UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profª Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Capítulo 6

Espaços Vetoriais

Os Espaços Vetoriais, em especial, de funções, são aplicados em predição de terremotos, na síntese musical, na dinâmica dos fluidos, no reconhecimento facial e vocal e na prospecção de petróleo.

6.1 Introdução

Examinemos certos aspectos relacionados com dois conjuntos conhecidos: o conjunto V dos vetores e o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes reais m por n. Sejam $u, v, w \in V$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $A, B, C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- em relação a adição:

  1. $u + v = v + u$ $\qquad A + B = B + A$
  2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ $\qquad (A + B) + C = A + (B + C)$
  3. $\overrightarrow{0} + u = u + \overrightarrow{0} = u$ $\qquad A + 0 = 0 + A = A$
  4. $v + (-v) = (-v) + v = \overrightarrow{0}$ $\qquad A + (-A) = -A + A = 0$

- em relação à multiplicação por escalar:

  1. $k_1(k_2v) = (k_1k_2)v$ $\qquad k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

2. $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$ $\qquad (k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

3. $k_1(v + w) = k_1v + k_1w$ $\qquad k_1(A + B) = k_1A + k_1B$

4. $1v = v$ $\qquad 1A = A$

Observação 6.1.1. *Esses conjuntos apresentam uma "estrutura"comum em relação a essas operações. Esse fato não só vale para esses dois conjuntos com essas operações mas para muitos outros.*

6.2 Definição e Exemplos

Definição 1. *Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ quando, e somente quando:*

I) *Existe uma adição $(u, v) \to u + v \in V$, com as seguintes propriedades:*

(a) ***Comutativa***, *ou seja,* $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$

(b) ***Associativa***, *ou seja,* $(u + v) + w = u + (v + w)$ $\forall u, v, w \in V$

(c) *Existe em V um* ***elemento neutro*** *para essa adição o qual será simbolizado por $\overrightarrow{0}$, ou seja,*

$$\exists\ \overrightarrow{0} \in V,\ u + \overrightarrow{0} = u,\ \forall\ u \in V$$

(d) *Para todo elemento $u \in V$ existe o* ***elemento oposto***, *ou seja, $-u$. Assim,*

$$\forall\ u \in V,\ \exists\ (-u) \in V\ /\ u + (-u) = \overrightarrow{0}$$

II) *Está definida uma multiplicação de $\mathbb{R} \times V$ em V, o que significa que a cada par (α, u) de $\mathbb{R} \times V$ está associado um único elemento de V que se indica por αu, e tem-se o seguinte:*

(a) ***Associativa***, *ou seja,* $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

(b) ***Distributiva*** *do produto* ***da soma de dois escalares por um objeto*** *em V, ou seja, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$*

(c) ***Distributiva*** *no produto* ***de um escalar qualquer pela soma*** *de dois objetos em V, ou seja, $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$*

(d) ***Elemento neutro*** *da multiplicação, ou seja, $1v = v$*

para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Observação 6.2.1. *De maneira análoga define-se espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.*

Exemplo 6.2.1. *O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações abaixo:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$k(x_1, y_1) = (kx_1, ky_1).$$

Exemplo 6.2.2. *O conjunto $V = \mathbb{R}$ é um espaço vetorial real.*

Exemplo 6.2.3. *Os conjuntos $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, ..., \mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.*

Exemplo 6.2.4. *O conjunto $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial.*

Exemplo 6.2.5. *O conjunto de vetores da geometria definidos por meio de segmentos orientados é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

Exemplo 6.2.6. *O conjunto* $V = P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \ a_i \in \mathbb{R}\}$ *dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a* n*, mais o polinômio nulo, em relação às operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar é um espaço vetorial.*

Exemplo 6.2.7. *O conjunto* $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *das funções reais definidas em toda a reta com as operações*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

é um espaço vetorial.

Solução: *Sejam* f, g *e* $h \in V$ *e* α, $\beta \in \mathbb{R}$.

