Regra de Simpson

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

9 de agosto de 2021

Thomas Simpson (1710-1761)

- Matemático inglês, em 1737 publicou *A New Treatise of Fluxions*, um livro didático de alta qualidade dedicado ao cálculo de *fluxões*, a versão newtoniana do cálculo infinitesimal;

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Thomas Simpson (1710-1761)

- Matemático inglês, em 1737 publicou *A New Treatise of Fluxions*, um livro didático de alta qualidade dedicado ao cálculo de *fluxões*, a versão newtoniana do cálculo infinitesimal;
- A Regra de Simpson embora apareça em seu livro, é devido a Newton, como o próprio Simpson reconheceu;

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Thomas Simpson (1710-1761)

- Matemático inglês, em 1737 publicou *A New Treatise of Fluxions*, um livro didático de alta qualidade dedicado ao cálculo de *fluxões*, a versão newtoniana do cálculo infinitesimal;
- A Regra de Simpson embora apareça em seu livro, é devido a Newton, como o próprio Simpson reconheceu;
- Em compensação, a forma “moderna" iterativa $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ do método de Newton-Raphson foi criada por Simpson em 1740;

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Thomas Simpson (1710-1761)

- Matemático inglês, em 1737 publicou *A New Treatise of Fluxions*, um livro didático de alta qualidade dedicado ao cálculo de *fluxões*, a versão newtoniana do cálculo infinitesimal;
- A Regra de Simpson embora apareça em seu livro, é devido a Newton, como o próprio Simpson reconheceu;
- Em compensação, a forma "moderna" iterativa $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ do método de Newton-Raphson foi criada por Simpson em 1740;
- Também trabalhou com a teoria de probabilidades e astronomia;

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Thomas Simpson (1710-1761)

- O matemático alemão Johannes Kepler (1571 - 1630) usava fórmulas similares a 100 atrás da invenção da Regra de Simpson. Por esta razão, este método é conhecido na Alemanha como "Regra do barril de Kepler"(*Keplersche Fassregel*). Kepler desenvolveu seu método para computar a capacidade de alguns barris de vinho que estava interessado em comprar em 1612.

(a) Thomas Simpson

(b) Johannes Kepler

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Regra 1/3 de Simpson

Considere $f(x)$ definida nos pontos x_0, x_1 e x_2 no intervalo $[a, b]$. O polinômio interpolador de grau 2 é

$$P(u) = \Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0) + u \cdot (u - 1)\,\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}$$

onde $u = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Regra 1/3 de Simpson

Considere $f(x)$ definida nos pontos x_0, x_1 e x_2 no intervalo $[a, b]$. O polinômio interpolador de grau 2 é

$$P(u) = \Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0) + u \cdot (u-1)\,\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}$$

onde $u = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Temos que

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P(x)\,dx = h \int_0^2 P(u)\,dx\,.$$

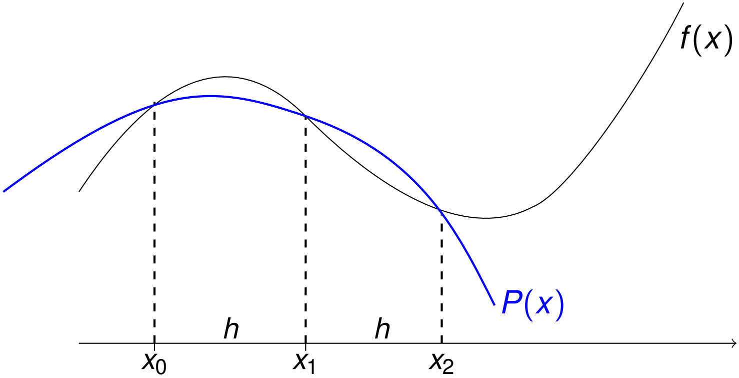


Figura: $P(x)$ tem grau 2.

Regra 1/3 de Simpson

Procedendo como na regra dos trapézios, temos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)]\,,$$

onde $h = \dfrac{x_2 - x_0}{2}$. Pode-se mostrar que uma estimativa para o erro é dada por

$$|E| \leq \frac{h^5}{90} M,$$

onde

$$M = \max\left\{|f^{(4)}(\xi)|;\ \xi \in [x_0\,, x_n]\right\}.$$

Exemplo 1.1

Calcule o valor aproximado da integral $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$ *usando a regra de Simpson e exiba um limitante para o erro.*

Solução: De antemão, temos que

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{4 - 1}{2} = 1,5,$$

donde tabelamos a função $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo [1,4]:

