Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Bacharelado em Ciência da Computação

BCC32B – Elementos de Lógica Digital

Prof. Rodrigo Hübner

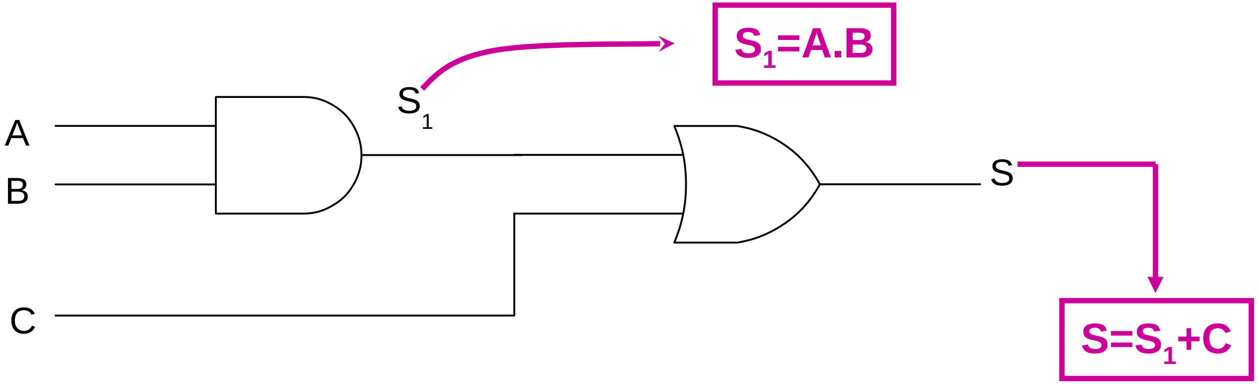
Aula 05 – Mapeamento entre expressões e circuitos e entre expressões e tabela verdade.

Fundamentos de Lógica

Expressões boolenas

Todo circuito lógico executa uma expressão booleana

Exemplo: Obter a expressão do circuito abaixo



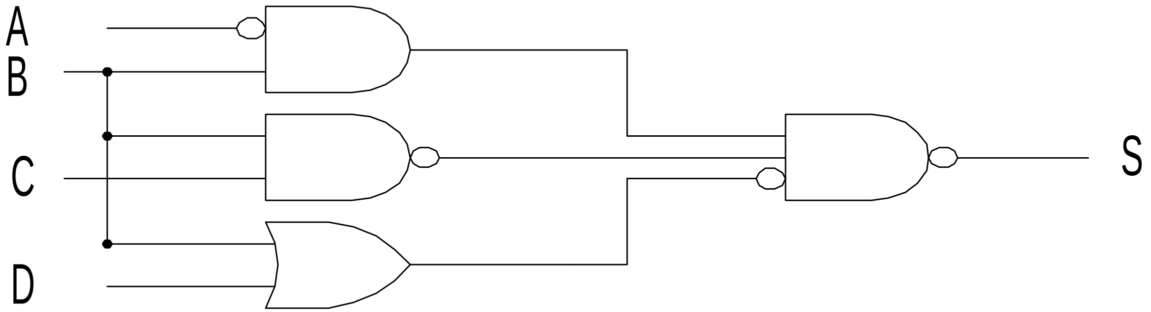
Expressão Final

$\boxed{S=(A.B)+C}$

Exemplo

Expressões boolenas

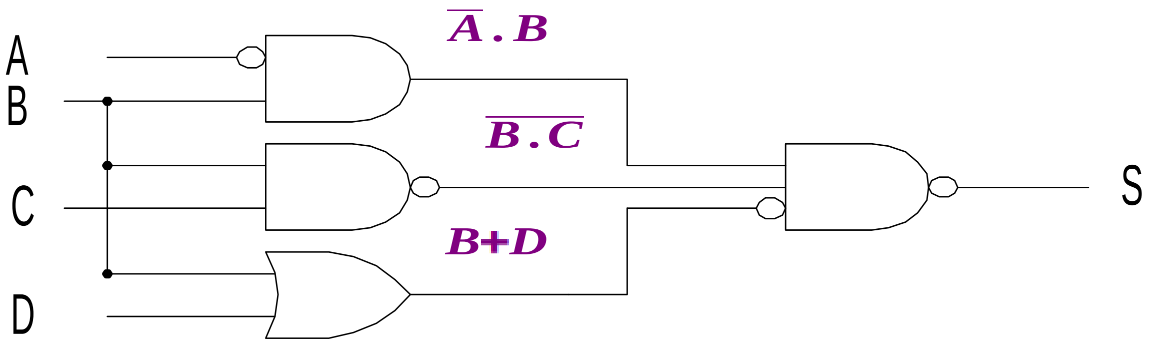
Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico



Exemplo - Solução

Expressões boolenas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico



Expressão Final

$$S=\overline{(\overline{A}.B).(\overline{B.C}).(\overline{B+D})}$$

Fundamentos de Lógica

Obter Circuito Lógico a partir da Expressão

Método: Identificar as portas lógicas na expressão e desenhá-las com as respectivas ligações

Exemplo: obter o circuito que executa a expressão

$S = (A + B) . C . (B + D)$

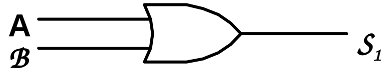
Fundamentos de Lógica

Obter Circuito Lógico a partir da Expressão

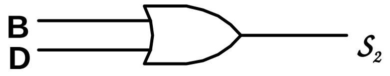
Solução:

$$S = \underbrace{\underbrace{(A + B)}_{\boxed{1}} \;.\; C \;.\; \underbrace{(B + D)}_{\boxed{2}}}_{\boxed{3}}$$

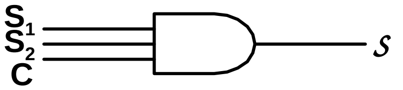
1



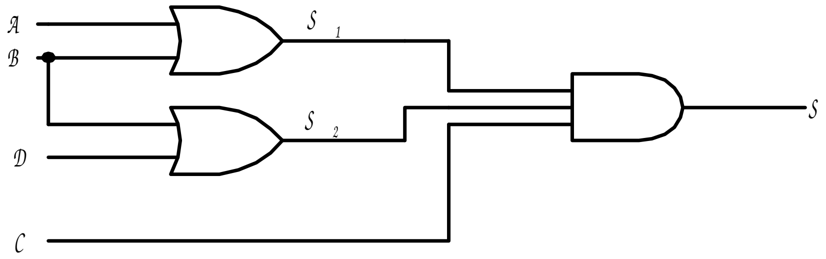
2



3



Circuito Obtido



Exemplo

Obter o circuito que executa a seguinte expressão booleana:

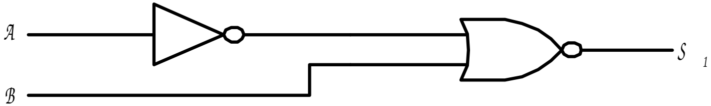
$$S = [(\overline{\overline{A} + B}) + (\overline{\overline{C} . D})] . \overline{D}$$

Exemplo - Solução

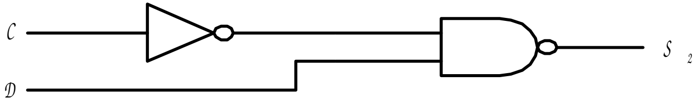
Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

$$S=\underbrace{\overbrace{[(\overline{\overline{A}+B})+(\overline{\overline{C}.D})]}^{3}.\overline{D}}_{4}$$

