UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profª Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Capítulo 7

Transformações Lineares

Até agora, estudamos alguns aspectos intrínsecos dos espaços vetoriais finitamente gerados: base e dimensão, por exemplo. Agora, examinaremos correspondências entre os espaços vetoriais.

7.1 Introdução

Iniciamos recordando alguns conceitos sobre aplicações.

Definição 1. *Dados dois conjuntos U e V, ambos não vazios, uma aplicação de U em V é uma "lei"pela qual a cada elemento de U está associado um único elemento de V. O conjunto U é o domínio e o conjunto V é o contra-domínio da aplicação T.*

Notação: $\begin{array}{rccc} T: & U & \to & V \\ & u & \mapsto & T(u) \end{array}$

Exemplo 7.1.1. *Dado $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (3x,-2y,x-y)$, calcule $T(2,1)$ e $T(0,1)$.*
<u>*Solução:*</u> *Primeiro, considerando $(x,y) = (2,1)$, obtemos $T(2,1) = (3\cdot 2, -2\cdot 1, 2-1) = (6,-2,1)$. Por fim, ao considerar $(x,y) = (0,1)$, segue que $T(0,1) = (3\cdot 0, -2\cdot 1, 0-1) = (0,-2,-1)$.*

Definição 2. *Duas aplicações* $T_1 : U \to V$ *e* $T_2 : U \to V$ *são iguais se, e somente se,* $T_1(u) = T_2(u)$, $\forall\, u \in U$.

Definição 3. *Uma aplicação* $T : U \to V$ *se diz injetora se, e somente se,* $\forall\, u_1, u_2 \in U$,

$$T(u_1) = T(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2.$$

Definição 4. *Uma aplicação* $T : U \to V$ *se diz sobrejetora se, e somente se,*

$$\forall\, v \in V, \exists\, u \in U \texttt{ tal que } T(u) = v.$$

(Ou seja, $Im(T) = V$*).*

Definição 5. *Uma aplicação* $T : U \to V$ *se diz bijetora se, e somente se,* T *é injetora e é sobrejetora.*

7.2 Definição e Exemplos

Definição 6. *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$. *Uma aplicação* $T : U \to V$ *é dita uma transformação linear de* U *em* V *se, e somente se,*

(a) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, $\forall\ u_1,\ u_2 \in U$;

(b) $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\ u_1 \in U$.

Observação 7.2.1.

- *O conjunto de todas as transformações lineares de* U *em* V *é denotado por:*

$$\mathcal{L}(U, V)$$

- *Uma transformação linear de U em U é chamada* ***operador linear*** *sobre U.*

- *Uma transformação linear de U em $\mathbb{R}$ é chamada* ***funcional linear*** *e*

$$\mathcal{L}(U, \mathbb{R}) = U^*$$

  espaço vetorial dual de U.

- $\mathcal{L}(U, V) = \{T : U \to V \ / \ T$ `é transformação linear` $\}$ *é um espaço vetorial com as operações:*

  1. $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$
  2. $(\alpha T_1)(v) = \alpha T_1(v)$

Exemplo 7.2.1. *A aplicação $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = 2x$ é uma transformação linear.*
Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 7.2.2. *A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é linear.*
Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 7.2.3. *A aplicação $I : V \to V$ dada por $I(v) = v$ é linear (dita transformação/operador identidade).*
Solução: De fato, sejam u, $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que:

1. $I(u + v) = u + v = I(u) + I(v)$
2. $I(\alpha v) = \alpha v = \alpha I(v)$.

Portanto, $I(v) = v$ é uma transformação linear.

Exemplo 7.2.4. *A aplicação* $T : U \to V$ *dada por* $T(u) = \overrightarrow{0}$ *é linear (dita transformação linear nula).*

Solução: De fato, sejam $u,\ v \in U$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, segue que:*

1. $T(u+v) = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha v) = \overrightarrow{0} = \alpha \overrightarrow{0} = \alpha T(v)$.

Portanto, $T(v) = \overrightarrow{0}$ *é uma transformação linear.*

Exemplo 7.2.5. *Seja a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. *Essa matriz determina a transformação* $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T_A(v) = Av$*, que é linear.*

Solução: Sejam $u,\ v \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Temos que:*

1. $T_A(u+v) = A \cdot (u+v) = A \cdot u + A \cdot v = T_A(u) + T_A(v)$
2. $T_A(\alpha v) = A \cdot (\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha T_A(v)$.

Portanto, $T_A(v) = A \cdot v$ *é uma transformação linear.*

Exercício 7.2.1. *A aplicação* $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ *dada por* $D(f(x)) = \dfrac{df}{dx} = f'(x)$ *é uma transformação linear.*

Exercício 7.2.2. *A aplicação* $T : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ *dada por* $T(f(t)) = \int_a^b f(t)dt,\ \ a, b \in \mathbb{R}$ *é uma transformação linear.*

Exemplo 7.2.6. *A aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $T(x, y) = 3x + 1$ *não é uma transformação linear.*

Solução: Link da Solução.

Propriedades: Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

1. $T(\overrightarrow{0_U}) = \overrightarrow{0_V}$ (T transforma o vetor nulo de U no vetor nulo de V).

