Euler

- Por 50 anos após sua morte, a Academia de Ciências de São Petersburgo ainda publicava seus artigos inéditos;
- Foi o primeiro a escrever $f(x)$ para função, introduziu a notação moderna das funções trigonométricas, o número e para os logaritmos, a letra grega Σ para os somatórios e a notação $i = \sqrt{-1}$.
- Resolveu o famoso problema da Basileia em 1735:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi}{6}\,.$$

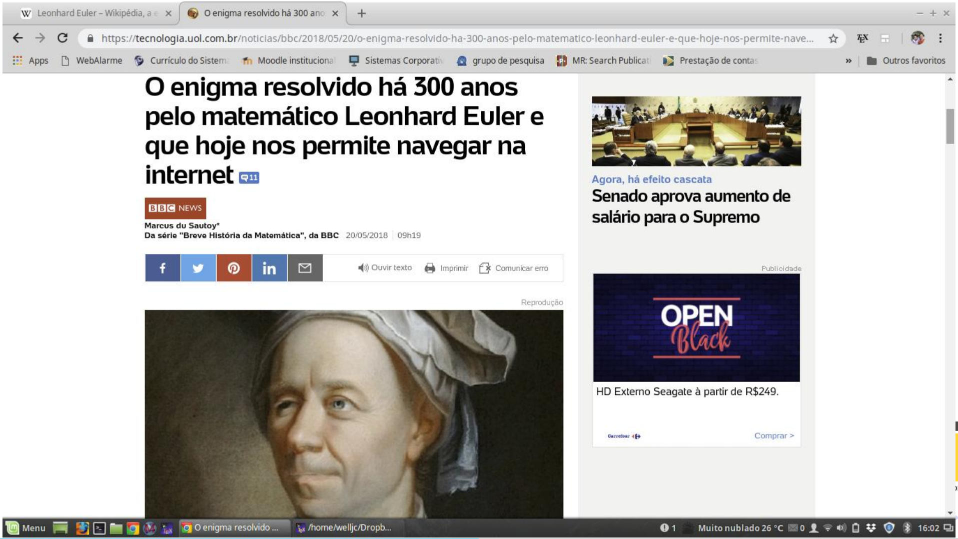
- É de Euler a equação mais famosa da Matemática:

$$\mathrm{e}^{i\,\pi} + 1 = 0\,.$$

- A fórmula $V - A + F = 2$ relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo.

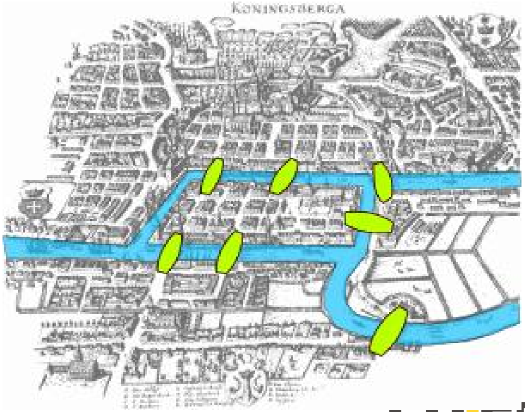
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Leonhard Euler



Sete pontes de Königsberg.

- A cidade prussiana de Königsberg estava dividida em quatro regiões diferentes banhadas pelo rio Pregel.
- Sete pontes conectavam essas quatro áreas e, na época de Euler, um passatempo comum entre os residentes era tentar encontrar uma maneira de cruzar todas as pontes apenas uma vez e voltar ao ponto de partida.



Sete pontes de Königsberg.

- Euler escreveu uma carta ao astrônomo da Corte de Viena em 1736, descrevendo o que pensava sobre o problema:
- *"Esta pergunta é tão banal, mas me parecia digna de atenção porque nem a geometria, nem a álgebra, nem sequer a arte de fazer contas eram suficientes para respondê-la."*

Sete pontes de Königsberg.

- Euler escreveu uma carta ao astrônomo da Corte de Viena em 1736, descrevendo o que pensava sobre o problema:
- *“Esta pergunta é tão banal, mas me parecia digna de atenção porque nem a geometria, nem a álgebra, nem sequer a arte de fazer contas eram suficientes para respondê-la."*
- Em vez de caminhar interminavelmente pela cidade, testando diferentes rotas, Euler criou uma nova “geometria de posição", pela qual medidas como longitude e ângulo são irrelevantes. O que importa é verificar como as coisas estão conectadas.

