UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Prof$^{\underline{a}}$ Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1$^{\underline{o}}$ Período de 2021

Sumário

Capítulo 8

Diagonalização

As matrizes canônicas de transformações lineares fornecem uma maneira conveniente de utilizar operações matriciais para efetuar cálculos com transformações lineares. Contudo, esse não é o único papel desempenhado pelas matrizes no estudo de transformações lineares. As **matrizes diagonais**, para muitos propositos, são os tipos mais simples de matrizes com as quais podemos trabalhar.

Diante disso, determinaremos condições sob as quais um operador linear pode ser representado por uma matriz diagonal em relação a alguma base. O conhecimento dessas condições é fundamental na análise matemática de operadores lineares e tem implicações importantes nas ciências em geral, nas engenharias e na economia em particular.

8.1 Autovalores e Autovetores

Nesta seção, apresentamos os conceitos de autovalores e autovetores. Esses conceitos desempenham um importante papel na obtenção, se possível, de uma matriz diagonal de um operador linear (ou seja, uma transformação linear de V em V) em relação à uma base do espaço vetorial associado.

Definição 1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq \overrightarrow{0}$, é dito um*

autovetor *do operador linear* T *se existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$T(v) = \lambda v.$$

O número real λ *tal que* $T(v) = \lambda v$ *é denominado* ***autovalor*** *de* T *associado ao autovetor* v*.*

Exemplo 8.1.1. *O vetor* $v = (5, 2)$ *é autovetor do operador linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*,* $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$ *associado ao autovalor* $\lambda = 6$*. Justifique.*
Solução: *Observe que:*

$$T(v) = T(5, 2) = (4 \cdot 5 + 5 \cdot 2, 2 \cdot 5 + 2) = (30, 12) = (6 \cdot 5, 6 \cdot 2) = 6(5, 2) = 6v = \lambda v.$$

Definição 2. *Dada uma matriz* $A = (a_{ij})$*, de ordem* n*, chama-se polinômio característico de* A *o seguinte polinômio de grau* n

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Proposição 8.1.1. *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

A partir do conceito de polinômio característico de uma matriz A, podemos obter o polinômio característico da matriz de um operador linear.

Definição 3. *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão* n *e* $T : V \to V$ *um operador linear. Chama-se polinômio característico de* T *o polinômio característico da matriz de* T*,* $[T]$*, em relação a qualquer base de* V*.*

Notação: $p_T(\lambda)$

Proposição 8.1.2. *Seja T um operador linear de um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n. Então, os autovalores de T são as raízes de $p_T(\lambda)$.*

Definição 4. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. O conjunto*

$$V(\lambda) = \{v \in V \,/\, T(v) = \lambda v\} = ker(T - \lambda I)$$

é dito subespaço próprio de λ.

Observação 8.1.1. *Uma vez conhecidos os autovalores de um operador linear T, podemos achar os autovetores associados a cada autovalor. Se λ é um autovalor, então os autovetores associados a λ são os vetores não nulos do núcleo de $T - \lambda I$, ou seja, $v \in ker(T - \lambda I) \Leftrightarrow (T - \lambda I)(v) = \vec{0}$.*

Exemplo 8.1.2. *Determinar os autovalores e autovetores do operador linear $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$.*
Solução: *Link da Solução.*

Exercício 8.1.1. *Determinar os autovalores e autovetores do operador linear $T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$.*
Solução: *Material Complementar.*

Propriedades:

1. Se v é um autovetor associado ao autovalor λ do operador linear T, o vetor αv, $\forall\, \alpha \neq 0$, é também um autovetor de T associado ao mesmo λ.

2. Se λ é um autovetor do operador linear $T : V \to V$, o conjunto $V(\lambda)$ de todos os autovetores $v \in V$, inclusive o vetor nulo, associados ao autovalor λ, é um subespaço vetorial de V.

3. Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico e, por isso, os mesmos autovalores.

4. Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$ são L.I.

8.2 Diagonalização de Operadores Lineares

Nesta seção, estudaremos como obter, se possível, uma base (para o espaço vetorial) de tal forma que a matriz do operador linear em relação a essa base seja uma matriz diagonal.