Solução: De antemão, temos que

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{4-1}{2} = 1,5,$$

donde tabelamos a função $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo [1,4]:

x	1	2,5	4
$f(x)$	1	1,58113883	2

Solução: De antemão, temos que

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{4-1}{2} = 1,5,$$

donde tabelamos a função $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo [1,4]:

x	1	2,5	4
$f(x)$	1	1,58113883	2

Logo, pela Regra 1/3 de Simpson, resulta que

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Solução: De antemão, temos que

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{4-1}{2} = 1,5,$$

donde tabelamos a função $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo [1,4]:

x	1	2,5	4
$f(x)$	1	1,58113883	2

Logo, pela Regra 1/3 de Simpson, resulta que

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{x}\, dx &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\, f(x_1) + f(x_2)\right] \\ &= \frac{h}{3}\left[1 + 4 \cdot 1,58113883 + 2\right]\end{aligned}$$

Solução: De antemão, temos que

$$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{4-1}{2} = 1,5,$$

donde tabelamos a função $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo [1,4]:

x	1	2,5	4
$f(x)$	1	1,58113883	2

Logo, pela Regra 1/3 de Simpson, resulta que

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{x}\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)\right]\\ &= \frac{h}{3}\left[1 + 4 \cdot 1,58113883 + 2\right]\\ &= 4,66227766016838\,.\end{aligned}$$

Estimativa do Erro

Desde que

$$|E| \leq \frac{h^5}{90} M, \text{ onde } M = \max\left\{|f^{(4)}(\xi)|; \xi \in [x_0, x_n]\right\}.$$

Estimativa do Erro

Desde que

$$|E| \leq \frac{h^5}{90} M, \text{ onde } M = \max \left\{ |f^{(4)}(\xi)|;\, \xi \in [x_0\,, x_n] \right\}.$$

Veja que

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{15}{16\, x^{7/2}}.$$

Estimativa do Erro

Desde que

$$|E| \leq \frac{h^5}{90} M, \text{ onde } M = \max\left\{|f^{(4)}(\xi)|;\ \xi \in [x_0\,, x_n]\right\}.$$

Veja que

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{15}{16\,x^{7/2}}.$$

Tendo em mente que $x \mapsto |f^{(4)}(x)|$ é decrescente, então,

$$M = \max_{\xi \in [1,4]} |f^{(4)}(\xi)| = |f^{(4)}(1)|$$

Doravante,

$$|E| \leq \frac{1,5^5}{90} 0,9375 = 0.0791015625,$$

Estimativa do Erro

Desde que

$$|E| \leq \frac{h^5}{90} M, \text{ onde } M = \max\left\{|f^{(4)}(\xi)|;\ \xi \in [x_0\,, x_n]\right\}.$$

Veja que

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{15}{16\, x^{7/2}}.$$

Tendo em mente que $x \mapsto |f^{(4)}(x)|$ é decrescente, então,

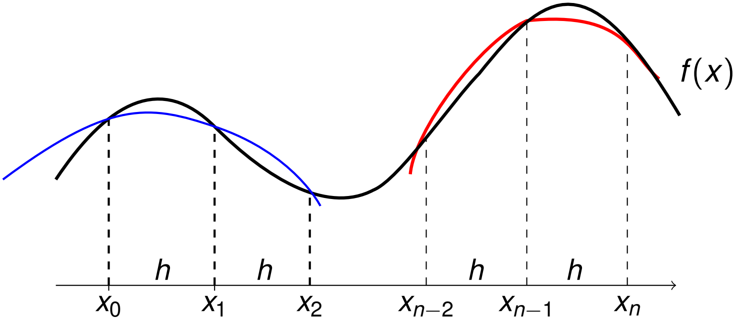
$$M = \max_{\xi \in [1,4]} |f^{(4)}(\xi)| = |f^{(4)}(1)| = \frac{15}{16} = 0,9375.$$

Doravante,

$$|E| \leq \frac{1,5^5}{90} 0,9375 = 0.0791015625,$$

Regra 1/3 de Simpson Generalizada

Para generalizar a Regra de Simpson, escolha um n inteiro par. Subdivida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos e aplique a regra de Simpson em cada par consecutivo de subintervalos.