I) *Existe uma adição* $(f, g) \to f + g \in V$*, com as seguintes propriedades:*

- **(a)** $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$
- **(b)** $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$
- **(c)** $(0 + f)(x) = 0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$, *onde* $0(x) = 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$
- **(d)** $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0(x) = 0$, *onde* $-f(x)$ *é o elemento oposto de* $f(x)$

II) *Está definida uma multiplicação de* $\mathbb{R} \times V$ *em* V*, o que significa que a cada par* (α, f) *de* $\mathbb{R} \times V$ *está associado um único elemento de* V *que se indica por* αf*, e tem-se o seguinte:*

- **(a)** $(\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x)$
- **(b)** $((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) =$ $= (\alpha f + \beta f)(x)$
- **(c)** $(\alpha(f + g))(x) = \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) =$ $= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$

(d) $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$

Exemplo 6.2.8. *O conjunto* $V = \mathbb{R}_+$ *com as operações*

$$u \bigoplus v = uv$$

e

$$k \bigotimes u = u^k$$

onde $u, v \in \mathbb{R}_+$ *e* $k \in \mathbb{R}$, *é um espaço vetorial. Justifique. Verifique que* $1 \bigoplus 1 = 1$ *e que* $2 \bigotimes 1 = 1$.

Solução: *Link da Solução.*

Observação 6.2.2. *Os elementos do espaço vetorial* V *serão chamados vetores, independentemente de sua natureza.*

6.2.1 Propriedades do Espaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial real.

1. Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição).

2. Cada vetor $u \in V$, admite apenas um simétrico $-u \in V$.

3. Se $u + w = v + w$ então $u = v$.

4. $-(-v) = v$

5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

6. $\forall u \in V$, $0u = \overrightarrow{0}$

7. $\alpha u = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha = 0 \quad \texttt{ou} \quad u = \overrightarrow{0}$

8. $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$

6.3 Subespaço Vetorial

Definição 2. *Seja V um espaço vetorial real. Um subconjunto W de V é um* ***subespaço vetorial*** *de V se:*

a) $\overrightarrow{0} \in W$, *isto é, W contém o vetor nulo;*

b) $\forall\ u, v \in W,\ \ u + v \in W$*;*

c) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\ u \in W$, $\alpha u \in W$*.*

Observação 6.3.1. *Sempre que $\overrightarrow{0}$ não pertencer a W, W não é um subespaço de V.*

Teorema 6.3.1. *Se W é um subespaço vetorial de V, então W também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

Exemplo 6.3.1. *Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$ ou $S = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.*
Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.3.2. *Verifique que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.*
Solução: Considere $u \in W$, ou seja, $u = (x, y, z) = (x, -x, z)$, onde $x, z \in \mathbb{R}$.
Note que:

(i) $\vec{0} \in W$, *pois se $x = 0$ e $z = 0$, então $u = (0, 0, 0) \in W$.*

(ii) *Sejam $u = (x_1, -x_1, z_1)$ e $v = (x_2, -x_2, z_2) \in W$. Então, obtemos que $u + v = (x_1, -x_1, z_1) + (x_2, -x_2, z_2) = (x_1 + x_2, -x_1 - x_2, z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, -(x_1 + x_2), z_1 + z_2)) \in W$, pois $y = -x$.*

(iii) *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, -x_1, z_1) \in W$. Então, obtemos que $\alpha u = \alpha(x_1, -x_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha(-x_1), \alpha z_1) = (\alpha x_1, -(\alpha x_1), \alpha z_1) \in W$, pois $y = -x$.*

Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 6.3.3. *Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, 4-2x); x \in \mathbb{R}\}$. Mostre que W não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.*

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.3.4. *O conjunto das matrizes simétricas é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.*

Solução: Denotemos o conjunto das matrizes simétrica por S, ou seja,

$$S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ A^t = A\}.$$

Sejam $A, B, O \in S$, onde O é a matriz nula. Note que:

(i) *$O \in S$, pois matriz nula é simétrica, ou seja, $O^t = O$.*

(ii) *$A + B \in S$, pois $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$.*

(iii) *$\alpha A \in S$, pois $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$.*

Portanto, o conjunto das matrizes simétricas é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 6.3.5. *Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ ax + by + cz = 0\}$. Mostre que W é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.*

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.3.6. $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ *é um subespaço de $V = M_{2\times 2}$?*

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.3.7. *$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0\}$ é um subespaço de $V = \mathbb{R}^2$?*

