Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

2ª Prova de Cálculo Numérico
Cursos: Engenharia de Alimentos & Engenharia Química

DAMAT, 2021

Nome: ______________________________

Instruções:

(i) Em todas as páginas da avaliação a ser resolvida, tem que o nome do aluno no **início** e no **fim** de cada página;

(ii) A prova deve ser anexada no *Google Classroom* e a mesma deve ser escaneada em boa resolução e em **pdf**. Não serão aceitas imagens separadas do tipo jpg! (use um aplicativo do tipo *CamScanner* para celular);

(iii) A prova tem que ter **todos os passos apresentados na sala de aula e nas videoaulas**. Resoluções incompletas, apenas apresentando a resposta serão descontadas nota da questão;

(iv) Não esqueça de devolver a atividade no *Google Classroom*;

(v) O aluno precisará do seu R.A. para fazer sua prova. Os alunos devem fazer a seguinte correspondência entre os dígitos d_i's e os dígitos de seus R.A's. Por exemplo, um aluno com o R.A. dado por 002173581, deve fazer a seguinte correspondência:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	2	1	7	3	5	8	1

Assim, neste exemplo, $d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 7, \ldots, d_7 = 1$ e o aluno deve substituir estes valores nas questões da prova;

(vi) Se as instruções (i),(ii), (iv) e (v) não forem obedecidas, a prova será anulada.

Do exposto, preencha a tabela abaixo colocando o seu R.A. **(Esta tabela deve estar no início de sua prova juntamente com seu nome)**:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0							

Questões:

1 (1,8) *A tabela seguinte é usada para determinar a expectativa de vida de homens e mulheres brasileiros a partir da sua idade no ano-base de 2018*[1]*. Por exemplo, uma mulher que tinha 20 anos de idade em 2018, tinha esperança de viver mais* $61,d_2d_1$ *anos, isto é, sua expectativa de vida é de* $81,d_2d_1$ *anos. Para idades intermediárias, deve-se interpolar os valores*

Idade	Homem	Mulher
15	$59d_4d_3$	$66,d_56$
20	$54,d_5d_5$	$61,d_2d_1$
25	$50,d_1d_2$	$56,d_4d_6$
30	$45,d_51$	$51,d_66$
35	$41,d_45$	$46,90$
40	$36,1d_5$	$42,d_2d_2$

(a) Usando o método de Newton para um polinômio interpolador de grau 3, determine aproximadamente a sua expectativa de vida.

(b) Obtenha estimativa do erro para sua idade utilizada no item (a).

2 (1,8) *A distância requerida para parar um carro é dada em função da velocidade a que ele se desloca. Os seguintes dados experimentais foram recolhidos para quantificar essa relação:*

x	$15+0,d_1d_5$	$15+0,d_1d_5+d_3+1$	$15+0,d_1d_5+2(d_3+1)$	$15+0,d_1d_5+3(d_3+1)$	$15+0,d_1d_5+4(d_3+1)$
$f(x)$	$16+d_6$	$20+d_6$	$34+d_6$	$40+d_6$	$60+d_5$

Estime a distância necessária para parar um carro que se desloca a uma velocidade de $15+0,d_1d_5+3,2\,(d_3+1)$ *Km, utilizando uma spline cúbica natural.* **Justifique.**

3 (1,8) *Na tabela a seguir são dados o volume deslocado V (em mililitros) na imersão de um cilindro de alumínio em um recipiente com glicerina líquida e respectiva força de empuxo E (em gramas-força) recebida.*

$V(mL)$	$1d_3$	$2d_3$	$3d_3$	$4d_3$
$E\ (gf)$	$1d_6,d_4$	$2d_5,d_1$	$37,d_7$	$50,d_6$

Ajuste os pontos da tabela para um polinômio de grau 2. **Justifique.**

[1] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística IBGE. Tábua completa de mortalidade, 2018. Fonte: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/3097/tcmb_2018.pdf

4 (1,8) *Considere a seguinte tabela que representa a deflexão em cm de uma prancha de saltos, num salto de um atleta olímpico, em vários instantes de tempo de preparação:*

x	d_4	d_4+0,5	d_4+1	$d_4+1,5$	d_4+2	$d_4+2,5$
$f(x)$	a	d_7+3	d_7+5	d_7-2	0	b

Calcule os valores de a e b de forma a que a deflexão $f(t)$ corresponda a um polinômio de grau menor ou igual a 2 pela fórmula de Newton-Grégory.