2. $T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n)$

3. $T(-u) = -T(u), \ \forall \ u \in U$

4. $T(u - v) = T(u) - T(v)$

7.3 Interpretação Geométrica

Nesta seção, vamos estudar uma interpretação geométrica das transformações lineares, apresentando exemplos de transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$

7.3.1 Transformações Lineares Planas

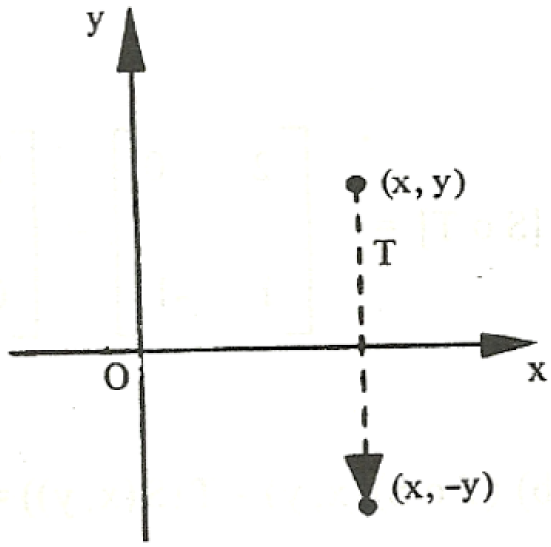
Nesta subseção estudaremos exemplos de transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Mais especificamente, veremos que as expansões, contrações, rotações e certas deformações em objetos planos podem ser descritas por transformações lineares.

7.3.1.1 Reflexões

Exemplo 7.3.1. ***(Reflexão em torno do eixo dos** x**)*** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T(x, y) = (x, -y).$$

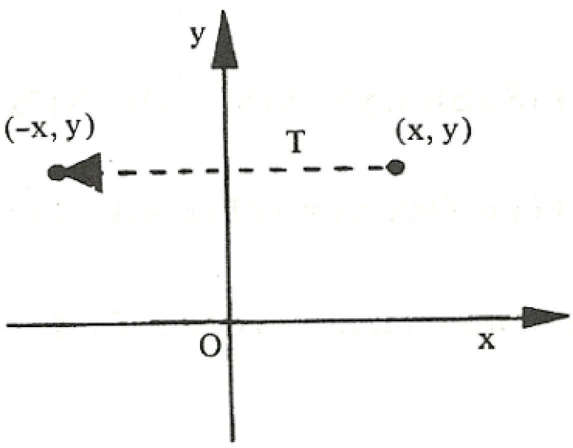
Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) *para sua imagem* $(x, -y)$*, simétrica em relação ao eixo dos* x.



Exemplo 7.3.2. ***(Reflexão em torno do eixo dos*** y***)*** *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

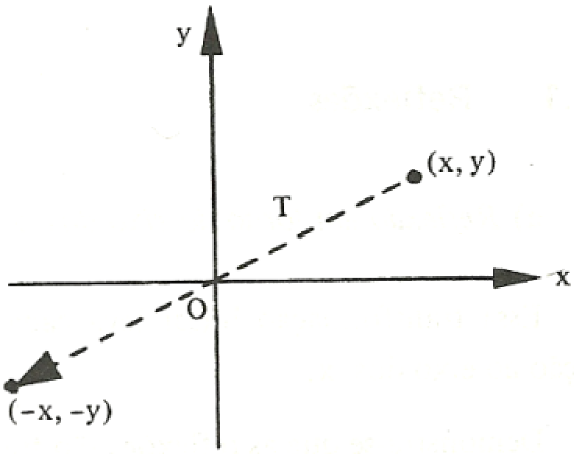
$$T(x, y) = (-x, y).$$

Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(-x, y)$, simétrica em relação ao eixo dos y.



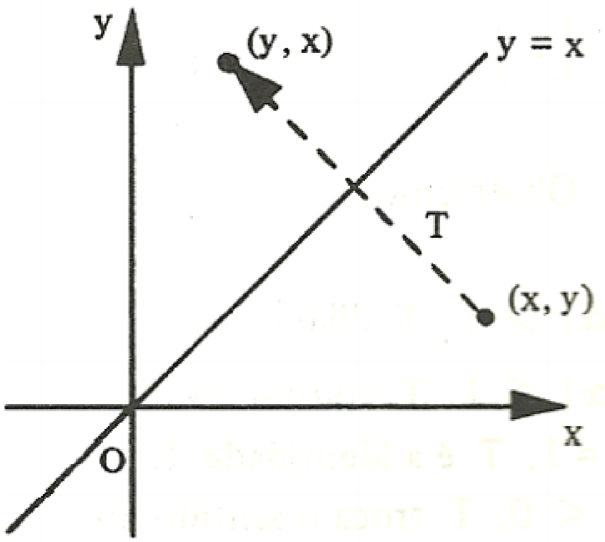
Exemplo 7.3.3. ***(Reflexão na origem)*** *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$T(x, y) = (-x, -y).$$



