Cálculo Numérico

Raízes de Equações: Método do Ponto Fixo

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

28 de Junho de 2021

Método do Ponto Fixo

Um número p é dito ponto fixo de uma função g se $g(p) = p$.

Exemplo 1.1

Considere a função $g(x) = x^2 - 2$ para $-2 \leq x \leq 3$. Verifique que, $x = -1$ e $x = 2$ são pontos fixos de g.

Solução: *Note que,* $g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \Rightarrow g(-1) = -1$.

$g(2) = 2^2 - 2 = 2 \Rightarrow g(2) = 2$.

Neste momento, consideraremos a obtenção de solução dos problemas de pontos fixos e a relação entre estes e os problemas de determinação de raiz que desejamos resolver.

Método do Ponto Fixo

Um número p é dito ponto fixo de uma função g se $g(p) = p$.

Exemplo 1.1

Considere a função $g(x) = x^2 - 2$ para $-2 \leq x \leq 3$. Verifique que, $x = -1$ e $x = 2$ são pontos fixos de g.

Solução: *Note que,* $g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \Rightarrow g(-1) = -1$.
$g(2) = 2^2 - 2 = 2 \Rightarrow g(2) = 2$.

Neste momento, consideraremos a obtenção de solução dos problemas de pontos fixos e a relação entre estes e os problemas de determinação de raiz que desejamos resolver.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método do Ponto Fixo

Um número p é dito ponto fixo de uma função g se $g(p) = p$.

Exemplo 1.1

Considere a função $g(x) = x^2 - 2$ para $-2 \leq x \leq 3$. Verifique que, $x = -1$ e $x = 2$ são pontos fixos de g.

Solução: *Note que,* $g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \Rightarrow g(-1) = -1$.
$g(2) = 2^2 - 2 = 2 \Rightarrow g(2) = 2$.

Neste momento, consideraremos a obtenção de solução dos problemas de pontos fixos e a relação entre estes e os problemas de determinação de raiz que desejamos resolver.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método do Ponto Fixo

Um número p é dito ponto fixo de uma função g se $g(p) = p$.

Exemplo 1.1

Considere a função $g(x) = x^2 - 2$ para $-2 \leq x \leq 3$. Verifique que, $x = -1$ e $x = 2$ são pontos fixos de g.

Solução: *Note que,* $g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \Rightarrow g(-1) = -1$.
$g(2) = 2^2 - 2 = 2 \Rightarrow g(2) = 2$.

Neste momento, consideraremos a obtenção de solução dos problemas de pontos fixos e a relação entre estes e os problemas de determinação de raiz que desejamos resolver.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método do Ponto Fixo

De fato, se p é raiz de $f(p)$, então $f(p) = 0$, donde podemos definir várias outras funções com um ponto fixo em p, por exemplo,

$$g_1(x) = x - f(x)$$
$$g_2(x) = x + 3f(x),$$

pois,

$$g_1(p) = p - \underbrace{f(p)}_{=0} = p$$

e

$$g_2(p) = p + 3\underbrace{f(p)}_{=0} = p$$

Método do Ponto Fixo

De fato, se p é raiz de $f(p)$, então $f(p) = 0$, donde podemos definir várias outras funções com um ponto fixo em p, por exemplo,

$$g_1(x) = x - f(x)$$
$$g_2(x) = x + 3f(x),$$

pois,

$$g_1(p) = p - \underbrace{f(p)}_{=0} = p$$

e

$$g_2(p) = p + 3\underbrace{f(p)}_{=0} = p$$

Método do Ponto Fixo

De fato, se p é raiz de $f(p)$, então $f(p) = 0$, donde podemos definir várias outras funções com um ponto fixo em p, por exemplo,

$$g_1(x) = x - f(x)$$
$$g_2(x) = x + 3f(x),$$

pois,

$$g_1(p) = p - \underbrace{f(p)}_{=0} = p$$

e

$$g_2(p) = p + 3\underbrace{f(p)}_{=0} = p$$

Método do Ponto Fixo

De fato, se p é raiz de $f(p)$, então $f(p) = 0$, donde podemos definir várias outras funções com um ponto fixo em p, por exemplo,

$$g_1(x) = x - f(x)$$
$$g_2(x) = x + 3f(x),$$

pois,

$$g_1(p) = p - \underbrace{f(p)}_{=0} = p$$

e

$$g_2(p) = p + 3\underbrace{f(p)}_{=0} = p$$

Método do Ponto Fixo

Reciprocamente, suponha que g tenha um ponto fixo em p, ou seja, $g(p) = p$. A função

$$f(x) = x - g(x)$$

tem um zero em p, pois,

$$f(p) = p - \underbrace{g(p)}_{=p} = 0$$

Método do Ponto Fixo

Reciprocamente, suponha que g tenha um ponto fixo em p, ou seja, $g(p) = p$. A função

$$f(x) = x - g(x)$$

tem um zero em p, pois,

$$f(p) = p - \underbrace{g(p)}_{=p} = 0$$

Método do Ponto Fixo

Reciprocamente, suponha que g tenha um ponto fixo em p, ou seja, $g(p) = p$. A função

$$f(x) = x - g(x)$$

tem um zero em p, pois,

$$f(p) = p - \underbrace{g(p)}_{=p} = 0$$

Método do Ponto Fixo

Reciprocamente, suponha que g tenha um ponto fixo em p, ou seja, $g(p) = p$. A função

$$f(x) = x - g(x)$$

tem um zero em p, pois,

$$f(p) = p - \underbrace{g(p)}_{=p} = 0$$

Método do Ponto Fixo

O teorema a seguir, estabelece condições suficientes para a existência e a unicidade de um ponto fixo.

Teorema 1.1

Se $g \in C([a,b])$ e $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$, então, g terá um ponto fixo em $[a,b]$. Além disso, se $g'(x)$ existir em (a,b) e houver uma constante $0 < k < 1$ tal que,

$$|g'(x)| \leq k;\ \forall x \in (a,b),$$

então, o ponto fixo em [a,b] será único.

Método do Ponto Fixo

O teorema a seguir, estabelece condições suficientes para a existência e a unicidade de um ponto fixo.

Teorema 1.1

Se $g \in C([a,b])$ e $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$, então, g terá um ponto fixo em $[a,b]$.
Além disso, se $g'(x)$ existir em (a,b) e houver uma constante $0 < k < 1$ tal que,

$$|g'(x)| \leq k; \ \forall x \in (a,b),$$

então, o ponto fixo em [a,b] será único.

Método do Ponto Fixo

O teorema a seguir, estabelece condições suficientes para a existência e a unicidade de um ponto fixo.

Teorema 1.1

Se $g \in C([a,b])$ e $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$, então, g terá um ponto fixo em $[a,b]$. Além disso, se $g'(x)$ existir em (a,b) e houver uma constante $0 < k < 1$ tal que,

$$|g'(x)| \leq k; \; \forall\, x \in (a,b),$$

então, o ponto fixo em [a,b] será único.

Método do Ponto Fixo

Exemplo 1.2

Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$, $x \in [-1, 1]$. *Verifique que* g *satisfaz as condições do precedente teorema e exiba o ponto fixo de* g .

Solução: À luz do Teorema 1.1, precisamos provar os seguintes fatos:

1. g é contínua em [-1,1];
2. $g(x) \in [-1, 1]$;
3. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \forall\, x \in (-1, 1)$.

Com efeito, em virtude que $g(x)$ é um polinômio, pela teoria apresentada no curso de Cálculo I, $g(x)$ é contínua em toda reta $\mathbb{R}$, em particular no intervalo [-1,1], assim, o item (i) está provado.

Método do Ponto Fixo

Exemplo 1.2

Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$, $x \in [-1, 1]$. *Verifique que* g *satisfaz as condições do precedente teorema e exiba o ponto fixo de* g .

