Lógica Matemática – Aula 16
Introdução à Teoria dos Conjuntos

Prof. Juliano Henrique Foleiss, M. Sc.

1 Introdução

O conjunto é a estrutura discreta básica utilizada para construir as demais estruturas discretas utilizadas na matemática discreta. Os conjuntos são estruturas que servem para agrupar elementos. Comumente os elementos de um conjunto possuem propriedades similares. Por exemplo, todos os alunos que estão matriculados na universidade formam um conjunto. De forma semelhante, todos os alunos que estudam lógica matemática em qualquer universidade também formam um conjunto. Além disto, o conjunto dos alunos matriculados na sua escola que estudam lógica matemática formam um conjunto que pode ser obtido ao pegar os elementos em comum entre os dois primeiros conjuntos citados. A linguagem da teoria dos conjuntos é utilizada para representar conjuntos e a relação entre conjuntos de maneira uniforme. A definição a seguir é uma definição intuitiva do conceito de conjunto.

Definição 1. Um `conjunto` é uma coleção não-ordenada de objetos, denominados `elementos` ou `membros` do conjunto. Um conjunto `contém` seus elementos. Escrevemos $a \in A$ para denotar que a é um elemento do conjunto A. A notação $a \notin A$ denota que a não é elemento do conjunto A.

Descrição de Conjuntos

É comum denotar conjuntos com letras maiúsculas e elementos de conjuntos com letras minúsculas. Existem várias formas de descrever um conjunto, ou seja, descrever quem são seus elementos. A primeira forma é simplesmente listar todos os elementos que pertencem ao conjunto, denominada `enumeração`.

Exemplo 1- O conjunto V que contém todas as vogais pode ser descrito por $V = \{a, e, i, o, u\}$. O conjunto O que contém os ímpares positivos menores que 10 pode ser descrito por $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. ■

Exemplo 2- Embora os conjuntos são normalmente formados de elementos com propriedades em comum, nada impede que um conjunto seja formado de elementos aparentemente não-relacionados. Por exemplo, o conjunto $\{a, 2, \text{Fred}, \text{Campo Mourão}\}$ é um conjunto válido. ■

É possível utilizar o método da enumeração sem listar todos os elementos. Alguns membros do conjunto são listados, e então `três-pontos` $(\dots)$ são utilizados quando o padrão dos elementos é obvio.

Exemplo 3- O conjunto de inteiros positivos menores que 100 pode ser descrito por $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$. ■

Outra notação utilizada para descrever conjuntos é utilizar a notação de `construção de conjunto`. Nesta notação os elementos são incluídos no conjunto pela declaração de propriedades necessárias para serem membros do conjunto. Por exemplo, o conjunto O de todos os ímpares positivos menores que 10 pode ser descrito como

$$O = \{x|x \text{ é ímpar negativo menor que } 10\}$$

Outra forma é especificar o universo como o conjunto de inteiros positivos

$$O = \{x, k \in \mathbb{Z}^+|x = 2k + 1 \wedge x < 10\}.$$

Normalmente esta notação é utilizada pare descrever conjutos quando é impossível listar todos os elementos. O Exemplo a seguir mostra isso.

Exemplo 4- O conjunto Q^+, de todos os números racionais positivos pode ser escrito como

$$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{R}|x = \tfrac{p}{q} \wedge p, q \in \mathbb{Z}^+\} \ ■$$

Conjuntos também podem conter outros conjuntos como elementos.

Exemplo 5- O conjunto $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ é um conjunto que contém quatro elementos, cada um deles um conjunto. Os quatro elementos deste conjunto são $\mathbb{N}$, o conjunto dos naturais; $\mathbb{Z}$, o conjunto dos inteiros; $\mathbb{Q}$, o conjunto dos racionais e $\mathbb{R}$, o conjunto dos reais. ■

Observação 1. O conceito de tipo de dados em ciência da computação é um conceito derivado do conceito de conjuntos. Em específico, um tipo de dados é o nome de um conjunto, juntamente com um conjunto de operações que podem ser realizadas em elementos deste conjunto. Por exemplo, `boolean` é o nome do conjunto $\{0, 1\}$, juntamente com operadores que operam um ou mais elementos deste conjunto, tal como AND, OR e NOT.

Uma relação bastante utilizada entre conjuntos é a relação de igualdade. A definição a seguir apresenta a igualdade de conjuntos.

Definição 2. Dois conjuntos são considerados `iguais` se e somente se eles possuem exatamente os mesmos elementos. Assim, se A e B são conjuntos, então A e B são iguais se e somente se $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Podemos escrever $A = B$ para indicar que A e B são iguais a partir da definição acima.