Recorde que, pelo estudo de matrizes, é mais fácil e prático trabalhar com matrizes diagonais, e mais, dado um operador linear T, podemos obter a sua matriz em relação a uma base dada. Assim, quando existe uma base, em relação à qual base a matriz de T é diagonalizável?

Definição 5. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. O operador $T : V \to V$ é dito diagonalizável se existe uma base de V formada por autovetores de T.*

Corolário 8.2.1. *Se $T : V \to V$ é um operador linear, $dim(V) = n$ e T possui n autovalores distintos, então o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de V.*

Proposição 8.2.2. *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ for uma base formada de autovetores de T então*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de T.

A partir do exposto acima, segue que

$$p_T(t) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - t \end{vmatrix} = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\cdots(\lambda_n - t)$$

e assim $p_T(t)$ se decompõe em fatores lineares.

De forma geral, segue o seguinte teorema.

Teorema 8.2.3. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Um operador linear $T : V \to V$ é diagonalizável se, e somente se,*

(i) *o polinômio característico de T tem todas as suas raízes em $\mathbb{R}$;*

(ii) *a multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i de T é igual à dimensão de $V(\lambda_i)$.*

Observação 8.2.1. *Sejam A a matriz canônica do operador linear T, ou seja, $[T] = A$, e D a matriz diagonal do operador linear T em relação a base formada pelos autovetores. Segue que as matrizes A e D são matrizes semelhantes por representarem o mesmo operador T em bases diferentes, ou seja,*

$$D = P^{-1}AP$$

onde P é uma matriz cujas colunas são os autovetores do operador T.

Exemplo 8.2.1. *Determinar uma matriz P que diagonaliza o operador linear dado por $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$, e calcular $P^{-1}[T]P$.*
Solução: Link da Solução.

Exercício 8.2.1. *Determinar uma matriz P que diagonaliza a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ dada e calcular $P^{-1}AP$.*

Exercício 8.2.2. *Determinar uma matriz P que diagonaliza o operador $T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$ dado e calcular $P^{-1}[T]P$.*

8.3 Aplicações

Nesta seção, apresentamos duas aplicações sobre a diagonalização de operadores lineares. Mais especificamente, por meio da diagonalização é possível calcular qualquer potência de uma dada matriz quadrada ou ainda identificar/classificar as seções cônicas.

8.3.1 Potências de uma Matriz Diagonalizável

Existem muitas aplicações que exigem o cálculo de potências elevadas de matrizes quadradas. Como essas contas podem requerer muito tempo e estão sempre sujeitas a erros de arredondamento, há muito interesse em técnicas que possam reduzir a quantidade de cálculos envolvidos.

Sejam uma matriz A de ordem $n \times n$ e P uma matriz invertível de ordem $n \times n$. Se $P^{-1}AP = D$ é uma matriz diagonal, então

$$P^{-1}A^kP = D^k$$

que pode ser reescrito como

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Exemplo 8.3.1. *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, *calcule a potência A^{13} utilizando autovalores e autovetores.*

Solução: *Link da Solução.*

8.3.2 Classificação de Seções Cônicas usando autovalores

Nesta subseção, a partir da equação de segundo grau com duas variáveis (que representam as seções cônicas já estudadas no Capítulo 5) será possível classificar/representar a cônica dada pela equação por meio dos conceitos de diagonalização. Para tanto, iniciamos com o conceito de forma quadrática.

8.3.2.1 Definição de Forma Quadrática

Definição 6. *Uma forma quadrática plana arbitrária é dada por:*

$$Q(x_1, y_1) = ax_1^2 + by_1^2 + 2cx_1y_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = x^T Ax$$

Notação: $Q_A(x)$

Exemplo 8.3.2. *Expresse a forma quadrática $2x^2 + 6xy - 5y^2$ em notação matricial $x^T Ax$, com A simétrica.*

Solução: $2x^2 + 6xy - 5y^2 = 2x^2 + 2 \cdot 3xy - 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$

Observação 8.3.1. *Se a matriz A é diagonal, a forma quadrática Q_A não tem termos mistos.*

Exemplo 8.3.3. *Seja $A = I_{2\times 2}$ determine Q_A.*

Solução: *Note que $A = I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, segue que:*

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} x^2 + y^2.$$

Portanto, $Q_A(x) = x^2 + y^2$.