Solução: Note que a primeira componente dos vetores em S são maiores do que zero. Assim, o vetor nulo não pertence ao subconjunto S, ou seja, não satisfaz a condição (i) da definição de subespaço vetorial. Isso nos leva que S não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.
Além disso, ao considerar $u \in S$, para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < 0$, temos que $\alpha u \notin S$, pois a sua primeira componente será negativa, ou seja, não satisfaz a condição (iii) da definição de subespaço vetorial. E novamente, isso nos leva que S não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Observação 6.3.2. *Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto $W = \{\vec{0}\}$, chamado **subespaço nulo** ou **subespaço zero** e o próprio espaço vetorial V. Esses dois são chamados **subespaços triviais** de V. Os demais são denominados subespaços próprios de V.*

Exemplo 6.3.8. *Seja $V = \mathbb{R}^2$, os subespaços triviais são $\{(0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^2$, e os subespaços próprios são as retas que passam pela origem.*

Exemplo 6.3.9. *Os subespaços triviais de $V = \mathbb{R}^3$ são $S = \{(0, 0, 0)\}$ e o próprio $\mathbb{R}^3$. Os subespaços próprios são as retas e os planos que passam pela origem.*

Definição 3. *Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W. Indicaremos por $U + V$ e chamaremos de soma de U com V o seguinte subconjunto de W*

$$U + V = \{u + v \,/\, u \in U \ \text{ e } \ v \in V\}$$

e indicaremos por $U \bigcap V$ e chamaremos de intersecção de U e V o seguinte subconjunto de W

$$U \bigcap V = \{w \,/\, w \in U \ \text{ e } \ w \in V\}$$

Teorema 6.3.2. *Se U e V são subespaços vetoriais de W, então $U+V$ e $U \bigcap V$ também são subespaços vetoriais de W.*

Definição 4. *Sejam U e V subespaços vetoriais de W tais que $U \bigcap V = \{\overrightarrow{0}\}$. Neste caso diz-se que $U+V$ é soma direta dos subespaços U e V.*

Notação: $U \bigoplus V$.

Teorema 6.3.3. *Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W. Então, $W = U \bigoplus V$ se, e somente se, cada vetor $w \in W$ admite uma única decomposição $w = u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$.*

Exemplo 6.3.10. *Verifique que $\mathbb{R}^3 = U \bigoplus V$, onde $U = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ e $V = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y, z \in \mathbb{R}\}$.*

Solução: *Link da Solução.*

6.4 Combinação Linear

Definição 5. *Sejam os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ do espaço vetorial V e os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Qualquer vetor $v \in V$ da forma:*

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$$

é uma ***combinação linear*** *dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

Exemplo 6.4.1. *O vetor $v = (2, 3) \in \mathbb{R}^2$ é uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{j} = (0, 1)$, pois*

$$(2, 3) = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1).$$

Exemplo 6.4.2. *O vetor* $v = (5, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ *é uma combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, *e* $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$, *pois*

$$(5, 2, 3) = 5 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1).$$

Exemplo 6.4.3. *Dado* $V = P_2$, *o polinômio* $v = 7x^2 + 11x - 26$ *é uma combinação linear dos polinômios* $v_1 = 5x^2 - 3x + 2$ *e* $v_2 = -2x^2 + 5x - 8$.

Solução: *Link da Solução.*

6.4.1 Subespaços Gerados

Definição 6. *Sejam* $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *um subconjunto do espaço vetorial* V. *O subespaço* $[S]$ *é dito subespaço gerado por* S, *onde cada elemento de* $[S]$ *é uma combinação linear de* $u_1, u_2, \ldots, u_n$, *ou seja,*

$$[S] = \{v \in V \,/\, v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n \;\text{ e }\; c_i \in \mathbb{R}\}$$

Notação: $[S]$ ou $S = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$

Observação 6.4.1.