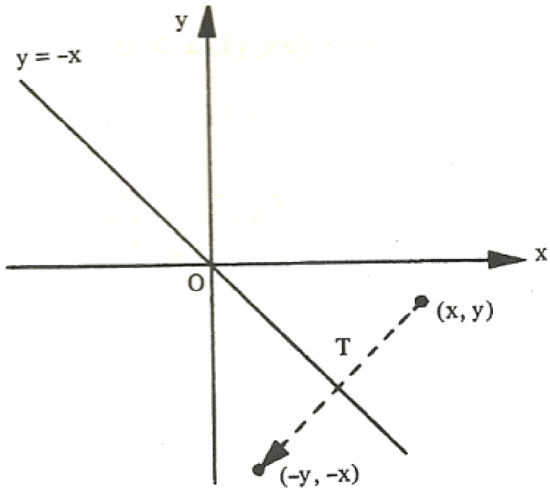
Exemplo 7.3.4. ***(Reflexão em torno da reta*** $y = x$***)*** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T(x, y) = (y, x).$$



Exemplo 7.3.5. ***(Reflexão em torno da reta*** $y = -x$***)*** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

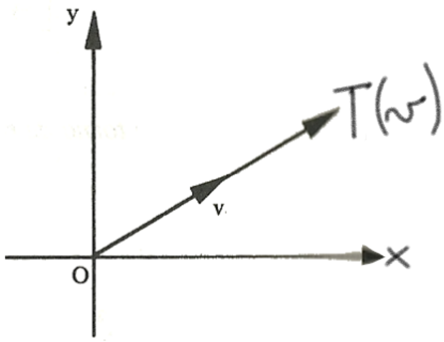
$$T(x, y) = (-y, -x).$$



7.3.1.2 Dilatações e Contrações

Exemplo 7.3.6. ***(Dilatação ou contração na direção do vetor)*** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T(x, y) = \alpha(x, y), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$



Observe que:

se $|\alpha| > 1$, *T dilata o vetor;*

se $|\alpha| < 1$, *T contrai o vetor;*

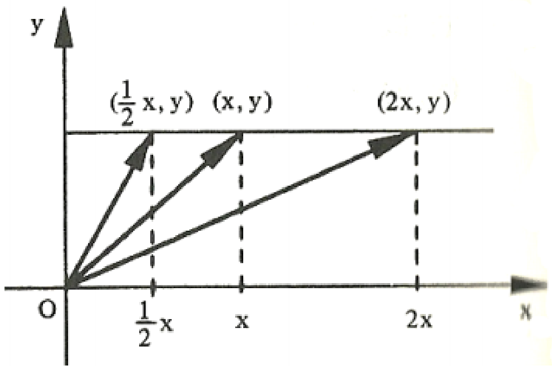
se $\alpha = 1$, *T é a identidade I;*

se $\alpha < 0$, *T troca o sentido do vetor.*

Observação 7.3.1. ***(Contração de fator $\frac{1}{2}$)*** *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)$.*

Exemplo 7.3.7. ***(Dilatação ou contração na direção do eixo dos x)*** *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$T(x,y) = (\alpha x, y),\ \alpha > 0.$$



Observe que:

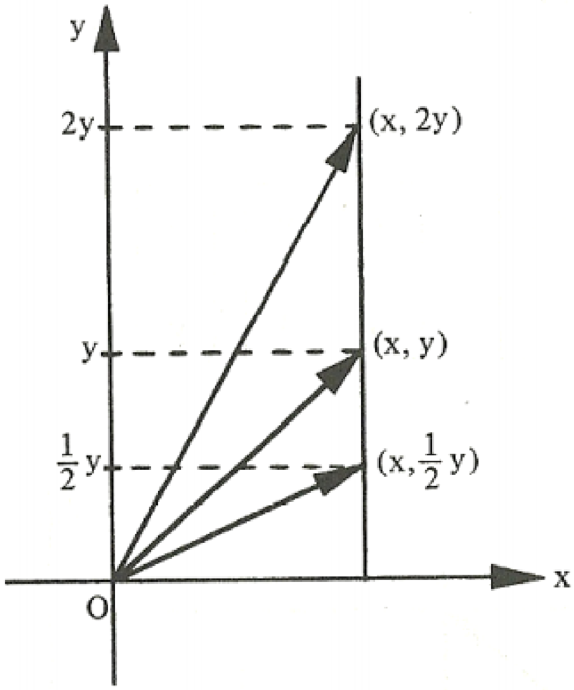
se $\alpha > 1$, T dilata o vetor;

se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor.

Observação 7.3.2. ***(Dilatação de fator 2 na direção do eixo dos x)*** *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (2x, y)$.*

Exemplo 7.3.8. ***(Dilatação ou contração na direção do eixo dos y)*** *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$T(x,y) = (x, \alpha y),\ \alpha > 0.$$



Observe que:

se $\alpha > 1$, T dilata o vetor;

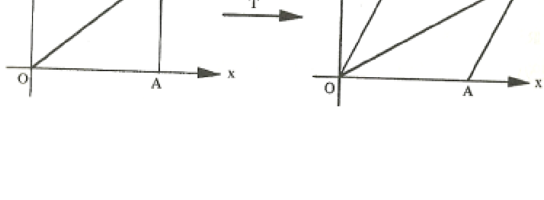
se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor.

Observação 7.3.3. ***(Dilatação de fator** 2 **na direção do eixo** y**)*** *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x, 2y)$.*

7.3.1.3 Cisalhamento

Exemplo 7.3.9. ***(Cisalhamento horizontal de fator** α**)*** *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$T(x, y) = (x + \alpha y, y).$$



O efeito do cisalhamento é transformar o retângulo $OAPB$ no paralelogramo $OAP'B'$, de mesma base e mesma altura.

