Cálculo Numérico

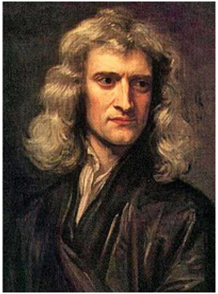
Raízes de Equações: Método de Newton-Raphson

Wellington José Corrêa
@correa.well

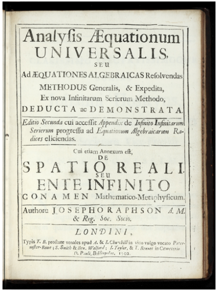
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

21 de Junho de 2021

Método de Newton-Raphson



(a) Newton



Analyſis Æquationum
UNIVERSALIS,
SEU
Ad ÆQUATIONES ALGEBRAICAS Reſolvendas
METHODUS Generalis, & Expedita,
Ex nova Infinitarum Serierum Methodo,
DEDUCTA ac DEMONSTRATA.
Editio Secunda cui acceſſit Appendix de Infinito Infinitarum Serierum progreſſu ad Equationum Algebraicarum Radices eliciendas.
Cui etiam Annexum eſt,
DE
SPATIO REALI
SEU
ENTE INFINITO
CONAMEN Mathematico-Metaphyſicum.
Authore JOSEPHO RAPHSON A. M. & Reg. Soc. Socio.
LONDINI,

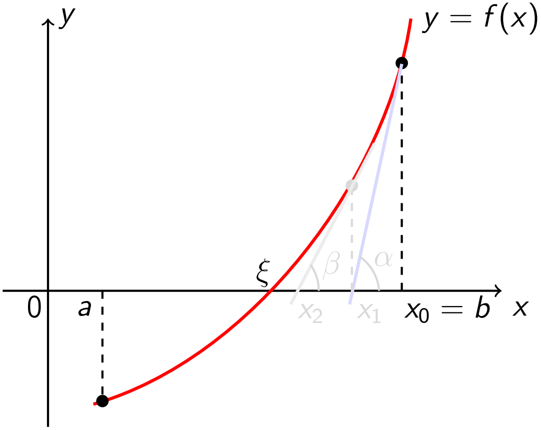
(b) Raphson

- Isaac Newton (1643-1727), inglês, é considerado o maior cientista de todos os tempos. Ele escreveu este método em 1671, mas só publicou em 1736.
- Joseph Raphson (1648-1715),inglês colega de Newton na *Royal Society*. No artigo acima, Raphson descreve de forma independente o mesmo método para encontrar zeros de funções.

Método de Newton-Raphson

Sejam ξ a única raiz de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ e x_k uma aproximação desta raiz, sendo $x_0 \in [a, b]$. além disso, as derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ devem existir, ser contínuas e com sinal constante neste intervalo. Geometricamente, o método de Newton é equivalente a aproximar um arco da curva por uma reta tangente traçada a partir de, um ponto de curva, o que faz com que ele seja conhecido também como o método das tangentes.

Interpretação Geométrica



Note que

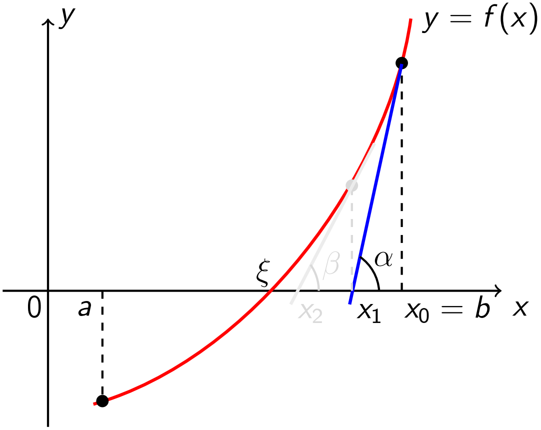
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} \beta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Interpretação Geométrica