- *O conjunto* S *acima é formado por todas as combinações lineares possíveis dos vetores* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *de* V
- *Os vetores* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *são chamados geradores de* S
- $S = \emptyset \Rightarrow [\emptyset] = \{0\}$
- $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset [u_1, u_2, \ldots, u_n]$

Exemplo 6.4.4. *Os vetores* $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ *e* $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ *geram o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$, *pois qualquer vetor* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *é combinação linear de* $\overrightarrow{i}$ *e* $\overrightarrow{j}$, *ou seja,*

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

Logo, $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}] = \mathbb{R}^2$

Exemplo 6.4.5. *Os vetores* $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ *e* $e_3 = (0,0,1)$ *geram o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$, *pois qualquer vetor* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear de* e_1, e_2 *e* e_3 :

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Logo, $[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{R}^3$

Exemplo 6.4.6. *Os vetores* $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$ *e* $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ *geram o subespaço* $S = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$, *pois*

$$(x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$$

Logo, $[i,j] = S$ *é um subespaço próprio do* $\mathbb{R}^3$ *e representa geometricamente o plano* xOy.

Exemplo 6.4.7. *Dados* $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1,0,0)$ *e* $v = (1,1,0)$, *determine* $[u,v]$.
Solução: *Link da Solução.*

Observação 6.4.2. *Dados* n *vetores* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *de* V *e* w *tal que* $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ *então:*

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n, w] = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

pois todo vetor v *que é combinação linear de* $v_1, v_2, \ldots, v_n, w$ *é também combinação linear de* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
De fato, supondo que: $v \in [v_1, v_2, \ldots, v_n, w]$, *então existem números reais* $b_1, b_2, \ldots, b_n, b$ *tais que* $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n + bw$ *mas* $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$ *logo,* $v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n + b(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n)$ *ou* $v = (b_1 + ba_1)v_1 + (b_1 + ba_2)v_2 + \ldots + (b_n + ba_n)v_n$ *logo* v *é combinação linear de* $v_1, v_2, \ldots, v_n$, *isto é,* $v \in [v_1, v_2, \ldots, v_n]$
Para mostrar a recíproca, isto é, se $v \in [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ *então* $v \in [v_1, v_2, \ldots, v_n, w]$, *basta considerar* $b = 0$.

Definição 7. *Dizemos que um espaço vetorial* V *é finitamente gerado se existe* $S \subset V$*,* S *finito, de maneira que* $V = [S]$.

Exemplo 6.4.8. *Verifique que* $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$.

Solução: *Considere* $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ *e escrevendo a combinação linear, obtemos:*

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Portanto, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *é um espaço vetorial finitamente gerado.*

6.4.2 Dependência e Independência Linear

A partir da observação 6.4.2 temos que um espaço vetorial V pode ser gerado por n vetores ou por $n+1$ vetores. Isto é, o conjunto gerador de V pode ter n ou $n+1$ vetores. Em nossos estudos estamos interessados no conjunto gerador de um espaço vetorial que seja o menor possível. Para determinarmos esse conjunto precisamos do conceito de dependência e independência linear.

Definição 8. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*. Dizemos que um conjunto* $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ *é* ***linearmente independente*** *(L.I.) se, e somente se, a equação*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = \overrightarrow{0}$$

só admitir a solução nula, isto é, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Definição 9. *Dizemos que $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é* ***linearmente dependente*** *(L.D.) se, e somente se, A não é L.I., ou seja, se a equação*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = \overrightarrow{0}$$

admitir solução diferente da solução nula.

Exemplo 6.4.9. *O conjunto $L = \{(1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I. Justifique.*

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.4.10. *O conjunto $L = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.D. Justifique.*

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.4.11. *Dados os vetores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ do $\mathbb{R}^n$ e $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ um vetor qualquer do $\mathbb{R}^n$. Temos que $u = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n$. Além disso, se*

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \overrightarrow{0},$$

então $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Portanto os vetores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são linearmente independentes.

Exercício 6.4.1. *Considere o espaço vetorial $M_{2\times 2}$, verifique se o conjunto*

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é L.I ou L.D.

6.4.3 Propriedades

Consideremos um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$:

1. Se um conjunto finito $L \subset V$ contém o vetor nulo, então esse conjunto é L.D.
2. Se $S = \{u\} \subset V$ e $u \neq \overrightarrow{0}$, então S é L.I.
3. Se $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$ é L.D., então um dos seus vetores é combinação linear dos outros.
4. Se S_1 e S_2 são subconjuntos de finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.D, então S_2 é também L.D.
5. Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V, se $S_1 \subset S_2$ e S_2 é L.I, então S_1 é também L.I.