Solução: À luz do Teorema 1.1, precisamos provar os seguintes fatos:

1. g é contínua em [-1,1];
2. $g(x) \in [-1, 1]$;
3. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k;\ \forall\, x \in (-1, 1)$.

Com efeito, em virtude que $g(x)$ é um polinômio, pela teoria apresentada no curso de Cálculo I, $g(x)$ é contínua em toda reta $\mathbb{R}$, em particular no intervalo [-1,1], assim, o item (i) está provado.

Método do Ponto Fixo

Exemplo 1.2

Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$, $x \in [-1, 1]$. *Verifique que g satisfaz as condições do precedente teorema e exiba o ponto fixo de g .*

Solução: À luz do Teorema 1.1, precisamos provar os seguintes fatos:

1. g é contínua em [-1,1];
2. $g(x) \in [-1, 1]$;
3. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \forall x \in (-1, 1)$.

Com efeito, em virtude que $g(x)$ é um polinômio, pela teoria apresentada no curso de Cálculo I, $g(x)$ é contínua em toda reta $\mathbb{R}$, em particular no intervalo [-1,1], assim, o item (i) está provado.

Método do Ponto Fixo

Exemplo 1.2

Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$, $x \in [-1, 1]$. *Verifique que* g *satisfaz as condições do precedente teorema e exiba o ponto fixo de* g .

Solução: À luz do Teorema 1.1, precisamos provar os seguintes fatos:

(i) g é contínua em [-1,1];

(ii) $g(x) \in [-1, 1]$;

(iii) Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \; \forall x \in (-1, 1)$.

Com efeito, em virtude que $g(x)$ é um polinômio, pela teoria apresentada no curso de Cálculo I, $g(x)$ é contínua em toda reta $\mathbb{R}$, em particular no intervalo [-1,1], assim, o item (i) está provado.

Método do Ponto Fixo

Exemplo 1.2

Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$, $x \in [-1, 1]$. *Verifique que* g *satisfaz as condições do precedente teorema e exiba o ponto fixo de* g .

Solução: À luz do Teorema 1.1, precisamos provar os seguintes fatos:

- (i) g é contínua em [-1,1];
- (ii) $g(x) \in [-1, 1]$;
- (iii) Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \; \forall\, x \in (-1, 1)$.

Com efeito, em virtude que $g(x)$ é um polinômio, pela teoria apresentada no curso de Cálculo I, $g(x)$ é contínua em toda reta $\mathbb{R}$, em particular no intervalo [-1,1], assim, o item (i) está provado.

Método do Ponto Fixo

Exemplo 1.2

Seja $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$, $x \in [-1, 1]$. *Verifique que* g *satisfaz as condições do precedente teorema e exiba o ponto fixo de* g .

Solução: À luz do Teorema 1.1, precisamos provar os seguintes fatos:

1. g é contínua em [-1,1];
2. $g(x) \in [-1, 1]$;
3. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k$; $\forall\, x \in (-1, 1)$.

Com efeito, em virtude que $g(x)$ é um polinômio, pela teoria apresentada no curso de Cálculo I, $g(x)$ é contínua em toda reta $\mathbb{R}$, em particular no intervalo [-1,1], assim, o item (i) está provado.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

À seguir, provaremos o item (ii). O item (ii) nos diz que a imagem da função $g(x)$ possui valores mínimo e máximo dentro do intervalo [-1,1].

Assim, como encontramos máximos e mínimos de uma função?

Cálculo 1

À seguir, provaremos o item (ii). O item (ii) nos diz que a imagem da função $g(x)$ possui valores mínimo e máximo dentro do intervalo [-1,1].

Assim, como encontramos máximos e mínimos de uma função?

Cálculo 1

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Nossa vívida lembrança nos faz recorrer ao conceito de derivada. Em particular, devemos encontrar os valores de x tais que $g'(x) = 0$.

De fato, desde que $g'(x) = \dfrac{2\,x}{3}$, resulta que

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

donde temos a tabela:

x	$g(x)$	Conclusão
-1	0	g tem um valor máximo absoluto
0	$-\dfrac{1}{3}$	g tem um valor mínimo absoluto
1	0	g tem um valor máximo absoluto

Logo,

$$g(x) \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \subset [-1, 1],$$

o que prova o item (ii).

Nossa vívida lembrança nos faz recorrer ao conceito de derivada. Em particular, devemos encontrar os valores de x tais que $g'(x) = 0$.

De fato, desde que $g'(x) = \dfrac{2\,x}{3}$, resulta que

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \; x = 0,$$

donde temos a tabela:

x	$g(x)$	Conclusão
-1	0	g tem um valor máximo absoluto
0	$-\dfrac{1}{3}$	g tem um valor mínimo absoluto
1	0	g tem um valor máximo absoluto

Logo,

$$g(x) \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \subset [-1, 1],$$

o que prova o item (ii).

Nossa vívida lembrança nos faz recorrer ao conceito de derivada. Em particular, devemos encontrar os valores de x tais que $g'(x) = 0$.

De fato, desde que $g'(x) = \dfrac{2\,x}{3}$, resulta que

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \; x = 0,$$

donde temos a tabela:

x	$g(x)$	Conclusão
-1	0	g tem um valor máximo absoluto
0	$-\dfrac{1}{3}$	g tem um valor mínimo absoluto
1	0	g tem um valor máximo absoluto

Logo,

$$g(x) \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \subset [-1, 1],$$

o que prova o item (ii).

Nossa vívida lembrança nos faz recorrer ao conceito de derivada. Em particular, devemos encontrar os valores de x tais que $g'(x) = 0$.

De fato, desde que $g'(x) = \dfrac{2\,x}{3}$, resulta que

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \; x = 0,$$

donde temos a tabela:

x	$g(x)$	Conclusão
-1	0	g tem um valor máximo absoluto
0	$-\dfrac{1}{3}$	g tem um valor mínimo absoluto
1	0	g tem um valor máximo absoluto

Logo,

$$g(x) \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \subset [-1, 1],$$

o que prova o item (ii).

Nos resta a prova do item (iii). Pelo item (ii), facilmente temos:

$$|g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right|.$$

Desde que por hipótese, $x \in [-1, 1]$, então,

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} |x| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}|x| &\leq \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \Rightarrow |g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right| = \frac{2}{3}|x| &\leq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nos resta a prova do item (iii). Pelo item (ii), facilmente temos:

$$|g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right|.$$

Desde que por hipótese, $x \in [-1, 1]$, então,

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1.$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
& |x| \leq 1 \\
\Leftrightarrow\; & \frac{2}{3}|x| \leq \frac{2}{3}\cdot 1 \\
\Rightarrow |g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right| = \; & \frac{2}{3}|x| \leq \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Nos resta a prova do item (iii). Pelo item (ii), facilmente temos:

$$|g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right|.$$

Desde que por hipótese, $x \in [-1, 1]$, então,

$$-1 \leq x \leq 1 \;\Leftrightarrow |x| \leq 1.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} & |x| \leq 1 \\ \Leftrightarrow\; & \frac{2}{3}\,|x| \leq \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \Rightarrow\; & |g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right| = \frac{2}{3}\,|x| \leq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nos resta a prova do item (iii). Pelo item (ii), facilmente temos:

$$|g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right|.$$

Desde que por hipótese, $x \in [-1, 1]$, então,

$$-1 \leq x \leq 1 \;\Leftrightarrow |x| \leq 1.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} & |x| \leq 1 \\ \Leftrightarrow\; & \frac{2}{3}\,|x| \leq \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \Rightarrow |g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right| = & \frac{2}{3}\,|x| \leq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nos resta a prova do item (iii). Pelo item (ii), facilmente temos:

$$|g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right|.$$

Desde que por hipótese, $x \in [-1,1]$, então,

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} |x| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}\,|x| &\leq \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \Rightarrow |g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right| = \frac{2}{3}\,|x| &\leq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Nos resta a prova do item (iii). Pelo item (ii), facilmente temos:

$$|g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right|.$$

Desde que por hipótese, $x \in [-1, 1]$, então,

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} |x| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}\,|x| &\leq \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \Rightarrow |g'(x)| = \left|\frac{2\,x}{3}\right| = \frac{2}{3}\,|x| &\leq \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Deste modo, mostramos que

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{3} < 1, \forall x \in [-1, 1],$$

o que garante a condição (iii). Do exposto, g contempla todas as hipóteses do Teorema 1.1, garantindo a existência de um único ponto fixo no intervalo $[-1, 1]$.