Exemplo 6- Os conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{3, 5, 1\}$ são iguais pois possuem os mesmos elementos. Note que a ordem que os elementos são listados não importa. Note também que não importa se um mesmo elemento é listado mais que uma vez, portanto $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ é o mesmo que o conjunto $\{1, 3, 5\}$ pois possuem os mesmos elementos. ■

O conjunto vazio

O conjunto vazio é um conjunto especial que não possui elementos e é denotado por $\emptyset$. O conjunto vazio também pode ser denotado por $\{\}$. Um erro comum é confundir o conjunto vazio $\emptyset$ com o conjunto unitário (que possui apenas um elemento) $\{\emptyset\}$. O único elemento do conjunto $\{\emptyset\}$ é o prório conjunto vazio, enquanto o conjunto vazio não possui elementos.

2 Subconjuntos

É comum encontrar situações onde os elementos de um conjunto também são elementos de outros conjuntos. Nesta seção são apresentadas terminologias e notações utilizadas para expressar relacionamentos entre conjuntos.

Definição 3. O conjunto A é um subconjunto de B se e somente se cada elemento de A também é um elemento de B. Usamos a notação $A \subseteq B$ para indicar que A é um conjunto de B.

Nota-se que $A \subseteq B$ é verdadeira se e somente se

$$\forall x(x \in A \to x \in B)$$

Desta forma, para mostrar que A não é subconjunto de B basta encontrar um elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$. Tal x é contra-exemplo para a afirmação que $x \in A$ implica $x \in B$. Da mesma forma, para mostrar que A é subconjunto de B basta mostrar que, se x pertence a A então x também pertence a B, para todo x. A Figura **??** mostra uma representação gráfica de $A \subseteq B$, utilizando um tipo de diagrama denominado **Diagrama de Venn**.

Conjuntos podem ser representados graficamente por meio de um diagrama denominado Diagrama de Venn, inventado pelo matemático inglês John Venn, em 1881. Nestes diagramas, cada conjunto é representado por um círculo ou outra figura geométrica. Elementos podem ser representados no conjuntos com o uso de pontos. Diagramas de Venn são utilizados principalmente para mostrar relacionamentos entre conjuntos.

Exemplo 7- O conjunto de todos os inteiros ímpares menores que 10 é um subconjunto de todos os inteiros positivos menores que 10; o conjunto de números racionais é um subconjunto dos números reais; o conjunto de todos os acadêmicos de computação da universidade é um subconjunto de todos os acadêmicos da universidade; e o conjunto de todas as pessoas no Brasil é um subconjunto de todas as pessoas no Brasil, ou seja, e um subconjunto de si mesmo. Cada um destes fatos seguem da definição acima: se um elemento pertence a um conjunto para cada par de conjuntos também pertence ao segundo conjunto do par. ■

Exemplo 8- O conjunto dos inteiros com quadrados maiores que 100 não é um subconjunto do conjunto de inteiros não-negativos pois -1 está no primeiro conjunto, de fato $(-1)^2 < 100$, mas não está no segundo conjunto pois $-1 < 0$. O conjunto de alunos que estudaram lógica matemática não é um subconjunto de todos os alunos de computação da

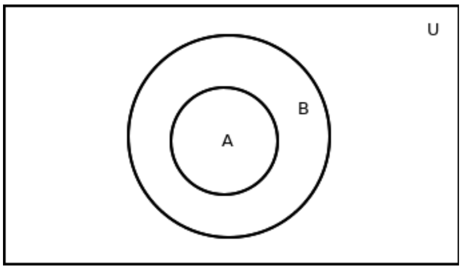

Figura 1: Diagrama de Venn indicando que $A \subseteq B$

universidade desde que haja apenas um aluno que estudou lógica matemática e que não é aluno da computação. ■

Teorema 1. Para todo conjunto S, $(i)\emptyset \subseteq S$ e $(ii) S \subseteq S$.

Prova:rovemos (i) e deixamos (ii) como exercício. Seja S um conjunto qualquer. Para mostrar que $\emptyset \subseteq S$, mostremos que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$ é verdadeiro. Como o conjunto vazio não contém elemento, segue que $x \in \emptyset$ é sempre falso. Segue então que, a condicional $x \in \emptyset \to x \in S$ é sempre verdadeira, uma vez que sua hipótese é sempre falsa e uma condicional com a hipótese falsa é sempre verdadeira. Desta forma, $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$ é verdadeiro. Consequentemente, (i) é verdadeira. ■

Quando queremos enfatizar que um conjunto A é um subconjunto de B, mas $A \neq B$, escrevemos $A \subset B$ para indicar que A é um **subconjunto próprio** de B. Para que $A \subset B$ seja verdadeiro, $A \subseteq B$ deve ser verdadeiro e deve existir um elemento x de B que não é elemento de A, Assim, A é um subconjunto próprio de B se, e somente se

$$\forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

é verdadeira. Uma forma útil de mostrar que dois conjuntos possuem os mesmo elementos é mostrar que cada conjunto é um subconjunto do outro. Em outras palavras, podemos mostrar que, se A e B são conjuntos tal que $A \subseteq B$ and $B \subset A$, então $A = B$. Portanto, $A = B$ se e somente se $\forall x(x \in A \to x \in B)$ e $\forall x(x \in B \to x \in A)$, ou, equivalentemente, se e somente se $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, que é a própria definição de igualdade entre A e B. Resumindo,

Para mostrar que dois conjuntos, A e B são iguais, basta mostrar que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

3 O tamanho de um Conjunto

Conjuntos são utilizados com frequência em problemas de contagem, portanto é importante definir o conceito de tamanho de um conjunto.