6.5 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

Definição 10. *Um conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:*

i) *B é L.I.*

ii) *$[B] = V$, ou seja, B gera V.*

Exemplo 6.5.1. *$B = \{(1,1), (-1,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. Justifique.*
Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.5.2. *$B = \{(1,0), (0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$, dita **base canônica** de $\mathbb{R}^2$.*

Exemplo 6.5.3. *Se* $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ *e* $v_3 = (0, 0, 1)$ *então* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *é base de* $\mathbb{R}^3$, *chamada* ***base canônica*** *de* $\mathbb{R}^3$, *pois para qualquer vetor* $u = (x, y, z)$ *do* $\mathbb{R}^3$, *temos*

$$u = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

e os vetores $(0, 1, 0), (0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$ *são LI.*

Exemplo 6.5.4. $B = \{(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$ *é uma base do* $\mathbb{R}^n$, *dita* ***base canônica*** *de* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 6.5.5. *Verifique que* $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *é a base canônica de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.5.6. $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ *é uma base do espaço vetorial* P_n *(conjunto de polinômios de grau menor ou igual a n), também dita base canônica.*

Exemplo 6.5.7. $B = \{(2, -1)\}$ *não é base de* $\mathbb{R}^2$. *Por quê?*

Solução: *Note que* B *é LI, pois* B *tem um único vetor e esse vetor é diferente do vetor nulo. Mas,* B *não gera o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$, *pois o vetor* $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ *e* $(1, 0) \notin B$.

Exercício 6.5.1. *O conjunto* $\{(1, 0), (2, 0)\}$ *não é base do* $\mathbb{R}^2$. *Por quê?*

Exemplo 6.5.8. *O conjunto* $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ *não é uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Temos que* $(1, 0, 0)$ *e* $(0, 1, 0)$ *são LI, mas não geram* $\mathbb{R}^3$.

Teorema 6.5.1. *Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.*

Teorema 6.5.2. *Se* $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *for uma base de um espaço vetorial* V*, então todo conjunto com mais de* n *vetores será linearmente dependente.*

6.5.1 Processo Prático para Determinar uma Base de um Subespaço Vetorial de $\mathbb{R}^n$

Um subespaço de $\mathbb{R}^n$, em geral, ou é dado pelos seus geradores ou é possível achar esses geradores. A seguir é apresentado um dispositivo prático para achar uma base desse subespaço a partir dos seus geradores. Mais especificamente, utiliza-se o conceito de matriz escalonada.

Dispositivo prático: Se $u_1, \ldots, u_r$, se apresentam na **forma escalonada**, então os vetores $u_1, \ldots, u_r$ formam um conjunto L.I.

Exemplo 6.5.9. *Seja* $V = [(2,1,1,0), (1,0,1,2), (0,-1,1,4)] \subset \mathbb{R}^4$*, determine uma base de* V*.*
Solução: *Link da Solução.*

6.5.2 Dimensão

Teorema 6.5.3 (Teorema da Invariância)**.** *Seja* V *um espaço vetorial finitamente gerado. Então duas bases quaisquer de* V *têm o mesmo número de vetores.*

Definição 11. *Seja* V *um espaço vetorial finitamente gerado. Denomina-se dimensão de* V *o número de vetores de qualquer uma de suas bases. Diz-se também que* V *é um espaço de dimensão finita.*

Exemplo 6.5.10. *Determine a dimensão dos seguintes espaços vetoriais:*

a) $\mathbb{R}^2$

b) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 6.5.11. *Determine a dimensão dos seguintes espaços vetoriais:*

a) $\mathbb{R}^n$

b) $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

c) $P_n(\mathbb{R})$

d) $\{\overrightarrow{0}\}$

Solução: Recorde que a dimensão de um espaço vetorial é dado pela cardinalidade de uma das suas bases.

(a) Pelo exemplo 6.5.4, temos que uma base do espaço $\mathbb{R}^n$ *é dada por* $B = \{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots$ *e tem* n *vetores. Assim, obtemos que* $dim(\mathbb{R}^n) = n$.

