S T Q Q S S D

__/__/__

NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES

LISTA 3

① A AFIRMAÇÃO EM QUESTÃO É DO SENTIDO DA SIGNIFICADA UMA VERDADE QUE O TEMPO DE EXECUÇÃO DO ALGORITMO VAI SE DAR PELO ATRAVÉS DO COMPORTAMENTO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

②

$T(n) = 2^{n+1}$

$T(n) = O(2^n)$?

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 = 2 \,//$$

COMO $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$, ENTÃO $T(n) = \Theta(2^n)$.

COM ISSO, COMO $T(n) = \Theta(2^n)$, ENTÃO $T(n) = O(2^n)$ ///

③ $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$

$\max(f(n), g(n)) = O(f(n) + g(n)) \wedge \Omega(f(n) + g(n))$

$$\left.\begin{array}{l} \max(f(n), g(n)) \geq g(n) \\ \max(f(n), g(n)) \geq f(n) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\max(f(n), g(n)) \geq f(n) + g(n)$$

spiral®

S T Q Q S S D

___/___/___

$$\Rightarrow \underbrace{\max(f(n); g(n))}_{f(n)} \geq \overbrace{\boxed{\tfrac{1}{2}}}^{c} \underbrace{(f(n) + g(n))}_{h(n)} \qquad \geq c \quad . \quad h(n) \geq 0$$

$\max(f(n), g(n)) = \Omega(f(n) + g(n))$ V

$$\left.\begin{aligned} f(n) &\leq f(n) + g(n) \\ g(n) &\leq f(n) + g(n) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\max(f(n); g(n)) \\ &f(n) \text{ ou } g(n) \end{aligned}$$

$\max(f(n); g(n)) \leq 1[f(n) + g(n)]$

$f(n) \leq c\, h(n)$

$\max(f(n); g(n)) = O(f(n) + g(n))$ V

4) $K \geq 1, \quad \varepsilon > 0, \quad c > 1$

1º caso

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg^K n}{n^\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \frac{K \lg n}{n^\varepsilon} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x \ln(2)}}{\varepsilon n^{\varepsilon - 1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} K \frac{1}{n \ln(2)} \cdot \frac{1}{\varepsilon n^{\varepsilon-1}} = \lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{K}{\ln(2) \cdot \varepsilon}} \cdot \frac{1}{n \cdot n^{\varepsilon - 1}}$$

$$= \frac{K}{\ln(2) \cdot \varepsilon} \cdot \lim_{n\to\infty} \cdot \frac{1}{n} = 0$$

Então A é $O(B)$

S T Q Q S S D __/__/__

2º CASO

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{c^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{k n^{k-1}}{\ln(c) \cdot c^n}$$

ENTÃO $A \in O(B)$

3º CASO

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{1/2}}{n^2} = \lim_{n \to \infty} n^{1/2 - 2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} n^{-3/2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{3/2}} = 0$$

ENTÃO A É $O(B)$

4º CASO

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^{n/2}} = \lim_{n \to \infty} 2^{n/2} = \infty$$

ENTÃO A É $\Omega(B)$

5º CASO

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\lg c}}{c^{\lg n}} = \lim \frac{n^{\lg c}}{n^{\lg c}} = \lim 1 = 1$$

ENTÃO $\begin{cases} A \text{ É } \Theta(B) \\ A \text{ É } O(B) \text{ E } \Omega(B) \end{cases}$

S T Q Q S S D

__/__/__

CASO 6

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(n!)}{\lg n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg(n!)}{n \lg(n)} = \lg_{n^n}(n!)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \log_x(x!) = \infty$$

ENTÃO A É Ω (B)

TABELA

A	B	O	Ω	Θ
$\lg^k n$	n^ε	SIM	NÃO	NÃO
n^k	c^n	SIM	NÃO	NÃO
$\sqrt{n}$	n^2	SIM	NÃO	NÃO
2^n	$2^{n/2}$	NÃO	SIM	NÃO
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	SIM	SIM	SIM
$\lg n!$	$\lg n^n$	NÃO	SIM	NÃO