Sete pontes de Königsberg.

- Euler escreveu uma carta ao astrônomo da Corte de Viena em 1736, descrevendo o que pensava sobre o problema:
- *"Esta pergunta é tão banal, mas me parecia digna de atenção porque nem a geometria, nem a álgebra, nem sequer a arte de fazer contas eram suficientes para respondê-la."*
- Em vez de caminhar interminavelmente pela cidade, testando diferentes rotas, Euler criou uma nova "geometria de posição", pela qual medidas como longitude e ângulo são irrelevantes. O que importa é verificar como as coisas estão conectadas.
- Euler decidiu pensar nas diferentes regiões de terra separadas pelo rio como pontos, e as pontes que as unem, como linhas que conectam os pontos.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sete pontes de Königsberg.

- Descobriu o seguinte: para que uma viagem de ida e volta (sem retornar pelo mesmo caminho) seja possível, cada ponto - com exceção do ponto de partida e do ponto final - deve ter um número par de linhas entrando e saindo.
- Quando analisou o mapa das sete pontes de Königsberg dessa maneira, o matemático descobriu que cada ponto - ou pedaço de terra - tinha um número ímpar de linhas ou pontes que emergiam delas.

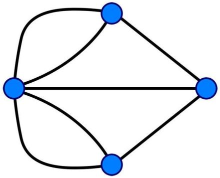
Sete pontes de Königsberg.

- Descobriu o seguinte: para que uma viagem de ida e volta (sem retornar pelo mesmo caminho) seja possível, cada ponto - com exceção do ponto de partida e do ponto final - deve ter um número par de linhas entrando e saindo.
- Quando analisou o mapa das sete pontes de Königsberg dessa maneira, o matemático descobriu que cada ponto - ou pedaço de terra - tinha um número ímpar de linhas ou pontes que emergiam delas.
- Assim, sem ter que caminhar pela cidade, Euler descobriu matematicamente que era impossível andar por toda a cidade cruzando cada ponte apenas uma vez.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sete pontes de Königsberg.

- Descobriu o seguinte: para que uma viagem de ida e volta (sem retornar pelo mesmo caminho) seja possível, cada ponto - com exceção do ponto de partida e do ponto final - deve ter um número par de linhas entrando e saindo.
- Quando analisou o mapa das sete pontes de Königsberg dessa maneira, o matemático descobriu que cada ponto - ou pedaço de terra - tinha um número ímpar de linhas ou pontes que emergiam delas.
- Assim, sem ter que caminhar pela cidade, Euler descobriu matematicamente que era impossível andar por toda a cidade cruzando cada ponte apenas uma vez.
- Esta solução é considerada como sendo o primeira teorema da teoria dos grafos



Sete pontes de Königsberg.

- O enigma de Königsberg estava longe de ser um problema urgente naquele momento (**era mais uma curiosidade**), mas sua solução perdurou e revolucionou a era da informação do século 21.
- A solução matemática ao enigma de Königsberg agora impulsiona uma das redes mais importantes do século 21: a internet, que conecta milhões de computadores em todo o mundo e move dados digitais entre eles numa velocidade incrível.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sete pontes de Königsberg.

- O enigma de Königsberg estava longe de ser um problema urgente naquele momento (**era mais uma curiosidade**), mas sua solução perdurou e revolucionou a era da informação do século 21.
- A solução matemática ao enigma de Königsberg agora impulsiona uma das redes mais importantes do século 21: a internet, que conecta milhões de computadores em todo o mundo e move dados digitais entre eles numa velocidade incrível.
- Cada um consegue fazer essa conexão porque seu computador está programado pela regras baseadas no trabalho que Euler desenvolveu no século 18, ao resolver o enigma das pontes de Königsberg.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sete pontes de Königsberg.

- O enigma de Königsberg estava longe de ser um problema urgente naquele momento (**era mais uma curiosidade**), mas sua solução perdurou e revolucionou a era da informação do século 21.
- A solução matemática ao enigma de Königsberg agora impulsiona uma das redes mais importantes do século 21: a internet, que conecta milhões de computadores em todo o mundo e move dados digitais entre eles numa velocidade incrível.
- Cada um consegue fazer essa conexão porque seu computador está programado pela regras baseadas no trabalho que Euler desenvolveu no século 18, ao resolver o enigma das pontes de Königsberg.