(b) Temos que uma base do espaço $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é dada por*
$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *e tem* $m \times n$ *vetores. Assim, obtemos que* $dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn$.

(c) Pelo exemplo 6.5.6, temos que uma base do espaço P_n *é dada por* $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ *e tem* $n+1$ *vetores. Assim, obtemos que* $dim(P_n) = n+1$.

(d) Por convenção, tem-se que $dim(\{\overrightarrow{0}\}) = 0$.

Observação 6.5.1. *A dimensão de qualquer subespaço S do $\mathbb{R}^3$ só poderá ser 0, 1, 2 ou 3. Temos os seguintes casos:*

- $\dim S = 0$, *então* $S = \{\overrightarrow{0}\}$ *é a origem*
- $\dim S = 1$, *então S é uma reta que passa pela origem*
- $\dim S = 2$, *então S é um plano que passa pela origem*
- $\dim S = 3$, *então S é o próprio* $\mathbb{R}^3$

De forma geral, para verificar que B é base temos que verificar que é L.I. e gera o espaço. Além disso, temos **duas situações**:

- Se $\dim V = n$, qualquer subconjunto de V com n vetores L.I. é uma base de V.
- Se $\dim V = n$, qualquer subconjunto de V com n vetores geradores de V é uma base de V.

Exemplo 6.5.12. *O conjunto $B = \{(2,1), (-1,3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$?*

<u>*Solução:*</u> *Note que dim$(\mathbb{R}^2) = 2$ e B é LI, pois* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7/2 \end{pmatrix}$*, ou seja, está em forma escalonada.*

Logo, dim$(\mathbb{R}^2) = 2$ e $B \subset \mathbb{R}^2$ com dois vetores LI segue que, a partir da primeira situação das duas dadas acima, B é uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.5.4 (Teorema do Completamento)**.** *Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$. Se $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\} \subset V$ é um subconjunto L.I com r vetores e $r < n$, então existem $n - r$ vetores $u_{r+1}, \ldots, u_n \in V$, de maneira que*

$$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$$

é uma base de V.

Exemplo 6.5.13. *Sejam os vetores* $v_1 = (1, -1, 1, 2)$ *e* $v_2 = (-1, 1, -1, 0)$. *Completar o conjunto* $\{v_1, v_2\}$ *de modo a formar uma base de* $\mathbb{R}^4$.

Solução: *Link da Solução.*

Teorema 6.5.5. *Seja* $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *uma base de um espaço vetorial* V. *Então, todo vetor* $v \in V$ *se exprime de maneira única como combinação linear dos vetores de* B.

Teorema 6.5.6 (Dimensão da Soma de dois Subespaço)**.** *Seja* W *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensão finita. Se* U *e* V *são subespaços de* W, *então*

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \bigcap V)$$

Exemplo 6.5.14. *Considere os subespaços de* $\mathbb{R}^4$:

$$U = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)] \text{ e } V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 0\}.$$

Determinemos $\dim(U \bigcap V)$ *e* $\dim(U + V)$.

Solução: *Link da Solução.*

6.6 Coordenadas

Definição 12. *Seja* $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *uma base de* V. *Tomemos* $v \in V$, *sendo* $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$. *Os números* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *são chamados componentes ou coordenadas de* v *em relação à base* B.

$$\textbf{Notação: } v_B = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ ou } v_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.6.1. *No* $\mathbb{R}^2$*, consideremos as bases* $A = \{(1,0),(0,1)\}$*,* $B = \{(2,0),(1,3)\}$ *e* $C = \{(1,-3),(2,4)\}$*. Dado o vetor* $v = (8,6)$*, determine as coordenadas de* v *em relação a cada uma das bases.*

Solução: *Link da Solução.*

6.6.1 Mudança de Base

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e consideremos duas bases de V, $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$ e $C = \{v_1,\ldots,v_n\}$. Então, existe uma única família de escalares α_{ij} de maneira que

$$\begin{array}{ccccccc} v_1 & = & \alpha_{11}u_1 & + & \ldots & + & \alpha_{n1}u_n \\ v_2 & = & \alpha_{12}u_1 & + & \ldots & + & \alpha_{n2}u_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_n & = & \alpha_{1n}u_1 & + & \ldots & + & \alpha_{nn}u_n \end{array}$$

A matriz quadrada de ordem n

$$[I]_{C,B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

chama-se matriz de mudança da base B para a base C.