8.3.2.2 Identificando e Classificando as Seções Cônicas

Recorde que a equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0$$

representa uma cônica central (incluem as circunferências, as elipses e as hipérboles, mas não as parábolas).

Podemos reescrever tal equação como

$$x^T Bx = k.$$

Assim, se $k \neq 0$, então podemos dividir tudo por k e reescrever a equação na forma

$$x^T Ax = 1$$

onde $A = \frac{1}{k}B$. Agora, girando os eixos coordenados para eliminar o termo misto (se houver) dessa equação, obtemos a equação da cônica no novo sistema de coordenadas, a saber,

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$$

na qual λ_1 e λ_2 são os autovalores de A. O tipo de cônica representado por essa equação dependerá dos sinais dos autovalares λ_1 e λ_2.

Teorema 8.3.1. *Sejam $x^T Ax = 1$ a equação de uma seção cônica e λ_1, λ_2 autovalores da matriz A. Então:*

(a) $x^T Ax = 1$ *representa uma elipse se* $\lambda_1 > 0$ *e* $\lambda_2 > 0$.

(b) $x^T Ax = 1$ *não tem gráfico se* $\lambda_1 < 0$ *e* $\lambda_2 < 0$.

(c) $x^T Ax = 1$ *representa uma hipérbole se* λ_1 *e* λ_2 *tem sinais opostos.*

Exemplo 8.3.4. *A equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ representa uma seção cônica central. Qual? Justifique.*

Solução: *Note que* $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 5x^2 - 2 \cdot 2xy + 8y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$ $x^T Bx$, *ou seja,* $x^T Bx = 36$.

Assim, tomemos $A = \frac{1}{36}B = \begin{bmatrix} 5/36 & -2/36 \\ -2/36 & 8/36 \end{bmatrix}$ *e calculamos o polinômio característico* $p_A(\lambda)$, *ou seja,* $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5/36 - \lambda & -2/36 \\ -2/36 & 8/36 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{13}{36}\lambda + \frac{1}{36}$.

Logo, $p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{13}{36}\lambda + \frac{1}{36} = 0$, *ou seja,* $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ *e* $\lambda_2 = \frac{1}{9}$.

Por fim, temos $x^T Ax = 1$, $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ *e* $\lambda_2 = \frac{1}{9}$ *são números positivos, então pelo Teorema 8.3.1 segue que a equação dada representa uma elipse.*

8.4 Exercícios sobre Diagonalização

Exercício 8.4.1. *Achar os autovalores e os autovetores do operador T do $\mathbb{R}^2$ dado por:*

(a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$

(b) $T(x, y) = (-x, -y)$

(c) $T(1, 0) = (0, -1)$ *e* $T(0, 1) = (1, 0)$.

Exercício 8.4.2. *Achar os autovalores e os autovetores do operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por:*

(a) $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ *e* $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$

(b) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ *e* $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$

Exercício 8.4.3. *Determinar autovalores e autovetores do operador linear T do $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base canônica é*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.4.4. *Calcular o polinômio característico e os autovalores das seguintes matrizes:*

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *(b)* $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *(c)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(d)* $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 8.4.5. *Calcular o polinômio característico e os autovalores da matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.4.6. *Seja* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *a matriz de um operador linear do* $\mathbb{R}^2$. *Ache os autovalores de* T. *Existem, neste caso, dois autovetores linearmente independentes?*

Exercício 8.4.7. *Determinar, se possível, uma matriz* $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *de maneira que* $M^{-1}AM$ *seja diagonal, nos seguintes casos:*

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ *(b)* $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 8.4.8. *Determinar uma matriz* $M \in M_4(\mathbb{R})$, *invertível, tal que* $M^{-1}AM$ *seja diagoanal, sendo*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.4.9. *Determinar uma matriz* $M \in M_3(\mathbb{R})$, *invertível, tal que* $M^{-1}AM$ *seja diagoanal, sendo*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.4.10. *Achar uma matriz diagoanal semelhante à matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercício 8.4.11. *Estudar quanto à possibilidade de diagonalização as matrizes:*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 8.4.12. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear cuja matriz relativa à base canônica é*

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Achar os autovalores de A.

