Cálculo Numérico

Sistemas Lineares: Método de Cholesky

Wellington José Corrêa
@correa.well

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

9 de julho de 2021

André Louis Cholesky (1875-1918)

- André-Louis Cholesky nasceu em Montguyon na região Marítima Charentes da França ao norte de Bordeaux.

André Louis Cholesky (1875-1918)

- André-Louis Cholesky nasceu em Montguyon na região Marítima Charentes da França ao norte de Bordeaux.
- Foi oficial do exército francês. O método de Cholesky foi muito usado para solucionar problemas de estratégias militares.

André Louis Cholesky (1875-1918)

- André-Louis Cholesky nasceu em Montguyon na região Marítima Charentes da França ao norte de Bordeaux.
- Foi oficial do exército francês. O método de Cholesky foi muito usado para solucionar problemas de estratégias militares.
- Cholesky morreu de ferimentos recebidos no campo de batalha em 31 de Agosto 1918, 5:00 da manhã no Norte da França.

André Louis Cholesky (1875-1918)

- André-Louis Cholesky nasceu em Montguyon na região Marítima Charentes da França ao norte de Bordeaux.
- Foi oficial do exército francês. O método de Cholesky foi muito usado para solucionar problemas de estratégias militares.
- Cholesky morreu de ferimentos recebidos no campo de batalha em 31 de Agosto 1918, 5:00 da manhã no Norte da França.
- O método recebeu pouca atenção após a sua publicação em 1924, mas Jack Todd incluiu em seus cursos de análise no Kings College, em Londres, durante a Segunda Guerra Mundial.

André Louis Cholesky (1875-1918)

- André-Louis Cholesky nasceu em Montguyon na região Marítima Charentes da França ao norte de Bordeaux.
- Foi oficial do exército francês. O método de Cholesky foi muito usado para solucionar problemas de estratégias militares.
- Cholesky morreu de ferimentos recebidos no campo de batalha em 31 de Agosto 1918, 5:00 da manhã no Norte da França.
- O método recebeu pouca atenção após a sua publicação em 1924, mas Jack Todd incluiu em seus cursos de análise no Kings College, em Londres, durante a Segunda Guerra Mundial.
- Em 1948, o método foi analisada num artigo de Fox , Huskey e Wilkinson , enquanto no mesmo ano Turing publicou um artigo sobre a estabilidade do processo.

André Louis Cholesky (1875-1918)

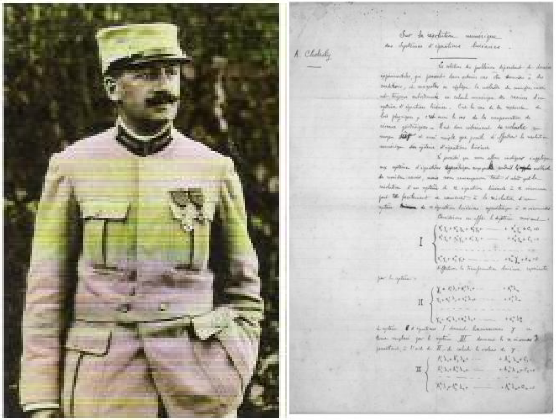

Figura: Cholesky e a primeira página de seu Manuscrito

Introdução

No caso em que a matriz do sistema linear for simétrica, podemos simplificar os cálculos da decomposição LU significativamente, levando em conta tal simetria. Tal estratégia, é denominada método de Cholesky, que é amparada na seguinte corolário:

Introdução

Corolário 1.1

Se A é simétrica ($A = A^t$) positiva definida ($\det(A_k) > 0$, para todo k), então A pode ser decomposta unicamente no produto $G \cdot G^t$, onde G é uma matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.

Esquema Prático

Como na decomposição LU, tínhamos $L \cdot U = A$, neste caso, temos $G \cdot G^t = A$, isto é,

Esquema Prático

Como na decomposição LU, tínhamos $L \cdot U = A$, neste caso, temos $G \cdot G^t = A$, isto é,

(1)

$$\begin{pmatrix} g_{11} & & & & \\ g_{21} & g_{22} & & 0 & \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{n2} \\ & & g_{33} & \cdots & g_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Método de Cholesky

Observação 2.1

Uma maneira conveniente de determinar os elementos da matriz G é calcular na seguinte ordem:

$$g_{11}, g_{21}, g_{31}, \dots, g_{n1};\ g_{22}, g_{32}, \dots, g_{n2}; \dots, g_{nn}.$$

