Cálculo Numérico

Sistemas Lineares: Método de Gauss - Seidel

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

12 de julho de 2021

Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896)

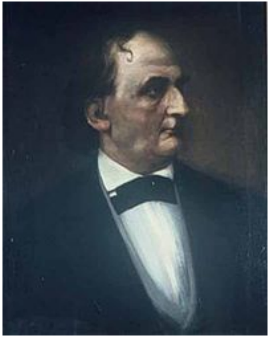


Figura: Matemático alemão, trabalhou com óptica e análise matemática. A denominação "método de Gauss-Seidel segundo alguns autores é um abuso, pois Gauss aparentemente não o conhecia e Seidel não o recomendava!

Método de Gauss - Seidel

Tendo em mente os sistemas fornecidos pelo método de Gauss - Jacobi, o método de Gauss - Seidel difere do anterior que para este, utiliza-se $x_i^{(k+1)}, i = 1, 2, \ldots, p$, para o cálculo de $x_p^{(k+1)}$. Deste modo, as equações recursivas tornam-se:

Método de Gauss - Seidel

Tendo em mente os sistemas fornecidos pelo método de Gauss - Jacobi, o método de Gauss - Seidel difere do anterior que para este, utiliza-se $x_i^{(k+1)}, i = 1, 2, \ldots, p$, para o cálculo de $x_p^{(k+1)}$. Deste modo, as equações recursivas tornam-se:

$$
(1) \qquad \begin{cases}
x_1^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13}\, x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}\, x_n^{(k)} \right) \\
x_2^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}\, x_1^{(k+1)} - a_{23}\, x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}\, x_n^{(k)} \right) \\
x_3^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}\, x_1^{(k+1)} - a_{32}\, x_2^{(k+1)} - a_{34}\, x_4^{(k)} \ldots - a_{3n}\, x_n^{(k)} \right) \\
\vdots & \quad \vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \dfrac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}\, x_1^{(k+1)} - a_{n2}\, x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{nn-1}\, x_{n-1}^{(k+1)} \right)
\end{cases}
$$

Convergência

O Método de Gauss - Seidel converge se:

Convergência

O Método de Gauss - Seidel converge se:

(i) O critério de Sanssenfeld for satisfeito, isto é, se $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$, onde

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Convergência

O Método de Gauss - Seidel converge se:

(i) O critério de Sanssenfeld for satisfeito, isto é, se $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$, onde

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

(ii) Se a matriz A do sistema $AX = B$ for estritamente diagonalmente dominante.

Convergência

O Método de Gauss - Seidel converge se:

(i) O critério de Sanssenfeld for satisfeito, isto é, se $\max\limits_{1\leq i\leq n} \beta_i < 1$, onde

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

(ii) Se a matriz A do sistema $AX = B$ for estritamente diagonalmente dominante.

(iii) O critério das linhas é satisfeito, isto é, $\|F\|_\infty < 1$, onde $F = \left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)$.

$$\begin{array}{c} \text{A é e.d.d.?} \\ \downarrow \\ \text{Sim} \end{array}$$

A é e.d.d.?

$\downarrow$

Sim

$\downarrow$

O método de Gauss-Seidel converge!

A é e.d.d.?

Não

Sim

O método de Gauss-Seidel converge!

Vale o critério de Sanssenfeld?

A é e.d.d.?

Não

Sim

O método de Gauss-Seidel converge!

Vale o critério de Sanssenfeld?

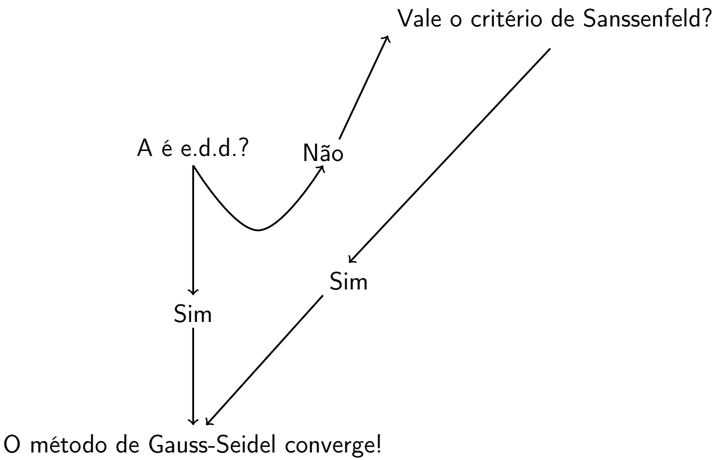
A é e.d.d.?

