Método dos Mínimos Quadrados: Caso Contínuo

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

2 de agosto de 2021

Caso Contínuo

O método dos mínimos quadrados pode ainda ser usado para aproximar uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ por uma combinação de funções do tipo

$$g(x) = \alpha_1 \, g_1(x) + \alpha_2 \, g_2(x) + \ldots + \alpha_n \, g_n(x)$$

onde as funções $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ são contínuas em $[a, b]$.

Caso Contínuo

O método dos mínimos quadrados pode ainda ser usado para aproximar uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ por uma combinação de funções do tipo

$$g(x) = \alpha_1\, g_1(x) + \alpha_2\, g_2(x) + \ldots + \alpha_n\, g_n(x)$$

onde as funções $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ são contínuas em $[a, b]$.

Neste caso, desejamos determinar a função $g(x)$ que melhor se aproxime da função $f(x)$, isto é, o quadrado dos desvios entre as curvas de $f(x)$ e $g(x)$ seja o menor possível.

Caso Contínuo

O método dos mínimos quadrados pode ainda ser usado para aproximar uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ por uma combinação de funções do tipo

$$g(x) = \alpha_1 \, g_1(x) + \alpha_2 \, g_2(x) + \ldots + \alpha_n \, g_n(x)$$

onde as funções $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ são contínuas em $[a, b]$.

Neste caso, desejamos determinar a função $g(x)$ que melhor se aproxime da função $f(x)$, isto é, o quadrado dos desvios entre as curvas de $f(x)$ e $g(x)$ seja o menor possível. Em outras palavras, desejamos que

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 \, dx \text{ seja mínimo.} \tag{1}$$

Considere

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \int_a^b [f(x) - \alpha_1\, g_1(x) - \alpha_2\, g_2(x) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x)]^2 \, dx \,. \tag{2}$$

Considere

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \int_a^b [f(x) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - \ldots - \alpha_n g_n(x)]^2 \, dx \,. \tag{2}$$

Tal como no caso discreto, devemos encontrar os pontos críticos de F , ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{3}$$

No caso unidimensional, sob certas condições com relação à continuidade, é verdade que se

$$G(s) = \int_a^b g(x, s)\, dx,$$

então,

No caso unidimensional, sob certas condições com relação à continuidade, é verdade que se

$$G(s) = \int_a^b g(x, s)\, dx,$$

então,

$$G'(s) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial s}(x, s)\, dx\,.$$

Assim, pensando em nossa função $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ao aplicar o resultado anterior em relação à cada variável α_j, para $j = 1, \ldots, n$, temos que

Assim, pensando em nossa função $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ao aplicar o resultado anterior em relação à cada variável α_j, para $j = 1, \ldots, n$, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tag{4}$$
$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left[f(x) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - \ldots - \alpha_n g_n(x)\right]^2 dx$$

Assim, aplicando a regra da cadeia em (4), a equação (3) pode ser reescrita como:

$$2\int_a^b [f(x) - \alpha_1\, g_1(x) - \alpha_2\, g_2(x) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x)] \cdot [-g_j(x)]\, dx = 0\,. \tag{5}$$

Assim, aplicando a regra da cadeia em (4), a equação (3) pode ser reescrita como:

$$2\int_a^b [f(x) - \alpha_1\, g_1(x) - \alpha_2\, g_2(x) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x)] \cdot [-g_j(x)]\, dx = 0\,. \tag{5}$$

Ou ainda, podemos reescrever a última equação pelo seguinte sistema de n equações com n incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_a^b [f(x_k) - \alpha_1\, g_1(x_k) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x_k)] \cdot g_1(x_k)\, dx = 0 \\
\displaystyle\int_a^b [f(x_k) - \alpha_1\, g_1(x_k) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x_k)] \cdot g_2(x_k)\, dx = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\displaystyle\int_a^b [f(x_k) - \alpha_1\, g_1(x_k) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x_k)] \cdot g_n(x_k)\, dx = 0
\end{cases}
\tag{6}
$$

que é equivalente a

$$
\begin{cases}
\left[\int_a^b g_1(x)\, g_1(x)\, dx\right]\alpha_1 + \ldots + \left[\int_a^b g_1(x)\, g_n(x)\, dx\right]\alpha_n = \int_a^b g_1(x)\, f(x)\, dx \\
\left[\int_a^b g_2(x)\, g_1(x)\, dx\right]\alpha_1 + \ldots + \left[\int_a^b g_2(x)\, g_n(x)\, dx\right]\alpha_n = \int_a^b g_2(x)\, f(x)\, dx \\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\left[\int_a^b g_n(x)\, g_1(x)\, dx\right]\alpha_1 + \ldots + \left[\int_a^b g_n(x)\, g_n(x)\, dx\right]\alpha_n = \int_a^b g_n(x)\, f(x)\, dx
\end{cases}
\tag{7}
$$

Agora, consideraremos o produto interno entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ dado por

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\,. \tag{8}$$

Tendo em mente o produto interno dado em (8) e repetindo os mesmos argumentos do caso discreto, obteremos o mesmo sistema linear do caso discreto, isto é,

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \cdots & \langle g_1, g_n \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \cdots & \langle g_2, g_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1 \rangle & \langle g_n, g_2 \rangle & \cdots & \langle g_n, g_n \rangle \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f \rangle \end{pmatrix} \quad (9)
$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \cdots & \langle g_1, g_n\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \cdots & \langle g_2, g_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1\rangle & \langle g_n, g_2\rangle & \cdots & \langle g_n, g_n\rangle \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f\rangle \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Se $\det(A) \neq 0$, então, a solução do sistema é <u>única</u>, ou seja, existe uma <u>única</u> função $g(x)$ que melhor se ajusta à função $f(x)$.