Método de Cholesky

Observação 2.1

(i) *Uma maneira conveniente de determinar os elementos da matriz G é calcular na seguinte ordem:*

$$g_{11}, g_{21}, g_{31}, \dots, g_{n1};\ g_{22}, g_{32}, \dots, g_{n2}; \dots, g_{nn}.$$

(ii) *O método de Cholesky requer menos cálculos que a decomposição LU.*

Método de Cholesky

Observação 2.1

(i) *Uma maneira conveniente de determinar os elementos da matriz G é calcular na seguinte ordem:*

$$g_{11}, g_{21}, g_{31}, \ldots, g_{n1};\; g_{22}, g_{32}, \ldots, g_{n2}; \ldots, g_{nn}\,.$$

(ii) *O método de Cholesky requer menos cálculos que a decomposição LU. Desde que A é positiva definida, teremos somente raízes quadradas de números positivos.*

Método de Cholesky

Observação 2.1

1. *Uma maneira conveniente de determinar os elementos da matriz G é calcular na seguinte ordem:*
$$g_{11}, g_{21}, g_{31}, \ldots, g_{n1};\ g_{22}, g_{32}, \ldots, g_{n2}; \ldots, g_{nn}.$$
2. *O método de Cholesky requer menos cálculos que a decomposição LU. Desde que A é positiva definida, teremos somente raízes quadradas de números positivos.*
3. *Na decomposição LU, sabemos que $\det(A) = u_{11}\, u_{22}\, \ldots\, u_{nn}$. Como na decomposição de Cholesky, $A = G\, G^t$, resulta que*
$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(G) \cdot \det(G^t) \\ &= [\det(G)]^2 \\ &= (g_{11}\, g_{22}\, \ldots\, g_{nn})^2 . \end{aligned}$$

Método de Cholesky

Observação 2.2

(iv) *Para resolver o sistema $AX = B$, onde A satisfaz as condições da método de Cholesky. Então, a solução X fica determinada pelo seguinte par de sistemas triangulares:*

$$\begin{cases} G \cdot Y & = B \\ G^t \cdot X & = Y \end{cases}$$

O método de Cholesky

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

A é simétrica
e $\det(A_k) > 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$?

O método de Cholesky

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

A é simétrica
e $\det(A_k) > 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$?

$\downarrow$ não

O método não é aplicável!

O método de Cholesky

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} A \text{ é simétrica} \\ \text{e } \det(A_k) > 0 \\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, n? \end{array} \arrow[r, "\text{Sim}"] \arrow[d, "\text{não}"] & \begin{array}{c} \text{O método de Cholesky} \\ \text{é válido!} \end{array} \\
\text{O método não é aplicável!} &
\end{tikzcd}
$$

O método de Cholesky

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} A \text{ é simétrica} \\ \text{e } \det(A_k) > 0 \\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, n? \end{array} \arrow[r, "\text{Sim}"] \arrow[d, "\text{não}"] & \begin{array}{c} \text{O método de Cholesky} \\ \text{é válido!} \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} \text{Obtenha} \\ \text{a matriz} \\ \text{triangular} \\ G \end{array} \\
\text{O método não é aplicável!} & &
\end{tikzcd}
$$

O método de Cholesky

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

A é simétrica
e $\det(A_k) > 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$?

$\xrightarrow{\text{Sim}}$ O método de Cholesky é válido! $\longrightarrow$ Obtenha a matriz triangular G $\longrightarrow$ Resolva o sistema triangular inferior $G\,Y = B$

$\big\downarrow$ não

O método não é aplicável!

O método de Cholesky

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\begin{array}{c} A \text{ é simétrica} \\ \text{e } \det(A_k) > 0 \\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, n? \end{array} \arrow[r, "\text{Sim}"] \arrow[d, "\text{não}"] & \begin{array}{c} \text{O método de Cholesky} \\ \text{é válido!} \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} \text{Obtenha} \\ \text{a matriz} \\ \text{triangular} \\ G \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} \text{Resolva} \\ \text{o sistema} \\ \text{triangular} \\ \text{inferior} \\ G\,Y = B \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} \text{Resolva} \\ \text{o sistema} \\ \text{triangular} \\ \text{superior} \\ G^t\,X = Y \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} \text{Obtendo} \\ \text{a solução} \\ \text{almejada} \\ X \\ \text{do sistema} \\ A \cdot X = B \end{array} \\
\text{O método não é aplicável!} & & & & &
\end{tikzcd}$$

O método de Cholesky

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

A é simétrica
e $\det(A_k) > 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$?