Note que

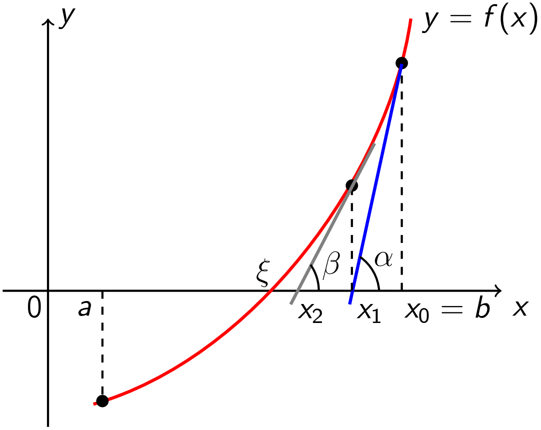
$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\Rightarrow \; x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f'(x_1) = \operatorname{tg}\beta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$\Rightarrow \; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Interpretação Geométrica



Note que

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$f'(x_1) = \operatorname{tg}\beta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Método de Newton

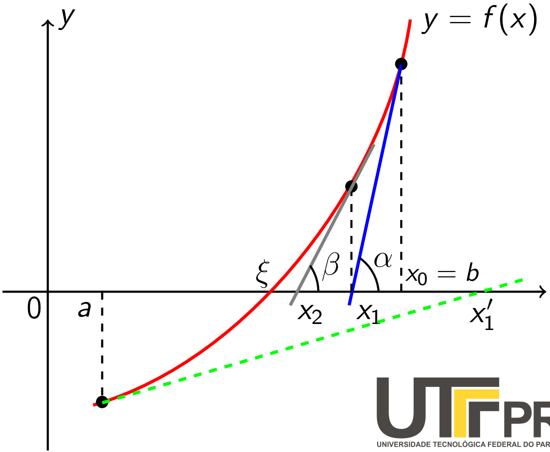
Generalizando as expressões acima, temos a fórmula de recorrência do método de Newton:

Fórmula de Recorrência

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Método de Newton-Raphson

Recordemos a figura anterior exibida ao lado: A sequência produzida por (1) convergirá para a raiz ξ se o valor inicial for $x_0 = b$. No entanto, para aquela figura, o processo pode não convergir se $x_0 = a$, pois $x_1' \notin [a, b]$. A questão é resolvida do seguinte modo:



Método de Newton

Teorema 1.1

Uma condição suficiente para a convergência do método de Newton é, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x), f''(x)$ forem não-nulas e preservem o sinal em (a, b) de modo que

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \tag{2}$$

Dito de outro modo, temos:

Se $f(a) \cdot f''(a) > 0$, então, $x_0 = a$; caso contrário, $x_0 = b$.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método de Newton

Teorema 1.1

Uma condição suficiente para a convergência do método de Newton é, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x), f''(x)$ *forem não-nulas e preservem o sinal em* (a, b) *de modo que*

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \tag{2}$$

Dito de outro modo, temos:

Se $f(a) \cdot f''(a) > 0$, então, $x_0 = a$; caso contrário, $x_0 = b$.

Método de Newton-Raphson

Exemplo 1.1

Use o método de Newton para obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos x - x = 0$ *com* $\varepsilon \leq 10^{-2}$.

Solução: De antemão, devemos escolher os valores de a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. De fato, tendo em mente que a calculadora deve estar em *rad*, veja que

$$f(0,5) = \cos(0,5) - 0,5 = 0,377582561 > 0$$

$$f(1) = \cos(1) - 1 = -0,459697694 < 0,$$

logo, $a = 0,5$ e $b = 1$.

Método de Newton-Raphson

Exemplo 1.1

Use o método de Newton para obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos x - x = 0$ *com* $\varepsilon \leq 10^{-2}$.

Solução: De antemão, devemos escolher os valores de a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. De fato, tendo em mente que a calculadora deve estar em *rad*, veja que

$$f(0,5) = \cos(0,5) - 0,5 = 0,377582561 > 0$$
$$f(1) = \cos(1) - 1 = -0,459697694 < 0,$$

logo, $a = 0,5$ e $b = 1$.

Método de Newton-Raphson

Como vimos na teoria, devemos encontrar o valor conveniente de x_0 para que o método convirja.