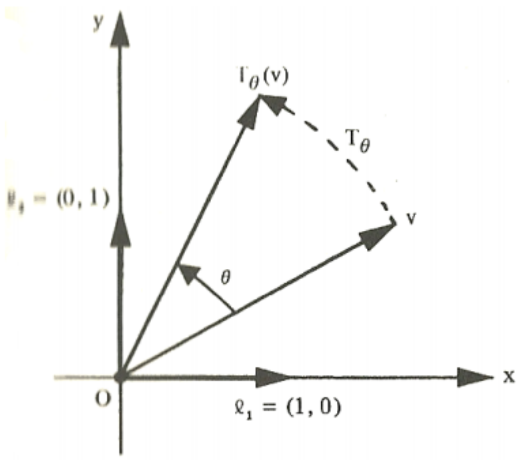
Exemplo 7.3.10. ***(Cisalhamento vertical de fator*** α***)*** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T(x, y) = (x, y + \alpha x).$$

7.3.1.4 Rotação

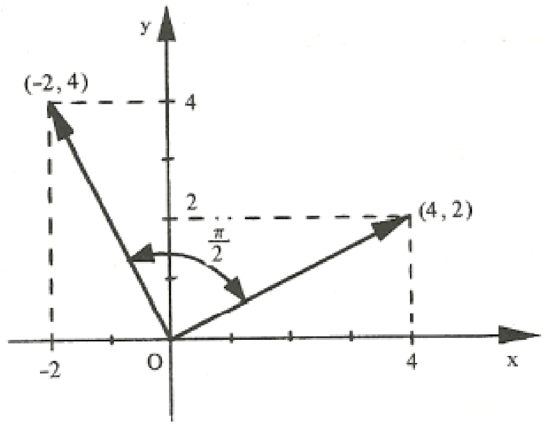
Exemplo 7.3.11. ***(Rotação de um Ângulo*** θ ***no sentido anti-horário)*** *A rotação em torno da origem que faz cada ponto descrever um ângulo θ, determina uma transformação linear $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$T_\theta(x, y) = (xcos(\theta) - ysen(\theta), xsen(\theta) + ycos(\theta))$$



Observação 7.3.4. *Se, por exemplo, desejarmos a imagem do vetor $v = (4, 2)$ pela rotação de $\theta = \pi/2$, basta fazer:*

$$T_{\pi/2}(4, 2) = (4cos(\pi/2) - 2sen(\pi/2), 4sen(\pi/2) + 2cos(\pi/2)) = (-2, 4)$$



7.3.2 Transformações Lineares Espaciais

Nesta subseção estudaremos exemplos de transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Mais especificamente, veremos que as expansões, contrações, projeções, rotações e certas deformações em objetos tridimensionais podem ser descritas por transformações lineares.

7.3.2.1 Reflexões

Exemplo 7.3.12. ***(Reflexão em torno do plano*** xy***)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (x, y, -z)$.

Exemplo 7.3.13. ***(Reflexão em torno do plano*** xz***)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (x, -y, z)$.

Exemplo 7.3.14. ***(Reflexão em torno do plano*** yz***)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (-x, y, z)$.

7.3.2.2 Dilatações e Contrações

Exemplo 7.3.15. ***(Dilatação de fator** 2**)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = 2(x, y, z)$.

Exemplo 7.3.16. ***(Contração de fator** $\frac{1}{2}$**)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = \frac{1}{2}(x, y, z)$.

Exemplo 7.3.17. ***(Dilatação de fator** 2 **na direção do eixo** z**)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (x, y, 2z)$.

Exemplo 7.3.18. ***(Dilatação de fator** 2 **na direção do eixo** y**)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (x, 2y, z)$.

7.3.2.3 Projeção Ortogonal

Exemplo 7.3.19. ***(Projeção ortogonal sobre o plano** xy**)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Exemplo 7.3.20. ***(Projeção ortogonal sobre o plano** xz**)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (x, 0, z)$.

Exemplo 7.3.21. ***(Projeção ortogonal sobre o plano** yz**)*** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (0, y, z)$.

7.3.2.4 Rotação

Exemplo 7.3.22. ***(Rotação anti-horária em torno do eixo*** z ***positivo por um ângulo*** θ***)*** $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$R_{z(\theta)}(x,y,z) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exemplo 7.3.23. ***(Rotação anti-horária em torno do eixo*** x ***positivo por um ângulo*** θ***)*** $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$R_{x(\theta)}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exemplo 7.3.24. ***(Rotação anti-horária em torno do eixo*** y ***positivo por um ângulo*** θ***)*** $R_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$R_{y(\theta)}(x,y,z) = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

7.4 Núcleo e Imagem

Definição 7. *Chama-se* ***núcleo*** *de uma transformação linear* $T : U \to V$ *ao conjunto de todos os vetores* $u \in U$ *que são transformados em* $\overrightarrow{0} \in V$*, ou seja,*

$$Ker(T) = \{v \in U / T(v) = \vec{0}_V\}.$$

Notação: $N(T)$ ou $ker(T)$.

Exemplo 7.4.1. *Dado a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$, *determine* $ker(T)$.