Fonte:https://www.bbc.com/portuguese/geral-44157282

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Introdução

Uma equação diferencial ordinária é a equação diferencial que tem apenas uma variável. Por exemplo,

Introdução

Uma equação diferencial ordinária é a equação diferencial que tem apenas uma variável. Por exemplo,

- $\dfrac{dy}{dx} = x + y;$

Introdução

Uma equação diferencial ordinária é a equação diferencial que tem apenas uma variável. Por exemplo,

- $\dfrac{dy}{dx} = x + y;$
- $y' = x^2 + y^2\,.$

Definição 1.1

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da seguinte forma:

Definição 1.1

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da seguinte forma:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

onde $y^{(i)} = \dfrac{d^i}{dx^i} y(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Definição 1.1

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é uma equação da seguinte forma:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

onde $y^{(i)} = \dfrac{d^i}{dx^i} y(x),\ i = 0, 1, \ldots, n.$

Por exemplo, temos a e. d. o. de ordem 2:

$$y'' - 5y' + 6y = 0\,.$$

Quando a e. d. o. apresenta a forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

com valores iniciais

$$y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \alpha_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_m .$$

Quando a e. d. o. apresenta a forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

com valores iniciais

$$y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \alpha_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_m\,.$$

Quando a e. d. o. apresenta a forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

com valores iniciais

$$y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \alpha_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_m\,.$$

Por exemplo, temos a e. d. o. de ordem 3:

$$y''' + 4y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2\,.$$

Quando a e. d. o. apresenta a forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

com valores iniciais

$$y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \alpha_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_m\,.$$

Por exemplo, temos a e. d. o. de ordem 3:

$$y''' + 4y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2\,.$$

A e. d. o. apresenta a forma acima, dizemos que temos um <u>problema de valor inicial</u> (P. V. I.) .

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial $y' + 3\,x^2\,y = 6\,x^2$.

$$y' + 3\,x^2\,y = 6\,x^2$$

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial $y' + 3\,x^2\,y = 6\,x^2$.

Solução: Para resolver esta e. d. o., basta multiplicar esta equação pelo fator integrante e^{x^3}.

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial $y' + 3\,x^2\,y = 6\,x^2$.

Solução: Para resolver esta e. d. o., basta multiplicar esta equação pelo fator integrante e^{x^3}. Em outras palavras,

$$y' + 3\,x^2\,y = 6\,x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{y' \cdot \mathrm{e}^{x^3} + 3\,x^2\,y \cdot \mathrm{e}^{x^3}}_{\frac{d}{dx}[y \cdot \mathrm{e}^{x^3}]} = 6\,x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^3}$$

Integrando ambos os lados,temos:

$$\frac{d}{dx}[y \cdot e^{x^3}] \quad = 6 \quad x^2 \cdot e^{x^3}$$

Integrando ambos os lados,temos:

$$\int \frac{d}{dx}[y \cdot \mathrm{e}^{x^3}]\, dx = 6 \int x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^3}\, dx$$

Integrando ambos os lados,temos:

$$\int \frac{d}{dx}[y \cdot e^{x^3}]\, dx = 6 \int x^2 \cdot e^{x^3}\, dx$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{x^3} = 2\, y \cdot e^{x^3} + C$$

Integrando ambos os lados,temos:

$$\int \frac{d}{dx}[y \cdot \mathrm{e}^{x^3}]\, dx = 6 \int x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^3}\, dx$$
$$\Rightarrow y \cdot \mathrm{e}^{x^3} = 2\, y \cdot \mathrm{e}^{x^3} + C$$
$$\Rightarrow y = 2 + C\, \mathrm{e}^{-x^3}\, .$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo

Discretização

Resolver numericamente um p. v. i. consiste em calcular aproximações para $y = y(x)$ em pontos discretos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de um intervalo $[a, b]$.