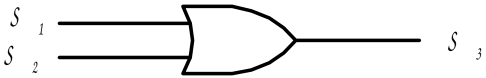
1



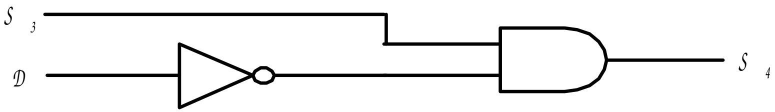
2



3



4

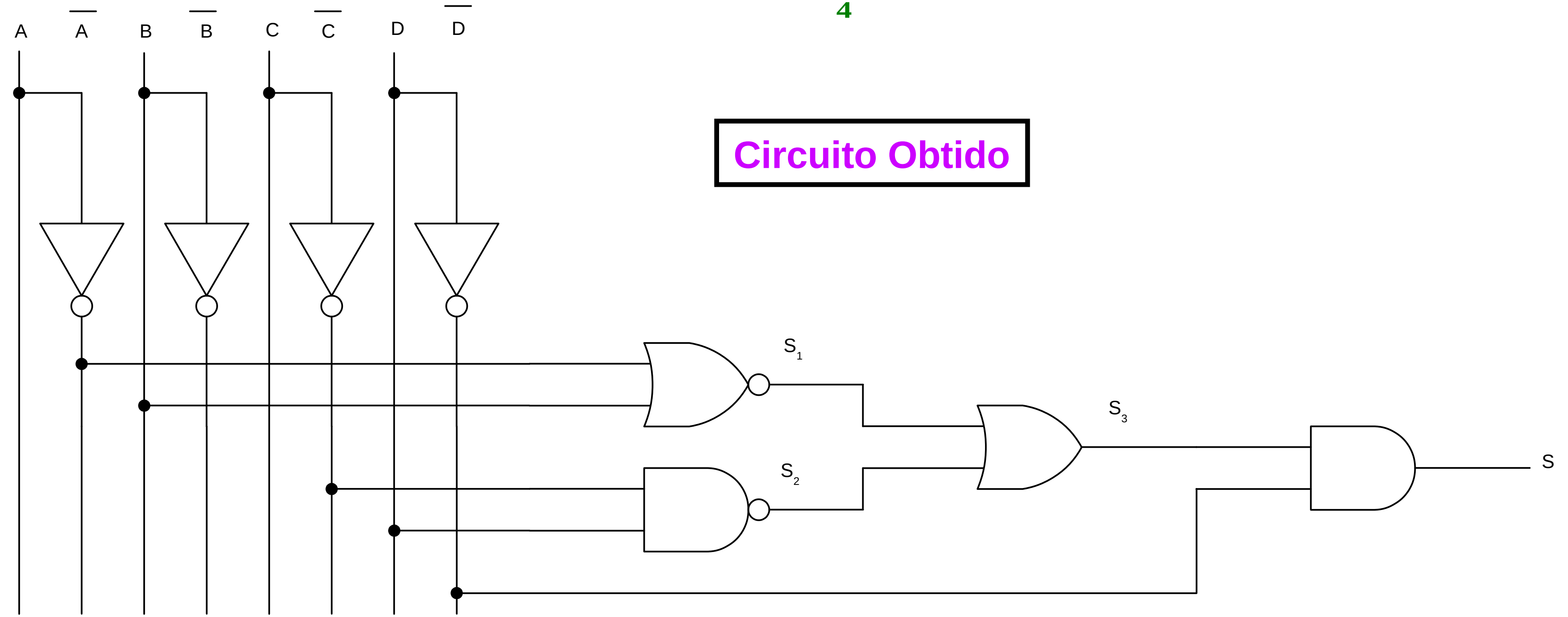


Exemplo - Solução

Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

$$S = \underbrace{\overbrace{[(\overline{\overline{A}+B}) + (\overline{\overline{C}\,.\,D})]}^{3}\,.\,\overline{D}}_{4}$$

Circuito Obtido



Fundamentos de Lógica

Obter a Tabela Verdade a partir da Expressão

Procedimentos:

1. Monta-se todas as combinações possíveis das entradas
2. Monta-se as colunas de cada parte da expressão com seus resultados
3. Monta-se a coluna de saída final (S)

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão:

$$S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$$

Segue os três passos de montagem da tabela

A expressão pode ser vista como três termos, chamados de S_1,S_2 e S_3

$$S=\underbrace{\overline{A}}_{S_1}+\underbrace{B}_{S_2}+\underbrace{A.\overline{B}.\overline{C}}_{S_3}$$

$$S=S_1+S_2+S_3$$

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão:

$$S = \overline{A} + B + A.\overline{B}.\overline{C}$$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Saída da Expressão

Exemplo

Obter a tabela verdade para a seguinte expressão booleana:

$$\boldsymbol{S = A.\overline{B}.C + A.\overline{D} + \overline{A}.B.D}$$

Exemplo - Solução

Obter a tabela verdade para a expressão booleana:

$$S = A.\overline{B}.C + A.\overline{D} + \overline{A}.B.D$$

A	B	C	D	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{D}$	$A.\overline{B}.C$	$A.\overline{D}$	$\overline{A}.B.D$	S
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 0:	0	0	1	S_0
Caso 1:	0	1	0	S_1
Caso 2:	1	0	1	S_2
Caso 3:	1	1	1	S_3

$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3$

Quando a expressão S é verdadeira?