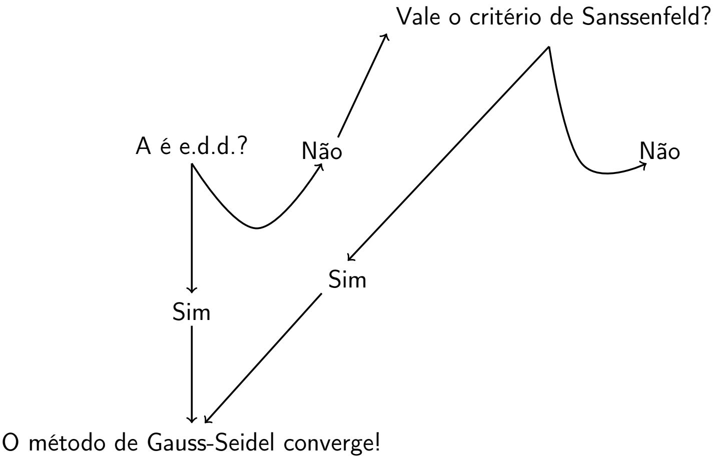
Não

Sim

Sim

O método de Gauss-Seidel converge!


Vale o critério de Sanssenfeld?
A é e.d.d.?
Não
Sim
Sim
O método de Gauss-Seidel converge!


Vale o critério de Sanssenfeld?
A é e.d.d.?
Não
Não
Sim
Sim
O método de Gauss-Seidel converge!

Vale o critério de Sanssenfeld?

A é e.d.d.?