Discretização

Resolver numericamente um p. v. i. consiste em calcular aproximações para $y = y(x)$ em pontos discretos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de um intervalo $[a, b]$.
Com efeito, tomamos n subintervalos de $[a, b]$, $n \geqslant 1$ e faz-se

Discretização

Resolver numericamente um p. v. i. consiste em calcular aproximações para $y = y(x)$ em pontos discretos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de um intervalo $[a, b]$.
Com efeito, tomamos n subintervalos de $[a, b]$, $n \geqslant 1$ e faz-se

$$x_j = x_0 + j \cdot h; \quad h = \frac{b-a}{n}, \tag{1}$$

onde $j = 0, 1, \ldots, n$, $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Discretização

Resolver numericamente um p. v. i. consiste em calcular aproximações para $y = y(x)$ em pontos discretos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de um intervalo $[a, b]$.
Com efeito, tomamos n subintervalos de $[a, b]$, $n \geqslant 1$ e faz-se

$$x_j = x_0 + j \cdot h; \quad h = \frac{b-a}{n}, \tag{1}$$

onde $j = 0, 1, \ldots, n$, $x_0 = a$ e $x_n = b$.
O conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é denominado <u>malha</u> ou <u>rede</u> de $[a, b]$.

Discretização

Determinaremos y_n tal que $y_j \approx y(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. A partir de um ponto inicial dado

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{(valor inicial)},$$

calculamos passo a passo,

$$x_1 = x_0 + h$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Discretização

Determinaremos y_n tal que $y_j \approx y(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. A partir de um ponto inicial dado

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{(valor inicial)},$$

calculamos passo a passo,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2\,h \end{aligned}$$

Discretização

Determinaremos y_n tal que $y_j \approx y(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. A partir de um ponto inicial dado

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{(valor inicial)},$$

calculamos passo a passo,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2\,h \\ x_3 &= x_0 + 3\,h \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Discretização

Determinaremos y_n tal que $y_j \approx y(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. A partir de um ponto inicial dado

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{(valor inicial)},$$

calculamos passo a passo,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2\,h \\ x_3 &= x_0 + 3\,h \\ &\vdots \end{aligned}$$

Discretização

Determinaremos y_n tal que $y_j \approx y(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. A partir de um ponto inicial dado

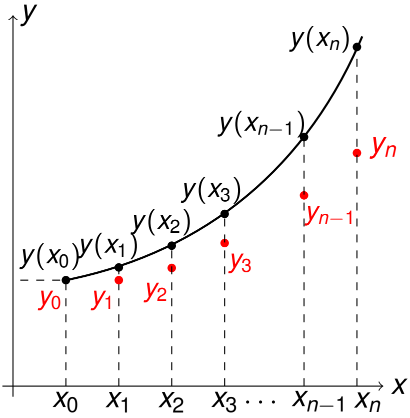
$$y(x_0) = y_0 \quad \text{(valor inicial)},$$

calculamos passo a passo,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2\,h \\ x_3 &= x_0 + 3\,h \\ &\vdots \\ x_n &= x_0 + n\,h\,. \end{aligned}$$

Discretização

Obtemos assim as soluções aproximadas y_j para cada solução exata $y(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, conforme a figura abaixo:



Método de Euler

Considere o p. v. i.:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

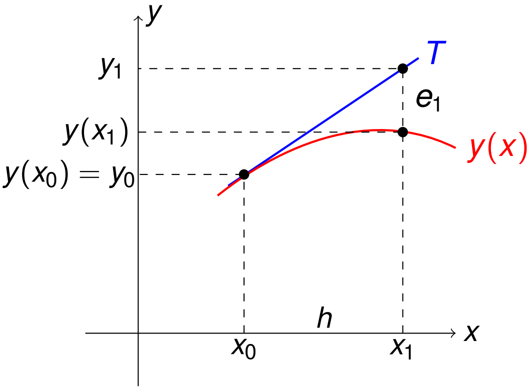
Método de Euler

Considere o p. v. i.:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Para aproximar as soluções numéricas y_j para as soluções exatas $y(x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, procura-se inicialmente y_1 :

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Traça-se uma reta tangente T à curva $y(x)$ no ponto (x_0, y_0) e cuja equação é

Traça-se uma reta tangente T à curva $y(x)$ no ponto (x_0, y_0) e cuja equação é

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{2}$$

Fazendo $x = x_1$ e tendo em mente que $y(x_0) = y_0,\ x_1 - x_0 = h, y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ e $y_1 \approx y(x_1)$, temos:

Traça-se uma reta tangente T à curva $y(x)$ no ponto (x_0, y_0) e cuja equação é

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{2}$$

Fazendo $x = x_1$ e tendo em mente que $y(x_0) = y_0$, $x_1 - x_0 = h, y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ e $y_1 \approx y(x_1)$, temos:

$$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0)\,. \tag{3}$$

Traça-se uma reta tangente T à curva $y(x)$ no ponto (x_0, y_0) e cuja equação é

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{2}$$

Fazendo $x = x_1$ e tendo em mente que $y(x_0) = y_0$, $x_1 - x_0 = h$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ e $y_1 \approx y(x_1)$, temos:

$$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0)\,. \tag{3}$$

O erro cometido é

$$e_1 = y_1 - y(x_1)\,. \tag{4}$$

De modo geral,

De modo geral,

Método de Euler

(5)
$$\left\{\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + h\,f(x_j, y_j) \\ e_{j+1} &= y_{j+1} - y(x_{j+1}) \end{aligned}\right., \; j = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

De modo geral,

Método de Euler

$$
\left\{
\begin{array}{l}
y_{j+1} = y_j + h\, f(x_j, y_j) \\
e_{j+1} = y_{j+1} - y(x_{j+1})
\end{array}
\right. , \; j = 0, 1, \ldots, n-1 \, . \tag{5}
$$

O método de Euler $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n)$ é chamado de <u>método</u> do <u>passo simples</u>, pois, para calcular y_{n+1}, usamos apenas o valor de y_n .

Erro

Na prática, não dispomos da solução exata $y(x_j)$ do p. v. i. Disto, vem a necessidade de se obter uma expressão matemática para o erro.

Erro

Na prática, não dispomos da solução exata $y(x_j)$ do p. v. i. Disto, vem a necessidade de se obter uma expressão matemática para o erro.
Para tanto, consideremos a série de Taylor em $x = x_0$:

Erro

Na prática, não dispomos da solução exata $y(x_j)$ do p. v. i. Disto, vem a necessidade de se obter uma expressão matemática para o erro.
Para tanto, consideremos a série de Taylor em $x = x_0$:

$$(6)\quad y(x) = y(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + \ldots$$

Erro

Se realizarmos um truncamento na série (6), temos:

Erro

Se realizarmos um truncamento na série (6), temos:

$$y(x) \approx y(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}y^{(n)}(x_0) \tag{7}$$

e o erro de truncamento é:

$$e_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, y^{(n+1)}(\xi),\ \xi \in [x_n, x_{n+1}]\,. \tag{8}$$

Erro

Para estudar o erro no Método de Euler, basta analisar a série de Taylor de ordem 1 com resto.

Erro

Para estudar o erro no Método de Euler, basta analisar a série de Taylor de ordem 1 com resto.

Assim, considerando os dois primeiros termos de (7) com $x_1 - x_0 = h$ e $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ e $y_1 = y(x_1)$, teremos a fórmula (3) e, neste caso, o erro é

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Erro

Para estudar o erro no Método de Euler, basta analisar a série de Taylor de ordem 1 com resto.
Assim, considerando os dois primeiros termos de (7) com $x_1 - x_0 = h$ e $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ e $y_1 = y(x_1)$, teremos a fórmula (3) e, neste caso, o erro é

Erro

$$e_n = \frac{h^2}{2!} y''(\xi), \ \ \xi \in [x_n, x_{n+1}] \,. \tag{9}$$

Exemplo 2

Usando o método de Euler, calcule a solução aproximada do seguinte p. v. i. e uma estimativa para o erro:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = y - x \\ y(x_0) = y(0) = 2 \end{cases} \tag{10}$$

para $x \in [a, b] = [0, 1]$ *e* $n = 4$ *subintervalos.*

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Solução: Note que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4},$$

logo, o intervalo $[0,1]$ é discretizado por

Solução: Note que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4},$$

logo, o intervalo $[0, 1]$ é discretizado por

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{array}$$

- Cálculo de y_1 :

- Cálculo de y_1 :

Para $n = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h\,f(x_0, y_0) \\ &= y_0 + \frac{1}{4}\,[y_0 - x_0] \end{aligned}$$

- Cálculo de y_1 :

