NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740

MAXIMOS E MINIMOS DE UMA FUNÇÃO

DEFINIÇÃO: SEJA $f: X \to \mathbb{R}$, DIZEMOS QUE f TEM UM MAXIMO ABSOLUTO EM UM PONTO $c \in X$, QUANDO $f(x) \leq f(c)$ PARA TODO $x \in X$. DIZEMOS QUE f TEM UM MINIMO ABSOLUTO EM UM PONTO $c \in X$ QUANDO $f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in X$.

DIZEMOS QUE f POSSUI UM MAXIMO LOCAL (OU RELATIVO) EM UM PONTO $c \in X$ QUANDO EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in \cap (c-\delta, c+\delta)$

DIZEMOS QUE f POSSUI UM MINIMO LOCAL (OU RELATIVO) EM UM PONTO $c \in X$ QUANDO EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $f(x) \geq f(c)$ $\forall x \in X \cap (c-\delta, c+\delta)$

TEOREMA: SEJA $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ E $c \in (a,b)$ UM PONTO DE MAXIMO (OU MINIMO) LOCAL DE f. SE f FOR DERIVAVEL EM c, ENTÃO $f'(c) = 0$

DEM: SEJA c UM MÁXIMO LOCAL DE f.
ENTÃO $\exists\, \delta > 0$ TAL QUE $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in (a,b) \cap (c-\delta, c+\delta)$.

SEM PERDA DE GENERALIDADE PODEMOS TOMAR δ CONVENIENTE, TAL QUE $(c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$.

RESUMINDO, TEMOS QUE $\exists\, \delta > 0$ TAL QUE $f(x) - f(c) \leq 0$ PARA TODO $x \in (c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$

QUANDO $x \in (c, c+\delta) \Rightarrow x > c \Rightarrow x - c > 0$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$$f'(c^+) \leq 0$$

NO CASO, $x \in (c-\delta, c) \Rightarrow x < c \Rightarrow x - c < 0$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$f'(c^-) \geq 0$$

COMO f É DERIVÁVEL,

$$f'(c^+) = f'(c^-) = f'(c)$$

$$f'(c^+) \le 0 \text{ e } f'(c^-) \ge 0 \Rightarrow f'(c^+) = f'(c^-) = 0$$

OU SEJA, $f'(c) = 0$ //

DEFINIÇÃO: UM PONTO $c \in D(f)$, É CHAMADO DE PONTO CRÍTICO DE f QUANDO $f'(c) = 0$ OU QUANDO f NÃO É DERIVÁVEL EM c

TEOREMA: SEJA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTÍNUA. ENTÃO f ASSUME UM VALOR MÁXIMO E UM VALOR MÍNIMO, OU SEJA, EXISTEM $x_1, x_2 \in [a,b]$ TAIS QUE

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$$

OBS: SE f FOR DIFERENCIÁVEL EM $[a,b]$

1º: RESOLVER A EQUAÇÃO $f'(x) = 0$

2º: CALCULAR f NOS PONTOS CRÍTICOS (SE EXISTIR)

3º: COMPARAR OS VALORES COM $f(a)$ E $f(b)$

EXEMPLO: ACHAR OS MAXIMOS E MINIMOS DA $l(x) = \frac{3}{5} x(30-x)$ NO INTERVALO $[0,30]$.

$$l(x) = \frac{3}{5} x(30-x) = \frac{90x}{5} - \frac{3x^2}{5}$$

$$l'(x) = \frac{90}{5} - \frac{6x}{5} = 18 - \frac{6x}{5}$$

RESOLVENDO A EQ $l'(x)=0$:

$$18 - \frac{6x}{5} = 0 \quad \therefore \quad x = 15 \,//$$

COMO $15 \in [0,30]$, ENTAO 15 É UM PONTO CRITICO DA FUNCAO l.

COMO $l(15) = \frac{3}{5}(15).(30-15) = 135$

$$l(0) = \frac{3}{5}(0)(30-0) = 0$$

$$l(30)\ \frac{3}{5}(30)(30-30 = 0$$

TEMOS QUE 15 É UM PONTO DE MAXIMO LOCAL E OS PONTOS 0 E 30 DE MINIMOS LOCAIS

EXEMPLO: $f(x) = 2x^3 - 3x^2\ 12x + 15$ NO INTERVALO $[0,3]$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\
&= 6(x^2 - x - 2) \\
&= 6(x+1)(x-2)
\end{aligned}
$$

ASSIM, $f'(x) = 0$ QUANDO $x = -1$ e $x = 2$

NOTE QUE $-1 \notin [0,3]$. COMO $2 \in [0,3]$, TEMOS QUE 2 É UM PONTO CRÍTICO DE f.

CALCULANDO;
$$
\begin{aligned}
f(2) &= 2\cdot(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 15 \\
&= 2\cdot 8 - 3\cdot 4 - 24 + 15 \\
&= 16 - 12 - 9 = -5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 2\cdot(0)^3 - 3(0)^2 - 12(0) + 15 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(3) &= 2\cdot(3)^3 - 3\cdot 3^2 - 12(3) + 15 \\
&= 2\cdot 27 - 27 - 30 + 15 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

PORTANTO, $f(2) = -15$ É MÍNIMO LOCAL
$f(0) = 15$ É MÁXIMO LOCAL

NOTE QUE NEM SEMPRE OS EXTREMIDADES DO INTERVALO SÃO MÁXIMO OU MIN LOCAL.