Não

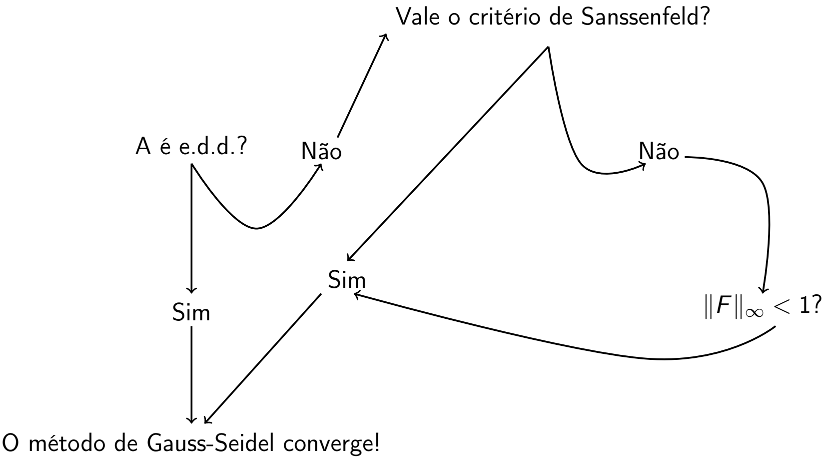
Não

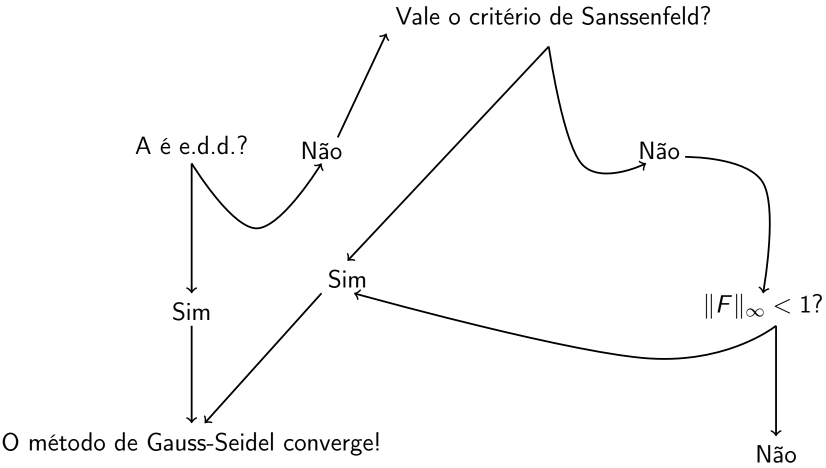
Sim

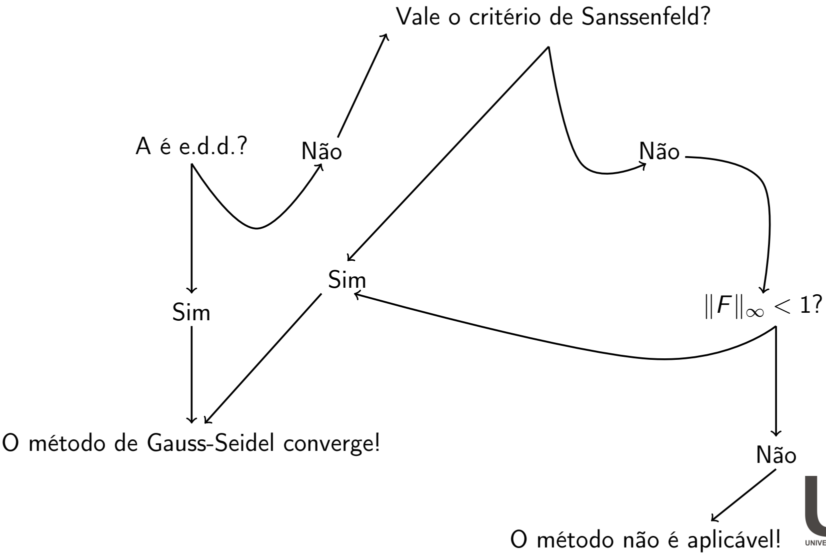
Sim

$\|F\|_\infty < 1$?

O método de Gauss-Seidel converge!


A é e.d.d.?
Não
Vale o critério de Sanssenfeld?
Não
$\|F\|_\infty < 1$?
Sim
Sim
O método de Gauss-Seidel converge!


Vale o critério de Sanssenfeld?
A é e.d.d.?
Não
Não
Sim
Sim
$\|F\|_\infty < 1$?
O método de Gauss-Seidel converge!
Não


Vale o critério de Sanssenfeld?
A é e.d.d.?
Não
Não
Sim
$\|F\|_\infty < 1$?
Sim
O método de Gauss-Seidel converge!
Não
O método não é aplicável!

Exemplo

Exemplo 0.1

Usando o método de Gauss - Seidel, considerando $X^{(0)} = (0,0,0)^t$, *determine uma solução para o sistema*

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com $\varepsilon \leqslant 10^{-2}$.

Solução: Primeiramente, vejamos se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante.

Solução: Primeiramente, vejamos se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante. Com efeito,

$$|a_{12}| + |a_{13}| = 1 + 1 = 2 < 5 = |a_{11}|$$
$$|a_{21}| + |a_{23}| = 3 + 1 = 4 = 4 = |a_{22}|,$$

logo, a matriz não é estritamente diagonalmente dominante, o que não garante a convergência da solução deste sistema.

Recorramos ao critério de Sanssenfeld:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \; i = 1, 2, 3.$$

- $i = 1$:

$$\beta_1 = \cancelto{0}{\sum_{j=1}^{0} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right|} \beta_j + \sum_{j=2}^{3} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right|$$

Recorramos ao critério de Sanssenfeld:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \; i = 1, 2, 3.$$

- $i = 1$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \cancelto{0}{\sum_{j=1}^{0} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right|} \beta_j + \sum_{j=2}^{3} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \\ &= \left| \frac{a_{12}}{a_{11}} \right| + \left| \frac{a_{13}}{a_{11}} \right| \end{aligned}$$

Recorramos ao critério de Sanssenfeld:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|, \; i = 1, 2, 3.$$

- $i = 1:$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \cancelto{0}{\sum_{j=1}^{0} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right|} \beta_j + \sum_{j=2}^{3} \left| \frac{a_{1j}}{a_{11}} \right| \\ &= \left| \frac{a_{12}}{a_{11}} \right| + \left| \frac{a_{13}}{a_{11}} \right| \\ &= 0,2 + 0,2 = 0,4. \end{aligned}$$

- $i = 2:$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{1} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right| \beta_j + \sum_{j=3}^{3} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right|$$

- $i = 3:$

- $i = 2:$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{1} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right| \beta_j + \sum_{j=3}^{3} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right|$$

$$= \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{23}}{a_{22}} \right|$$

- $i = 3:$

- $i = 2:$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{1} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right| \beta_j + \sum_{j=3}^{3} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right|$$
$$= \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{23}}{a_{22}} \right| = \frac{3}{4} \cdot 0,4 + 0,25 = 0,55.$$

- $i = 3:$

- $i = 2:$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{1} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right| \beta_j + \sum_{j=3}^{3} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right|$$

$$= \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{23}}{a_{22}} \right| = \frac{3}{4} \cdot 0,4 + 0,25 = 0,55.$$