Com efeito, desde que $f''(x) = -\cos x$, veja que

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f''(a) &= f(0,5) \cdot f''(0,5) \\ &= -0,331359872 < 0, \end{aligned}$$

logo, pelo Teorema 1.1 resulta que

$$x_0 = b = 1\,.$$

Método de Newton-Raphson

Como vimos na teoria, devemos encontrar o valor conveniente de x_0 para que o método convirja.
Com efeito, desde que $f''(x) = -\cos x$, veja que

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f''(a) &= f(0,5) \cdot f''(0,5) \\ &= -0,331359872 < 0, \end{aligned}$$

logo, pelo Teorema 1.1 resulta que

$$x_0 = b = 1\,.$$

Método de Newton-Raphson

Como vimos na teoria, devemos encontrar o valor conveniente de x_0 para que o método convirja.
Com efeito, desde que $f''(x) = -\cos x$, veja que

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f''(a) &= f(0,5) \cdot f''(0,5) \\ &= -0,331359872 < 0, \end{aligned}$$

logo, pelo Teorema 1.1 resulta que

$$x_0 = b = 1\,.$$

Método de Newton-Raphson

Como vimos na teoria, devemos encontrar o valor conveniente de x_0 para que o método convirja.
Com efeito, desde que $f''(x) = -\cos x$, veja que

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f''(a) &= f(0,5) \cdot f''(0,5) \\ &= -0,331359872 < 0, \end{aligned}$$

logo, pelo Teorema 1.1 resulta que

$$x_0 = b = 1\,.$$

Método de Newton-Raphson

Do exposto, podemos usar a fórmula de recorrência dada em (1).
De fato, tendo em mente que $f'(x) = -\mathrm{sen}(x) - 1$, temos:
$k = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 1 - \left(\frac{\cos(1) - 1}{-\mathrm{sen}(1) - 1} \right) \\ &= 0,750363867840244\,. \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$|x_1 - x_0| = |0,750363867840244 - 1| = 0,249636132159756 > 10^{-2}\,.$$

Logo, devemos calcular o valor de x_1.

Método de Newton-Raphson

Do exposto, podemos usar a fórmula de recorrência dada em (1).
De fato, tendo em mente que $f'(x) = -\mathrm{sen}(x) - 1$, temos:
$k = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 1 - \left(\frac{\cos(1) - 1}{-\mathrm{sen}(1) - 1} \right) \\ &= 0,750363867840244\,. \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$|x_1 - x_0| = |0,750363867840244 - 1| = 0,249636132159756 > 10^{-2}\,.$$

Logo, devemos calcular o valor de x_1.

Método de Newton-Raphson

Do exposto, podemos usar a fórmula de recorrência dada em (1).
De fato, tendo em mente que $f'(x) = -\mathrm{sen}(x) - 1$, temos:
$k = 0$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
&= 1 - \left(\frac{\cos(1) - 1}{-\mathrm{sen}(1) - 1} \right) \\
&= 0,750363867840244\,.
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
|x_1 - x_0| = |0,750363867840244 - 1| = 0,249636132159756 > 10^{-2}\,.
$$

Logo, devemos calcular o valor de x_1.

Método de Newton-Raphson

$k = 1:$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &= 0,750363867840244 - \left(\frac{\cos(0,750363867840244) - 0,750363867840244}{-\mathrm{sen}(0,750363867840244) - 1} \right) \\ &= 0,739112890911362\,. \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$|x_2 - x_1| = |0,739112890911362 - 0,750363867840244| = 0,011250976928882 > 10^{-2}\,.$$

Método de Newton-Raphson

$k = 1:$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
&= 0,750363867840244 - \left(\frac{\cos(0,750363867840244) - 0,750363867840244}{-\mathrm{sen}(0,750363867840244) - 1}\right) \\
&= 0,739112890911362\,.
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
|x_2 - x_1| = |0,739112890911362 - 0,750363867840244| = 0,011250976928882 > 10^{-2}\,.
$$

Método de Newton-Raphson

$k = 2:$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$= 0,739112890911362 - \left(\frac{\cos(0,739112890911362) - 0,739112890911362}{-\mathrm{sen}(0,739112890911362) - 1}\right)$$
$$= 0,739085133385284\,.$$

Pelo critério da parada,

$|x_3 - x_2| = |0,739085133385284 - 0,739112890911362| = 2.77575260776430 \times 10^{-5} < 10^{-2}\,.$