Para $n = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h\, f(x_0, y_0) \\
&= y_0 + \frac{1}{4}\,[y_0 - x_0] \\
&= \frac{5}{4}\,y_0 - \frac{1}{4}\,x_0
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_1 :

Para $n = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h\, f(x_0, y_0) \\
&= y_0 + \frac{1}{4}\,[y_0 - x_0] \\
&= \frac{5}{4}\, y_0 - \frac{1}{4}\, x_0 \\
&= \frac{5}{4} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 0
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_1 :

Para $n = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h\,f(x_0, y_0) \\
&= y_0 + \frac{1}{4}\,[y_0 - x_0] \\
&= \frac{5}{4}\,y_0 - \frac{1}{4}\,x_0 \\
&= \frac{5}{4}\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot 0 \\
&= 2,5\,.
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_2 :

- Cálculo de y_2 :

Para $n = 1$, temos que $x_1 = 0,25$ e $y_1 = 2,5$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h\,f(x_1, y_1) \\ &= y_1 + \frac{1}{4}\,[y_1 - x_1] \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_2 :

Para $n = 1$, temos que $x_1 = 0,25$ e $y_1 = 2,5$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h\,f(x_1, y_1) \\ &= y_1 + \frac{1}{4}\,[y_1 - x_1] \\ &= \frac{5}{4}\,y_1 - \frac{1}{4}\,x_1 \end{aligned}$$

- Cálculo de y_2 :

Para $n = 1$, temos que $x_1 = 0,25$ e $y_1 = 2,5$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h\, f(x_1, y_1) \\ &= y_1 + \frac{1}{4}\,[y_1 - x_1] \\ &= \frac{5}{4}\, y_1 - \frac{1}{4}\, x_1 \\ &= \frac{5}{4} \cdot 2,5 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Cálculo de y_2 :

Para $n = 1$, temos que $x_1 = 0,25$ e $y_1 = 2,5$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h\,f(x_1, y_1) \\ &= y_1 + \frac{1}{4}\,[y_1 - x_1] \\ &= \frac{5}{4}\,y_1 - \frac{1}{4}\,x_1 \\ &= \frac{5}{4}\cdot 2,5 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\ &= 3,0625\,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_3 :

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + h\, f(x_2, y_2) \\ &= y_2 + \frac{1}{4}\,[y_2 - x_2] \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + h\,f(x_2, y_2) \\ &= y_2 + \frac{1}{4}\,[y_2 - x_2] \\ &= \frac{5}{4}\,y_2 - \frac{1}{4}\,x_2 \end{aligned}$$

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + h\, f(x_2, y_2) \\
&= y_2 + \frac{1}{4}\,[y_2 - x_2] \\
&= \frac{5}{4}\, y_2 - \frac{1}{4}\, x_2 \\
&= \frac{5}{4} \cdot 3,0625 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + h\,f(x_2, y_2) \\
&= y_2 + \frac{1}{4}\,[y_2 - x_2] \\
&= \frac{5}{4}\,y_2 - \frac{1}{4}\,x_2 \\
&= \frac{5}{4}\cdot 3{,}0625 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} \\
&= 3{,}7031\,.
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_4 :

- Cálculo de y_4 :

Para $n = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + h\, f(x_3, y_3) \\ &= y_3 + \frac{1}{4}\,[y_3 - x_3] \end{aligned}$$

- Cálculo de y_4 :

Para $n = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + h\, f(x_3, y_3) \\ &= y_3 + \frac{1}{4}\, [y_3 - x_3] \\ &= \frac{5}{4}\, y_3 - \frac{1}{4}\, x_3 \end{aligned}$$

- Cálculo de y_4 :

Para $n = 3$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + h\,f(x_3, y_3) \\
&= y_3 + \frac{1}{4}\,[y_3 - x_3] \\
&= \frac{5}{4}\,y_3 - \frac{1}{4}\,x_3 \\
&= \frac{5}{4}\cdot 3,7031 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_4 :

Para $n = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + h\,f(x_3, y_3) \\ &= y_3 + \frac{1}{4}\,[y_3 - x_3] \\ &= \frac{5}{4}\,y_3 - \frac{1}{4}\,x_3 \\ &= \frac{5}{4}\cdot 3,7031 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} \\ &= 4,4414\,. \end{aligned}$$

Erro:

