Método da Substituição

Exemplo 2 Use o método da substituição p/ verificar se $T(n) = 2T(n/2) + n = O(n)$. Considere que $T(1) = 1$.

Solução Devemos provar que $T(n) \leq cn$, $c > 0 \wedge n \geq n_0$

Caso base p/ $n = 2$

$$T(n) \leq cn$$
$$T(2) \leq 2c$$
$$2T(2/2) + 2 \leq 2c$$
$$2T(1) + 2 \leq 2c$$
$$2 + 2 \leq 2c$$
$$4 \leq 2c$$
$$2 \leq c$$
$$\boxed{c \geq 2}$$

Caso BASE ok!

Hipótese Indutiva $T(k) \leq ck$, $k < n$

$$T(n) = 2\underbrace{T(n/2)}_{k=n/2} + n$$
$$\leq \cancel{2}\left(c\frac{n}{\cancel{2}}\right) + n \leq cn$$
$$\leq cn + n \leq cn \implies n \leq 0$$

Não é possível mostrar que $cn + n \leq cn$ p/ $n \in \mathbb{N}$.
Como n é o tamanho do problema, n não pode ser negativo.
Portanto, $T(n) = 2T(n/2) + n \neq O(n)$.

Exemplo 5 Use o método da substituição p/ verificar se $T(n) = 2T(n/2) + 1 = O(n)$. Considere $T(1) = 1$.

Solução Devemos provar que $T(n) \le cn$, p/ $c>0$ e $n \ge n_0$.

Caso Base p/ $n = 2$

$$T(2) \le 2c$$
$$2T(2/2) + 1 \le 2c$$
$$2T(1) + 1 \le 2c$$
$$2 + 1 \le 2c$$
$$3 \le 2c$$
$$\boxed{c \ge 3/2}$$

$n^2 = O(n^2 + n)$

$n = O(n^2)$.

Hipótese Indutiva $T(k) \le ck$, $k<n$

$$T(n) = 2\underbrace{T(n/2)}_{k=n/2} + 1$$
$$\le 2c\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \le cn$$
$$\le cn + 1 \le cn$$
$$1 \le 0$$

Não é possível mostrar que $cn+1 \le cn$. No entanto, o limite o termo "+1" é de ordem mais baixa que n, o limite que queremos mostrar. Portanto, mostremos que sob uma hipótese mais forte, $T(n) \le cn$.

Hipótese Indutiva (nova) $T(k) \le ck - b$, $b>0 \wedge k<n$.

$$T(n) = 2\underbrace{T(n/2)}_{k=n/2} + 1$$
$$\le 2\left(c\frac{n}{2} - b\right) + 1 \le cn - b$$
$$\le cn - 2b + 1 \le cn - b$$
$$\le \underbrace{cn-b}_{x} \underbrace{-b + 1}_{y} \le \underbrace{cn - b}_{x} \le cn$$

$x + y \le x$

$y \le 0$

$cn - b - b + 1 \le cn - b$ desde que $-b + 1 \le 0$

$1 \le b$

$\boxed{b \ge 1}$

Como b é positivo e constante, $T(n) \le cn - b$.

Como $cn - b \le cn$, por transitividade, $T(n) \le cn$.

Portanto, $T(n) = 2T(n/2) + 1 = O(n)$.

Hipótese indutiva original

$T(k) \le ck^2$

$T(n) = \ldots$

$\le cn^2 + n \le cn^2$

Hipótese indutiva mais forte p/ "descontar" o termo linear

$T(k) \le ck^2 - bk$

EXEMPLO 6 Encontre um limite superior p/ a recorrência

$T(n) = 2T(n/2) + n = O(n \lg n)$

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \lg(n)$$

$\sqrt{2^m} = (2^m)^{1/2} = 2^{m/2}$

Seja $m = \lg(n)$

$2^m = 2^{\lg(n)}$ (exp)

$2^m = n^{\cancel{\lg(2)} 1}$

$\boxed{2^m = n}$

$$T(2^m) = 2T(\sqrt{2^m}) + m$$

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$$

NA mesma forma que $T(n) = 2T(n/2) + n$

Seja $T(2^m) = S(m)$

$$S(m) = 2S(m/2) + m$$

$x^{\lg y} = y^{\lg x}$

Portanto $S(m) = O(m \lg m)$.

$\lg x = \log_2 x$

$\log_b b = 1$

Voltando as substituições $m = \lg n$ e $S(m) = T(2^m)$

$$T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \lg m)$$

$$= O(\lg(n) \cdot \lg(\lg(n))).$$