Doravante,
a raiz ξ é tal que

$$\xi \approx x_3 = 0,739085133385284\,.$$

Método de Newton-Raphson

$k = 2:$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\
&= 0,739112890911362 - \left(\frac{\cos(0,739112890911362) - 0,739112890911362}{-\mathrm{sen}(0,739112890911362) - 1}\right) \\
&= 0,739085133385284\,.
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$|x_3 - x_2| = |0,739085133385284 - 0,739112890911362| = 2.77575260776430 \times 10^{-5} < 10^{-2}\,.$$

Doravante,
a raiz ξ é tal que

$$\xi \approx x_3 = 0,739085133385284\,.$$

Método de Newton-Raphson

$k = 2:$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\
&= 0,739112890911362 - \left(\frac{\cos(0,739112890911362) - 0,739112890911362}{-\mathrm{sen}(0,739112890911362) - 1} \right) \\
&= 0,739085133385284\,.
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$|x_3 - x_2| = |0,739085133385284 - 0,739112890911362| = 2.77575260776430 \times 10^{-5} < 10^{-2}\,.$$

Doravante,
a raiz ξ é tal que

$$\xi \approx x_3 = 0,739085133385284\,.$$

Convergência do Método de Newton

Seja $f(x)$ um função com derivadas primeira e segunda contínuas tal que $f(\xi) = 0$ e $f'(\xi) \neq 0$. Considere a função

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

Tendo em mente que $f(\xi) = 0$, veja que

(3)
$$g(\xi) = \xi - \frac{\cancelto{0}{f(\xi)}}{f'(\xi)} = \xi .$$

e desde que

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} ,$$

temos:

(4)
$$g'(\xi) = 1 - \frac{[f'(\xi)]^2 - \cancelto{0}{f(\xi) \cdot f''(\xi)}}{[f'(\xi)]^2} = 1 - \frac{\cancel{[f'(\xi)]^2}}{\cancel{[f'(\xi)]^2}} = 0 .$$

Convergência do Método de Newton

Seja $f(x)$ um função com derivadas primeira e segunda contínuas tal que $f(\xi) = 0$ e $f'(\xi) \neq 0$. Considere a função

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

Tendo em mente que $f(\xi) = 0$, veja que

$$g(\xi) = \xi - \frac{\cancelto{0}{f(\xi)}}{f'(\xi)} = \xi . \tag{3}$$

e desde que

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} ,$$

temos:

$$g'(\xi) = 1 - \frac{[f'(\xi)]^2 - \cancelto{0}{f(\xi) \cdot f''(\xi)}}{[f'(\xi)]^2} = 1 - \frac{\cancel{[f'(\xi)]^2}}{\cancel{[f'(\xi)]^2}} = 0 . \tag{4}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Convergência do Método de Newton

Seja $f(x)$ um função com derivadas primeira e segunda contínuas tal que $f(\xi) = 0$ e $f'(\xi) \neq 0$. Considere a função

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Tendo em mente que $f(\xi) = 0$, veja que

$$g(\xi) = \xi - \frac{\cancelto{0}{f(\xi)}}{f'(\xi)} = \xi. \tag{3}$$

e desde que

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

temos:

$$g'(\xi) = 1 - \frac{[f'(\xi)]^2 - \cancelto{0}{f(\xi) \cdot f''(\xi)}}{[f'(\xi)]^2} = 1 - \frac{\cancel{[f'(\xi)]^2}}{\cancel{[f'(\xi)]^2}} = 0. \tag{4}$$

Convergência do Método de Newton

Seja $f(x)$ um função com derivadas primeira e segunda contínuas tal que $f(\xi) = 0$ e $f'(\xi) \neq 0$. Considere a função

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Tendo em mente que $f(\xi) = 0$, veja que

(3)
$$g(\xi) = \xi - \frac{\cancelto{0}{f(\xi)}}{f'(\xi)} = \xi\,.$$

e desde que

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

temos:

(4)
$$g'(\xi) = 1 - \frac{[f'(\xi)]^2 - \cancelto{0}{f(\xi) \cdot f''(\xi)}}{[f'(\xi)]^2} = 1 - \frac{\cancel{[f'(\xi)]^2}}{\cancel{[f'(\xi)]^2}} = 0\,.$$

Convergência do Método de Newton

Seja $f(x)$ um função com derivadas primeira e segunda contínuas tal que $f(\xi) = 0$ e $f'(\xi) \neq 0$. Considere a função