$\xrightarrow{\text{Sim}}$

O método de Cholesky
é válido!

$\longrightarrow$

Obtenha
a matriz
triangular
G

$\longrightarrow$

Resolva
o sistema
triangular
inferior
$G\,Y = B$

$\longrightarrow$

Resolva
o sistema
triangular
superior
$G^t\,X = Y$

$\longrightarrow$

Obtendo
a solução
almejada
X
do sistema
$A \cdot X = B$

$\big\downarrow$ não

O método não é aplicável!

O método de Cholesky

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

A é simétrica e $\det(A_k) > 0$ $\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$? $\xrightarrow{\text{Sim}}$ O método de Cholesky é válido! $\longrightarrow$ Obtenha a matriz triangular G $\longrightarrow$ Resolva o sistema triangular inferior $G\,Y = B$ $\longrightarrow$ Resolva o sistema triangular superior $G^t\,X = Y$ $\longrightarrow$ Obtendo a solução almejada X do sistema $A \cdot X = B$

$\downarrow$ não

O método não é aplicável!

Esquema Prático

Elementos Diagonais

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= g_{11}^2 \\
a_{22} &= g_{21}^2 + g_{22}^2,
\end{aligned}
$$

então,

Esquema Prático

Elementos Diagonais

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= g_{11}^2 \\
a_{22} &= g_{21}^2 + g_{22}^2,
\end{aligned}
$$

então,

$$
(2) \qquad \begin{cases} g_{11} & = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} & = \left(a_{ii} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ i = 2, 3, \cdots, n \,. \end{cases}
$$

Esquema Prático

Elementos não diagonais de G

1. Primeira coluna:

(3)
$$g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}},\ i = 2, 3, \cdots, n\,.$$

Esquema Prático

Elementos não diagonais de G

1. Primeira coluna:

(3)
$$g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \; i = 2, 3, \cdots, n\,.$$

2. Segunda Coluna:

(4)
$$g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}\, g_{21}}{g_{22}}, \; i = 3, 4, \cdots, n\,.$$

Esquema Prático

Elementos não diagonais de G

1. Primeira coluna:

(3) $$g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \; i = 2, 3, \cdots, n\,.$$

2. Segunda Coluna:

(4) $$g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}\, g_{21}}{g_{22}}, \; i = 3, 4, \cdots, n\,.$$

3. Demais colunas:

(5) $$g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}}{g_{jj}}, \; 2 \leq j < i\,.$$

Exemplo 3.1

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) *Verifique-se A satisfaz as condições do método de Cholesky;*
(b) *Decomponha A em $G \cdot G^t$;*
(c) *Calcule $\det(A)$;*
(d) *Resolva o sistema $A \cdot X = B$, onde $B = (0\ 6\ 5)^t$, empregando o método de Cholesky.*

Solução: (a) De antemão, veja que A é simétrica, pois $A = A^t$.

Solução: (a) De antemão, veja que A é simétrica, pois $A = A^t$.
Ela também é positiva definida, uma vez que

Solução: (a) De antemão, veja que A é simétrica, pois $A = A^t$. Ela também é positiva definida, uma vez que

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= 4 > 0\,; \\ \det(A_2) &= 36 > 0\,; \\ \det(A_3) = \det(A) &= 36 > 0\,. \end{aligned}$$

Solução: (a) De antemão, veja que A é simétrica, pois $A = A^t$.
Ela também é positiva definida, uma vez que

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= 4 > 0\,; \\ \det(A_2) &= 36 > 0\,; \\ \det(A_3) = \det(A) &= 36 > 0\,. \end{aligned}$$

Assim, pelo Corolário 1.1, o método de Cholesky é assegurado, ou seja, a matriz A é decomponível no produto $G \cdot G^t$.

(b)

Pelo item anterior,

$$
\begin{array}{ccccc}
G & \cdot & G^t & = & A \\
\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}.
\end{array} \tag{6}
$$

$1^{\underline{a}}$ coluna de G

Uma vez que o primeiro elemento da coluna de G está na diagonal, usemos a fórmula (2):

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2;$$

$1^{\underline{a}}$ coluna de G

Uma vez que o primeiro elemento da coluna de G está na diagonal, usemos a fórmula (2):

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2;$$

Como os demais elementos da coluna não estão na diagonal, devemos usar a fórmula (3):

$$g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, \; i = 2, 3\,.$$

$1^{\underline{a}}$ coluna de G

Uma vez que o primeiro elemento da coluna de G está na diagonal, usemos a fórmula (2):

