Revisão de Matemática p/ análise de Algoritmos

- p/ x Real, $\boxed{\lfloor x \rfloor}$ ⇐ chão de x é o maior inteiro menor ou igual a x.

  ex $\lfloor 4.5 \rfloor = 4$, $\lfloor 4.99 \rfloor = 4$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$

- p/ x Real, $\lceil x \rceil$ ← teto de x é o menor inteiro maior ou igual a x.

  ex $\lceil 4{,}3 \rceil = 5$, $\lceil 5 \rceil = 5$, $\lceil 4{,}01 \rceil = 5$

- p/ qualquer inteiro n:

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$$

Séries

Dada uma sequência $a_1, a_2, \dots, a_n$, onde n é não-negativo, a soma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Linearidade

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c a_1 + c a_2 + c a_3 + \dots + c a_n$$
$$= c(\underline{a_1 + a_2 + \dots + a_n})$$
$$= c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + c) = \sum_{i=1}^{n} a_i + c \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \overbrace{1 + 1 + 1 \dots + 1}^{n \text{ vezes}}$$
$$= n$$

Série Aritmética

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\overbrace{1 + \underbrace{2 + 3 + 4 \dots + n-1}_{n+1} + n}^{n+1}$$

Exemplo $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2 \boxed{\sum_{i=1}^{n} i} = \cancel{2} \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} = n(n+1) = n^2 + n.$

p/ $n = 10$, $10^2 + 10 = 110.$

Exemplo $\sum_{i=1}^{n} (i + 3) = \sum_{i=1}^{n} i + 3n = \frac{n(n+1)}{2} + 3n = \frac{n^2 + n}{2} + 3n.$

Como manipular os limites de soma

Exemplo

$$\sum_{i=2}^{n} i = 2+3+4+5 \cdots + n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \boxed{1} + 2+3+4+\ldots+n$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=2}^{n} i = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Exemplo

$$\sum_{i=4}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{3} i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3(3+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - 6.$$

De forma geral,

$$\sum_{i=c>1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{c-1} a_i$$

Somas do Quadrados e Cubos

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Série Geométrica

p/ $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 1$,

$$\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

$\log_b b = 1$

$x^{\lg(y)} = y^{\lg(x)}$

Exemplo
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$
$$= 2^1 . 2^n - 1$$

Exemplo
$$\sum_{i=0}^{\lceil \lg(n) \rceil} 2^i = \frac{2^{\lg(n)+1} - 1}{2 - 1} = 2^1 . 2^{\lg(n)} - 1 = 2 . n^{\lg(2)} - 1$$
$$= 2n - 1 .$$

Série Geométrica infinita decrescente

Quando a soma é infinita e $|x| < 1$, então

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Derivando o lado esquerdo e direito e multiplicando ambos os lados por x

$$\sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2} .$$

Logaritmos

1) $\log_b b = 1$

2) $x^{\lg(y)} = y^{\log(x)}$

3) $\log(x^y) = y\log(x)$

4) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

5) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

6) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ $\quad \lg n = \log_2 n$

Exemplo $\log(2^n) = n\log(2)$

$\lg(2^n) = n\lg(2)$

$= n.$

Exemplo $\lg(2^{\lg(n)}) = \lg(n) \cdot \cancel{\lg(2)}^{1}$

$= \lg(n).$

Exemplo $\lg(2^{\lg(n)}) = \lg(n^{\lg(2)})$

$= \lg(n).$

Exemplo $\lg(4^{\lg(n)}) = \lg(n^{\lg(4)})$

$= \lg(n^2)$

$= 2\lg(n).$

WOLFRAM ALPHA.