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 7.4.2. *Dado a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (0, x + y, 0)$, *determine* $ker(T)$.

Solução: *Link da Solução.*

Exercício 7.4.1. *Dado a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x-y+4z, 3x+y+8z)$, *determine* $ker(T)$.

Propriedades: Seja $T : U \to V$ uma transformação linear.

1. $ker(T)$ é um subespaço vetorial de U.
2. A transformação linear $T : U \to V$ é injetora se, e somente se, $ker(T) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Exemplo 7.4.3. *A transformação linear* $D : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, $D(f(t)) = f'(t)$ *é injetora?*

Solução: *Link da Solução.*

Definição 8. *Chama-se* ***imagem*** *de uma transformação linear* $T : U \to V$ *ao conjunto dos vetores* $v \in V$ *que são imagens de pelo menos um vetor* $u \in U$*, ou seja,*

$$Im(T) = \{v \in V \,/\, T(u) = v \texttt{ para algum } u \in U\}.$$

Notação: $Im(T)$

Observação 7.4.1. $Im(T) \neq \{\emptyset\}$ *pois* $\overrightarrow{0} \in Im(T)$.

Exemplo 7.4.4. *Dado $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ determine $Im(T)$.*

Solução: *Link da Solução.*

Observação 7.4.2. *A imagem $Im(T)$ de uma transformação linear $T : U \to V$ é um subespaço vetorial de V.*

Seguem alguns resultados importantes.

Teorema 7.4.1 (Teorema do Núcleo e da Imagem)**.** *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Dada uma transformação linear $T : U \to V$, então*

$$\dim U = \dim ker(T) + \dim Im(T).$$

Corolário 7.4.2. *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear com U e V espaços vetoriais finito. São equivalentes:*

(I) *T é sobrejetora;*

(II) *T é bijetora;*

(I) *T é injetora;*

(I) *T transforma uma base de U em uma base de V.*

7.5 Operações com Transformações Lineares

Definição 9. *Sejam $T_1 : U \to V$ e $T_2 : U \to V$ transformações lineares. Chama-se soma das transformações lineares T_1 e T_2 à transformação linear*

$$\begin{array}{rcll} T_1 + T_2 : U & \to & V & \\ u & \mapsto & (T_1 + T_2)(u) & = T_1(u) + T_2(u), \quad \forall\, u \in U \end{array}$$

Definição 10. *Sejam $T : U \to V$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se produto de T pelo escalar α a transformação linear*

$$\begin{array}{rcccl} \alpha T & : & U & \to & V \\ & & u & \mapsto & (\alpha T)(u) \quad = \alpha T(u), \quad \forall\, u \in U \end{array}$$

Definição 11. *Sejam $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ transformações lineares. Chama-se aplicação composta de T_1 com T_2 à transformação linear*

$$\begin{array}{rcccl} T_2 \circ T_1 & : & U & \to & W \\ & & u & \mapsto & (T_2 \circ T_1)(u) \quad = T_2(T_1(u)), \quad \forall\, u \in U \end{array}$$

Exemplo 7.5.1. *Dado $F(x,y) = (x-y,x)$ e $G(x,y) = (x,0)$, calcule:*

(a) $F + G$

(b) $3F$

(c) $F \circ G$

(d) $G \circ F$

Solução: Note que as transformações F e G possuem o mesmo conjunto de domínio, isto é, o conjunto $\mathbb{R}^2$, e contradomínio (ou seja, $\mathbb{R}^2$). Diante disso, podemos realizar as operações solicitadas:

(a) $(F+G)(x,y) = F(x,y) + G(x,y) = (x-y,x) + (x,0) = (2x-y,x)$. *Portanto,* $(F+G)(x,y) = (2x-y,x)$.

(b) $(3F)(x,y) = 3F(x,y) = 3(x-y,x) = (3(x-y),3x) = (3x-3y,3x)$. *Portanto,* $(3F)(x,y) = (3x-3y,3x)$.

(c) $(F \circ G)(x,y) = F(G(x,y)) = F(x,0) = (x-0,x) = (x,x)$.
Portanto, $(F \circ G)(x,y) = (x,x)$.

(d) $(G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) = G(x - y, x) = (x - y, 0)$.

Portanto, $(G \circ F)(x, y) = (x - y, 0)$.

Propriedades: Sejam F, G e H transformações lineares entre os espaços vetoriais U e V, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $(F + G) + H = F + (G + H)$
2. $F + G = G + F$
3. $\exists\ 0 : U \to V\ /\ F + 0 = F$
4. $\exists\ -F : U \to V\ /\ F + (-F) = 0$
5. $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$
6. $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$
7. $\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G$
8. $1F = F$
9. $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$
10. $I \circ F = F \circ I = F$
11. $H \circ (F + G) = (H \circ F) + (H \circ G)$

7.6 Matriz de uma Transformação Linear

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente, sobre $\mathbb{R}$. Consideremos uma transformação linear $T : U \to V$. Dadas as bases $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U e

$C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ de V, então cada um dos vetores $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$ está em V e consequentemente é combinação linear da base C:

$$\begin{array}{ccccccccc}
T(u_1) & = & \alpha_{11}v_1 & + & \alpha_{21}v_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m1}v_m \\
T(u_2) & = & \alpha_{12}v_1 & + & \alpha_{22}v_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m2}v_m \\
T(u_3) & = & \alpha_{13}v_1 & + & \alpha_{23}v_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m3}v_m \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
T(u_n) & = & \alpha_{1n}v_1 & + & \alpha_{2n}v_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}v_m
\end{array}$$

onde os α_{ij} estão univocamente determinados.