(b) Achar uma matriz ortonormal do $\mathbb{R}^3$ em relação à qual a matriz de A é diagonal.

(c) Achar uma matriz M ortogonal ($M^{-1} = M^t$) tal que $M^t(a_{ij})M$ é a matriz diagonal obtida em (b).

Exercício 8.4.13. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definida por*

$$A(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

(a) Achar os autovalores de A.

(b) Achar uma base ortonormal B do $\mathbb{R}^3$ tal que $[A]_B$ é diagonal.

(c) Qual a matriz de mudança da base canônica do $\mathbb{R}^3$ para B.

Capítulo 9

Espaços Vetoriais com Produto Interno

Neste capítulo, iremos generalizar o conceito de produto escalar entre dois vetores, para tanto, recorde que no Capítulo 3 sobre vetores, foi definido o produto escalar (produto interno usual) de dois vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$ e foram estabelecidas, por meio desse produto, algumas propriedades desses vetores.

A partir dessa generalização, definiremos as noções de comprimento, distância e ângulo em espaços vetoriais mais genéricos.

9.1 Definição e Exemplos

Nesta seção, apresentamos a definição de produto interno e alguns exemplos. Observe que o conceito de produto escalar é um exemplo de produto interno.

Definição 7. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Define-se por* ***produto interno*** *sobre V uma função que transforma cada par ordenado $(u, v) \in V \times V$ em um número real, que indicaremos por $< u, v >$, que satisfaz as seguintes propriedades, $\forall\, u,\ v,\ w \in V$ e $k \in \mathbb{R}$:*

(a) $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$

(b) $< ku, v >= k < u, v >$

(c) $< u, v >=< v, u >$

(d) $< u, u > \geq 0$ *e* $< u, u >= 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$

Definição 8. *Um espaço vetorial real com produto interno (ou simplesmente espaço euclidiano) é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *munido com produto interno.*

Exemplo 9.1.1. *Se* $u = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $v = (y_1, y_2, y_3)$ *são vetores quaisquer do* $\mathbb{R}^3$*, o número real*

$$< u, v >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

define o produto interno usual no $\mathbb{R}^3$*.*

Exemplo 9.1.2. *Se* $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *são* n*-uplas no* $\mathbb{R}^n$ *então temos que o* ***produto interno*** *usual no* $\mathbb{R}^n$ *de* u *por* v *é dado por*

$$< u, v >= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Exemplo 9.1.3. *No espaço vetorial* $V = \mathbb{R}^2$*, a função que associa a cada par de vetores* $u = (x_1, y_1)$ *e* $v = (x_2, y_2)$ *o número real* $< u, v >= 3x_1x_2 + 4y_1y_2$ *é um produto interno.*
Solução: *Link da Solução.*

Observação 9.1.1. *Em geral existem muitos produtos internos diferentes sobre o mesmo espaço vetorial.*

Exemplo 9.1.4. *Seja* $V = P_2$*,* $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *e* $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ *vetores quaisquer de* P_2*. A fórmula*

$$< p(x), q(x) >= a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$$

define um produto interno em P_2*.*

Exemplo 9.1.5. *Seja V o espaço das funções reais contínuas no intervalo $[a, b]$. Se f e g pentencem a V,*

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

define sobre V um produto interno.

Exemplo 9.1.6. *É um produto interno sobre o espaço $P_n(\mathbb{R})$ a aplicação dada por*

$$< f(x), g(x) >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios quaisquer de $P_n(\mathbb{R})$.

Propriedades:

(1) $< \overrightarrow{0}, u >=< u, \overrightarrow{0} >= 0, \forall\, u \in V$

(2) $< u, kv >= k < u, v >, \forall\, k \in V$ e $\forall\, u,\, v \in V$

(3) $< u, v + w >=< u, v > + < u, w >, \forall\, u,\, v,\, w\, \in V$.

