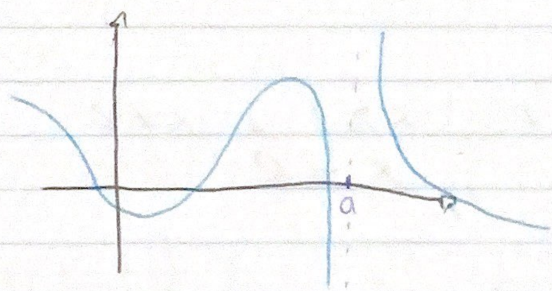
Nome: Felipe Archondo de Cunha Mendes
RA: 2252740

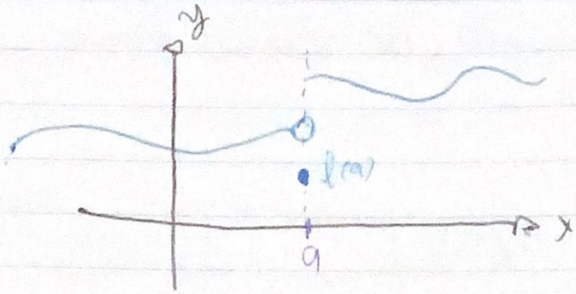
Descontinuidade, Teorema do Valor Intermediário

Tipos de descontinuidade

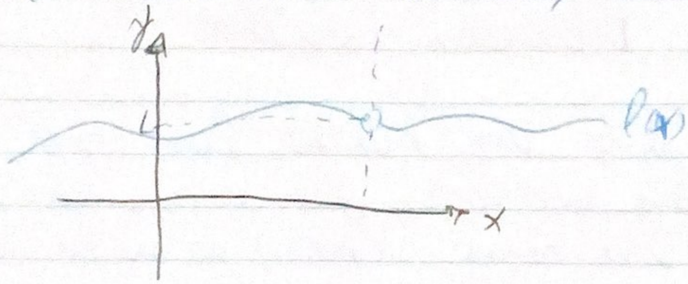
① Dizemos que uma função $f(x)$ tem descontinuidade infinita, em $x=a$, se a função $f(x)$ torna (positivamente ou negativamente) infinito quando $x \to a$.



② Dizemos que uma função $f(x)$ tem descontinuidade de salto em $x=a$ se $f(x)$ permanece infinito, mas varia abruptamente em $x=a$, ou seja $f(a)$ está definida, mas $\lim_{x \to a} f(x) = \nexists$



③ DESCONTINUIDADE REMOVÍVEL EM $x=a$ SE $f(a)$ NÃO ESTÁ DEFINIDA, MAS $\lim_{x \to a} f(x) = \exists$



EXEMPLO

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & x \geq 1 \text{ e } x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} h(x) = \lim_{x \to 2} \sqrt{x^2-1} = \sqrt{2^2-1} = \sqrt{3}$$

$h(2) = 1$

PODEMOS CONCLUIR QUE $\lim_{x \to 2} h(x) = \sqrt{3} \neq 1 = h(2)$ OU SEJA A FUNÇÃO h É DESCONTÍNUA EM 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{se } x \neq -1 \\ C, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Para qual valor de C, que a função f torna-se contínua?

Sabendo que $x^2 - x + 1$ é uma função contínua para todo número real, em particular para todo número real diferente de -1

Para que f seja contínua em $x = -1$,

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1} (x^2 - x + 1) = C$$

$$(-1)^2 - (-1) + 1 = C$$

$$1 + 1 + 1 = C \quad \therefore \quad \boxed{C = 3}$$

Se $C = 3$, a função f é contínua em todo seu domínio.

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIARIO

SE f É CONTINUA EM $[a,b]$ E L TAL QUE $f(a) \leq L \leq f(b)$ OU $f(b) \leq L \leq f(a)$, ENTÃO EXISTE $c \in [a,b]$ TAL QUE $f(c)=L$

EXEMPLO:

$x^3+x-1=0$ TEM UMA SOLUÇÃO ENTRE $x=0$ E $x=1$.

$f(x)=x^3+x-1 \qquad f(x)=0=L$

$[0,1]$. JÁ SABEMOS QUE POLINOMIO É CONTINUO PARA TODO NUMERO REAL, EM PARTICULAR NO INTERVALO FECHADO $[0,1]$.

COMO $f(0)=-1<0=L$

$f(1)=1>0=L$

NOTE QUE $f(0)<0<f(1)$

ENTÃO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIARIO GARANTE QUE EXISTE $c \in [0,1]$ TAL QUE $f(c)=c^3+c-1=0$

A temperatura em T (em °C) na qual a água ferve é dada aproximadamente pela fórmula

$$T(h) = 100,862 - 0,0415\sqrt{h + 431,03}$$

onde h é a altitude (em metros acima do mar). Verifique se a água ferve à 98°C a uma altitude entre 4000 e 4500 metros acima do nível do mar.

* A função T(h) é contínua

* $[400, 4500]$, $L = 98$

* $T(400) \cong 95,0995 > 98$

* $T(4500) \cong 97,9498 < 98$

* $T(4500) < 98 < T(4000)$

Podemos afirmar através do teorema do valor intermediário que existe uma altitude entre 400 e 4500 m acima do mar que a água ferve a temp. de 98°C

INDETERMINAÇÕES

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , 1^∞ e ∞^0

EXEMPLO

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)}{(\cancel{x-3})(x+3)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$

B) $\lim \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+3x-4}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-4x^2+3x & x-1 \\
\hline
-x^3+x^2 & x^2-3x \\
\quad -3x^2+3x & \\
\quad +3x^2-3x & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+3x-4 & x-1 \\
\hline
-x^2+x & x+4 \\
\quad 4x-4 & \\
\quad -4x+4 & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x \cancel{-1})(x^3 - 3x)}{(\cancel{x-1})(x+4)} = \boxed{\frac{-2}{3}}$$

c) $$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{x + 8}$$

$* \; t = \sqrt[3]{x} \quad \therefore \quad x = t^3$

$x \to -8 \quad \therefore \quad t \to -2$

$$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{x + 8} = \lim_{x \to -2} \frac{t + 2}{t^3 + 8}$$

$$\begin{array}{l|l} * \; t^3 + 8 & t + 2 \\ \cline{2-2} -t^3 - 2t^2 & t^2 - 2t + 4 \\ \hline \quad -2t^2 & \\ \quad +2t^2 - 4t & \\ \hline \quad\quad -4t + 8 & \\ \quad\quad +4t + 8 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$$\lim_{t \to -2} \frac{t + 2}{t^3 + 8} = \lim_{t \to -2} \frac{\cancel{t+2}}{\cancel{(t+2)}(t^2 - 2t + 4)}$$

$$= \lim_{t \to -2} \frac{1}{t^2 - 2t + 4} = \frac{1}{(-2)^2 - 2(-2) + 4} = \frac{1}{12}$$

D) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1}$

$* \; X = t^{mmc(4,6)} = t^{12}$

$x \to 1 \quad \therefore \; t \to 1$

$\to \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[6]{x} - 1} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{t^{12}} - 1}{\sqrt[6]{t^{12}} - 1}$

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^{12/4} - 1}{t^{12/6} - 1} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^3 - 1}{t^2 - 1}$

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\cancel{(t-1)}(t^2 + t + 1)}{\cancel{(t-1)}(t+1)} = \boxed{3/2}$