Quando S = 1?

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 0:	0	0	1	S_0
Caso 1:	0	1	0	S_1
Caso 2:	1	0	1	S_2
Caso 3:	1	1	1	S_3

$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3$

Resposta

S=1:

- **Quando $S_0 = 1$, OU**
- **Quando $S_1 = 1$, OU**
- **Quando $S_2 = 1$, OU**
- **Quando $S_3 = 1$**

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 0:	0	0	1	S_0
Caso 1:	0	1	0	S_1
Caso 2:	1	0	1	S_2
Caso 3:	1	1	1	S_3

$S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3$

Resposta

S=1 quando:

- **Caso 0: A=0 E B=0 → $S_0=1$ →** $\overline{A}.\overline{B}$

OU

- **Caso 2: A=1 E B=0 → $S_2=1$ →** $A.\overline{B}$

OU

- **Caso 3: A=1 E B=1 → $S_3=1$ →** $A.B$

Soma de Produtos

$$S=\overline{A}.\overline{B}+A.\overline{B}+A.B$$

Cada produto isolado é capaz de gerar S=1

Exemplo

Obter a expressão a partir da Tabela Verdade e fazer o diagrama do circuito correspondente:

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Exemplo - Solução

Obter a expressão a partir da Tabela Verdade e fazer o diagrama do circuito correspondente:

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$\rightarrow S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$

$\rightarrow S = \overline{A}.B.\overline{C}$

$\rightarrow S = A.B.\overline{C}$

$\rightarrow S = A.B.C$

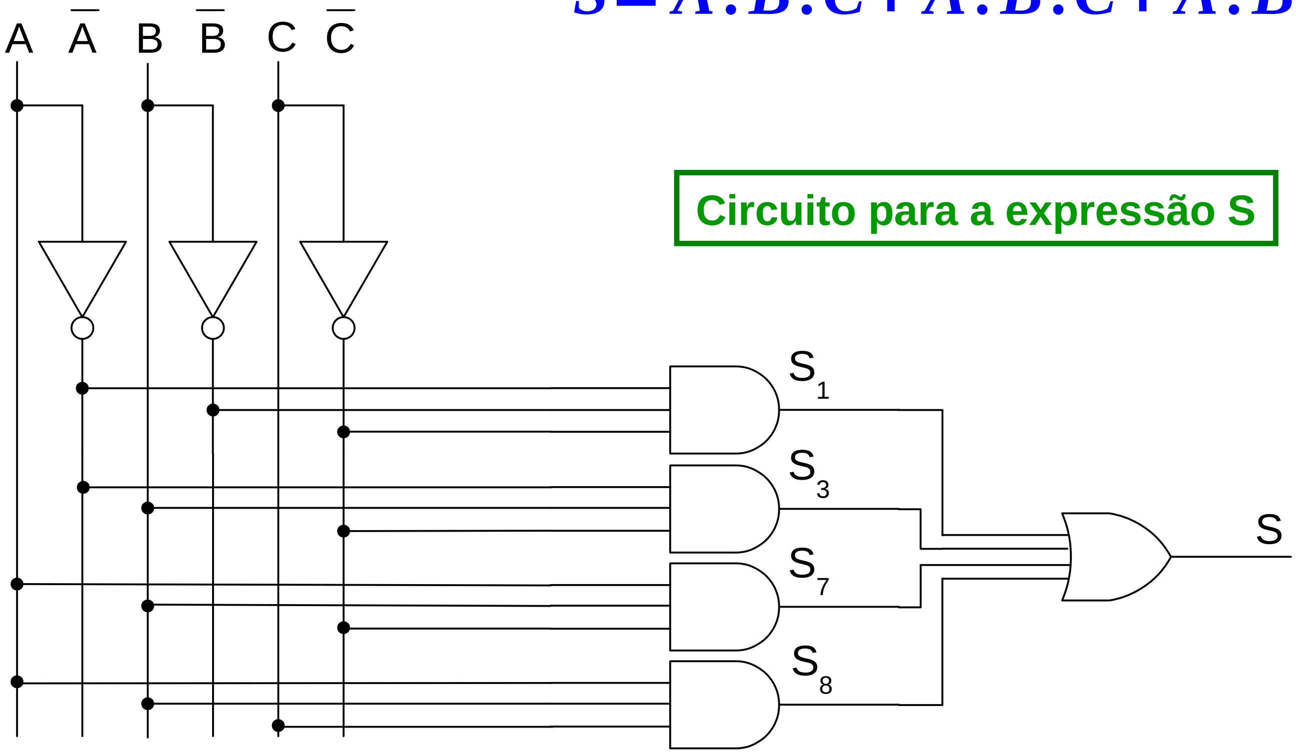
$$\boxed{S = S_0 + S_2 + S_6 + S_7}$$

$$S = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + A.B.\overline{C} + A.B.C$$