Exemplo

Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ no intervalo $[1, 3]$ por uma reta.

Exemplo

Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ no intervalo $[1, 3]$ por uma reta.

Solução: Temos que

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x,$$

donde,

Exemplo

Usando o método dos mínimos quadrados, aproxime a função $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ no intervalo $[1,3]$ por uma reta.

Solução: Temos que

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x,$$

donde,

$$g_1(x) = 1,\; g_2(x) = x\,.$$

O sistema fica

$$\begin{bmatrix} \langle g_1,\, g_1 \rangle & \langle g_1,\, g_2 \rangle \\ \langle g_2,\, g_1 \rangle & \langle g_2,\, g_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1,\, f \rangle \\ \langle g_2,\, f \rangle \end{bmatrix}$$

Como

$$\langle g_1,\, g_1 \rangle$$

O sistema fica

$$\begin{bmatrix} \langle g_1,\, g_1 \rangle & \langle g_1,\, g_2 \rangle \\ \langle g_2,\, g_1 \rangle & \langle g_2,\, g_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1,\, f \rangle \\ \langle g_2,\, f \rangle \end{bmatrix}$$

Como

$$\langle g_1,\, g_1 \rangle = \int_1^3 1 \, dx = 2$$

$$\langle g_1,\, g_2 \rangle = \langle g_2,\, g_1 \rangle$$

O sistema fica

$$\begin{bmatrix} \langle g_1,\, g_1\rangle & \langle g_1,\, g_2\rangle \\ \langle g_2,\, g_1\rangle & \langle g_2,\, g_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1,\, f\rangle \\ \langle g_2,\, f\rangle \end{bmatrix}$$

Como

$$\langle g_1,\, g_1\rangle = \int_1^3 1\, dx = 2$$

$$\langle g_1,\, g_2\rangle = \langle g_2,\, g_1\rangle = \int_1^3 x \cdot 1\, dx = 4$$

$$\langle g_2,\, g_2\rangle$$

O sistema fica

$$\begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \end{bmatrix}$$

Como

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \int_1^3 1\, dx = 2$$

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \langle g_2, g_1 \rangle = \int_1^3 x \cdot 1\, dx = 4$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \int_1^3 x \cdot x\, dx = \frac{26}{3} \approx 8,6667.$$

$$\langle g_1, f \rangle$$

O sistema fica

$$\begin{bmatrix} \langle g_1,\, g_1\rangle & \langle g_1,\, g_2\rangle \\ \langle g_2,\, g_1\rangle & \langle g_2,\, g_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1,\, f\rangle \\ \langle g_2,\, f\rangle \end{bmatrix}$$

Como

$$\langle g_1,\, g_1\rangle = \int_1^3 1\, dx = 2$$

$$\langle g_1,\, g_2\rangle = \langle g_2,\, g_1\rangle = \int_1^3 x \cdot 1\, dx = 4$$

$$\langle g_2,\, g_2\rangle = \int_1^3 x \cdot x\, dx = \frac{26}{3} \approx 8,6667.$$

$$\langle g_1,\, f\rangle = \int_1^3 1 \cdot \mathrm{e}^{-x}\, dx = 0,3181.$$

$$\langle g_2,\, f\rangle$$

O sistema fica

$$\begin{bmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{aligned} \langle g_1, g_1\rangle &= \int_1^3 1\,dx = 2 \\ \langle g_1, g_2\rangle = \langle g_2, g_1\rangle &= \int_1^3 x\cdot 1\,dx = 4 \\ \langle g_2, g_2\rangle &= \int_1^3 x\cdot x\,dx = \frac{26}{3} \approx 8,6667. \qquad (10) \\ \langle g_1, f\rangle &= \int_1^3 1\cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx = 0,3181. \\ \langle g_2, f\rangle &= \int_1^3 x\cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx = 0,5366. \end{aligned}$$

Do exposto, temos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3181 \\ 0,5366 \end{bmatrix}$$

Do exposto, temos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3181 \\ 0,5366 \end{bmatrix}$$

cuja solução via método numérico é

$$\alpha_1 = 0,4577, \quad \alpha_2 = -0,1493.$$

Do exposto, temos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3181 \\ 0,5366 \end{bmatrix}$$

cuja solução via método numérico é

$$\alpha_1 = 0,4577, \quad \alpha_2 = -0,1493.$$

Portanto, a reta que melhor se ajusta à função $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ no intervalo $[1,3]$ é

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x = 0,4577 - 0,1493\, x\,.$$