Como a solução analítica do p. v. i. é $y(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$, temos que

$$\max\{|y''(x)|;\ x \in\ [1,\ 1,25]\}$$

Erro:

Como a solução analítica do p. v. i. é $y(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$, temos que

$$\max\{|y''(x)|;\ x \in\ [1,\ 1,25]\}$$
$$\max\{\mathrm{e}^x;\ x \in\ [1,\ 1,25]\}$$

Erro:

Como a solução analítica do p. v. i. é $y(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$, temos que

$$\begin{aligned}
&\max\{|y''(x)|;\ x \in [1,\ 1{,}25]\}\\
&\max\{\mathrm{e}^x;\ x \in [1,\ 1{,}25]\}\\
&= \mathrm{e}^{1{,}25}
\end{aligned}$$

Erro:

Como a solução analítica do p. v. i. é $y(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$, temos que

$$\begin{aligned} & \max\{|y''(x)|;\ x \in [1,\ 1,25]\} \\ & \max\{\mathrm{e}^x;\ x \in [1,\ 1,25]\} \\ & = \mathrm{e}^{1,25} = 3,490342957\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|E| \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} \cdot 3,490342957 = 0,109073217\,.$$

Erro:

Como a solução analítica do p. v. i. é $y(x) = \mathrm{e}^x + x + 1$, temos que

$$\begin{aligned} &\max\{|y''(x)|;\ x \in [1,\ 1,25]\} \\ &\max\{\mathrm{e}^x;\ x \in [1,\ 1,25]\} \\ &= \mathrm{e}^{1,25} = 3,490342957\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|E| \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2} \cdot 3,490342957 = 0,109073217\,.$$

"WxMaxima"

Método de Taylor de Ordem 2

Faremos agora, o desenvolvimento da série de Taylor até o termo de ordem 2:

Método de Taylor de Ordem 2

Faremos agora, o desenvolvimento da série de Taylor até o termo de ordem 2:

Método de Taylor de Ordem 2

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método de Taylor de Ordem 2

Faremos agora, o desenvolvimento da série de Taylor até o termo de ordem 2:

Método de Taylor de Ordem 2

$$y_{j+1} = y_j + h\,y'(x_j) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_j),\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{11}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método de Taylor de Ordem 2

Faremos agora, o desenvolvimento da série de Taylor até o termo de ordem 2:

Método de Taylor de Ordem 2

$$y_{j+1} = y_j + h\,y'(x_j) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_j),\; j = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{11}$$

com erro de truncamento:

$$e_{j+1} = \frac{h^3}{3!}\,y'''(\xi),\; \xi \in, [x_j, x_{j+1}]\,. \tag{12}$$

Exemplo 3

Usando o método de Taylor de ordem 2, calcule a solução aproximada do seguinte p. v. i. e uma estimativa para o erro:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = y - x \\ y(x_0) = y(0) = 2 \end{cases} \tag{13}$$

para $x \in [a, b] = [0, 1]$ *e* $n = 5$ *subintervalos.*

Solução: Note que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2,$$

logo, o intervalo $[0,1]$ é discretizado por

Solução: Note que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2,$$

logo, o intervalo $[0,1]$ é discretizado por

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	$0,2$	$0,4$	$0,6$	$0,8$	1

Recorrendo à fórmula (11), temos:

Recorrendo à fórmula (11), temos:

$$y_{n+1} = y_n + h\,y'(x_n) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_n),\ n = 0, 1, \ldots, 4, \tag{14}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Recorrendo à fórmula (11), temos:

(14) $$y_{n+1} = y_n + h\,y'(x_n) + \frac{h^2}{2!}\,y''(x_n),\ n = 0, 1, \ldots, 4,$$

onde

(15) $$y_n'(x_n) = f(x_n, y_n) = x_n - y_n + 2\,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Precisamos encontrar $f''(x, y)$.