Regra 1/3 de Simpson Generalizada (n par)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Regra 1/3 de Simpson Generalizada (n par)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

e o erro estimado é

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Regra 1/3 de Simpson Generalizada (n par)

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

e o erro estimado é

$$|E| \leq \frac{h^4}{180}\,(x_n - x_0)\,M$$

onde $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ e

$$M = \max\{|f^{(4)}(\theta)|,\ \theta \in [x_0, x_n]\}.$$

Exemplo

Exemplo 1.2

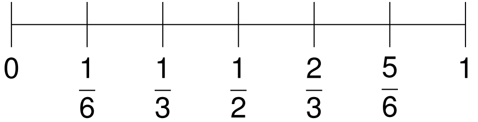
Fazendo uso da regra 1/3 de Simpson generalizada com $n = 6$, estime o valor de π dada pela expressão:

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Solução: Desde que $n = 6$, temos que

$$h = \frac{x_6 - x_0}{6} = \frac{1}{6},$$

donde temos a seguinte diagramação:

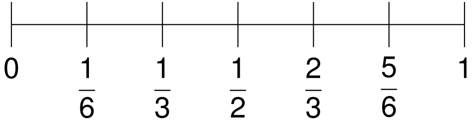


UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Solução: Desde que $n = 6$, temos que

$$h = \frac{x_6 - x_0}{6} = \frac{1}{6},$$

donde temos a seguinte diagramação:



Com isso, desde que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, façamos a seguinte tabela:

x	0	$1/6$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1
$f(x)$	1	$36/37$	$9/10$	$4/5$	$9/13$	$25/51$	$1/2$

x	0	$1/6$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1
$f(x)$	1	$36/37$	$9/10$	$4/5$	$9/13$	$25/51$	$1/2$

Pela fórmula $1/3$ de Simpson generalizada para $n = 6$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + 4\,f(x_3) + 2\,f(x_4) + 4\,f(x_5) + f(x_6)\right].$$

x	0	$1/6$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1
$f(x)$	1	$36/37$	$9/10$	$4/5$	$9/13$	$25/51$	$1/2$

Pela fórmula $1/3$ de Simpson generalizada para $n = 6$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + 4\,f(x_3) + 2\,f(x_4) + 4\,f(x_5) + f(x_6)\right].$$

Assim, $\pi = 4 \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

x	0	$1/6$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1
$f(x)$	1	$36/37$	$9/10$	$4/5$	$9/13$	$25/51$	$1/2$

Pela fórmula $1/3$ de Simpson generalizada para $n = 6$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + 4\,f(x_3) + 2\,f(x_4) + 4\,f(x_5) + f(x_6)\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned}\pi &= 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\\ &\approx 4\cdot\frac{1}{18}\left[1 + 4\cdot\frac{36}{37} + 2\cdot\frac{9}{10} + 4\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{9}{13} + 4\cdot\frac{25}{51} + \frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

x	0	$1/6$	$1/3$	$1/2$	$2/3$	$5/6$	1
$f(x)$	1	$36/37$	$9/10$	$4/5$	$9/13$	$25/51$	$1/2$

Pela fórmula $1/3$ de Simpson generalizada para $n = 6$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + 4\,f(x_3) + 2\,f(x_4) + 4\,f(x_5) + f(x_6)\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned}\pi &= 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\\ &\approx 4\cdot\frac{1}{18}\left[1 + 4\cdot\frac{36}{37} + 2\cdot\frac{9}{10} + 4\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{9}{13} + 4\cdot\frac{25}{51} + \frac{1}{2}\right]\\ &= 3,14159178093604\,.\end{aligned}$$

Regra 3/8 de Simpson

Considere uma função $f(x)$ definida em x_0, x_1, x_2 e x_3. A regra 3/8 de Simpson é dada por

Regra 3/8 de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \cong \frac{3}{8}h\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

com $h = \dfrac{x_3 - x_0}{3}$ e

Regra 3/8 de Simpson

Considere uma função $f(x)$ definida em x_0, x_1, x_2 e x_3. A regra 3/8 de Simpson é dada por

Regra 3/8 de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \cong \frac{3}{8}\,h\,[f(x_0) + 3\,f(x_1) + 3\,f(x_2) + f(x_3)]$$

com $h = \dfrac{x_3 - x_0}{3}$ e um limitante superior para o erro é

$$|E| \leq \frac{3}{80}\,h^5\,M$$

onde

$$M = \max\{|f^{(4)}(\theta)|,\ \theta \in [x_0, x_3]\}.$$

A Regra $^1/_3$ de Simpson é frequentemente o método preferido, pois alcança uma acurácia de terceira ordem com três pontos ao invés de quatro pontos necessários para a versão $^3/_8$.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

A Regra $^1/_3$ de Simpson é frequentemente o método preferido, pois alcança uma acurácia de terceira ordem com três pontos ao invés de quatro pontos necessários para a versão $^3/_8$. Entretanto, a regra $^3/_8$ tem utilidade quando o número de segmentos é múltiplo de 3.