9.1.1 Norma de um Vetor

Definição 9. *Dado um vetor v de um espaço vetorial euclidiano V, chama-se **norma** (módulo ou comprimento) de v o número real não-negativo definido por*

$$\| v \|= \sqrt{< v, v >}.$$

Exemplo 9.1.7. *Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$, dado $v = (x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$, calcule $\| v \|$.*

Solução: $\| v \|= \sqrt{< v, v >} = \sqrt{< (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) >} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

Exemplo 9.1.8. *Considere o espaço* $P_n(\mathbb{R})$ *munido com o produto interno* $< f(x), g(x) >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$*. Calcule* $\| x^2 \|$*.*

Solução: $\| x^2 \| = \sqrt{< x^2, x^2 >} = \sqrt{\int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \sqrt{\frac{1^5}{5} - \frac{0}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

Propriedades da Norma de um Vetor: Seja V um espaço vetorial euclidiano.

1. $\| v \| \geq 0$, para todo vetor $v \in V$ e $\| v \| = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

2. $\| \alpha v \| = |\alpha| \| v \|$, para todo vetor $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $| < u, v > | \leq \| u \| \cdot \| v \|$, para quaisquer vetores $u, v \in V$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

4. $\| u+v \| \leq \| u \| + \| v \|$ para quaisquer vetores $u, v \in V$ (Desigualdade Triangular).

Observação 9.1.2. *1. Se* $\| v \| = 1$*, ou seja,* $\sqrt{< v, v >} = 1$*, o vetor* v *é dito vetor unitário. Diz-se, nesse caso, que* v *é normalizado.*

2. Todo vetor não-nulo $w \in V$ *pode ser normalizado, fazendo*

$$u = \frac{w}{\| w \|}$$

ou seja, $\| u \| = 1$*.*

Exemplo 9.1.9. *Considere* $V = \mathbb{R}^3$ *com o produto interno* $< u, v >= 3x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$*, sendo* $u = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $v = (x_2, y_2, z_2)$*. Calcule* $\| v \|$*, onde* $v = (-2, 1, 2)$ *e, caso* $\| v \| \neq 1$*, normalize-o.*

Solução: *Note que pela definição de produto interno dado e norma de um vetor, temos*
$\| v \| = \| (-2, 1, 2) \| = \sqrt{< (-2, 1, 2), (-2, 1, 2) >} = \sqrt{3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot 1^2 + 2^2} = \sqrt{18}$.
E mais, $\| (-2, 1, 2) \| \neq 1$*, ou seja, é necessário normalizá-lo. Assim, obtemos que o vetor normalizado é dado por* $u = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{18}}(-2, 1, 2) = (\frac{-2}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{2}{\sqrt{18}}) = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3})$.

Exemplo 9.1.10. *Considere* $V = \mathbb{R}^3$ *com o produto interno usual. Dado* $v = (-2, 1, 2)$ *calcule* $\| v \|$ *e normalize-o, se necessário.*

Solução: *Note que pela definição de produto interno usual e norma de um vetor, temos* $\| v \| = \| (-2, 1, 2) \| = \sqrt{< (-2, 1, 2), (-2, 1, 2) >} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$

E mais, $\| (-2, 1, 2) \| \neq 1$*, ou seja, é necessário normalizá-lo. Assim, obtemos que o vetor normalizado é dado por* $u = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{3}(-2, 1, 2) = (\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Observação 9.1.3. *O módulo de um vetor depende do produto interno utilizado. Reveja os dois últimos exemplos.*

Definição 10. *Chama-se distância entre dois vetores* u *e* v *o número real*

$$d(u, v) = \| u - v \| .$$

Definição 11. *Sejam* u *e* v *vetores não-nulos de um espaço vetorial euclidiano* V *e* θ *o ângulo entre os vetores* u *e* v*. O cosseno de tal ângulo é dado por:*

$$cos\, \theta = \frac{< u, v >}{\| u \| \| v \|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Exercício 9.1.1. *Dado* $u = (2, 1, -5)$ *e* $v = (5, 0, 2)$ *vetores em* $\mathbb{R}^3$*, com produto interno usual. Calcule a distância e o ângulo entre os vetores* u *e* v*.*

9.2 Ortogonalidade

Definição 12. *Seja* V *um espaço vetorial euclidiano. Dizemos que dois vetores* u *e* v *em* V *são* ortogonais *se, e somente se,* $< u, v >= 0$.