Definição 12. *A matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$*

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

que se obtém das considerações anteriores, é chamada matriz de T em relação às bases B e C.

Observação 7.6.1. $[T(v)]_C = [T]_{B,C}\ [v]_B$

Exemplo 7.6.1. *Seja $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$ linear. Considere as bases $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ e $C = \{(2, 1), (5, 3)\}$.*
(a) Determinar $[T]_{B,C}$
(b) Se $v = (3, -4, 2)$ calcular $T(v)_C$ utilizando a matriz canônica.
Solução: Link da Solução.

Exemplo 7.6.2. *Determinar o operador T do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação a base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ é $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.*
Solução: Link da Solução.

Exercício 7.6.1. *Qual a matriz de* $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ *em relação às bases* $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *e* $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Observação 7.6.2.

1. *A matriz da soma de duas transformações lineares é a soma das matrizes de cada uma, em relação ao mesmo par de bases.*

2. *Seja* U, V *e* W *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensões* m, n *e* p, *que admitem bases* B, C *e* D, *respectivamente. Se* $F : U \to V$ *e* $G : V \to W$ *então,*

$$[G \circ F]_{B,D} = [G]_{C,D} \cdot [F]_{B,C}.$$

7.6.1 Mudança de Base

Definição 13. *Seja* U *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensão* n *e* I *o operador identidade de* U. *Considere as bases* $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *e* $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *de* U. *Então, existe uma única família de escalares* α_{ij} *de maneira que*

$$\begin{array}{ccccccccc}
I(v_1) & = & v_1 & = & \alpha_{11}u_1 & + & \ldots & + & \alpha_{n1}u_n \\
I(v_2) & = & v_2 & = & \alpha_{12}u_1 & + & \ldots & + & \alpha_{n2}u_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
I(v_n) & = & v_n & = & \alpha_{1n}u_1 & + & \ldots & + & \alpha_{nn}u_n
\end{array}$$

Dizemos que

$$[I]_{C,B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

é a matriz de mudança da base B *para a base* C.

Notação: $I_{C,B}$

Exemplo 7.6.3. *Qual a matriz de mudança da base $B = \{1, 1+t\}$ para a base $C = \{1, t\}$ no espaço $P_1(\mathbb{R})$?*

Solução: *Link da Solução.*

Teorema 7.6.1. *Seja U um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Dadas as bases $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de U e $T : U \to U$. Então,*

$$[T]_C = [[I]_{C,B}]^{-1}\ [T]_B\ [I]_{C,B}.$$

Exemplo 7.6.4. *Seja T o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ é $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica, usando a fórmula de mudança de base para um operador linear.*

Solução: *Link da Solução.*

7.7 Exercícios sobre Transformações Lineares

Exercício 7.7.1. *Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares?*

(a) $F_1(x,y,z) = (x-y, x+y, 0)$

(b) $F_2(x,y,z) = (2x-y+z, 0, 0)$

(c) $F_3(x,y,z) = (x,x,x)$

(d) $F_4(x,y,z) = (2x^2+3y, x, z)$

Exercício 7.7.2. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear assim definido na base canônica: $F(1,0,0) = (2,3,1)$, $F(0,1,0) = (5,2,7)$ e $F(0,0,1) = (-2,0,7)$. Determinar $F(x,y,z)$, onde (x,y,z) é um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$. Mostrar que F é um operador linear.*

Exercício 7.7.3. *Existe um operador linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $F(1,1,1) = (1,2,3)$, $F(1,2,3) = (1,4,9)$ *e* $F(2,3,4) = (1,8,27)$*? Justifique a sua resposta.*

Exercício 7.7.4. *Seja* $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$*. Quais das aplicações definidas abaixo são operadores lineares do* $\mathbb{R}^4$*?*

(a) $F(u) = u + (1,0,1,0)$

(b) $F(u) = (1,0,1,0)$

(c) $F(u) = (x, y-z, y+z, x+t)$

(d) $F(u) = (cos(x), y, z, t)$

Exercício 7.7.5. *Seja* T *o operador linear do* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $T(1,0) = (2,1)$ *e* $T(0,1) = (1,4)$*.*

(a) Determinar $T(2,4)$*.*

(b) Determinar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x,y) = (2,3)$*.*

(c) Provar que T *é sobrejetor e injetor.*

Exercício 7.7.6. *Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:*

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por* $T(x,y,z) = x + y - z$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $T(x,y) = (2x, x+y)$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *dada por* $T(x,y,z) = (x-y-z, x+y+z, 2x-y+z, -y)$

(d) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ *dada por* $T(f(t)) = t^2 f''(t)$

(e) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por* $T(x) = Mx + x$*, onde* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por* $T(x) = Mx - xM$*, onde* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 7.7.7. *Determinar um operador linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja imagem é gerada por* $(2,1,1)$ *e* $(1,-1,2)$*.*

Exercício 7.7.8. *Determinar um operador linear* $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *cujo núcleo é gerado por* $(1,1,0,0)$ *e* $(0,0,1,0)$*.*

Exercício 7.7.9. *Determinar um operador linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja núcleo tenha dimensão 1.*

Exercício 7.7.10. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to R^3$ *definida por* $T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,0,1) = (0,0,2)$ *e* $T(0,1,0) = (1,1,2)$. *Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais:* $ker(T)$, $Im(T)$, $ker(T) \bigcap Im(T)$ *e* $ker(T) + Im(T)$.