- $i = 3:$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{a_{3j}}{a_{33}} \right| \beta_j + \cancelto{0}{\sum_{j=4}^{3} \left| \frac{a_{3j}}{a_{33}} \right|}$$

- $i = 2:$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{1} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right| \beta_j + \sum_{j=3}^{3} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right|$$
$$= \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{23}}{a_{22}} \right| = \frac{3}{4} \cdot 0,4 + 0,25 = 0,55.$$

- $i = 3:$

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{a_{3j}}{a_{33}} \right| \beta_j + \cancelto{0}{\sum_{j=4}^{3} \left| \frac{a_{3j}}{a_{33}} \right|}$$
$$= \left| \frac{a_{31}}{a_{33}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{32}}{a_{33}} \right| \beta_2$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- $i = 2:$

$$
\begin{aligned}
\beta_2 &= \sum_{j=1}^{1} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right| \beta_j + \sum_{j=3}^{3} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right| \\
&= \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{23}}{a_{22}} \right| = \frac{3}{4} \cdot 0,4 + 0,25 = 0,55.
\end{aligned}
$$

- $i = 3:$

$$
\begin{aligned}
\beta_2 &= \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{a_{3j}}{a_{33}} \right| \beta_j + \cancelto{0}{\sum_{j=4}^{3} \left| \frac{a_{3j}}{a_{33}} \right|} \\
&= \left| \frac{a_{31}}{a_{33}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{32}}{a_{33}} \right| \beta_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,55 = 0,475.
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- $i = 2$:

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{1} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right| \beta_j + \sum_{j=3}^{3} \left| \frac{a_{2j}}{a_{22}} \right|$$
$$= \left| \frac{a_{21}}{a_{22}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{23}}{a_{22}} \right| = \frac{3}{4} \cdot 0,4 + 0,25 = 0,55.$$

- $i = 3$:

$$\beta_2 = \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{a_{3j}}{a_{33}} \right| \beta_j + \cancelto{0}{\sum_{j=4}^{3} \left| \frac{a_{3j}}{a_{33}} \right|}$$
$$= \left| \frac{a_{31}}{a_{33}} \right| \beta_1 + \left| \frac{a_{32}}{a_{33}} \right| \beta_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,55 = 0,475.$$

Disto, $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \beta_i = \max\{0,4\,,\ 0,55\,,\ 0,475\} = 0,55 < 1$ e o critério de Sanssenfeld é satisfeito e portanto, podemos garantir que o método de Gauss-Seidel converge.

Assim, as iterações são da forma:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1^{(k+1)} & = 1 - 0,2\, x_2^{(k)} - 0,2\, x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & = 1,5 - 0,75\, x_1^{(k+1)} - 0,25\, x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} & = 0 - 0,5\, x_1^{(k+1)} - 0,5\, x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

Assim, as iterações são da forma:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1^{(k+1)} & = 1 - 0,2\, x_2^{(k)} - 0,2\, x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} & = 1,5 - 0,75\, x_1^{(k+1)} - 0,25\, x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} & = 0 - 0,5\, x_1^{(k+1)} - 0,5\, x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

e, a partir de $X^{(0)} = (\underbrace{0}_{x_1^{(0)}}, \underbrace{0}_{x_2^{(0)}}, \underbrace{0}_{x_3^{(0)}})^t$ temos para

Assim, as iterações são da forma:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1^{(k+1)} &= 1 - 0,2\,x_2^{(k)} - 0,2\,x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1,5 - 0,75\,x_1^{(k+1)} - 0,25\,x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 0 - 0,5\,x_1^{(k+1)} - 0,5\,x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

e, a partir de $X^{(0)} = (\underbrace{0}_{x_1^{(0)}}, \underbrace{0}_{x_2^{(0)}}, \underbrace{0}_{x_3^{(0)}})^t$ temos para

- $k = 0$:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1^{(1)} &= 1 - 0,2\,x_2^{(0)} - 0,2\,x_3^{(0)} = 1 - 0,2 \cdot 0 - 0,2 \cdot 0 = 1 \\ x_2^{(1)} &= 1,5 - 0,75\,x_1^{(1)} - 0,25\,x_3^{(0)} = 1,5 - 0,75 \cdot 1 - 0 = 0,75 \\ x_3^{(1)} &= -0,5\,x_1^{(1)} - 0,5\,x_2^{(1)} = -0,5 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,75 = -0,875. \end{cases}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Deste modo, $X^{(1)} = (1\,,\, 0,75\,,\, -0,875)^t$, donde