Assim, podemos encontrar algebricamente um único ponto fixo para g.

Deste modo, mostramos que

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{3} < 1, \forall\, x \in [-1, 1],$$

o que garante a condição (iii). Do exposto, g contempla todas as hipóteses do Teorema 1.1, garantindo a existência de um único ponto fixo no intervalo $[-1, 1]$.

Assim, podemos encontrar algebricamente um único ponto fixo para g.

Deste modo, mostramos que

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{3} < 1, \forall\, x \in [-1, 1],$$

o que garante a condição (iii). Do exposto, g contempla todas as hipóteses do Teorema 1.1, garantindo a existência de um único ponto fixo no intervalo $[-1, 1]$.

Assim, podemos encontrar algebricamente um único ponto fixo para g.

De fato,

$$
\begin{aligned}
g(p) &= p \\
\iff p &= \frac{p^2-1}{3} \\
\iff p^2 - 3p - 1 &= 0 \\
\iff p &= \frac{1}{2}(3-\sqrt{13}) \in [-1,1].
\end{aligned}
$$

Note que a outra raiz desta equação do segundo grau não pertence ao intervalo [-1,1].

Doravante, g tem um único ponto fixo, a saber, $p = \frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
g(p) &= p \\
\iff p &= \frac{p^2 - 1}{3} \\
\iff p^2 - 3p - 1 &= 0 \\
\iff p &= \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13}) \in [-1, 1].
\end{aligned}
$$

Note que a outra raiz desta equação do segundo grau não pertence ao intervalo [-1,1].
Doravante, g tem um único ponto fixo, a saber, $p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$.

De fato,

$$\begin{aligned} g(p) &= p \\ \iff p &= \frac{p^2-1}{3} \\ \iff p^2 - 3p - 1 &= 0 \\ \iff p &= \frac{1}{2}(3-\sqrt{13}) \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Note que a outra raiz desta equação do segundo grau não pertence ao intervalo [-1,1].

Doravante, g tem um único ponto fixo, a saber, $p = \frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

De fato,

$$
\begin{aligned}
g(p) &= p \\
\iff p &= \frac{p^2-1}{3} \\
\iff p^2 - 3p - 1 &= 0 \\
\iff p &= \frac{1}{2}(3-\sqrt{13}) \in [-1,1].
\end{aligned}
$$

Note que a outra raiz desta equação do segundo grau não pertence ao intervalo [-1,1].

Doravante, g tem um único ponto fixo, a saber, $p = \frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

De fato,

$$
\begin{aligned}
g(p) &= p \\
\iff p &= \frac{p^2 - 1}{3} \\
\iff p^2 - 3p - 1 &= 0 \\
\iff p &= \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13}) \in [-1, 1].
\end{aligned}
$$

Note que a outra raiz desta equação do segundo grau não pertence ao intervalo [-1,1].

Doravante, g tem um único ponto fixo, a saber, $p = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{13})$.

Método do Ponto Fixo

Agora, considere f uma função contínua em $[a, b]$ e ξ um número pertencente a este intervalo, tal que $f(\xi) = 0$, isto é, ξ é a raiz da equação $f(x) = 0$.

Admita que por um artifício algébrico (você estenderá isso posteriormente) pode-se transformar $f(x) = 0$ em

$$x = F(x),$$

onde F é chamada de função de iteração.

Método do Ponto Fixo

Agora, considere f uma função contínua em $[a, b]$ e ξ um número pertencente a este intervalo, tal que $f(\xi) = 0$, isto é, ξ é a raiz da equação $f(x) = 0$.
Admita que por um artifício algébrico (você estenderá isso posteriormente) pode-se transformar $f(x) = 0$ em

$$x = F(x),$$

onde F é chamada de função de iteração.

Método do Ponto Fixo

Eis o método: Sendo x_0 uma aproximação de ξ, calcula-se $F(x_0)$.
Faz-se,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F(x_0)\\
x_2 &= F(x_1)\\
x_3 &= F(x_2)\\
&\vdots\\
x_{k+1} &= F(x_k),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Se a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é convergente para ξ, então,

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi\,. \qquad (2)$$

Método do Ponto Fixo

Eis o método: Sendo x_0 uma aproximação de ξ, calcula-se $F(x_0)$.
Faz-se,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F(x_0) \\
x_2 &= F(x_1) \\
x_3 &= F(x_2) \\
&\vdots \\
x_{k+1} &= F(x_k),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Se a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é convergente para ξ, então,

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi\,. \tag{2}$$

Método do Ponto Fixo

Eis o método: Sendo x_0 uma aproximação de ξ, calcula-se $F(x_0)$.
Faz-se,

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0) \\ x_2 &= F(x_1) \\ x_3 &= F(x_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(1) $$x_{k+1} = F(x_k),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Se a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é convergente para ξ, então,

(2) $$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi\,.$$

Método do Ponto Fixo

Eis o método: Sendo x_0 uma aproximação de ξ, calcula-se $F(x_0)$.
Faz-se,

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0) \\ x_2 &= F(x_1) \\ x_3 &= F(x_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(1) $$x_{k+1} = F(x_k),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Se a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é convergente para ξ, então,

(2) $$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi\,.$$

Método do Ponto Fixo

Eis o método: Sendo x_0 uma aproximação de ξ, calcula-se $F(x_0)$.
Faz-se,

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0) \\ x_2 &= F(x_1) \\ x_3 &= F(x_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{k+1} = F(x_k),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Se a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é convergente para ξ, então,

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi\,. \tag{2}$$

Método do Ponto Fixo

Eis o método: Sendo x_0 uma aproximação de ξ, calcula-se $F(x_0)$.
Faz-se,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F(x_0) \\
x_2 &= F(x_1) \\
x_3 &= F(x_2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(1) $$x_{k+1} = F(x_k),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Se a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é convergente para ξ, então,

(2) $$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi\,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método do Ponto Fixo

Eis o método: Sendo x_0 uma aproximação de ξ, calcula-se $F(x_0)$.
Faz-se,

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0) \\ x_2 &= F(x_1) \\ x_3 &= F(x_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{k+1} = F(x_k),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Se a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é convergente para ξ, então,

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi\,. \tag{2}$$

Método do Ponto Fixo

Eis o método: Sendo x_0 uma aproximação de ξ, calcula-se $F(x_0)$.
Faz-se,

$$\begin{aligned}
x_1 &= F(x_0) \\
x_2 &= F(x_1) \\
x_3 &= F(x_2) \\
&\vdots \\
x_{k+1} &= F(x_k),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)
\end{aligned}$$

Se a sequência $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é convergente para ξ, então,

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi\,. \qquad (2)$$

Método do Ponto Fixo

Sendo F contínua, ao passar o limite de (1), tendo em mente (2), obtemos:

$$\begin{aligned} \xi &= \lim_{k \to +\infty} x_{k+1} \\ &= \lim_{k \to +\infty} F(x_k) \\ &= F\left(\lim_{k \to +\infty} x_k\right) \\ &= F(\xi)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto, $\xi = F(\xi)$, isto é, ξ é ponto fixo de F, onde ξ é raiz de $f(x)$.

Método do Ponto Fixo

Sendo F contínua, ao passar o limite de (1), tendo em mente (2), obtemos:

$$\begin{aligned} \xi &= \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \\ &= \lim_{k\to+\infty} F(x_k) \\ &= F\left(\lim_{k\to+\infty} x_k\right) \\ &= F(\xi)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto, $\xi = F(\xi)$, isto é, ξ é ponto fixo de F, onde ξ é raiz de $f(x)$.