*5

a) $100n^3 = ?(n^2) \therefore 100n^3 = \Omega(n^2)$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{100n^{\cancel{3}}}{\cancel{n^2}} = \infty$$

b) $\frac{1}{2}n^2 - 3n = ?(n^2) \therefore 1/2n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^{\cancel{2}} - 3\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2n^1 - 3}{n} = \lim_{n\to\infty} 1/2 = 1/2$$

spiral

S T Q Q S S D   __/__/__

c) $3n^2+20 = ?(n^2) \therefore 3n^2+20 = \Theta(n^2)$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+20}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{6\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

d) $6n = ?(n^2) \therefore 6n = O(n^2)$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{6\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = 0$$

e) $20n+2 = ?(lg(n)) \therefore 20n+2 = O(lg(n))$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{20n+2}{lg(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{20}{x\ln(2)} = \frac{20}{\ln(2)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

f) $100 = ?(1) \therefore \Theta(1)$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{100}{1} = 100$$

6

a) $\begin{cases} T(n) = n^2+2n+5 \\ T(n) = O(n^2)? \end{cases}$

POR DEFINIÇÃO, $T(n) = O(n^2)$
SE $T(n) \leq c \cdot n^2$, $\forall n \mid n \geq n_0$

$$\cancel{n^2}+2n+5 \leq c \cdot \cancel{n^2}$$
$$c \geq 2n+5$$

P/ $n=1$: $c \geq 7$ ///

___/___/___

S T Q Q S S D

b) $\begin{cases} T(n) = n \\ T(n) = O(\lg(n))\,? \end{cases}$

POR DEFINIÇÃO, $T(n) = O(\lg(n))$
SE $T(n) \leq C \cdot \lg(n)$, $\forall n \,/\, n \geq n_0$

$$n \leq C \cdot \lg(n)$$
$$C \geq \frac{n}{\lg(n)}$$

COMO C É PROPORCIONAL A n, NÃO É POSSÍVEL ENCONTRAR n CTE QUE SATISFAÇA $T(n) \leq C \lg(n)$, $\forall n \,/\, n \geq n_0$

c) $\begin{cases} T(n) = \lg n \\ T(n) = O(n^3)\,? \end{cases}$

POR DEFINIÇÃO, $T(n) = O(n^3)$
SE $T(n) \leq C \cdot n^3$, $\forall n \,/\, n \geq n_0$

$$\lg(n) \leq n^3 \cdot C$$
$$C \geq \frac{\lg(n)}{n^3}$$

P/ $n = 4$: $C \geq \frac{\lg(4)}{4^3}$

$$C \geq \frac{2}{64}$$

$$C \geq 32 \;//$$

spiral

S T Q Q S S D   __/__/__

d) $\begin{cases} T(n) = n^2 \\ T(n) = O(n\lg(n))? \end{cases}$

Por definição, $T(n) = O(n\lg(n))$ se $T(n) \leq C \cdot n\lg(n) \quad \forall n \mid n \geq n_0$

$$n^{\cancel{2}} \leq \cancel{n} \lg(n) \cdot C$$
$$C \geq \frac{n}{\lg(n)}$$

Como C é proporcional a n, não é possível encontrar n cte que satisfaça $T(n) \leq C \cdot n\lg(n)$, $\forall n \mid n \geq n_0$

e) $\begin{cases} T(n) = 3n^2 + 2n + 2 \\ T(n) = \Theta(n^2)? \end{cases}$

Por definição, $T(n) = \Theta(n^2)$ se existem $C_1 \cdot n^2 \leq T(n) \leq C_2 \cdot n^2$ p/ C_1, C_2, n_0 ctes $\forall n \mid n \geq n_0$

$$C_1 \cdot n^2 \leq 3n^2 + 2n + 2 \leq C_2 \cdot n^2$$
$$C_1 \leq 3 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \leq n^2$$

