NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740

LIMITES

DEFINIÇÃO: DADO $I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in I$ E UMA FUNÇÃO f DEFINIDA EM I. DIZEMOS QUE $f(x)$ TEM LIMITE L QUANDO x TENDE PARA a, SE DADO $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ TAL QUE $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ OU $f(x) \to L$ QUANDO $x \to a$

Ex 1: DADO $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

DEM: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = ?$ TAL QUE SE $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$

$\forall\, \varepsilon > 0$, TOMANDO $\delta > 0$, SE $0 < |x-a| < \delta$

$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ ▨ c.q.d

Ex 2: $f(x) = x$

$$\lim_{x \to a} (f(x)) = \lim_{x \to a} x = a$$

DEM: $\forall\ \varepsilon > 0$, TOME $\delta = \varepsilon > 0$, SE $0 < |x-a| < \delta$
ENTÃO $|f(x) - a| = |x-a| < \delta = \varepsilon$ c.q.d

$\lim_{t \to 0} t = 0$; $\lim_{z \to 1} z = 1$

$\lim_{x \to 1} 3x+2 = 5$

DADO $\varepsilon > 0$, DETERMINAR $\delta > 0$ ADEQUADO, TAL QUE
$x \neq 1$ E x ESTÁ UMA DIST δ DO 1, OU SEJA:

$0 < |x-1| < \delta = ?$

ENTÃO $f(x)$ ESTÁ UMA DISTÂNCIA ε DO $L = 5$

$|f(x) - 5| < \varepsilon$

COMO ENCONTRAR O δ?

$|f(x) - 5| < \varepsilon$; $|x-1| < \varepsilon/3 = \delta$
$|3x+2-5| < \varepsilon$;
$|3x-3| < \varepsilon$;
$|3(x-1)| < \varepsilon$;

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = \varepsilon/3$ TAL QUE SE
$0 < |x-1| < \delta$ ENTÃO $|f(x) - 5| = |3x+2-5| =$
$= |3x-3| = 3|x-1| < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$

Ex: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \delta = ?$ TAL QUE $0 < |x-1| < \delta$
ENTÃO $|f(x) - 1/2| < \varepsilon$

1º Encontrar δ:

$$\left| \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2-(x+1)}{2(x+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2-x-1}{2(x+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-x+1}{2(x+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-(x-1)}{2(x+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)}{(x+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-1}{2} \right| \cdot \left| \frac{(x-1)}{(x+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(x-1)}{(x+1)} \right| < 2\varepsilon$$

$$0 < \frac{|x-1|}{|x+1|} < |x-1|$$

$$0 < |x+1|$$

$$\frac{1}{2} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| < \frac{1}{2}|x-1| < \varepsilon$$

$$|x-1| < 2\varepsilon = \delta$$

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = 2\varepsilon$, tal que $0 < |x-1| < \delta$

$$\left| \frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{x-1}{x+1} \right| < \frac{1}{2}|x-1| < \frac{1}{2}\delta = \varepsilon$$

PROPRIEDADES

① UNICIDADE DO LIMITE

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} f(x) = M$, então $L = M$

② SOMA - SUBTRACAO ENTRE FUNCOES

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

③ PRODUTO POR UMA CONSTANTE

$$\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$$

④ PRODUTO ENTRE FUNCOES

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

⑤ QUOCIENTE ENTRE FUNCOES

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} (g(x)}$$

desde que $\lim_{x \to a} (g(x) \neq 0$

⑥ POTÊNCIA N-ÉSIMA DE f

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

$$P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a} [b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 + b_0]$$

$$= \lim_{x \to a} b_n x^n + \lim_{x \to a} b_{n-1} x^{n-1} + \dots + \lim_{n \to a} b_1 x + \lim_{x \to a} b_0$$

$$= b_n \lim_{x \to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + \dots + b_1 \lim_{x \to a}$$

$$= b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0$$

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 2x^2 + 5) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 5 = 5 //$$

(4) RAIZES

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

É VALIDO PARA $a > 0$ QUANDO n É PAR E VALIDO PARA TODO $a \in \mathbb{R}$, QUANDO n É IMPAR.

$$\lim_{x \to 8} \left[(2 - \sqrt[3]{x}) \cdot (1 - x^2 + x^3) \right]$$

$$= \lim_{x \to 8} (2 - \sqrt[3]{x}) \cdot \lim_{x \to 8} (1 - x^2 + x^3)$$

$$= \left(\lim_{x \to 8} 2 - \lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x} \right) \left(1 - 8^2 + 8^3 \right)$$

$$= (2 - \sqrt[3]{8})(1 - 64 + 512)$$

$$= (2 - 2)(545) = 0 . 545 = 0 //$$

OBS.

SE VOCE TIVESSE COMETIDO O ERRO DE

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$ E O ERRO DE

$\lim_{x \to 0} \frac{(4 + x)^2 - 16}{x} = \frac{0}{0}$, VOCE PODE CONCLUIR

QUE $2 = 8$ ↗