Notação: $u \perp v$

Definição 13. *Seja V um espaço vetorial euclidiano. Dizemos que um conjunto de vetores* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ *é* ortogonal *se quaisquer dois vetores, distintos, são ortogonais, isto é,* $< v_i, v_j >= 0$ *para todo* $i \neq j$.

Definição 14. *Seja V um espaço euclidiano. Um conjunto $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\} \subset V$ se diz ortonormal se, e somente se,*

(i) $\| u_i \|= 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, r$ *e*

(ii) *dois vetores quaisquer de S, distintos entre si, são ortogonais.*

Exemplo 9.2.1. *Seja $V = \mathbb{R}^2$ com $< u, v >=< (x_1, y_1), (x_2, y_2) >= x_1x_2 + 2y_1y_2$. Os vetores $u = (-3, 2)$ e $v = (4, 3)$ são ortogonais?*

Solução: *Link da Solução.*

Exercício 9.2.1. *No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, o conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é ortonormal?*

Proposição 9.2.1. *Todo conjunto ortonormal $S = \{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ contido num espaço vetorial euclidiano é necessariamente L.I.*

Proposição 9.2.2. *Seja $S = \{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ um subconjunto ortonormal do espaço vetorial euclidiano V. Então, $\forall\, u \in V$, o vetor*

$$v = u- < u, g_1 > g_1- < u, g_2 > g_2 - \ldots - < u, g_r > g_r$$

é ortogonal a todo vetor do subespaço gerado pelos vetores de S.

Definição 15. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se um conjunto $B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ for uma base de V e simultaneamente for um conjunto ortonormal, então dizemos que B é uma base ortonormal de V.*

Observação 9.2.1. *Em muitos problemas envolvendo espaços vetoriais, temos liberdade de escolher uma base apropriada para o espaço vetorial.*

*Em espaços vetoriais com produto interno a solução de um problema é muitas vezes simplificada pela escolha de uma base na qual os vetores são **ortogonais entre si**.*

Exemplo 9.2.2. *1) $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ (base canônica).*
2) $B = \{(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\}$ é também uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$.
3) $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ (base canônica).

Observação 9.2.2. *Uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal normalizando cada vetor.*

Exemplo 9.2.3. *Dado a base ortogonal $B = \{(1,1,1),(-2,1,1),(0,-1,1)\}$ em relação ao produto interno usual, obtenha uma base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal.*
Solução: Note que a base B dada é ortogonal, e então para obtermos uma base ortonormal é apenas necessário que normalizemos cada um dos vetores da base B, pois os vetores resultantes da normalização preservam a direção e o sentido dos vetores originais (consequentemente, preservam a ortogonalidade).
Assim, normalizando os vetores da base B, obtemos:

$$u_1 = \frac{1}{\| v_1 \|} v_1 = \frac{1}{\| (1,1,1) \|}(1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\| v_2 \|} v_2 = \frac{1}{\| (-2,1,1) \|}(-2,1,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1) = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$u_3 = \frac{1}{\| v_3 \|} v_3 = \frac{1}{\| (0,-1,1) \|}(0,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Portanto, $B' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ *é uma base ortonormal do* $\mathbb{R}^3$ *obtida a partir da base ortogonal* B*.*

Teorema 9.2.3 (Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt)**.** *Todo espaço vetorial euclidiano de dimensão finita admite uma base ortonormal.*

Exemplo 9.2.4. *Seja* $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ *uma base não-ortogonal do* $\mathbb{R}^3$ *em relação ao produto interno usual. Obter uma base ortonormal.*
Solução: *Link da Solução.*

Exercício 9.2.2. *Aplicar o Processo de Gram-Schmidt à base* $B = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,2)\}$ *considerando o produto interno usual.*

9.3 Exercícios sobre Espaços Vetoriais com Produto Interno

Exercício 9.3.1. *Sejam* $u = (x_1, y_1)$ *e* $v = (x_2, y_2)$*. Mostrar que cada operação a seguir define um produto interno no* $\mathbb{R}^2$*:*
(a) $< u, v >= x_1x_2 + y_1y_2$
(b) $< u, v >= 2x_1x_2 + 5y_1y_2$
(c) $< u, v >= x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2$