Método do Ponto Fixo

Sendo F contínua, ao passar o limite de (1), tendo em mente (2), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\xi &= \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \\
&= \lim_{k\to+\infty} F(x_k) \\
&= F\left(\lim_{k\to+\infty} x_k\right) \\
&= F(\xi)\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Portanto, $\xi = F(\xi)$, isto é, ξ é ponto fixo de F, onde ξ é raiz de $f(x)$.

Método do Ponto Fixo

Sendo F contínua, ao passar o limite de (1), tendo em mente (2), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\xi &= \lim_{k \to +\infty} x_{k+1} \\
&= \lim_{k \to +\infty} F(x_k) \\
&= F\left(\lim_{k \to +\infty} x_k\right) \\
&= F(\xi)\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Portanto, $\xi = F(\xi)$, isto é, ξ é ponto fixo de F, onde ξ é raiz de $f(x)$.

Método do Ponto Fixo

Sendo F contínua, ao passar o limite de (1), tendo em mente (2), obtemos:

$$\begin{aligned} \xi &= \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \\ &= \lim_{k\to+\infty} F(x_k) \\ &= F\left(\lim_{k\to+\infty} x_k\right) \\ &= F(\xi)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto, $\xi = F(\xi)$, isto é, ξ é ponto fixo de F, onde ξ é raiz de $f(x)$.

Método do Ponto Fixo

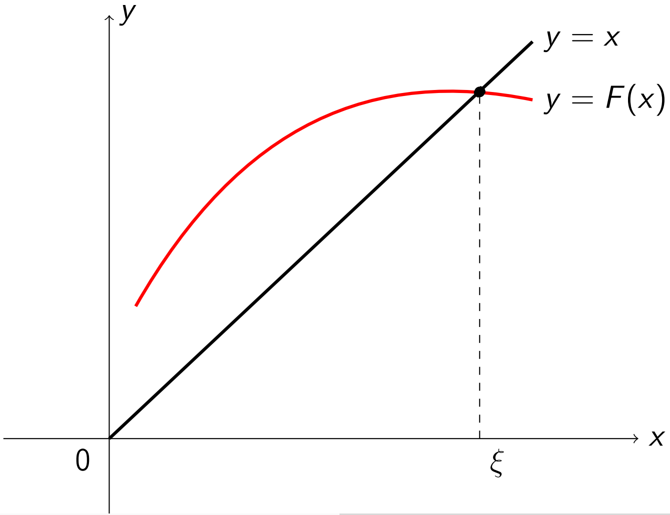
Sendo F contínua, ao passar o limite de (1), tendo em mente (2), obtemos:

$$\begin{aligned}\xi &= \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \\ &= \lim_{k\to+\infty} F(x_k) \\ &= F\left(\lim_{k\to+\infty} x_k\right) \\ &= F(\xi)\,.\end{aligned} \tag{3}$$

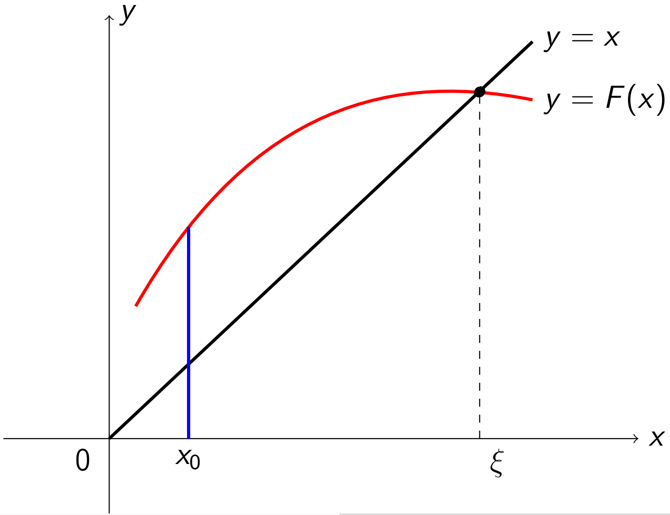
Portanto, $\xi = F(\xi)$, isto é, ξ é ponto fixo de F, onde ξ é raiz de $f(x)$.