Exercício 7.7.11. *Dentre as transformações* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definidas abaixo, verificar quais são lineares:*

(a) $T(x,y) = (x - 3y, 2x + 5y)$

(b) $T(x,y) = (y,x)$

(c) $T(x,y) = (x^2, y^2)$

(d) $T(x,y) = (x + 1, y)$

(e) $T(x,y) = (y - x, 0)$

(f) $T(x,y) = (|x|, 2y)$

(g) $T(x,y) = (sen(x), y)$

(h) $T(x,y) = (xy, x - y)$

(i) $T(x,y) = (3y, -2x)$

Exercício 7.7.12. *Seja* $V = \mathbb{R}^2$. *Fazer um gráfico de um vetor genérico* $v = (x,y)$ *do domínio e de sua imagem* $T(v)$ *sob a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por:*

(a) $T(x,y) = (2x, 0)$

(b) $T(x,y) = (2x, y)$

(c) $T(x,y) = (-2x, 2y)$

(d) $T(x,y) = (3x, -2y)$

(e) $T(x,y) = -2(x,y)$

(f) $T(x,y) = (x, -y)$

Exercício 7.7.13. *Dentre as seguintes funções, verificar quais são lineares:*

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $T(x,y) = (x - y, 3x, -2y)$

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x,y,z) = (x + y, x - y, 0)$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x^2 + y^2, x)$

(d) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $T(x) = (x, 2)$

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $T(x,y,z) = -3x + 2y - z$

(f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (|x|, y)$

(g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T(x, y) = x$

(h) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T(x, y) = xy$

(i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$; $T(x, y) = (y, x, y, x)$

(j) $T : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$; $T(x, y) = \begin{bmatrix} 2y & 3x \\ -y & x + 2y \end{bmatrix}$

(k) $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$; $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a - c, b + c)$

(l) $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; $T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(m) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Exercício 7.7.14. *(a) Determinar a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ *e* $T(0, 1) = (1, 1, 0)$.
(b) Encontrar $v \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(v) = (-2, 1, -3)$.

Exercício 7.7.15. *(a) Determinar a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(1, -1, 0) = (1, 1)$, $T(0, 1, 1) = (2, 2)$ *e* $T(0, 0, 1) = (3, 3)$.
(b) Achar $T(1, 0, 0)$ *e* $T(0, 1, 0)$.

Exercício 7.7.16. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *uma transformação linear definida por* $T(1, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 1, 0) = (2, 3)$ *e* $T(1, 0, 0) = (3, 4)$.
(a) Determinar $T(x, y, z)$.
(b) Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(v) = (-3, -2)$.
(c) Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(v) = (0, 0)$.

Exercício 7.7.17. *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *um operador linear definido por* $T(1, 0, 0) = (0, 2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, -2)$ *e* $T(0, 0, 1) = (-1, 0, 3)$. *Determinar* $T(x, y, z)$ *e o vetor* $v \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(v) = (5, 4, -9)$.

Exercício 7.7.18. *Determinar a transformação linear* $T : P_2 \to P_2$ *tal que* $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ *e* $T(x^2) = x + 2x^2$.

Exercício 7.7.19. *Seja o operador linear* $T(x,y) = (2x+y, 4x+2y)$. *Quais dos seguintes vetores pertencem a* $ker(T)$*?*

(a) $(1,-2)$ *(b)* $(2,-3)$ *(c)* $(-3,6)$

Exercício 7.7.20. *Dado a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (3x-y, -3x+y)$.

(a) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T *é injetora? Justificar.*

(b) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T *é sobrejetora? Justificar.*

Exercício 7.7.21. *Dado a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+y, x, 2y)$.

(a) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T *é injetora? Justificar.*

(b) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T *é sobrejetora? Justificar.*

Exercício 7.7.22. *Dado a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x-2y, x+y)$.

(a) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T *é injetora? Justificar.*

(b) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T *é sobrejetora? Justificar.*

Exercício 7.7.23. *Dado a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x+2y-z, 2x-y+z)$.

(a) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T *é injetora? Justificar.*

(b) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T *é sobrejetora? Justificar.*

Exercício 7.7.24. *Seja a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(-2,3) = (-1,0,1)$ *e* $T(1,-2) = (0,-1,0)$.

(a) Determinar $T(x,y)$.

(b) Determinar $ker(T)$ *e* $Im(T)$.

(c) T *é injetora?* T *é sobrejetora?*

Exercício 7.7.25. *Seja a transformação linear* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $t(e_1) = (1, -2, 1)$, $t(e_2) = (-1, 0, -1)$, $T(e_3) = (0, -1, 2)$ *e* $T(e_4) = (1, -3, 1)$, *sendo* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *a base canônica do* $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinar o núcleo e a imagem de T.