EXEMPLO: $f(x) = 5 - |x-3|$ NO INTERVALO $[0,5]$

SE $x - 3 \geq 0$, OU SEJA, $x \geq 3$, TEMOS $|x-3| = x-3$ e

$$f(x) = 5 - (x-3) = 5 - x + 3 = 8 - x$$

$$f'(x) = -1$$

QUANDO $x - 3 < 0$, OU SEJA, $x < 3$, TEMOS $|x-3| = -(x-3) = -x+3$ e

$$f(x) = 5 - |x-3| = 5 - (-x+3) = 5 + x - 3 = x + 2$$

$$f'(x) = 1$$

NOTE QUE, NÃO EXISTE NENHUMA SITUAÇÃO ONDE $f'(x) = 0$.

MAS $x < 3 \Rightarrow f'(x) = 1$ e
$x \geq 3 \Rightarrow f'(x) = -1$

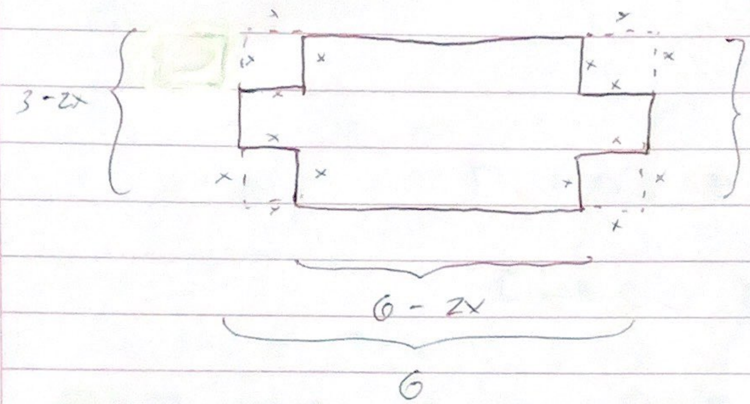
ENTÃO $f'(3)$ NÃO EXISTE, OU SEJA, 3 É UM PONTO CRÍTICO DE f

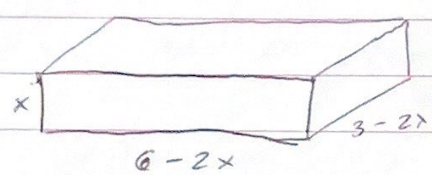
COMO $f(3) = 5 - |3-3| = 5$
$f(0) = 5 - |3-0| = 2$
$f(5) = 5 - |3-5| = 3$

PODEMOS CONCLUIR QUE

$f(3)$ É UM MÁXIMO DA FUNÇÃO
$f(0)$ É UM MÍNIMO DA FUNÇÃO

EXEMPLO





$$V = (6-2x)(3-2x)x$$
$$V = 4x^3 - 18x^2 + 18x$$

$$D(V) = [0, 3/2]$$

$$V(0) = 0$$
$$V(3/2) = 0$$

$$V'(x) = 12x^2 - 36x + 18$$

$12x^2 - 36x + 18 = 0$

$2x^2 - 6x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

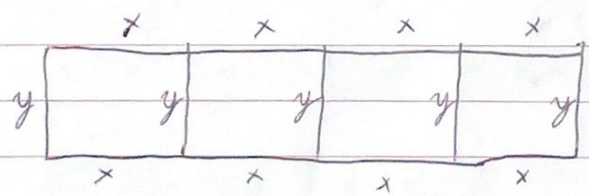
Como $\frac{3 - \sqrt{3}}{2} \in [0, 3/2]$

$\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \notin [0, 3/2]$

TEMOS QUE $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ É O ÚNICO PONTO CRÍTICO DA FUNÇÃO.

$V\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$ //

EXEMPLO



$xy = 30$, OU SEJA, $y = \frac{30}{x}$

$8x + 5y$

$$P(x) = 8x + 5\left(\frac{30}{x}\right)$$

$$P(x) = 8x + \frac{150}{x}$$

$$D(P) = [3, 10]$$

$$P'(x) = 8 - \frac{150}{x^2}$$

RESOLVENDO A EQ:

$$8 - \frac{150}{x^2} = 0 \quad \therefore \quad x = \frac{\pm 5\sqrt{3}}{2} \approx 4,34$$

$-4,34 \notin [3,10]$, ENTÃO $x \approx 4,34$ É O ÚNICO PONTO CRÍTICO

O MIN DE P, OCORRE EM 3, 10 OU 4,34.

$$P(3) = 8 \cdot 3 + \frac{150}{3} \cong 74$$

$$P(10) = 8 \cdot 10 + \frac{150}{10} = 95$$

$$P(4,34) = 8 \cdot 4,34 + \frac{150}{4,34} = 69,28$$

$x \simeq 4,34$ É UM PONTO MÍNIMO

$$y = \frac{30}{x} = \frac{30}{4,34} = 3,92$$

AS DIMENSOES DESEJADAS SAO:

$x = 4,34\ m$

$y = 6,92\ m$ //