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2;$$

Como os demais elementos da coluna não estão na diagonal, devemos usar a fórmula (3):

$$g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}},\ i = 2, 3\,.$$

Assim,

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} = \frac{2}{2} = 1;$$
$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} = \frac{-4}{2} = -2;$$

2ª coluna de G

Veja que o primeiro elemento a ser avaliado (lembre-se que G é triangular inferior) é o elemento da diagonal g_{22}, no qual usaremos a fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$2^{\underline{a}}$ coluna de G

Veja que o primeiro elemento a ser avaliado (lembre-se que G é triangular inferior) é o elemento da diagonal g_{22}, no qual usaremos a fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g_{22} = \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{\overbrace{2-1}^{=1}} g_{2k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (a_{22} - g_{21})^{\frac{1}{2}}$$

2ª coluna de G

Veja que o primeiro elemento a ser avaliado (lembre-se que G é triangular inferior) é o elemento da diagonal g_{22}, no qual usaremos a fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g_{22} = \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{\overbrace{2-1}^{=1}} g_{2k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(a_{22} - g_{21}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(10 - 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3\,.$$

2ª coluna de G

Veja que o primeiro elemento a ser avaliado (lembre-se que G é triangular inferior) é o elemento da diagonal g_{22}, no qual usaremos a fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g_{22} = \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{\overbrace{2-1}^{=1}} g_{2k}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a_{22} - g_{21}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(10 - 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3\,.$$

Para os demais elementos da segunda coluna, usaremos a fórmula (4):

$$g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}\, g_{21}}{g_{22}},\ i = 3\ .$$

2ª coluna de G

Veja que o primeiro elemento a ser avaliado (lembre-se que G é triangular inferior) é o elemento da diagonal g_{22}, no qual usaremos a fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g_{22} = \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{\overbrace{2-1}^{=1}} g_{2k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(a_{22} - g_{21}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(10 - 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3\,.$$

Para os demais elementos da segunda coluna, usaremos a fórmula (4):

$$g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}\, g_{21}}{g_{22}},\ i = 3\ .$$

Deste modo,

2ª coluna de G

Veja que o primeiro elemento a ser avaliado (lembre-se que G é triangular inferior) é o elemento da diagonal g_{22}, no qual usaremos a fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g_{22} = \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{\overbrace{2-1}^{=1}} g_{2k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (a_{22} - g_{21})^{\frac{1}{2}} = (10 - 1^2)^{\frac{1}{2}} = 3\,.$$

Para os demais elementos da segunda coluna, usaremos a fórmula (4):

$$g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}\, g_{21}}{g_{22}}, \; i = 3\;.$$

Deste modo,

$$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}\, g_{21}}{g_{22}}$$

2ª coluna de G

Veja que o primeiro elemento a ser avaliado (lembre-se que G é triangular inferior) é o elemento da diagonal g_{22}, no qual usaremos a fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g_{22} = \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{\overbrace{2-1}^{=1}} g_{2k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (a_{22} - g_{21})^{\frac{1}{2}} = (10 - 1^2)^{\frac{1}{2}} = 3\,.$$

Para os demais elementos da segunda coluna, usaremos a fórmula (4):

$$g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}\, g_{21}}{g_{22}},\ i = 3\ .$$

Deste modo,

$$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}\, g_{21}}{g_{22}} = \frac{4 - (-2)\cdot 1}{3}$$

2ª coluna de G

Veja que o primeiro elemento a ser avaliado (lembre-se que G é triangular inferior) é o elemento da diagonal g_{22}, no qual usaremos a fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g_{22} = \left(a_{22} - \sum_{k=1}^{\overbrace{2-1}^{=1}} g_{2k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (a_{22} - g_{21})^{\frac{1}{2}} = \left(10 - 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = 3\,.$$

Para os demais elementos da segunda coluna, usaremos a fórmula (4):

$$g_{i2} = \frac{a_{i2} - g_{i1}\, g_{21}}{g_{22}},\ i = 3\ .$$

Deste modo,

$$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}\, g_{21}}{g_{22}} = \frac{4 - (-2)\cdot 1}{3} = 2\,.$$

3ª coluna de G

Para esta coluna, só nos resta calcular o elemento da diagonal g_{33} dado pela fórmula (2):

3ª coluna de G

Para esta coluna, só nos resta calcular o elemento da diagonal g_{33} dado pela fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3ª coluna de G

Para esta coluna, só nos resta calcular o elemento da diagonal g_{33} dado pela fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g_{33} = \left(a_{33} - \sum_{k=1}^{\overbrace{3-1}^{=2}} g_{3k}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