Exemplo - Solução

Obter a expressão a partir da Tabela Verdade e fazer o diagrama do circuito correspondente:

$$S=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.\overline{C}+A.B.\overline{C}+A.B.C$$



Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 0:	0	0	1	S_0
Caso 1:	0	1	0	S_1
Caso 2:	1	0	0	S_2
Caso 3:	1	1	1	S_3

Quando a expressão S é falsa?

Quando S = 0?

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 0:	0	0	1	S_0
Caso 1:	0	1	0	S_1
Caso 2:	1	0	0	S_2
Caso 3:	1	1	1	S_3

Resposta

S=0:

- **Quando $S_1 = 0$**
- **Quando $S_2 = 0$**

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 0:	0	0	1	S_0
Caso 1:	0	1	0	S_1
Caso 2:	1	0	0	S_2
Caso 3:	1	1	1	S_3

Resposta

S=0 quando:

- **Caso 1: A=0 OU B=1 → S_1=0 →** $A+\overline{B}$

E

- **Caso 2: A=1 OU B=0 → S_2=0 →** $\overline{A}+B$

Produto de Somas → $(A+\overline{B}).(\overline{A}+B)$

Cada soma isolada é capaz de gerar S=0

Mintermos e Maxtermos

- Dada uma tabela verdade que representa uma expressão:

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$m_0 = \overline{A} . \overline{B}$$

$$m_1 = \overline{A} . B$$

$$m_2 = A . \overline{B}$$

$$m_3 = A . B$$

$$f(A, B) = \overline{A} . \overline{B} + \overline{A} . B + A . B$$

Estes termos são fáceis de ser lembrados, pois cada índice corresponde ao valor decimal da palavra binária.

Mintermos e Maxtermos

- Dada uma tabela verdade que representa uma expressão:

x1	x2	f(x1,x2)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$m_0=\overline{x_1}.\overline{x_2}$$

$$m_1=\overline{x_1}.x_2$$

$$m_2=x_1.\overline{x_2}$$

$$m_3=x_1.x_2$$

$$f(x_{1,}x_2)=\overline{x_1}.\overline{x_2}+\overline{x_1}.x_2+x_1.x_2$$

Soma dos Produtos (SOP)

- Representação de uma função por meio da soma dos produtos → **mintermos**
- Exemplo:

$$f = m_0 . 1 + m_1 . 1 + m_2 . 0 + m_3 . 1$$

$$f = m_0 + m_1 + m_3$$

$$f(x_{1,} x_2) = \overline{x_1} . \overline{x_2} + \overline{x_1} . x_2 + x_1 . x_2$$

$$f(x_{1,} x_2) = \sum (m_0, m_1, m_3)$$

$$f(x_{1,} x_2) = \sum m(0,1,3)$$

x1	x2	f(x1,x2)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

O símbolo de somatório (Σ) indica a operação OR aplicada ao mintermos listados dentro do parênteses.

Maxtermos

O princípio da dualidade sugere que se é possível sintetizar uma função *f* considerando as linhas da tabela verdade onde *f=1*, então também deve ser possível sintetizar *f* considerando a linhas onde *f=0*.