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

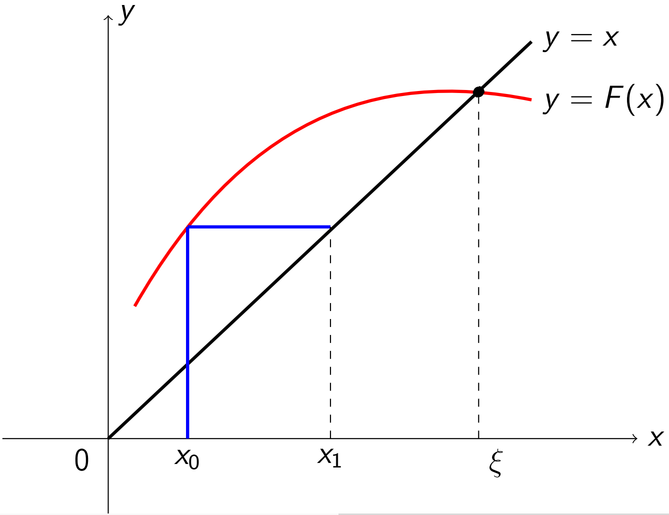
Interpretação Geométrica



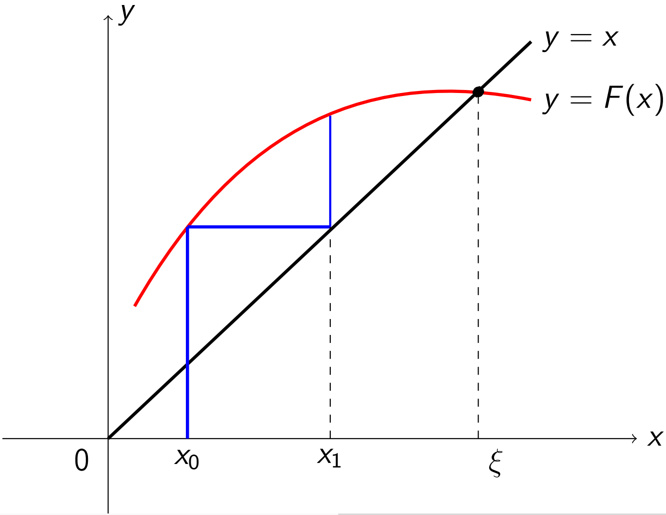
Interpretação Geométrica



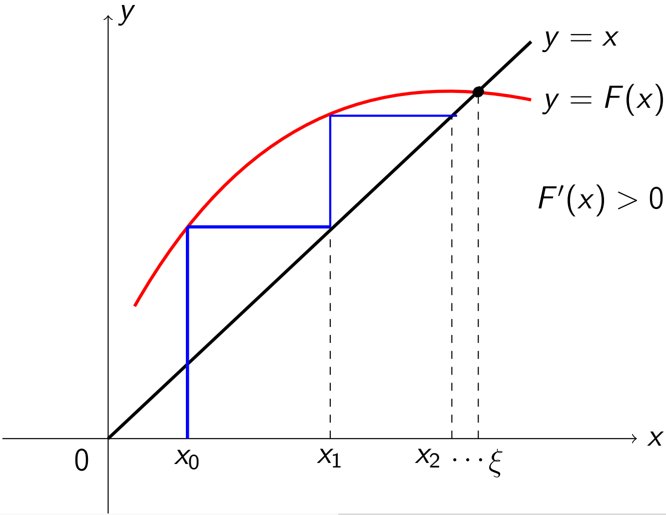
Interpretação Geométrica



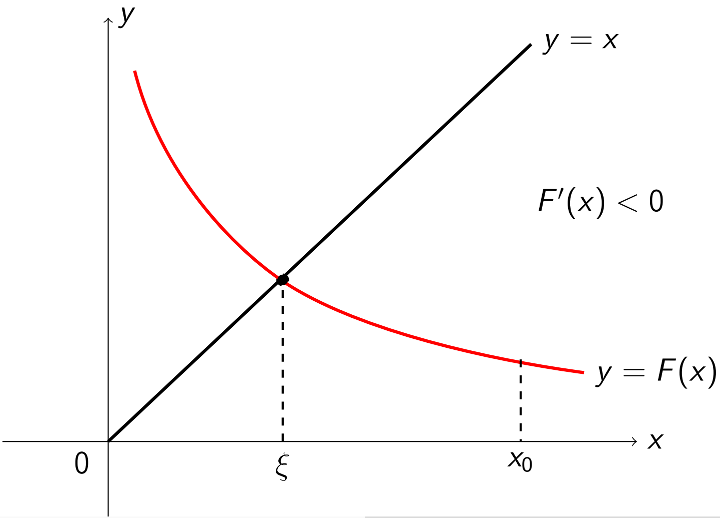
Interpretação Geométrica



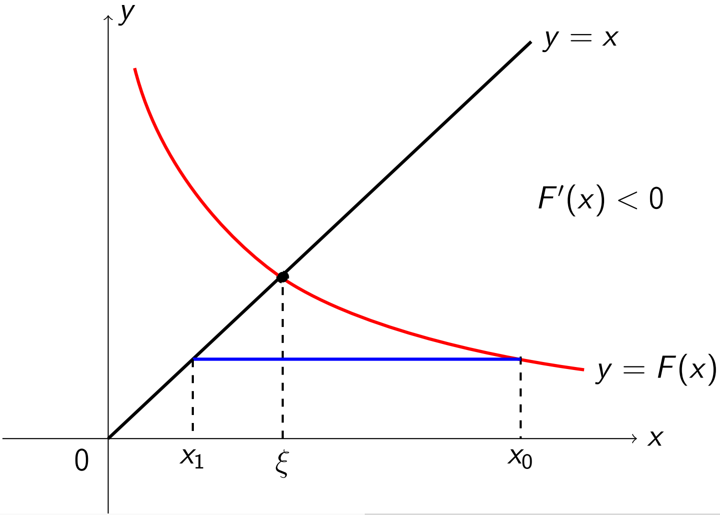
Interpretação Geométrica



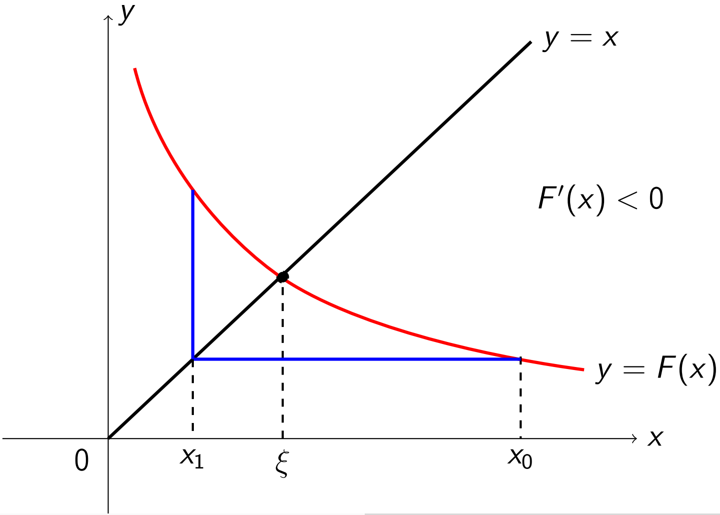
Interpretação Geométrica



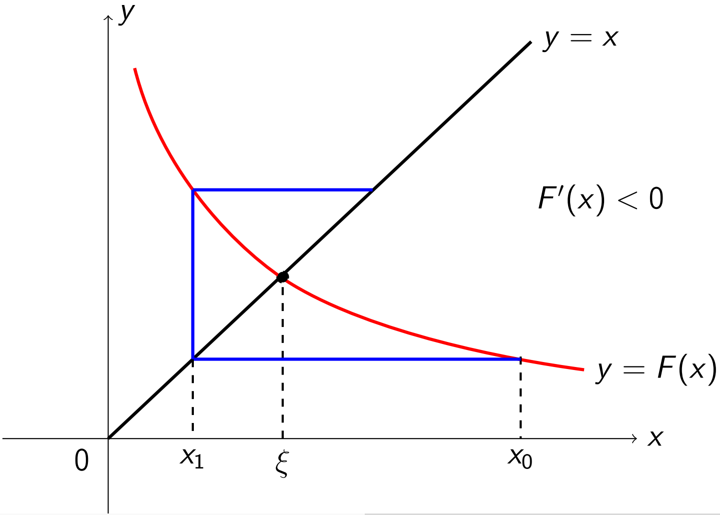
Interpretação Geométrica



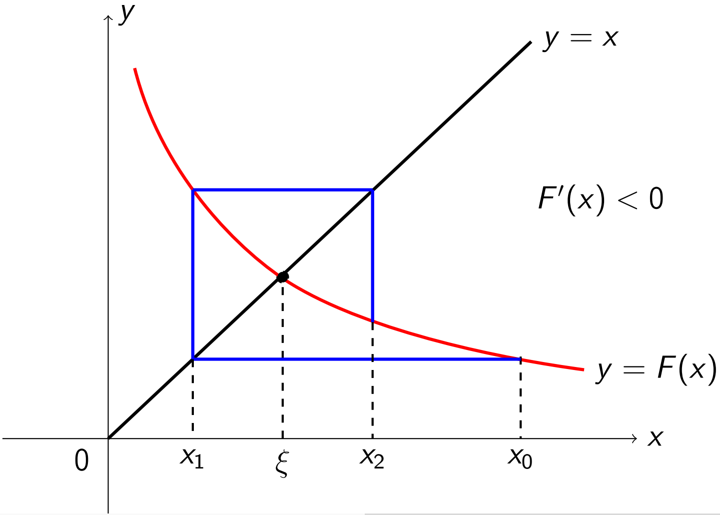
Interpretação Geométrica



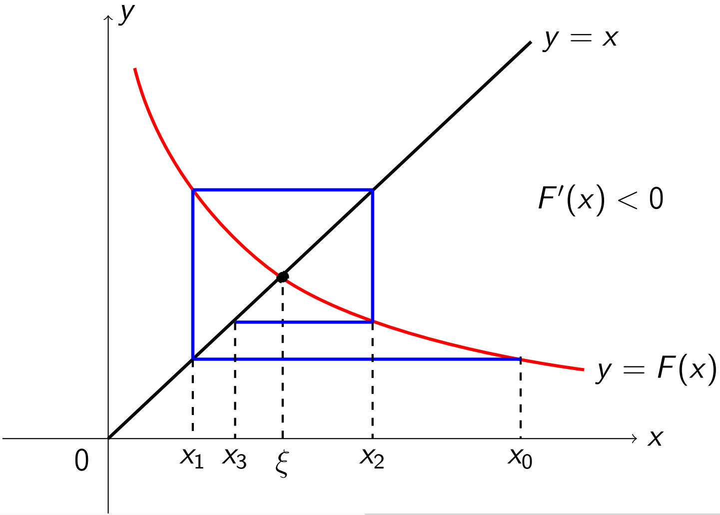
Interpretação Geométrica



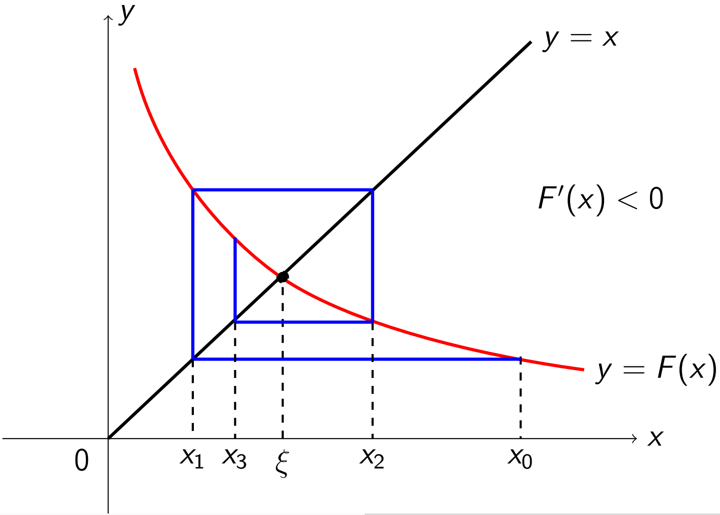
Interpretação Geométrica



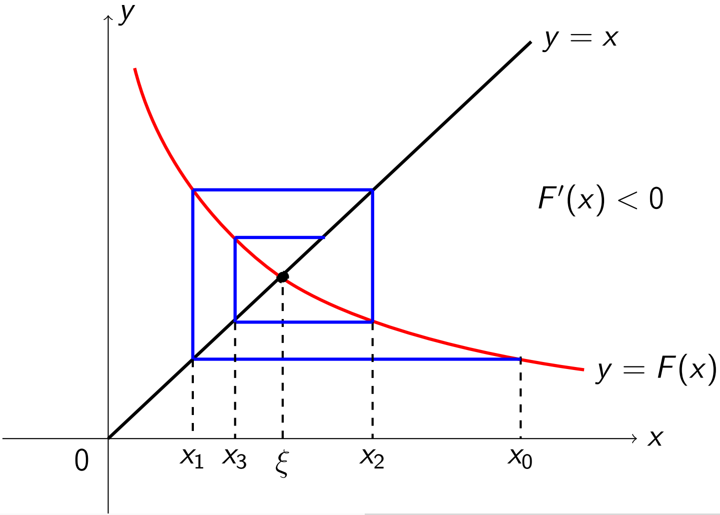
Interpretação Geométrica



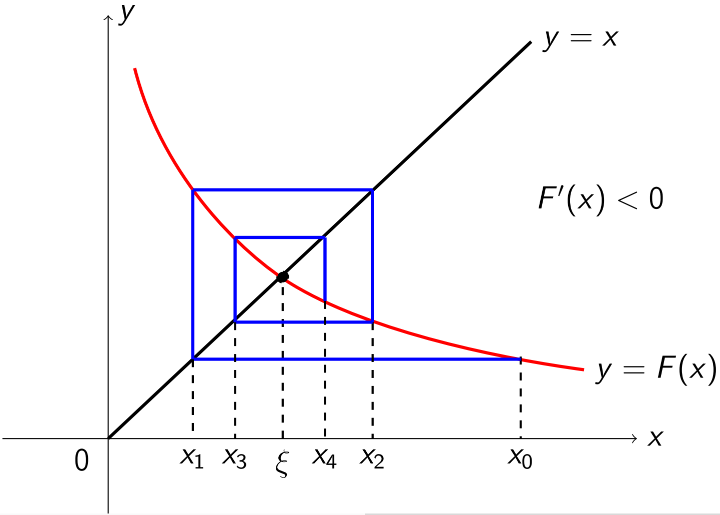
Interpretação Geométrica



Interpretação Geométrica



Interpretação Geométrica



Método do Ponto Fixo

Teorema 1.2

Seja $\xi \in [a, b]$ *uma raiz da equação* $f(x) = 0$ *e* $F(x)$ *contínua, diferenciável em* $[a, b]$ *e* $F(x) \in [a, b]$. *Se* $|F'(x)| \leq k < 1$ *para todos os pontos em* $[a, b]$ *e* $x_0 \in [a, b]$, *então, os valores dados pela equação*

$$x_{k+1} = F(x_k), k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para ξ.

Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$, podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar ξ. É oportuno enfatizar que só se deve usar uma função $F(x)$ que satisfaça o teorema anterior.

Exemplo 2.1

Seja $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, determine uma raiz de f com $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Solução: Assim como no caso analítico, devemos seguir o seguinte roteiro:

1. Escolher a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. g é contínua em $[a, b]$;
3. $g(x) \in [a, b]$;
4. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \forall x \in (a, b)$.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$, podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar ξ. É oportuno enfatizar que só se deve usar uma função $F(x)$ que satisfaça o teorema anterior.

Exemplo 2.1

Seja $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, *determine uma raiz de* f *com* $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Solução: Assim como no caso analítico, devemos seguir o seguinte roteiro:

1. Escolher a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. g é contínua em $[a, b]$;
3. $g(x) \in [a, b]$;
4. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \forall x \in (a, b)$.

Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$, podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar ξ. É oportuno enfatizar que só se deve usar uma função $F(x)$ que satisfaça o teorema anterior.

Exemplo 2.1

Seja $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, *determine uma raiz de* f *com* $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Solução: Assim como no caso analítico, devemos seguir o seguinte roteiro:

1. Escolher a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. g é contínua em $[a, b]$;
3. $g(x) \in [a, b]$;
4. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \forall x \in (a, b)$.

Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$, podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar ξ. É oportuno enfatizar que só se deve usar uma função $F(x)$ que satisfaça o teorema anterior.

Exemplo 2.1

Seja $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$*, determine uma raiz de* f *com* $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Solução: Assim como no caso analítico, devemos seguir o seguinte roteiro:

1. Escolher a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. g é contínua em $[a, b]$;
3. $g(x) \in [a, b]$;
4. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \forall x \in (a, b)$.

Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$, podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar ξ. É oportuno enfatizar que só se deve usar uma função $F(x)$ que satisfaça o teorema anterior.

Exemplo 2.1

Seja $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, *determine uma raiz de* f *com* $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Solução: Assim como no caso analítico, devemos seguir o seguinte roteiro:

1. Escolher a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. g é contínua em $[a, b]$;
3. $g(x) \in [a, b]$;
4. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k$; $\forall x \in (a, b)$.

Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$, podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar ξ. É oportuno enfatizar que só se deve usar uma função $F(x)$ que satisfaça o teorema anterior.

Exemplo 2.1

Seja $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, *determine uma raiz de* f *com* $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Solução: Assim como no caso analítico, devemos seguir o seguinte roteiro:

(i) Escolher a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
(ii) g é contínua em $[a, b]$;
(iii) $g(x) \in [a, b]$;
(iv) Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k$; $\forall\, x \in (a, b)$.

Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$, podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar ξ. É oportuno enfatizar que só se deve usar uma função $F(x)$ que satisfaça o teorema anterior.

Exemplo 2.1

Seja $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, *determine uma raiz de* f *com* $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Solução: Assim como no caso analítico, devemos seguir o seguinte roteiro:

1. Escolher a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
2. g é contínua em $[a, b]$;
3. $g(x) \in [a, b]$;
4. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k; \forall x \in (a, b)$.

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Escolha da Função de Iteração

A partir de uma função $f(x)$, podem-se obter várias funções de iteração $F(x)$, porém nem todas poderão ser utilizadas para avaliar ξ. É oportuno enfatizar que só se deve usar uma função $F(x)$ que satisfaça o teorema anterior.

Exemplo 2.1

Seja $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, *determine uma raiz de* f *com* $\varepsilon \leq 10^{-3}$.

Solução: Assim como no caso analítico, devemos seguir o seguinte roteiro:

i. Escolher a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$;
ii. g é contínua em $[a, b]$;
iii. $g(x) \in [a, b]$;
iv. Existe uma constante $0 < k < 1$ tal que, $|g'(x)| \leq k;\ \forall\, x \in (a, b)$.

