NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES

RA: 2252740

FUNÇÃO INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

INJETORA

$f: A \to B$ É INJETORA QUANDO DADOS $x_1, x_2 \in A$ COM $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

OU SEJA: SE $f(x_1) = f(x_2)$, ENTÃO $x_1 = x_2$

$$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty[$$
$$x \to f(x) = x^2$$

$0 \leq x_1, x_2$ TAIS QUE $f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1^2 = x_2^2, \therefore |x_1| = |x_2| \therefore x_1 = x_2$$

É INJETORA

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to g(x) = x^2$$

$2 \neq -2$

$g(2) = 4 = g(-2)$ NÃO É INJETORA

Sobrejetora

$f: A \to B$ é sobrejetora quando $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$

Injetora

f é bijetora quando f é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x+3$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2)$	$y \in \mathbb{R}$; $x = \frac{y-3}{2}$
$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$	$f(x) = f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right) + 3$
$2x_1 = 2x_2$	$= y$
$x_1 = x_2$	
f é injetora	f é sobrejetora

f é bijetora

$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$

$x \to g(x) = 1/x$

g não é sobrejetora pois

$\exists\ x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$

não é bijetora

$h: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$

$x \to h(x) = 1/x$

* $x_1, x_2 \neq 0$ tais que $h(x_1) = h(x_2)$

$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \therefore x_1 = x_2$

h é injetora

* para $y \neq 0$, tome $x = \frac{1}{y}$

$h(x) = h(1/y) = \frac{1}{1/y} = y$

h é sobrejetora

h é bijetora

Função Inversa

Seja $f: A \to B$ uma função.

Se existir uma função $g: B \to A$ tal que $g \circ f(x) = x$ $\forall x \in A$ e $f \circ g(x) = y$ $\forall y \in B$, então dizemos que f é inversível e que g é a inversa de f.

$$f: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$$
$$x \to f(x) = x^2$$

$$g: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$$
$$x \to g(x) = \sqrt{x}$$

$$x \in [0, +\infty[\Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2)$$
$$= \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$y \in [0, +\infty[\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(y)) = f(\sqrt{y})$$
$$= (\sqrt{y})^2 = |y| = y$$

f inversível

$g(x)$ é sua inversa

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$
$$x \rightarrow f(x) = 1/x$$

$$g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$
$$x \rightarrow g(x) = 1/x$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\}; \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

f é inversível

inversa é ela mesma

TEOREMA: $f: A \rightarrow B$ é inversível se e somente se f for bijetora

$\Rightarrow$ Suponhamos que f é inversível

Sejam $x, y \in A$ tais que $f(x) = f(y)$

$$x = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = f^{-1} \circ f(y) = y$$

mostrando que f é injetora

$\Rightarrow$ Tome $y \in B$, temos que

$y = f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y))$, ou seja, $\exists\, x \in A$ tal que $x = f^{-1}(y)$, mostrando que f é sobrejetora

⇒ Suponha que f é bijetiva.

Como f é sobrejetora, para cada $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$

Da injetividade de f decorre que tal x é único, pois se x não fosse único, teríamos $x_1 \neq x$ tal que $f(x_1) = y = f(x)$, contrariando a condição de f ser injetora

Definindo então a função $g: B \to A$ por $g(y) = x$ onde x é o único elemento de A, tal que $f(x) = y$. Assim,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$$

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$$

Logo f é inversível.

Operações com Funções

Sejam f e g duas funções onde: $Dom(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$

* A soma de f com g é a função $f+g$ dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$

* A subtração de f com g é a função $f-g$ dada por:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

* O produto de f com g é a função $f \cdot g$ dada por:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

* O quociente de f com g é a função f/g dada por:

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \,/\, g(x) \neq 0\}$$

$$f(x) = \sqrt{7-x} \qquad g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$$

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 7\} =]-\infty, 7]$$

$$\text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq \frac{x-2}{1-x} \text{ e } 1-x \neq 0\}$$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \sqrt{7-x} + \sqrt{\frac{x-2}{1-x}}$$

$Dom(f+g) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 7,\ 0 \leq \frac{x-2}{1-x} \text{ e } 1-x \neq 0 \}$

$$f/g(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{\frac{x-2}{1-x}}} = \sqrt{\frac{7-x}{\frac{x-2}{1-x}}} = \sqrt{\frac{(7-x)(1-x)}{(x-2)}}$$

$Dom(f/g) = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{(7-x)(1-x)}{(x-2)} \text{ e } x-2 \neq 0 \}$