EXEMPLO 4 Prove que $3^n - 1$ é múltiplo de 2, $\forall n \mid n \geq 1$.

Definição $n \in \mathbb{Z}$ é multiplo de 2 se e somente se $n = 2i, i \in \mathbb{Z}$.

Caso base p/ $n = 1$ $\quad 3^1 - 1$ é multiplo de 2?

$$3 - 1 = 2 = 2(1)$$

Passo Indutivo

Estágio 1: Assumimos que $3^k - 1$ é multiplo de 2 (Hipótese indutiva)

$$3^k - 1 = 2(i), i \in \mathbb{Z}.$$

Estágio 2: Queremos provar que $3^{(k+1)} - 1$ é multiplo de 2.

Estágio 3: Como podemos provar a proposição do estágio 2, considerando a hipótese indutiva?

$$X^{Y+Z} = X^Y \cdot X^Z$$

$$2 \times 3$$

$$= 3 + 3$$

$$3 \times 3^n$$

$$3^n + 3^n + 3^n$$

$$2 \cdot 3^n + 3^n$$

$$3 \cdot 3^n - 1 = 2(i)$$

$$3 \cdot 3^n - 1 = \bigcirc + 3^n - 1$$

$$3^{k+1} - 1 = 3^1 \cdot 3^k - 1$$

$$= 2 \cdot 3^k + 3^k - 1$$

$$= \underbrace{(2 \cdot 3^k)}_{\text{multiplo de 2 por def}} + \underbrace{(3^k - 1)}_{\text{multiplo de 2 por H.I.}}$$

Na ultima linha, o termo 1 $(2 \cdot 3^k)$ é da forma $2i$, $i = 3^n$, portanto, por definição o termo 1 é multiplo de 2. O termo 2 é multiplo de 2 por Hipótese indutiva. Como a soma de dois multiplos de 2 é na forma $2i$, o resultado só pode ser multiplo de 2. Portanto $3^{(k+1)} - 1$ é multiplo de 2, que é o que queríamos provar. Portanto, pelo princípio da indução matemática, $3^n - 1$ é multiplo de 2, $\forall n \mid n \geq 1$.

$$a = 2i, i \in \mathbb{Z}$$

$$b = 2j, j \in \mathbb{Z}$$

$$a + b = 2i + 2j$$

$$= 2(i + j)$$

Como $i + j \in \mathbb{Z}$, então $a + b$ é multiplo de 2.

Exemplo 5 Prove que $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2, \forall n \mid n \geq 1$.

Caso Base p/ $n=1$ $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2(1)-1 = 1$.

$1^2 = 1$.

Portanto, o caso base é verdadeiro.

Passo Indutivo

Estágio 1 Assumimos que $\sum_{i=1}^{k}(2i+1) = k^2$. (Hipótese Indutiva).

Estágio 2 Queremos provar que $\sum_{i=1}^{k+1}(2i+1) = (k+1)^2 = k^2+2k+1$

Estágio 3 Como podemos provar a proposição do estágio 2 considerando a hipótese indutiva?

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \underbrace{(2(0)-1)+(2(1)-1)+(2(2)-1)+\dots+(2(k)-1)}+(2(k+1)-1)$$ (pela notação Σ)

$$= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + (2k+2-1)$$ (pela notação Σ)

$$= k^2 + 2k + 1$$ (pela H.I)

Portanto $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = k^2+2k+1$, que é o que queríamos provar.

Portanto, pelo princípio da indução matemática

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2, \forall n \mid n \geq 1.$$

$$\boxed{T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + \Theta(n), & n > 1 \\ \Theta(1), & n = 1 \end{cases}}$$