Deste modo, $X^{(1)} = (1\,,\ 0,75\,,\ -0,875)^t$, donde

$$\frac{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty}{\|X^{(1)}\|_\infty} = \frac{\|(1\,,\ 0,75\,,\ -0,875)^t - (0,0,0)^t\|_\infty}{\|(1\,,\ 0,75\,,\ -0,875)^t\|_\infty} = \frac{\|(1\,,\ 0,75\,,\ -0,875)^t\|_\infty}{\|(1\,,\ 0,75\,,\ -0,875)^t\|_\infty} = \frac{1}{1} = 1 > \varepsilon$$

- $k = 1:$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} &= 1 - 0,2\,x_2^{(1)} - 0,2\,x_3^{(1)} = 1 - 0,2 \cdot 0,75 - 0,2 \cdot (-0,875) = 1,025 \\ x_2^{(2)} &= 1,5 - 0,75\,x_1^{(2)} - 0,25\,x_3^{(1)} = 1,5 - 0,75 \cdot 1,025 - 0,25 \cdot (-0,875) = 0,95 \\ x_3^{(2)} &= -0,5\,x_1^{(2)} - 0,5\,x_2^{(2)} = -0,5 \cdot 1,025 - 0,5 \cdot 0,95 = -0,9875. \end{cases}$$

Assim, $X^{(2)} = (1.025, 0.95, -0.9875)^t$, donde pelo critério da parada resulta que

Assim, $X^{(2)} = (1.025, 0.95, -0.9875)^t$, donde pelo critério da parada resulta que

$$\frac{\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_\infty}{\|X^{(2)}\|_\infty} = \frac{\|(1.025, 0.95, -0.9875)^t - (1, 0.75, -0.875)^t\|_\infty}{\|(1.025, 0.95, -0.9875)^t\|_\infty}$$
$$= 0.19512195121951217 > \varepsilon$$

Assim, $X^{(2)} = (1.025, 0.95, -0.9875)^t$, donde pelo critério da parada resulta que

$$\frac{\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_\infty}{\|X^{(2)}\|_\infty} = \frac{\|(1.025, 0.95, -0.9875)^t - (1, 0.75, -0.875)^t\|_\infty}{\|(1.025, 0.95, -0.9875)^t\|_\infty}$$
$$= 0.19512195121951217 > \varepsilon$$

Prosseguindo com o cálculo das iterações, obtemos a tabela:

k	$X^{(k)}$	$\frac{\lVert X^{(k+1)} - X^{(k)} \rVert_\infty}{\lVert X^{(k)} \rVert_\infty}$
0	$(0, 0, 0)^t$	0
1	$(1.0, 0.75, -0.875)^t$	1
2	$(1.025, 0.95, -0.9875)^t$	0.19512195121951217
3	$(1.0075, 0.99125, -0.999375)^t$	0.04094292803970224
4	$(1.001625, 0.998625, -1.000125)^t$	0.007363035068014497

Tabela: Iterações $X^{(k)}$

k	$X^{(k)}$	$\frac{\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\|_\infty}{\|X^{(k)}\|_\infty}$
0	$(0,0,0)^t$	0
1	$(1.0, 0.75, -0.875)^t$	1
2	$(1.025, 0.95, -0.9875)^t$	0.19512195121951217
3	$(1.0075, 0.99125, -0.999375)^t$	0.04094292803970224
4	$(1.001625, 0.998625, -1.000125)^t$	0.007363035068014497

Tabela: Iterações $X^{(k)}$

Portanto, a solução do sistema $A \cdot X = B$ é

$$X \approx X^{(4)} = (1.001625, 0.998625, -1.000125)^t \,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Comparação entre os Métodos Diretos e Iterativos

- Métodos Diretos: recomendados para sistemas de pequeno porte cuja matriz de coeficientes é densa (poucos elementos não - nulos – menos de 10%).

Comparação entre os Métodos Diretos e Iterativos

- Métodos Diretos: recomendados para sistemas de pequeno porte cuja matriz de coeficientes é densa (poucos elementos não - nulos – menos de 10%).
- Métodos Iterativos: bastante vantajosos para sistemas de grande porte cuja matriz de coeficientes seja esparsa (muitos elementos nulos); utilizam menos memória da máquina; é necessário verificar condições de convergência.

Exemplo

Exemplo 1.1

Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso o critério de Sanssenfeld esteja satisfeito, usando o método iterativo de Gauss-Seidel, resolva o sistema dado a partir de $X^{(0)} = (-2, 1, 0)^t$ *e* $\varepsilon \leq 10^{-2}$.