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Escolhamos por exemplo, $a = 0,5$ e $b = 2$, donde

$$f(0,5) = -1,375 < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 7 > 0,$$

logo, $\xi \in [0,5\,,\,2]$. Podemos facilmente obter duas funções de iteração para $x^3 - x - 1 = 0$.

1. Isolando x em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x = F_1(x) = x^3 - 1.$$

Claramente F_1 é contínua, pois é um polinômio. Por outro lado, veja que $F_1(2) = 7 \notin [0,5,\ 2]$, logo a condição (iii) não é satisfeita, o que não nos garante a convergência do método para $F_1(x)$.

Escolhamos por exemplo, $a = 0,5$ e $b = 2$, donde

$$f(0,5) = -1,375 < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 7 > 0,$$

logo, $\xi \in [0,5\,,\,2]$. Podemos facilmente obter duas funções de iteração para $x^3 - x - 1 = 0$.

1. Isolando x em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x = F_1(x) = x^3 - 1.$$

Claramente F_1 é contínua, pois é um polinômio. Por outro lado, veja que $F_1(2) = 7 \notin [0,5,\,2]$, logo a condição (iii) não é satisfeita, o que não nos garante a convergência do método para $F_1(x)$.

Escolhamos por exemplo, $a = 0,5$ e $b = 2$, donde

$$f(0,5) = -1,375 < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 7 > 0,$$

logo, $\xi \in [0,5\,,\,2]$. Podemos facilmente obter duas funções de iteração para $x^3 - x - 1 = 0$.

1. Isolando x em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x = F_1(x) = x^3 - 1.$$

Claramente F_1 é contínua, pois é um polinômio. Por outro lado, veja que $F_1(2) = 7 \notin [0,5,\,2]$, logo a condição (iii) não é satisfeita, o que não nos garante a convergência do método para $F_1(x)$.

Escolhamos por exemplo, $a = 0,5$ e $b = 2$, donde

$$f(0,5) = -1,375 < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 7 > 0,$$

logo, $\xi \in [0,5\,,\,2]$. Podemos facilmente obter duas funções de iteração para $x^3 - x - 1 = 0$.

1. Isolando x em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x = F_1(x) = x^3 - 1.$$

Claramente F_1 é contínua, pois é um polinômio. Por outro lado, veja que $F_1(2) = 7 \notin [0,5,\ 2]$, logo a condição (iii) não é satisfeita, o que não nos garante a convergência do método para $F_1(x)$.

2 Isolando x^3 em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x^3 = x + 1$$
$$\Rightarrow F_2(x) = x = \sqrt[3]{x+1}.$$

Note que

- F_2 é contínua, pois $\mathrm{Dom}\, F_2 = \mathbb{R}$;
- Precisamos agora provar o item (iii):

$$F_2(x) \in [0,5\,,\,2], \forall\, x \in [0,5\,,\,2],$$

em outras palavras, os valores de mínimo e máximo de F_2 estão contidos em $[0,5\,,\,2]$. Para mostrar esse fato, recorramos ao conceito de derivada.

2 Isolando x^3 em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x^3 = x + 1$$
$$\Rightarrow F_2(x) = x = \sqrt[3]{x+1}.$$

Note que

a) F_2 é contínua, pois $\mathrm{Dom}\, F_2 = \mathbb{R}$;

b) Precisamos agora provar o item (iii):

$$F_2(x) \in [0,5\,,\,2], \forall\, x \in [0,5\,,\,2],$$

em outras palavras, os valores de mínimo e máximo de F_2 estão contidos em $[0,5\,,\,2]$. Para mostrar esse fato, recorramos ao conceito de derivada.

2 Isolando x^3 em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x^3 = x + 1$$
$$\Rightarrow F_2(x) = x = \sqrt[3]{x+1}.$$

Note que

a) F_2 é contínua, pois $\mathrm{Dom}\, F_2 = \mathbb{R}$;
b) Precisamos agora provar o item (iii):

$$F_2(x) \in [0,5\,,\,2],\ \forall\, x \in [0,5\,,\,2],$$

em outras palavras, os valores de mínimo e máximo de F_2 estão contidos em $[0,5\,,\,2]$. Para mostrar esse fato, recorramos ao conceito de derivada.

2 Isolando x^3 em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x^3 = x + 1$$
$$\Rightarrow F_2(x) = x = \sqrt[3]{x+1}.$$

Note que

a) F_2 é contínua, pois $\mathrm{Dom}\, F_2 = \mathbb{R}$;
b) Precisamos agora provar o item (iii):

$$F_2(x) \in [0,5\,,\,2],\ \forall\, x \in [0,5\,,\,2],$$

em outras palavras, os valores de mínimo e máximo de F_2 estão contidos em $[0,5\,,\,2]$. Para mostrar esse fato, recorramos ao conceito de derivada.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

2 Isolando x^3 em $x^3 - x - 1 = 0$:

$$x^3 = x + 1$$
$$\Rightarrow F_2(x) = x = \sqrt[3]{x+1}.$$

Note que

(a) F_2 é contínua, pois $\mathrm{Dom}\, F_2 = \mathbb{R}$;
(b) Precisamos agora provar o item (iii):

$$F_2(x) \in [0,5\,,\,2],\ \forall\, x \in [0,5\,,\,2],$$

em outras palavras, os valores de mínimo e máximo de F_2 estão contidos em $[0,5\,,\,2]$. Para mostrar esse fato, recorramos ao conceito de derivada.

Em verdade,

$$F_2'(x) = 0$$
$$\iff \frac{1}{3(1+x)^{2/3}} = 0$$
$$0 = 1 \;\; (\text{Falso!}),$$

logo, não existem extremos absolutos em $(0,5\,,\,2)$. Pelo Teorema do Valor extremos, resulta que os valores de mínimo e máximo absoluto estão nos extremos $a = 0,5$ e $b = 2$.

Em verdade,

$$
\begin{aligned}
F_2'(x) &= 0 \\
\iff \frac{1}{3(1+x)^{2/3}} &= 0 \\
0 &= 1 \quad (\text{Falso!}),
\end{aligned}
$$

logo, não existem extremos absolutos em $(0,5\,,\,2)$. Pelo Teorema do Valor extremos, resulta que os valores de mínimo e máximo absoluto estão nos extremos $a = 0,5$ e $b = 2$.

Em verdade,

$$
\begin{aligned}
F_2'(x) &= 0 \\
\iff \frac{1}{3(1+x)^{2/3}} &= 0 \\
0 &= 1 \ \text{(Falso!)},
\end{aligned}
$$

logo, não existem extremos absolutos em $(0,5\,,\,2)$. Pelo Teorema do Valor extremos, resulta que os valores de mínimo e máximo absoluto estão nos extremos $a = 0,5$ e $b = 2$.

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Em verdade,

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= 0 \\ \iff \frac{1}{3(1+x)^{2/3}} &= 0 \\ 0 &= 1 \ \text{(Falso!)}, \end{aligned}$$

logo, não existem extremos absolutos em $(0,5\,,\,2)$. Pelo Teorema do Valor extremos, resulta que os valores de mínimo e máximo absoluto estão nos extremos $a = 0,5$ e $b = 2$.

Para compreensão do fato que os extremos absolutos estão nos extremos a e b, recordemos o :

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Extremo)

Seja f contínua em $[a, b]$. Então f admite máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Para clarificar as ideias, temos duas situações em que a função $f(x)$ não possui extremos absolutos em (a, b), restando a única possibilidade em que os valores de mínimo e máximo absoluto estão nos extremos a e b.

Figura: Note que pelo fato de $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$, não existem extremos absolutos no interior de [a,b]. Logo, os extremos absolutos estão nos extremos a e b.

Para compreensão do fato que os extremos absolutos estão nos extremos a e b, recordemos o :

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Extremo)

Seja f contínua em $[a, b]$. Então f admite máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Para clarificar as ideias, temos duas situações em que a função $f(x)$ não possui extremos absolutos em (a, b), restando a única possibilidade em que os valores de mínimo e máximo absoluto estão nos extremos a e b.