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,.$$

Tendo em mente que $f(\xi) = 0$, veja que

(3)
$$g(\xi) = \xi - \frac{\cancelto{0}{f(\xi)}}{f'(\xi)} = \xi\,.$$

e desde que

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

temos:

(4)
$$g'(\xi) = 1 - \frac{[f'(\xi)]^2 - \cancelto{0}{f(\xi)\cdot f''(\xi)}}{[f'(\xi)]^2} = 1 - \frac{\cancel{[f'(\xi)]^2}}{\cancel{[f'(\xi)]^2}} = 0\,.$$

Convergência do Método de Newton

Expandindo em série de Taylor em torno de $x = \xi$, obtemos:

$$g(x) = g(\xi) + g'(\xi) \cdot (x - \xi) + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x - \xi)^2 + \frac{g'''(\xi)}{3!} \cdot (x - \xi)^3 + \ldots$$

Truncando a série em três termos e substituindo x por x_k, temos:

$$g(x_k) \approx g(\xi) + g'(\xi) \cdot (x_k - \xi) + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2 . \tag{5}$$

Substituindo (3) e (4) em (5), resulta que

$$g(x_k) \approx \xi + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2 . \tag{6}$$

Convergência do Método de Newton

Expandindo em série de Taylor em torno de $x = \xi$, obtemos:

$$g(x) = g(\xi) + g'(\xi) \cdot (x - \xi) + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x - \xi)^2 + \frac{g'''(\xi)}{3!} \cdot (x - \xi)^3 + \ldots$$

Truncando a série em três termos e substituindo x por x_k, temos:

$$g(x_k) \approx g(\xi) + g'(\xi) \cdot (x_k - \xi) + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2 \,. \tag{5}$$

Substituindo (3) e (4) em (5), resulta que

$$g(x_k) \approx \xi + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2 \,. \tag{6}$$

Convergência do Método de Newton

Expandindo em série de Taylor em torno de $x = \xi$, obtemos:

$$g(x) = g(\xi) + g'(\xi) \cdot (x - \xi) + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x - \xi)^2 + \frac{g'''(\xi)}{3!} \cdot (x - \xi)^3 + \ldots$$

Truncando a série em três termos e substituindo x por x_k, temos:

$$g(x_k) \approx g(\xi) + g'(\xi) \cdot (x_k - \xi) + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2 \,. \tag{5}$$

Substituindo (3) e (4) em (5), resulta que

$$g(x_k) \approx \xi + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2 \,. \tag{6}$$

Convergência do Método de Newton

Considerando a seguinte sequência recursiva (chamada de *iteração do ponto fixo*)

$$x_{k+1} = g(x_k)\,. \tag{7}$$

Combinando (6) e (7), vem que

$$x_{k+1} - \xi \approx \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2,$$

ou ainda,

$$|x_{k+1} - \xi| \approx C\,|x_k - \xi|^2,\; C = \frac{|g''(\xi)|}{2},$$

isto mostra que o método de Newton-Raphson tem taxa de convergência quadrática.

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Convergência do Método de Newton

Considerando a seguinte sequência recursiva (chamada de *iteração do ponto fixo*)

(7) $$x_{k+1} = g(x_k)\,.$$

Combinando (6) e (7), vem que

$$x_{k+1} - \xi \approx \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2,$$

ou ainda,

$$|x_{k+1} - \xi| \approx C\,|x_k - \xi|^2,\; C = \frac{|g''(\xi)|}{2},$$

isto mostra que o método de Newton-Raphson tem taxa de convergência quadrática.

Convergência do Método de Newton

Considerando a seguinte sequência recursiva (chamada de *iteração do ponto fixo*)

(7) $$x_{k+1} = g(x_k)\,.$$

Combinando (6) e (7), vem que

$$x_{k+1} - \xi \approx \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \xi)^2,$$

ou ainda,

$$|x_{k+1} - \xi| \approx C\,|x_k - \xi|^{2},\ C = \frac{|g''(\xi)|}{2},$$

isto mostra que o método de Newton-Raphson tem taxa de convergência quadrática.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 1.2

Determine pelo menos uma raiz positiva de cada equação $f(x) = 4x^3 + x + cos(x) - 10 = 0$ *com* $\varepsilon \leqslant 10^{-5}$ *pelo método de Newton.*