Exercício 9.3.2. *Sejam* $u = (x_1, y_1)$ *e* $v = (x_2, y_2)$ *de* $V = \mathbb{R}^2$*. Verificar quais das funções* $< u, v >: V \times V \to \mathbb{R}$*, definidas abaixo, são produtos internos em* V*:*
(a) $< u, v >= 2x_1x_2 + 3y_1y_2$
(b) $< u, v >= x_1x_2 - y_1y_2$
(c) $< u, v >= x_1^2x_2 + y_1y_2^2$

(d) $< u, v >= 4x_1x_2$

(e) $< u, v >= x_1x_2 + y_1y_2 + 1$

(f) $< u, v >= 3x_1^2x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2^2$

Exercício 9.3.3. *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e os vetores* $u = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $v = (x_2, y_2, z_2)$. *Verificar quais das funções* $< u, v >: V \times V \to \mathbb{R}$, *definidas abaixo, são produtos internos sobre o* $\mathbb{R}^3$*:*

(a) $< u, v >= x_1x_2 + 3y_1y_2$

(b) $< u, v >= 3x_1x_2 + 5y_1y_2 + 2z_1z_2$

(c) $< u, v >= 2x_1^2y_1^2 + 3x_2^2y_2^2 + z_1^2z_2$

(d) $< u, v >= x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$

(e) $< u, v >= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - x_2y_1 - x_1y_2$

Exercício 9.3.4. *Consideremos o seguinte produto interno em* P_2*:* $< p, q >= a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$, *sendo* $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *e* $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$. *Dados os vetores* $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ *e* $p_3 = 1 - x^2$, *calcular:*

(a) $< p_1, p_2 >$

(b) $\| p_1 \|$ *e* $\| p_3 \|$

(c) $\| p_1 + p_2 \|$

(d) $\frac{p_2}{\|p_2\|}$

(e) cosseno do ângulo entre p_2 *e* p_3.

Exercício 9.3.5. *Se* $u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ *e* $v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ *são matrizes quaisquer de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *a seguinte fórmula define um produto interno nesse espaço:*

$$< u, v >= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$

Dados os vetores $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *determinar:*

(a) $\|u + v\|$

(b) o ângulo entre u *e* v.

Exercício 9.3.6. *No espaço* $V = P_2$ *consideremos o produto interno* $< f(t), g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$. *Calcular* $< f(t), g(t) >$ *e* $\|f(t)\|$ *para* $f(t) = t^2 - 2t$ *e* $g(t) = t + 3$.

Exercício 9.3.7. *Consideremos, no $\mathbb{R}^3$, o produto interno usual. Para que valores de m os vetores u e v são ortogonais?*
(a) $u = (3m, 2, -m)$ *e* $v = (-4, 1, 5)$
(b) $u = (0, m-1, 4)$ *e* $v = (5, m-1, -1)$

Exercício 9.3.8. *Consideremos, no $\mathbb{R}^3$, o seguinte produto interno:*$< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) >= 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2$. *Determinar, em relação a esse produto interno, um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores* $u = (1, -1, 2)$ *e* $v = (2, 1, 0)$.

Exercício 9.3.9. *Consideremos as seguintes bases do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$:*
(a) $B = \{(3, 4), (1, 2)\}$
(b) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$
(c) $B = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$
Ortonormalizar essas bases pelo processo de Gram-Schmidt, segundo o produto interno usual de cada espaço.

Exercício 9.3.10. *Em relação ao produto interno usual, determinar uma base ortonormal dos seguintes subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$:*
(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y - 2z = 0\}$
(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BIANCHINI, Waldecir. *Planos.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/VXMuWTtE

[3] BOBKO, Nara. *Seções Cônicas.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/g3y7bq68

[4] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[5] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[6] CASSOL, Henrique L. G. *Equações Paramétricas da reta.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/RqkquH6P

[7] LEMKE, Raiane. *Retas no* $\mathbb{R}^3$*: Parametrização e gráfico de retas no* $\mathbb{R}^3$. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4

[8] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[9] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[10] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[11] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[12] RODRIGUES, Aroldo, E. A. *Atividade sobre Quádricas*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xraxuttv

[13] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[14] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.