$3^{\underline{a}}$ coluna de G

Para esta coluna, só nos resta calcular o elemento da diagonal g_{33} dado pela fórmula (2):

$$g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow g_{33} = \left(a_{33} - \sum_{k=1}^{\overbrace{3-1}^{=2}} g_{3k}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(a_{33} - (g_{31} + g_{32})\right)^{\frac{1}{2}}$$

3ª coluna de G

Para esta coluna, só nos resta calcular o elemento da diagonal g_{33} dado pela fórmula (2):

$$
\begin{aligned}
g_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow g_{33} &= \left(a_{33} - \sum_{k=1}^{\overbrace{3-1}^{=2}} g_{3k}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(a_{33} - (g_{31} + g_{32}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(9 - (-2)^2 - (-2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & G & \cdot & G^t & = & A & \\
(7) & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} & .
\end{array}
$$

Portanto,

$$
\begin{array}{ccccc}
G & \cdot & G^t & = & A \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}.
\end{array} \tag{7}
$$

(c) Temos que

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= (g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33})^2 \\
&= (2 \cdot 3 \cdot 1)^2 = 36\,.
\end{aligned}
$$

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $G \cdot Y = B$ donde $G^t \cdot X = Y$.

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $G \cdot Y = B$ donde $G^t \cdot X = Y$.
Em verdade,

$$G \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\,y_1 = 0 \\ y_1 + 3\,y_2 = 6 \\ -2\,y_1 + 2\,y_2 + y_3 = 5 \end{cases} ,$$

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $G \cdot Y = B$ donde $G^t \cdot X = Y$.
Em verdade,

$$G \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\,y_1 = 0 \Rightarrow \; y_1 = 0 \\ y_1 + 3\,y_2 = 6 \\ -2\,y_1 + 2\,y_2 + y_3 = 5 \end{cases} ,$$

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $G \cdot Y = B$ donde $G^t \cdot X = Y$.
Em verdade,

$$G \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\,y_1 = 0 \Rightarrow \; y_1 = 0 \\ y_1 + 3\,y_2 = 6 \Rightarrow \; y_2 = 2 \\ -2\,y_1 + 2\,y_2 + y_3 = 5 \end{cases} ,$$

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $G \cdot Y = B$ donde $G^t \cdot X = Y$.
Em verdade,

$$G \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\,y_1 = 0 \Rightarrow \; y_1 = 0 \\ y_1 + 3\,y_2 = 6 \Rightarrow \; y_2 = 2 \\ -2\,y_1 + 2\,y_2 + y_3 = 5 \Rightarrow \; y_3 = 1 \end{cases},$$

Logo, a solução do sistema $G \cdot Y = B$ é $Y = (0\ 2\ 1)^t$.

Retornando ao sistema triangular superior $G^t \cdot X = Y$, obtemos:

Retornando ao sistema triangular superior $G^t \cdot X = Y$, obtemos:

$$G^t \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Retornando ao sistema triangular superior $G^t \cdot X = Y$, obtemos:

$$G^t \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ 3\,x_2 + 2\,x_3 = 2 \\ 2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0 \end{cases} \qquad ,$$

Retornando ao sistema triangular superior $G^t \cdot X = Y$, obtemos:

$$G^t \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ 3\,x_2 + 2\,x_3 = 2 \Rightarrow \; x_2 = 0 \\ 2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0 \end{cases} ,$$

Retornando ao sistema triangular superior $G^t \cdot X = Y$, obtemos:

$$G^t \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ 3\,x_2 + 2\,x_3 = 2 \Rightarrow \ x_2 = 0 \\ 2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0 \Rightarrow \ x_1 = 1 \end{cases},$$

Retornando ao sistema triangular superior $G^t \cdot X = Y$, obtemos:

$$G^t \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ 3\,x_2 + 2\,x_3 = 2 \Rightarrow \; x_2 = 0 \\ 2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0 \Rightarrow \; x_1 = 1 \end{cases},$$

Retornando ao sistema triangular superior $G^t \cdot X = Y$, obtemos:

$$G^t \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ 3\,x_2 + 2\,x_3 = 2 \Rightarrow\ x_2 = 0 \\ 2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0 \Rightarrow\ x_1 = 1 \end{cases},$$

Doravante, a solução do sistema $A \cdot X = B$ é $X = (1\ 0\ 1)^t$.

Exemplo

Exemplo 3.2

Usando o método de Cholesky, resolva o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$