Notação: $I_{C,B}$

Teorema 6.6.1. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão* n *e consideremos duas bases de* V*,* $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$ *e* $C = \{v_1,\ldots,v_n\}$*. Então,*

$$v_B = [I]_{C,B} \cdot v_C.$$

Exemplo 6.6.2. *No* $\mathbb{R}^2$*, consideremos as bases* $A = \{(1,0),(0,1)\}$*,* $B = \{(2,0),(1,3)\}$ *e* $C = \{(1,-3),(2,4)\}$*. Dado o vetor* $v = (8,6)$*, verifique que:*

(a) $v_A = [I]_{B,A} \cdot v_B$

(b) $v_B = [I]_{C,B} \cdot v_C$

Solução: *Link da Solução.*

6.7 Exercícios sobre Espaços Vetoriais

Exercício 6.7.1. *No espaço vetorial* $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$*, consideremos os vetores:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcular* $2A + b - 3C$*;*

(b) *Calcular* $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ *tal que* $\frac{A+X}{2} - \frac{X-B}{3} = c$*;*

(c) *Existem* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *de maneira que* $A = t_1 B + t_2 C$*?*

Exercício 6.7.2. *No espaço vetorial* $P_3(\mathbb{R})$ *sejam dados os vetores* $f(t) = t^3 - 1$*,* $g(t) = t^2 + t - 1$ *e* $h(t) = t + 2$*.*

(a) *Calcular* $2f(t) + 3g(t) - 4h(t)$*;*

(b) *Existe* $k \in \mathbb{R}$ *de maneira que* $f(t) + kg(t) = h(t)$*?*

(c) *Existem* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *tais que* $f(t) = k_1 g(t) + k_2 h(t)$*?*

Exercício 6.7.3. *No* $\mathbb{R}^2$ *consideremos os vetores* $u = (1,1)$*,* $v = (3,-2)$ *e* $w = (3,-2)$*. Resolver a equação:*

$$\frac{x+u}{2} + \frac{v+x}{3} = w$$

na incógnita $x \in \mathbb{R}^2$*.*

Exercício 6.7.4. *Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são subespaços do $\mathbb{R}^3$?*

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in Z\}$

(c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3z = 0\}$

(d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0, \ \texttt{com} \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Exercício 6.7.5. *Quais dos conjuntos abaixo são subespaços do espaço $P(\mathbb{R})$ de todos os polinômios reais?*

(a) $W = \{f(t) \in P(\mathbb{R}) | f(t) \ \texttt{tem grau maior que} \ 2\}$

(b) $W = \{f(t) | f(0) = 2f(1)\}$

(c) $W = \{f(t) | f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$

(d) $W = \{f(t) | f(t) + f'(t) = 0\}$

Exercício 6.7.6. *Verificar que não são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$?*

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y + z = 0\}$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq y \leq z\}$

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y \in Q\}$

Em cada caso quais axiomas não se verificam?

Exercício 6.7.7. *Seja $I = [0, 1]$. Verificar se são subespaços vetoriais de $C(I)$, isto é, conjunto das funções reais contínuas em I.*

(a) $f \in C(I) | f(0) = 0\}$

(b) $f \in C(I) | \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0\}$

(c) $f \in C(I) | f(0) = f(1)\}$

Exercício 6.7.8. *Sejam U, V e W os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:*
$U = \{(x, y, z)|x = z\}$, $V = \{(x, y, z)|x = y = 0\}$ *e* $W = \{(x, y, z)|x + y + z = 0\}$.

Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em algum dos casos a soma é direta?