(b) Determinar bases para o núcleo e para a imagem.

(c) Verificar o Teorema da Dimensão.

Exercício 7.7.26. *Sendo* F, G *e* $H \in L(\mathbb{R}^2)$ *definidos por* $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x+y)$ *e* $H(x, y) = (0, x)$, *determinar* $F+H$, $F\circ G$, $G\circ(H+F)$, $G\circ F$, $H\circ F$, $H\circ F\circ G$ *e* $G \circ F \circ H$.

Exercício 7.7.27. *Sejam* $F, G \in L(\mathbb{R}^3)$ *definidos por* $F(x, y, z) = (x + y, z + y, z)$ *e* $G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$. *Determinar:*

(a) $F \circ G$;

(b) $ker(F \circ G)$ *e* $Im(G \circ F)$;

(c) Uma base e a dimensão de $ker(F^2 \circ G)$.

Exercício 7.7.28. *Sejam* $F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ *e* $G \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *definidos por* $F(x, y) = (0, x, x - y)$ *e* $G(x, y, z) = (x - y, x + 2y + 3z)$. *Determinar* $F \circ G \circ F$.

Exercício 7.7.29. *Mostre que os operadores* F, G, $H \in L(\mathbb{R}^2)$ *dados por* $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ *e* $H(x, y) = (0, x)$ *formam um conjunto L.I. em* $L(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 7.7.30. *Seja* $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *definido por* $F(x, y, z) = (x + z, y - 2z)$. *Determinar* $[F]_{B,C}$ *sendo* $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1)\}$ *e* $C = \{(1, 5), (2, -1)\}$.

Exercício 7.7.31. *Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:*

(a) $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *definida por* $T(x, y, z) = (x + y, z)$;

(b) $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ *definida por* $T(x, y) = (x + y, x, x - y)$;

(c) $T \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ *definida por* $T(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t$;

(d) $T \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ *definida por* $T(x) = (x, 2x, 3x)$.

Exercício 7.7.32. *No espaço vetorial* $M_2(\mathbb{R})$ *seja* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Determinar a matriz* *do operador linear $T \in L(M_2(\mathbb{R}))$ dado por $T(x) = Ax - xA$, em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.*

Exercício 7.7.33. *Seja F o operador linear de $M_2(\mathbb{R})$ dado por*

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

$\forall\, x \in M_2(\mathbb{R})$. Sendo B a base canônico do espaço $M_2(\mathbb{R})$ determine o traço da matriz $[F]_B$. (Nota: traço = soma dos termos da diagonal principal.)

Exercício 7.7.34. *Calcular o traço da matriz do operador linear $F \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por $F(x, y, z) = (x, x - y, x + z)$.*

Exercício 7.7.35. *Seja F o operador linear de $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 0), (1, 4)\}$ é $[F]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de F em relação à base canônica, usando a fórmula de mudança de base para um operador.*

Exercício 7.7.36. *Determinar o operador linear de $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 2), (0, 5)\}$ é $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.*

Exercício 7.7.37. *Sejam $F, G \in L(P_2(\mathbb{R}), P_3(\mathbb{R}))$ assim definidos: $F(p(t)) = tp(t) - p(1)$ e $G(p(t)) = (t - 1)p(t)$, $\forall\, p(t) \in P_2(\mathbb{R})$. Determinar as matrizes de F e de G em relação aos seguintes par de bases: $B = \{1, t - 1, (t - 1)^2\}$ e $C = \{1, t - 1, (t - 1)^2, (t - 1)^3\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e $P_3(\mathbb{R})$ respectivamente.*

Exercício 7.7.38. *Se a matriz de um operador linear F do $\mathbb{R}^2$ em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e se $H = I + F + 2F^2$, determine a matriz de H em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$. Achar também $H(x, y, z)$.*

Exercício 7.7.39. *Considere as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ assim relacionadas:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} g_1 & = & e_1 & - & e_2 & - & e_3 \\ g_2 & = & & & 2e_2 & + & 3e_3 \\ g_3 & = & 3e_1 & & & + & e_3 \end{array}$$

(a) Determinar as matrizes de mudança de B para C e de C para B.

(b) Se um vetor u de $\mathbb{R}^3$ apresenta coordenadas 1, 2 e 3, em relação a B, quais as coordenadas de u relativamente a C?

Exercício 7.7.40. *Considere o seguinte subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$:*

$$U = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} | x - y - z = 0 \}$$

(a) Mostrar que os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ são bases de U:
$B = \{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ *e* $C = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$

(b) Achar a matriz de mudança de B para C e a de C para B.

(c) Achar uma base D de U, de tal maneira que a matriz de mudança de D para B seja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BIANCHINI, Waldecir. *Planos.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/VXMuWTtE

[3] BOBKO, Nara. *Seções Cônicas.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/g3y7bq68

[4] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[5] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[6] CASSOL, Henrique L. G. *Equações Paramétricas da reta.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/RqkquH6P

[7] LEMKE, Raiane. *Retas no* $\mathbb{R}^3$*: Parametrização e gráfico de retas no* $\mathbb{R}^3$. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4

[8] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[9] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[10] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[11] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[12] RODRIGUES, Aroldo, E. A. *Atividade sobre Quádricas*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xraxuttv

[13] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[14] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.