Precisamos encontrar $f''(x, y)$. Tendo em mente que $f(x, y) = x - y + 2$, pela Regra da Cadeia, temos:

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} x}_{=1} + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} y}$$

Precisamos encontrar $f''(x,y)$. Tendo em mente que $f(x,y) = x - y + 2$, pela Regra da Cadeia, temos:

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} x}_{=1} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} y}_{=f(x,y)}$$

Precisamos encontrar $f''(x,y)$. Tendo em mente que $f(x,y) = x - y + 2$, pela Regra da Cadeia, temos:

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} x}_{=1} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} y}_{=f(x,y)} \\
&= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot [x - y + 2]
\end{aligned}
$$

Precisamos encontrar $f''(x, y)$. Tendo em mente que $f(x, y) = x - y + 2$, pela Regra da Cadeia, temos:

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} x}_{=1} + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} y}_{=f(x,y)} \\
&= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot [x - y + 2] \\
&= y - x - 1 \,.
\end{aligned}
$$

Deste modo, a fórmula (14) nos fornece:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(x_n, y_n) \tag{16}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Deste modo, a fórmula (14) nos fornece:

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad y_{n+1} &= y_n + h\,f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\,y''(x_n, y_n) \\
&= y_n + h\,[x_n - y_n + 2] + \frac{h^2}{2}\,[y_n - x_n - 1]
\end{aligned}
$$

Deste modo, a fórmula (14) nos fornece:

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad y_{n+1} &= y_n + h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(x_n, y_n) \\
&= y_n + h\,[x_n - y_n + 2] + \frac{h^2}{2}\,[y_n - x_n - 1] \\
&= 2\,h - \frac{h^2}{2} + \left(h - \frac{h^2}{2}\right) x_n + \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) y_n
\end{aligned}
$$

Deste modo, a fórmula (14) nos fornece:

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad y_{n+1} &= y_n + h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(x_n, y_n) \\
&= y_n + h\,[x_n - y_n + 2] + \frac{h^2}{2}\,[y_n - x_n - 1] \\
&= 2\,h - \frac{h^2}{2} + \left(h - \frac{h^2}{2}\right) x_n + \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) y_n \\
&= 2 \cdot 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \left(0,2 - \frac{0,2^2}{2}\right) x_n + \left(1 - 0,2 + \frac{0,2^2}{2}\right) y_n
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Deste modo, a fórmula (14) nos fornece:

$$
\begin{aligned}
(16) \qquad y_{n+1} &= y_n + h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2}\, y''(x_n, y_n) \\
&= y_n + h\,[x_n - y_n + 2] + \frac{h^2}{2}\,[y_n - x_n - 1] \\
&= 2\,h - \frac{h^2}{2} + \left(h - \frac{h^2}{2}\right) x_n + \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) y_n \\
&= 2 \cdot 0,2 - \frac{0,2^2}{2} + \left(0,2 - \frac{0,2^2}{2}\right) x_n + \left(1 - 0,2 + \frac{0,2^2}{2}\right) y_n \\
&= 0,38 + 0,18\, x_n + 0,82\, y_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, 4\,.
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_1 :

- Cálculo de y_1 : Para $n = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (16) o que nos dá:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,38 + 0,18 \cdot 0 + 0,82 \cdot 2 \\ &= 2,0200 \,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_1 : Para $n = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (16) o que nos dá:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,38 + 0,18 \cdot 0 + 0,82 \cdot 2 \\ &= 2,0200\,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_2 :

$$\begin{aligned} y_2 &= 0,38 + 0,18 \cdot 0,2 + 0,82 \cdot 2,02 \\ &= 2,0724\,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_3 :

$$y_3 = 0,38 + 0,18 \cdot 0,4 + 0,82 \cdot 2,0724$$

- Cálculo de y_3 :

$$
\begin{aligned}
y_3 &= 0,38 + 0,18 \cdot 0,4 + 0,82 \cdot 2,0724 \\
&= 2,1514 \, .
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_4 :

$$
\begin{aligned}
y_4 &= 0,38 + 0,18 \cdot 0,6 + 0,82 \cdot 2,1514 \\
&= 2,2521 \, .
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_3 :

$$
\begin{aligned}
y_3 &= 0,38 + 0,18 \cdot 0,4 + 0,82 \cdot 2,0724 \\
&= 2,1514\,.
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_4 :

$$
\begin{aligned}
y_4 &= 0,38 + 0,18 \cdot 0,6 + 0,82 \cdot 2,1514 \\
&= 2,2521\,.
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_5 :

$$
\begin{aligned}
y_5 &= 0,38 + 0,18 \cdot 0,8 + 0,82 \cdot 2,2521 \\
&= 2,3707\,.
\end{aligned}
$$