$T: V \longrightarrow V$

v é autovetor $\Longleftrightarrow$ $T(v) = \lambda v$

λ ↳ autovalor

$v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Ex 1) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ / $T(x,y) = (x+3y, x-y)$

Considere a base canônica do $\mathbb{R}^2$, i.é,

$C = \{\vec{i}, \vec{j}\} = \{(1,0), (0,1)\}$

$T(1,0) = (\underline{1}, \underline{1}) = 1(1,0) + 1(0,1)$

$T(0,1) = (3,-1) = 3(1,0) + (-1)(0,1)$

Logo, $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Recorde que λ é autovalor $\Longrightarrow p_T(\lambda) = 0$

e $p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I)$

$I: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto I(x,y) = (x,y)$

$\Longrightarrow [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Note que

$$[T]_C - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Segue que $p_T(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \det(T - \lambda I) = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow -1 - \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} + \lambda^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow$$

$\iff \lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda^2 = 4 \iff \lambda = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\therefore \lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores de T.

Ex 2) $v \overset{=(x,y)}{} $ é autovetor $\iff v \in Ker(T - \lambda I)$

$\iff (T-\lambda I)(v) = \vec{0}$

$\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I)$

i) $\lambda_1 = -2 \overset{(I)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 & \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ x + y = 0 & + \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = -x$

Logo, $v = (x,y) = (x,-x) = x\,\underline{(1,-1)}$

$\therefore v_1 = (1,-1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = -2$

ii) $\lambda_2 = 2 \overset{(I)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} -x + 3y = 0 & \cdot 1 \\ x - 3y = 0 & + \end{cases} \sim \begin{cases} -x + 3y = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 3y$

Logo, $v = (x,y) = (3y, y) = y(3,1)$

$\therefore v_2 = (3,1)$ é um autovetor de T associado a $\lambda_2 = 2$.

$\therefore v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (3,1)$ são os autovetores de T associado a $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$, respectivamente.

Ex 3) $T(x,y) = (x+3y, x-y)$ é diagonalizável?

Opção 1: Ex 1 e Ex 2

Pelo Ex 1, temos que todas as raízes de $p_T(\lambda)$ são reais ($\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$).

Pelo Ex 2, temos que multiplicidade algébrica de cada λ_i é igual a $\dim(V(\lambda_i))$.

Diante do exposto, temos que T é diagonalizável

Obs: $[T]_B = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$

Opção 2: i) Ex 1 e ii) Ex 2

iii) $P = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de autovetores de T.

iv) $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-3) = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists P^{-1}$

$\Rightarrow$ exercício $\Rightarrow$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

v) $D = P^{-1}[T]_c P = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \text{exercício}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ T é diagonalizável.

Obs: $B = \{v_1, v_2\} = \{(1,-1), (3,1)\}$ é uma base de autovetores de T.

$$\Rightarrow [T]_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex 4) $(P_2, +, \cdot)$, $p, q \in P_2$

$$\langle p, q \rangle = \langle a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle$$
$$= a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$$

$p_1 = x^2 - 2x + 3$ e $p_2 = 3x - 4 = 0x^2 + 3x - 4$

$$\cos\theta = \frac{\langle p_1, p_2 \rangle}{\|p_1\| \|p_2\|}$$

Note que

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \langle x^2 - 2x + 3, 0x^2 + 3x - 4 \rangle$$
$$= 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-4)$$
$$= 0 - 6 - 12 = -18$$

$$\|p_1\| = \sqrt{\langle p_1, p_1 \rangle} = \sqrt{\langle 1x^2 - 2x + 3, 1x^2 - 2x + 3 \rangle}$$
$$= \sqrt{1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3} =$$
$$= \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\|p_2\| = \sqrt{\langle 0x^2 + 3x - 4, 0x^2 + 3x - 4 \rangle} = \sqrt{0 + 9 + 16}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

Logo, $\cos\theta = \dfrac{-18}{\sqrt{14}\cdot 5} \simeq -0{,}96$

$$\Longleftrightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-18}{\sqrt{14}\cdot 5}\right) \simeq 164{,}11^{0}$$

$\therefore \; \theta = 164{,}11^{\circ}$