Exercício 6.7.9. *Mostrar que os polinômios $1 - t$, $(1 - t)^2$, $(1 - t)^3$ e 1 geram $P_3(\mathbb{R})$.*

Exercício 6.7.10. *Dar um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:*

(a) $U = \{(x, y, z)|x - 2y = 0\}$

(b) $V = \{(x, y, z)|x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$

(c) $W = \{(x, y, z)|x + 2y - 3z = 0\}$

(d) $U \bigcap V$

(e) $V + W$

Exercício 6.7.11. *Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:*

(a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 3, 5)\}$

(b) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)\}$

(c) $\{(0, 0, 0), (1, 2, 3), (4, 1, -2)\}$

(d) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, -1)\}$

Exercício 6.7.12. *Quais dos subconjuntos abaixo do $P_4(\mathbb{R})$ são linearmente independentes:*

(a) $\{1, x - 1, x^2 + 2x + 1, x^2\}$

(b) $\{2x, x^2 + 1, x + 1, x^2 - 1\}$

(c) $\{x(x - 1), x^3, 2x^3 - x^2, x\}$

(d) $\{x^4 + x - 1, x^3 - x + 1, x^2 - 1\}$

Exercício 6.7.13. *Demonstrar que o conjunto* $\{1, e^x, e^{2x}\}$ *de vetores de* $C([0,1])$ *é L.I.*

Exercício 6.7.14. *Demonstrar que o conjunto* $\{1, e^x, xe^x\}$ *de vetores de* $C([0,1])$ *é L.I.*

Exercício 6.7.15. *Dar uma base e a dimensão do subespaço* W *de* $\mathbb{R}^4$ *onde* $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = y \text{ e } x - 3y + t = 0\}$.

Exercício 6.7.16. *Sendo* W *e* U *subespaços do* $\mathbb{R}^4$ *de dimensão 3, que dimensões pode ter* $W + U$ *se* $(1,2,1,0)$, $(-1,1,0,1)$, $(1,5,2,1)$ *é um sistema de geradores de* $W \bigcap U$*?*

Exercício 6.7.17. *Sendo* $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = y \text{ e } x - 3y + t = 0\}$ *e* $U = [(1,2,1,3),(3,1,-1,4)]$*, determinar uma base e a dimensão de* $U + W$ *e* $U \bigcap W$.

Exercício 6.7.18. *Achar uma base e a dimensão do seguinte subespaço de* $\mathbb{R}^4$*:* $U = \{(x,y,z,t) | x - y = 0 \text{ e } x + 2y + t = 0\}$.

Exercício 6.7.19. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *consideremos os seguintes subespaços:*

$$U = \{(x,y,z) | x = 0\} \quad V = \{(x,y,z) | x - 2z = 0\} \quad W = [(1,1,0),(0,0,2)].$$

Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: U, V, W, $U \bigcap V$, $V + W$ *e* $U + V + W$.

Exercício 6.7.20. *Determinar uma base e a dimensão do subespaço de* $M_3(\mathbb{R})$ *constituído das matrizes anti-simétricas.*

Exercício 6.7.21. *Mostrar que os polinômios* 1, $1 + t$, $1 - t^2$, *e* $1 - t - t^2 - t^3$ *formam uma base de* $P_3(\mathbb{R})$.

Exercício 6.7.22. *Determinar uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos:*

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - 4t = 0 \\ 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$

Exercício 6.7.23. *Mostrar que as matrizes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

formam uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 6.7.24. *Determinar uma base de* $\mathbb{R}^4$ *que contenha os seguintes vetores* $(1, 1, 1, 0)$ *e* $(1, 1, 2, 1)$.

Exercício 6.7.25. *Determinar as coordenadas do vetor* $u = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ *em relação às seguintes bases:*

(a) canônica;

(b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$

(c) $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$

Exercício 6.7.26. *Determinar as coordenadas do polinômio* t^3 *em relação à seguinte base de* $P_3(\mathbb{R})$: $\{1, 2 - t, t^2 + 1, 1 + t + t^3\}$.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BIANCHINI, Waldecir. *Planos.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/VXMuWTtE

[3] BOBKO, Nara. *Seções Cônicas.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/g3y7bq68

[4] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[5] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[6] CASSOL, Henrique L. G. *Equações Paramétricas da reta.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/RqkquH6P

[7] LEMKE, Raiane. *Retas no* $\mathbb{R}^3$*: Parametrização e gráfico de retas no* $\mathbb{R}^3$. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4

[8] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[9] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[10] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[11] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[12] RODRIGUES, Aroldo, E. A. *Atividade sobre Quádricas*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xraxuttv

[13] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[14] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.