Figura: Note que pelo fato de $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$, não existem extremos absolutos no interior de [a,b]. Logo, os extremos absolutos estão nos extremos a e b.

Para compreensão do fato que os extremos absolutos estão nos extremos a e b, recordemos o :

Teorema 2.1 (Teorema do Valor Extremo)

Seja f contínua em $[a, b]$. Então f admite máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Para clarificar as ideias, temos duas situações em que a função $f(x)$ não possui extremos absolutos em (a, b), restando a única possibilidade em que os valores de mínimo e máximo absoluto estão nos extremos a e b.

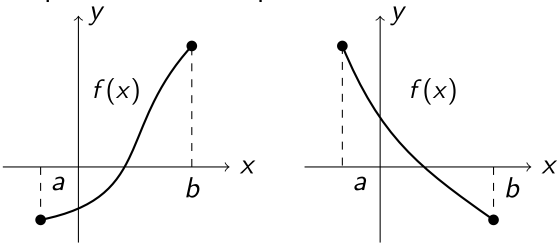


Figura: Note que pelo fato de $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in (a, b)$, não existem extremos absolutos no interior de [a,b]. Logo, os extremos absolutos estão nos extremos a e b.

Voltando ao exemplo, tendo em mente que os valores de mínimo e máximo absoluto estão nos extremos $a = 0,5$ e $b = 2$, notemos que $F_2(0,5) = 1,14$ e $F_2(2) = 1,44$, logo,

$$F_2(x) \in [0,5\,,\,2], \forall\, x \in [0,5\,,\,2],$$

o que prova o item (iii).

Finalmente, devemos provar o item (iv), a saber, devemos garantir a existência de uma constante $0 < k < 1$ tal que,

$$|F_2'(x)| \leq k; \, \forall \, x \in (0,5\,,\, 2)\,.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{(x+1)^{-2/3}}{3} \\ &= \frac{1}{3\,\underbrace{(x+1)}_{>1}{}^{2/3}} \\ &< 1, \quad \forall \, x \in (0,5\,,\, 2), \end{aligned}$$

o que prova o almejado.

Finalmente, devemos provar o item (iv), a saber, devemos garantir a existência de uma constante $0 < k < 1$ tal que,

$$|F_2'(x)| \leq k;\ \forall\, x \in (0{,}5\,,\ 2)\,.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{(x+1)^{-2/3}}{3} \\ &= \frac{1}{3\,\underbrace{(x+1)}_{>1}^{2/3}} \\ &< 1, \quad \forall\, x \in (0{,}5\,,\ 2), \end{aligned}$$

o que prova o almejado.

Finalmente, devemos provar o item (iv), a saber, devemos garantir a existência de uma constante $0 < k < 1$ tal que,

$$|F_2'(x)| \leq k; \, \forall \, x \in (0{,}5\,,\, 2)\,.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{(x+1)^{-2/3}}{3} \\ &= \frac{1}{3\,(\underbrace{x+1}_{>1})^{2/3}} \\ &< 1, \quad \forall \, x \in (0{,}5\,,\, 2), \end{aligned}$$

o que prova o almejado.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Finalmente, devemos provar o item (iv), a saber, devemos garantir a existência de uma constante $0 < k < 1$ tal que,

$$|F_2'(x)| \leq k; \; \forall\, x \in (0{,}5\,,\,2)\,.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{(x+1)^{-2/3}}{3} \\ &= \frac{1}{3\,(\underbrace{x+1}_{>1})^{2/3}} \\ &< 1, \quad \forall\, x \in (0{,}5\,,\,2), \end{aligned}$$

o que prova o almejado.

Finalmente, devemos provar o item (iv), a saber, devemos garantir a existência de uma constante $0 < k < 1$ tal que,

$$|F_2'(x)| \leq k;\ \forall\, x \in (0{,}5\,,\,2)\,.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= \frac{(x+1)^{-2/3}}{3} \\ &= \frac{1}{3\,(\underbrace{x+1}_{>1})^{2/3}} \\ &< 1, \quad \forall\, x \in (0{,}5\,,\,2), \end{aligned}$$

o que prova o almejado.

Assim, o método do ponto fixo há de convergir para $F_2(x)$, face o teorema anterior.

Escolhendo $x_0 = 1,5 \in [0,5\,,\,2]$, temos ao usar o método iterativo $x_{k+1} = F(x_k)$:

- $k = 0:$

$$x_1 = F_2(x_0) = F_2(1,5) = 1,357208808,\ |x_1 - x_0| = 0,14279 > \varepsilon = 10^{-3}.$$

- $k = 1:$

$$x_2 = F_2(x_1) = F_2(1,357208808) = 1,330860959,\ |x_2 - x_1| = 0,026347849 > \varepsilon = 10^{-3}.$$

Assim, o método do ponto fixo há de convergir para $F_2(x)$, face o teorema anterior.

Escolhendo $x_0 = 1,5 \in [0,5\,,\,2]$, temos ao usar o método iterativo $x_{k+1} = F(x_k)$:

- $k = 0$:

$$x_1 = F_2(x_0) = F_2(1,5) = 1,357208808,\ |x_1 - x_0| = 0,14279 > \varepsilon = 10^{-3}.$$

- $k = 1$:

$$x_2 = F_2(x_1) = F_2(1,357208808) = 1,330860959,\ |x_2 - x_1| = 0,026347849 > \varepsilon = 10^{-3}.$$

Assim, o método do ponto fixo há de convergir para $F_2(x)$, face o teorema anterior.

Escolhendo $x_0 = 1,5 \in [0,5\,,\,2]$, temos ao usar o método iterativo $x_{k+1} = F(x_k)$:

- $k = 0$:

$$x_1 = F_2(x_0) = F_2(1,5) = 1,357208808,\ |x_1 - x_0| = 0,14279 > \varepsilon = 10^{-3}.$$

- $k = 1$:

$$x_2 = F_2(x_1) = F_2(1,357208808) = 1,330860959,\ |x_2 - x_1| = 0,026347849 > \varepsilon = 10^{-3}.$$

- $k = 2:$

  $x_3 = F_2(x_2) = F_2(1,330860959) = 1,325883774,\ |x_3 - x_2| = 4,977185 \times 10^{-3} > \varepsilon = 10^{-3}.$

- $k = 3:$

  $x_4 = F_2(x_3) = F_2(1,325883774) = 1,324939363,\ |x_4 - x_3| = 9,4441065 \times 10^{-4} < \varepsilon = 10^{-3}.$

Doravante, $\xi \approx x_4 = 1,324939363.$

- $k = 2$:

$$x_3 = F_2(x_2) = F_2(1,330860959) = 1,325883774, \ |x_3 - x_2| = 4,977185 \times 10^{-3} > \varepsilon = 10^{-3}.$$

- $k = 3$:

$$x_4 = F_2(x_3) = F_2(1,325883774) = 1,324939363, \ |x_4 - x_3| = 9,4441065 \times 10^{-4} < \varepsilon = 10^{-3}.$$

Doravante, $\xi \approx x_4 = 1,324939363$.

- $k = 2$:

  $$x_3 = F_2(x_2) = F_2(1,330860959) = 1,325883774, \ |x_3 - x_2| = 4,977185 \times 10^{-3} > \varepsilon = 10^{-3}.$$

- $k = 3$:

  $$x_4 = F_2(x_3) = F_2(1,325883774) = 1,324939363, \ |x_4 - x_3| = 9,4441065 \times 10^{-4} < \varepsilon = 10^{-3}.$$

Doravante, $\xi \approx x_4 = 1,324939363$.

Exemplo 2.2

Obtenha uma raiz da equação $f(x) = \cos x - x = 0$ *com uma casa decimal de precisão* $(\varepsilon = 10^{-2})$.

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