~~Lado~~ esquerdo

$$C_1 \leq 3 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}$$

p/ $n = 1$: $C_1 \leq 3 + 2 + 2$

$$\boxed{C_1 \leq 7} \quad //$$

spiral

__/__/__ S T Q Q S S D

P/ LADO DIREITO

$3 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \leq C_2$

P/ $n = 1$: $C_2 \geq 3 + 2 + 2$

$C_2 \geq 7$

CONSIDERANDO $C_1 = 7$, $C_2 = 7$ E $n_0 = 1$, $T(n) = \Theta(n^2)$

f) $\begin{cases} T(n) = \lg(2n) \\ T(n) = \Theta(\lg n)? \end{cases}$

POR DEFINIÇÃO, $T(n) = \Theta(\lg n)$
SE EXISTEM $C_1 \cdot \lg(n) \leq T(n) \leq C_2 \lg(n)$
P/ C_1, C_2, n_0 CTES $\forall n \mid n \geq n_0$

$C_1 \cdot \lg(n) \leq 2n \leq C_2 \lg(n)$

LADO ESQUERDO

$C_1 \cdot \lg(n) \leq 2n$

$C_1 \leq \frac{2n}{\lg(n)}$

P/ $n = 2$: $C_1 \leq \frac{4}{1}$

$C_1 \leq 4$

LADO DIREITO

$2n \leq C_2 \lg(n)$

$C_2 \geq \frac{2n}{\lg(n)}$ X

COMO $T(n)$ NÃO É $O(\lg n)$, ENTÃO
$T(n)$ NÃO É $\Theta(\lg(n))$.

spiral®

S T Q Q S S D

g) $\begin{cases} T(n) = \log_{10}(n) \\ T(n) = \Theta(\lg(n))? \end{cases}$

POR DEFINIÇÃO, $T(n) = \Theta(\lg(n))$
SE EXISTEM $c_1 \cdot \lg(n) \leq T(n) \leq c_2 \lg(n)$
P/ c_1, c_2, n_0 CTES $\forall n / n \geq n_0$

$$c_1 \cdot \lg(n) \leq \log_{10}(n) \leq c_2 \lg(n)$$

LADO ESQUERDO

$c_1 \cdot \lg(n) \leq \log_{10}(n)$

$c_1 \leq \dfrac{\log_{10}(n)}{\log_2(n)}$

P/ $n=2$: $c_1 \leq \log_{10}(2)$

LADO DIREITO

$\log_{10}(n) \leq c_2 \lg(n)$

$c_2 \geq \dfrac{\log_{10}(n)}{\log_2(n)}$

P/ $n=2$: $c_2 \geq \log_{10}(2)$

CONSIDERANDO $c_1 = \log_{10}(2)$, $c_2 = \log_{10}(2)$, E
$n = 2$, $T(n) = \Theta(\lg(n))$ //

spiral

__/__/__ S T Q Q S S D

*h) $\begin{cases} t(n) = n^3 + 3n \lg(n) \\ t(n) = O(n^3)? \end{cases}$

Por definição, $t(n) = O(n^3)$
se $T(n) \leq c \cdot n^3$, $\forall n / n \geq n_0$

$$n^3 + 3n \lg(n) \leq c \cdot n^3$$
$$c \geq \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} + \frac{3\cancel{n}\lg(n)}{\cancel{n} \cdot n^2}$$
$$c \geq 1 + \frac{3\lg(n)}{n^2} \quad X$$

i) $\begin{cases} t(n) = 3n+1 \\ t(n) = \Omega(n) \; ? \end{cases}$

Por definição, $t(n) = \Omega(n)$
se $c \cdot n \leq t(n)$, $\forall n / n \geq n_0$

$$c \cdot n \leq 3n + 1$$
$$c \leq \frac{3n+1}{n}$$
$$c \leq 3 + \frac{1}{n} \quad X$$

spiral