Lista de Exercícios 8 – Álgebra de Conjuntos

1. Suponha o conjunto universo $S = \{ p, q, r, s, t, u, v, w \}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{ p, q, r, s \}$
$B = \{ r, t, v \}$
$C = \{ p, s, t, u \}$

Então, determine:

a) $B \cap C$
b) $A \cup C$
c) $\sim C$
d) $A \cap B \cap C$
e) $B - C$
f) $\sim(A \cup B)$
g) $A \times B$
h) $(A \cup B) \cap \sim C$

2. Suponha o conjunto universo $S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{ 2, 4, 5, 6, 8 \}$
$B = \{ 1, 4, 5, 9 \}$
$C = \{ x \mid x \in Z \wedge 2 \leq x < 5 \}$

Então, determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \cap C$
d) $B \cup C$
e) $A - B$
f) $\sim A$
g) $A \cap \sim A$
h) $\sim(A \cap B)$
i) $C - B$
j) $(C \cap B) \cup \sim A$
k) $\sim(B - A) \cap (A - B)$
l) $\sim(\sim C \cup B)$
m) $B \times C$

3. Encontre P(S) para S = {1, 2, 3, 4}. Quantos elementos você espera que este conjunto tenha?

4. Encontre P(S) para S = {∅}.

5. O que pode ser dito sobre A se P(A) = {∅, {x}, {y}, {x, y}}?

6. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para quaisquer conjuntos A, B e C?

a) $A \cup A = A$
b) $B \cap B = B$
c) $\sim (A \cap B) = \sim A \cap \sim B$
d) $\sim (\sim A) = A$
e) $A - B = \sim (B - A)$
f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A \subset B$
h) $B \times A = A \times B$
i) $\emptyset \times A = \emptyset$
j) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$
k) $(A - B) \cup (B - C) = A - C$
l) $(A - C) \cap (A - B) = A - (B \cup C)$

7. Prove as seguintes propriedades da operação de união (suponha os conjuntos A, B e C):

a) *Elemento Neutro*.
$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

b) *Idempotência*.
$A \cup A = A$

c) *Comutatividade*.
$A \cup B = B \cup A$

8. Considere o Teorema – Associatividade da União. Observe que o *caso 1* e o *caso 2* são análogos, trocando o sentido da implicação. Seria possível reduzir essa prova a um único caso, usando equivalências? Nesse caso, como ficaria a prova?

9. Prove as seguintes propriedades da operação de intersecção (suponha o conjunto universo U e os conjuntos A, B e C):

a) *Elemento Neutro*.
$A \cap U = U \cap A = A$

b) *Idempotência*.
$A \cap A = A$

c) *Comutatividade*.
$A \cap B = B \cap A$

d) *Associatividade*.
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

10. Prove a *distributividade da união sobre a intersecção*, ou seja, que (suponha os conjuntos A, B e C):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

11. Considere a propriedade de *DeMorgan*, relacionada com a operação de complemento e que envolve as operações de união e de intersecção. Prove que a intersecção (respectivamente, a união) pode ser calculada em termos das operações de complemento e da união (respectivamente, da intersecção), ou seja que:

a) $A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$
b) $A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$

12. Prove que (suponha os conjuntos A, B e C):

a) $(A \cup B) \cap \sim A = B \cap \sim A$
b) $(A \cap B) \cup A = A$
c) $A \cup (\sim A \cap B) = A \cup B$
d) $A \cap (\sim A \cup B) = A \cap B$
e) $\sim((A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B)) = (\sim A \cap B) \cup (A \cap \sim B)$