Regra 3/8 de Simpson Generalizada

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{3}{8}\,h\Big[f(x_0) + 3\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}))$$
$$+ 2\,(f(x_3) + f(x_6) + \ldots + f(x_{n-3})) + f(x_n)\Big]$$

com $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$, onde n é múltiplo de três.

Regra 3/8 de Simpson Generalizada

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{3}{8}\,h\Big[f(x_0) + 3\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + \ldots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) + 2\,(f(x_3) + f(x_6) + \ldots + f(x_{n-3})) + f(x_n)\Big]$$

com $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$, onde n é múltiplo de três.
e o limitante para o erro superior é

$$|E| \leq \frac{h^4}{80}(x_n - x_0)\,M$$

onde $M = \max\{|f^{(4)}(\theta)|,\ \theta \in [x_0, x_n]\}$.

Exemplo

Exemplo

Calcule o valor aproximado da integral $\displaystyle\int_{0,3}^{1,2} (\mathrm{e}^{x} + 5\,x)\,dx$ usando a regra $3/8$ de Simpson generalizada com $n = 6$ e um limitante superior para o erro.

Solução: Inicialmente, calculemos o valor de h, a saber,

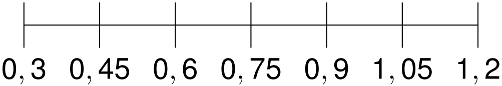
$$h = \frac{x_6 - x_0}{6} = 0,15,$$

donde temos a seguinte diagramação:

Solução: Inicialmente, calculemos o valor de h, a saber,

$$h = \frac{x_6 - x_0}{6} = 0,15,$$

donde temos a seguinte diagramação:



Escrevendo a tabela, temos:

x	0,3	$0,45$	$0,6$	$0,75$	$0,9$	$1,05$	1,2
$f(x)$	$e^{0,3}+1,5$	$e^{0,45}+2,25$	$e^{0,6}+3$	$e^{0,75}+3,75$	$e^{0,9}+4,5$	$e^{1,05}+5,25$	$e^{1,2}+6$

Sendo $n = 6$, a fórmula $^3/_8$ de Simpson torna-se:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\,h\left[f(x_0) + 3\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)) + 2\,f(x_3) + f(x_6)\right].$$

Sendo $n = 6$, a fórmula ${}^{3}\!/_{8}$ de Simpson torna-se:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\,h\left[f(x_0) + 3\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)) + 2\,f(x_3) + f(x_6)\right].$$

Logo,

Sendo $n = 6$, a fórmula $3/8$ de Simpson torna-se:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\,h\left[f(x_0) + 3\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)\right) + 2\,f(x_3) + f(x_6)\right].$$

Logo,

$$\int_{0,3}^{1,2} (e^{x} + 5\,x)\,dx \approx 0,05625\,\{e^{0,3} + 1,5 + 3\;[(e^{0,45} + 2,25) + (e^{0,6} + 3) + (e^{0,9} + 4,5) + (e^{1,05} + 5,25)]$$
$$+2\,(e^{0,75} + 3,75) + e^{1,2} + 6\}$$

Sendo $n = 6$, a fórmula 3/8 de Simpson torna-se:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\,h\left[f(x_0) + 3\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)\right) + 2\,f(x_3) + f(x_6)\right].$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{0,3}^{1,2} (e^x + 5\,x)\,dx \approx 0,05625\,\{&e^{0,3} + 1,5 + 3\,\left[(e^{0,45} + 2,25) + (e^{0,6} + 3) + (e^{0,9} + 4,5) + (e^{1,05} + 5,25)\right] \\ &+ 2\,(e^{0,75} + 3,75) + e^{1,2} + 6\} \\ &= 5,34527051674726\,.\end{aligned}$$

Sendo $n = 6$, a fórmula $^3/_8$ de Simpson torna-se:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\,h\left[f(x_0) + 3\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)) + 2\,f(x_3) + f(x_6)\right].$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{0,3}^{1,2} (e^x + 5\,x)\,dx &\approx 0,05625\left\{e^{0,3} + 1,5 + 3\,\left[(e^{0,45} + 2,25) + (e^{0,6} + 3) + (e^{0,9} + 4,5) + (e^{1,05} + 5,25)\right]\right.\\ &\left. +2\,(e^{0,75} + 3,75) + e^{1,2} + 6\right\}\\ &= 5,34527051674726\,.\end{aligned}$$

Estimativa do erro **(exercício)**