Definição 4. Seja S um conjunto. Se existem exatamente n elementos distintos em S tal que n é um inteiro não-negativo, dizemos que S é um **conjunto finito** e n é a **cardinalidade** de S. A cardinalidade de S é denotada por $|S|$ ou $\#S$.

Exemplo 9- Seja A o conjunto dos inteiros ímpares positivos menores que 10. Assim $|A| = 5$. ■

Exemplo 10- Seja S o conjunto de letras do alfabeto. Assim $|S| = 26$. ■

Exemplo 11- Como $\emptyset$ não possui elementos, segue que $|\emptyset| = 0$. ■

Também existem conjuntos que contém infinitos elementos.

Definição 5. Um conjunto é dito **inifinito** se não é um conjunto finito.

Exemplo 12- O conjunto dos inteiros positivos é infinito. ■

4 Conjunto Potência

Muitos problemas requerem a análise de todas as combinações de elementos de um conjunto para verificar se satisfazem alguma propriedade útil. Para considerar todas as combinações de elementos de um conjunto S, podemos definir um novo conjunto que contenha todos os subconjuntos de S.

Definição 6. Dado um conjunto S, o **conjunto potência** de S é o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto S. O conjunto potência de S é denotado por $\mathcal{P}(S)$.

Exemplo 13- O conjunto potência de $\{0, 1, 20\}$ é o conjunto de todos os subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$. Assim,

$\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

Perceba que o conjunto vazio e o próprio conjunto são membros deste conjunto de subconjuntos.

Exemplo 14- Qual é o conjunto potência do conjunto vazio? E o conjunto potência do conjunto $\{\emptyset\}$?

`Solução:` O conjunto vazio possui apenas um subconjunto, ele mesmo. Assim $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Por outro lado, o conjunto $\{\emptyset\}$ possui exatamente dois subconjuntos: ele mesmo e o conjunto vazio. Portanto, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ■

De forma geral, se um conjunto possui n elementos, seu conjunto potência possui 2^n elementos.

5 Produto Cartesiano

A definição de conjunto não prevê ordem entre os elementos. No entanto, em algumas situações a noção de ordem é importante. Para representar esta noção utilizamos tuplas ordenadas.

Definição 7. Uma **tupla ordenada de ordem n** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma coleção ordenada que possui a_1 como primeiro elemento, a_2 como segundo elemento, ..., e a_n como n-éismo elemento.

Além disto, dizemos que duas tuplas ordenadas de ordem n são iguais se, e somente se, os elementos em posições correspondentes em ambas tuplas são iguais. Em outras palavras, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se e somente se $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Em particular, e de interesse especial, tuplas ordenadas de ordem 2 são denominadas **pares ordenados**. Dessa forma, os pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Outra noção de grande importância no estudo de conjuntos e suas aplicações é a noção de produto Cartesiano.

Definição 8. Sejam A e B conjuntos. O **produto Cartesiano** de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), tal que $a \in A$ e $b \in B$. Assim,

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$$

Exemplo 15- Seja A o conjunto de todos os alunos da universidade e B o conjunto de todos os cursos ofertados na universidade. Qual é o produto Cartesiano de $A \times B$ e como ele significa?

`Solução:` O produto Cartesiano $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados na forma (a, b) tal que a é um aluno e b é um curso ofertado pela universidade. Este produto cartesiano pode representar todas as matrículas possíveis dos alunos nos cursos ofertados pela universidade. $\blacksquare$

Exemplo 16-Qual o produto Cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

`Solução:` O produto Cartesiano $A \times B$ é

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ $\blacksquare$

Exemplo 17- Utilizando os conjuntos do exemplo anterior, mostre que $A \times B \neq B \times A$

`Solução:` O produto Cartesiano $B \times A$ é

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Que não é igual a $A \times B$, obtido no exemplo anterior. (veja a definição de igualdade no início desta seção.)

Definição 9. O produto Cartesiano dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é o conjunto das tuplas ordenadas de ordem n $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tal que $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Em outas palavras,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Note que a operação do produto Cartesiano entre conjuntos não é associativa, ou seja, $(A \times B) \times C \neq A \times B \times C$.