5 (1,8) *Considere a função $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}$ tabelada como segue:*

x	d_4	d_4+1	d_4+2
$f(x)$	$\mathrm{e}^{d_4} + \frac{1}{d_4}$	$\mathrm{e}^{d_4+1} + \frac{1}{d_4+1}$	$\mathrm{e}^{d_4+2} + \frac{1}{d_4+2}$

Obtenha um limitante superior do (usando os pontos da tabela x_0, x_1 e x_2) para $x = d_4 + 0,8$.

Sucesso!!!

Formulário

Fórmula Interpolatória de Newton - Grégory

Diferenças Finitas:

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	$\Delta^0 f(x_0)$			
		$\Delta^1 f(x_0)$		
x_1	$\Delta^0 f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$	
		$\Delta^1 f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$
x_2	$\Delta^0 f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$	
		$\Delta^1 f(x_2)$		
x_3	$\Delta^0 f(x_3)$			

onde

$$\boxed{\Delta^r f(x_i) = \Delta^{r-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{r-1} f(x_i), r \geq 1\,.} \tag{1}$$

Polinômio interpolador caracterizado pelas diferenças finitas:

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = \Delta^0 f(x_0) &+ (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} \\ &+ (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} \\ &+ \ldots + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \cdot \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}\,. \end{aligned}} \tag{2}$$

Spline Cúbica Natural

Neste caso, consideremos $\mu_0 = \mu_n = 0$ e devemos resolver o seguinte sistema de $(n-1)$ equações lineares:

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - b_0 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_{n-2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

com

$$\boxed{b_i = 6\,\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right)\,.}$$

Os n polinômios de interpolação por spline para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ são:

$$\boxed{p_i(x) = y_i + \alpha_i\,(x - x_i) + \beta_i\,(x - x_i)^2 + \gamma_i\,(x - x_i)^3} \tag{4}$$

onde

$$\boxed{\alpha_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{\mu_{i+1}}{6}\,h_i - \frac{\mu_i}{3}\,h_i} \tag{5}$$

$$\boxed{\beta_i = \frac{\mu_i}{2}} \tag{6}$$

$$\boxed{\gamma_i = \frac{\mu_{i+1}-\mu_i}{6\,h_i}\,.} \tag{7}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Caso Discreto

Dada a função

$$\boxed{g(x) = \alpha_1\,g_1(x) + \alpha_2\,g_2(x) + \ldots + \alpha_n\,g_n(x),}$$

devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \cdots & \langle g_1, g_n\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \cdots & \langle g_2, g_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1\rangle & \langle g_n, g_2\rangle & \cdots & \langle g_n, g_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f\rangle \end{pmatrix} \tag{8}$$

onde o produto interno neste caso é dado por

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot y_k,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^m\ .} \tag{9}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Caso Contínuo

Dada a função

$$\boxed{g(x) = \alpha_1\,g_1(x) + \alpha_2\,g_2(x) + \ldots + \alpha_n\,g_n(x),}$$

devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \cdots & \langle g_1, g_n\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \cdots & \langle g_2, g_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1\rangle & \langle g_n, g_2\rangle & \cdots & \langle g_n, g_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f\rangle \end{pmatrix} \tag{10}$$

cujo produto interno é definido como

$$\boxed{\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,.} \tag{11}$$

Fórmula Interpolatória de Newton

Diferenças Divididas

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Polinômio interpolador baseado nas diferenças divididas:

$$\boxed{\begin{gathered} P(x) = f[x_0] + (x - x_0)\,f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\,f[x_0, x_1, x_2] \\ + \ldots + (x - x_0)\,(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_{n-1})\,f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{gathered}} \tag{12}$$

Estimativa do erro

$$\boxed{|E(x)| \le \frac{|(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdots(x - x_n)|\,M}{(n+1)!},} \tag{13}$$

onde

$$\boxed{M = \max\left\{|f^{(n+1)}(\xi)|;\ \xi \in [x_0, x_n]\right\}\ .}$$