→ **Maxtermos são o complemento dos mintermos**.

$$M_i = \overline{m_i}$$

Maxtermos

Como um exemplo, considere o Maxtermo de três variáveis:

$$M_2 = \overline{A}.B.\overline{C}\,(Ex.de\,010)$$

$$M_2 = \overline{m_2}$$

$$M_2 = \overline{\overline{A}.B.\overline{C}}$$

$$M_2 = A + \overline{B} + C$$

Produto das Somas (POS)

Representação de uma função por meio do produto das somas → maxtermos

Exemplo:

$$\bar{f}(x_{1,} x_2) = m_2 = x_1 \overline{x_2} \quad [onde \;\; f=0]$$

$$\bar{\bar{f}}(x_{1,} x_2) = f = \overline{x_1 \overline{x_2}} \quad [DeMorgan, negando\, os\, dois\, termos]$$

$$f = \overline{x_1} + x_2$$

$$f = \overline{m_2} = M_2$$

$$f(x_{1,} x_2) = \prod (M_2)$$

$$f(x_{1,} x_2) = \prod M(2)$$

x1	x2	f(x1,x2)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

O símbolo de produtório (Π) indica a operação AND aplicada ao maxtermos listados dentro do parênteses.

Mintermos e Maxtermos

- Dada uma tabela verdade que representa uma expressão:

x1	x2	f(x1,x2)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$m_0 = \overline{x_1} . \overline{x_2}$$
$$m_1 = \overline{x_1} . x_2$$
$$m_2 = x_1 . \overline{x_2}$$
$$m_3 = x_1 . x_2$$

$$f(x_{1,} x_2) = \sum m(0,1,3)$$

$$f(x_{1,} x_2) = \prod M(2)$$

Mintermos e Maxtermos

Linha	x1	x2	x3	Mintermo	Maxtermo
0	0	0	0	$m_0 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$M_0 = x_1 + x_2 + x_3$
1	0	0	1	$m_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	$M_1 = x_1 + x_2 + \overline{x_3}$
2	0	1	0	$m_2 = \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}$	$M_2 = x_1 + \overline{x_2} + x_3$
3	0	1	1	$m_3 = \overline{x_1}\,x_2\,x_3$	$M_3 = x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}$
4	1	0	0	$m_4 = x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	$M_4 = \overline{x_1} + x_2 + x_3$
5	1	0	1	$m_5 = x_1\,\overline{x_2}\,x_3$	$M_5 = \overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}$
6	1	1	0	$m_6 = x_1\,x_2\,\overline{x_3}$	$M_6 = \overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3$
7	1	1	1	$m_7 = x_1\,x_2\,x_3$	$M_7 = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}$

Exemplo 1

- Escreva a expressão booleana que a função representa:

$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = \sum m(1,4,5,7)$$

$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = m_1 + m_4 + m_5 + m_7$$

$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,x_3 + x_1 x_2 x_3$$

Exemplo 2

Considere a função:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(2,3,4,6,7)$$

A expressão SOP é obtida usando-se os mintermos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3$$

Esta expressão pode ser simplificada

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 (\overline{x_3} + x_3) + x_1 (\overline{x_2} + x_2) \overline{x_3} + x_1 x_2 (\overline{x_3} + x_3)$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_3} + x_1 x_2$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} + x_1) x_2 + x_1 \overline{x_3}$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_1 \overline{x_3}$$

Exemplo 3

Considere a mesma função, especificado pelo produto de maxtermos:

$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = \prod M(0,1,5)$$

A expressão POS é derivada como:

$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = M_0 . M_1 . M_5$$
$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$$

Esta expressão pode ser simplificada

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$$
$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = ((x_1 + x_2) + x_3)((x_1 + x_2) + \overline{x_3})(x_1 + (x_2 + \overline{x_3}))(\overline{x_1} + (x_2 + \overline{x_3}))$$
$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = ((x_1 + x_2) + x_3 \overline{x_3})(x_1 \overline{x_1} + (x_2 + \overline{x_3}))$$
$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = (x_1 + x_2)(x_2 + \overline{x_3}) = x_1 x_2 + x_1 \overline{x_3} + x_2 x_2 + x_2 \overline{x_3}$$
$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = x_1 x_2 + x_2 + x_1 \overline{x_3} + x_2 \overline{x_3} = x_2(1 + x_1 + \overline{x_3}) + x_1 \overline{x_3}$$
$$f(x_{1,} x_{2,} x_3) = x_2(1) + x_1 \overline{x_3} = x_2 + x_1 \overline{x_3}$$

Fundamentos de Lógica

Até aqui:

- Obtemos a expressão booleana a partir do circuito
- Obtemos o circuito lógico a partir da expressão
- Obtemos a tabela verdade a partir da expressão
- Obtemos a expressão a partir da tabela verdade

Próxima Aula

- Equivalência entre portas lógicas