A notação A^2 é utilizada para denotar $A \times A$, o produto Cartesiano de A com ele mesmo. De forma semelhante, $A^3 = A \times A \times A$, $A^4 = A \times A \times A \times A$, e assim por diante. De forma geral,

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in A \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Exemplo 18- Qual o produto cartesiano $A \times B \times C$, tal que $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, e $C = \{0, 1, 2\}$?

`Solução:` O produto Cartesiano $A \times B \times C$ consiste em todas as triplas ordenadas (a, b, c) tal que $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$. Assim,

$$\begin{aligned} A \times B \times C =& \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), \\ & (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\} \end{aligned}$$

Outra noção importante utilizada em matemática é a noção de relação.

Definição 10. Um subconjunto R de um produto Cartesiano $A \times B$ é denominado **relação** entre o conjunto A e o conjunto B. Os elementos de R são pares ordenados, tal que o primeiro elemento pertence a A e o segundo a B.

Exemplo 19- Quais pares na relação "menor ou igual", na forma (a, b) se $a \leq b$ no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$?

`Solução:` O par ordenado (a, b) pertence a R se, e somente se, ambos a e b pertencem a $\{0, 1, 2, 3\}$ e $a \leq b$. Consequentemente, $R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$. Note que $R \subseteq \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$. $\blacksquare$

6 Notação de Conjuntos e Quantificadores

Podemos restringir o domínio de uma afirmação quantificada utilizando uma notação de conjunto.Por exemplo $\forall x \in S(P(x))$ indica a quantificação universal de $P(x)$ sobre todos os elementos do conjunto S. Em outras palavras, $\forall x \in S(P(x))$ é uma notação equivalente a $\forall x(x \in S \rightarrow P(x))$. De forma semelhante, $\exists x \in S(P(x))$ indica a quantificação existencial de $P(x)$ sobre todos os elementos de S. Assim, $\exists x \in S(P(x))$ é uma notação equivalente a $\exists x(x \in S \wedge P(x))$.

Exemplo 20- Qual o significado de $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0)$ e $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2 = 1)$?

`Solução:` A afirmação $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0)$ indica que para todo número x real, ou seja todo elemento x do conjunto $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Esta afirmação pode ser escrita como "O quadrado de todo número real é não-negativo", que é uma afirmação verdadeira.
A afirmação $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2 = 1)$ indica que existe um x inteiro, ou seja um elemento x do conjunto $\mathbb{Z}$ tal que $x^2 = 1$. Esta afirmação pode ser expressada como "Existe um inteiro cujo quadrado é 1", que também é verdadeira, pois tomando $x = 1$, $x^2 = 1$, assim como $x = -1$. ■

7 Conjunto-verdade e Quantificadores

Dado um predicado P e um domínio D, o **conjunto-verdade** de P é o conjunto de elementos x em D para os quais $P(x)$ é verdadeiro. O conjunto-verdade de $P(x)$ é denotado por $\{x \in D \mid P(x)\}$.

Exemplo 21- Qual são os conjuntos-verdade dos predicados $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ tal que $D = \mathbb{Z}$ e $P(x)$ é "$|x| = 1$", $Q(x)$ é "$x^2 = 2$" e $R(x)$ é "$|x| = x$"?

`Solução:` O conjunto-verdade de P, $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 1\}$, é o conjunto dos inteiros para os quais $|x| = 1$. Como $|x| = 1$ quando $x = 1$ ou $x = -1$, e para nenhum outro inteiro, o conjunto verdade de P é o conjunto $\{-1, 1\}$.

O conjunto-verdade de Q, $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 2\}$, é o conjunto dos inteiros para os quais $x^2 = 2$. Desta forma, o conjunto-verdade de Q é $\emptyset$ uma vez que não existe um inteiro x tal que $x^2 = 2$.

O conjunto-verdade de R, $\{xinF \mid |x| = x\}$, é o conjunto dos inteiros para os quais $|x| = x$. Como $|x| = x$ se e somente se $x \geq 0$, segue que o conjunto-verdade de R é $\mathbb{N}$, o conjunto dos inteiros não-negativos. ■

De forma geral, $\forall x P(x)$ é verdadeira no domínio U se e somente se o conjunto-verdade de P é o próprio domínio U. De forma semelhante, $\exists x P(x)$ é verdadeira no domínio U se e somente se o conjunto-verdade de P é não-vazio.

8 Bibliografia

`Gersting, Judith`. Fundamentos Matemáticos para Ciência da Computação – Um Tratamento Moderno da Matemática Discreta. Ed. LTC. Quinta edição. Rio de Janeiro, 2012.

`Rosen, Kenneth`. Discrete Mathematics and its Applications. Ed. McGraw Hill. Sétima Edição. Nova Iorque, 2012.