Cálculo Numérico

Sistemas Lineares: Norma de Matrizes

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

12 de julho de 2021

Norma

Antes de estudarmos os métodos iterativos, devemos conhecer o conceito de norma de matriz.

Norma

Antes de estudarmos os métodos iterativos, devemos conhecer o conceito de norma de matriz. Para tanto, recordemos o conceito de norma de um espaço vetorial.

Definição 1.1

Seja V um espaço vetorial real ou complexo. Suponha que para cada $v \in V$ esteja associado um número real, denotado por $\| \cdot \|$. Essa função é denominada **norma** *de v função definida em V com valores em $\mathbb{R}_+$, ou seja,*

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : V &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ v &\mapsto \| v \| \end{aligned}$$

satisfaz:

Norma

Antes de estudarmos os métodos iterativos, devemos conhecer o conceito de norma de matriz. Para tanto, recordemos o conceito de norma de um espaço vetorial.

Definição 1.1

Seja V um espaço vetorial real ou complexo. Suponha que para cada $v \in V$ esteja associado um número real, denotado por $\| \cdot \|$. Essa função é denominada **norma** *de v função definida em V com valores em $\mathbb{R}_+$, ou seja,*

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : V &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ v &\mapsto \| v \| \end{aligned}$$

satisfaz:

1. $\|v\| \geqq 0$ *e* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *(vetor nulo).*

Norma

Antes de estudarmos os métodos iterativos, devemos conhecer o conceito de norma de matriz. Para tanto, recordemos o conceito de norma de um espaço vetorial.

Definição 1.1

Seja V um espaço vetorial real ou complexo. Suponha que para cada $v \in V$ esteja associado um número real, denotado por $\| \cdot \|$. Essa função é denominada **norma** *de v função definida em V com valores em $\mathbb{R}_+$, ou seja,*

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : V &\to \mathbb{R}_+ \\ v &\mapsto \| v \| \end{aligned}$$

satisfaz:

1. $\|v\| \geqq 0$ *e* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *(vetor nulo).*
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \forall \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *.*

Norma

Antes de estudarmos os métodos iterativos, devemos conhecer o conceito de norma de matriz. Para tanto, recordemos o conceito de norma de um espaço vetorial.

Definição 1.1

Seja V um espaço vetorial real ou complexo. Suponha que para cada $v \in V$ esteja associado um número real, denotado por $\| \cdot \|$. Essa função é denominada **norma** *de v função definida em V com valores em $\mathbb{R}_+$, ou seja,*

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : V &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ v &\mapsto \| v \| \end{aligned}$$

satisfaz:

1. $\|v\| \geqq 0$ *e* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *(vetor nulo).*
2. $\|\lambda\, v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \forall\, \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|; \forall\, v, w \in V$. *(desigualdade triangular)*

Um espaço vetorial V com norma é dito **espaço vetorial normado**.

Um espaço vetorial V com norma é dito **espaço vetorial normado**. Se V é um espaço vetorial com produto interno, então, a norma de um vetor v de V é

$$\|v\|_V := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \text{ onde } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ é o produto interno de } V.$$

Um espaço vetorial V com norma é dito **espaço vetorial normado**. Se V é um espaço vetorial com produto interno, então, a norma de um vetor
v de V é

$$\|v\|_V := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \text{ onde } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ é o produto interno de } V.$$

Três normas são importantes quando $V = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$:

a) Norma do Máximo: $\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |a_i|$;

Um espaço vetorial V com norma é dito **espaço vetorial normado**. Se V é um espaço vetorial com produto interno, então, a norma de um vetor
v de V é

$$\|v\|_V := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \text{ onde } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ é o produto interno de} V.$$

Três normas são importantes quando $V = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$:

a) Norma do Máximo: $\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |a_i|$;

b) Norma da Soma: $\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;

Um espaço vetorial V com norma é dito **espaço vetorial normado**. Se V é um espaço vetorial com produto interno, então, a norma de um vetor
v de V é

$$\|v\|_V := \sqrt{\langle v, v\rangle}, \text{ onde } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ é o produto interno de } V.$$

Três normas são importantes quando $V = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$:

a) Norma do Máximo: $\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |a_i|$;

b) Norma da Soma: $\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;

c) Norma Euclidiana:

$$\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2} .$$

Exemplo

Considere $u = (1, -5, 3)$ e $v = (4, 2, -3)$. Vamos calcular $\|u\|_{\infty}, \|u\|_1, \|u\|_E$ e $\|v\|_{\infty}, \|v\|_1, \|v\|_E$.

Exemplo

Considere $u = (1, -5, 3)$ e $v = (4, 2, -3)$. Vamos calcular $\|u\|_\infty, \|u\|_1, \|u\|_E$ e $\|v\|_\infty, \|v\|_1, \|v\|_E$.

Note que

$$\|u\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 3} |u_i| = |-5| = 5 \quad \text{e} \quad \|v\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 3} |v_i| = |4| = 4;$$

Exemplo

Considere $u = (1, -5, 3)$ e $v = (4, 2, -3)$. Vamos calcular $\|u\|_\infty, \|u\|_1, \|u\|_E$ e $\|v\|_\infty, \|v\|_1, \|v\|_E$.

Note que

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} |u_i| = |-5| = 5 \quad \text{e} \quad \|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} |v_i| = |4| = 4;$$

$$\|u\|_1 = |1| + |-5| + |3| = 9 \quad \text{e} \quad \|v\|_1 = |4| + |2| + |-3| = 9;$$

Exemplo

Considere $u = (1, -5, 3)$ e $v = (4, 2, -3)$. Vamos calcular $\|u\|_\infty, \|u\|_1, \|u\|_E$ e $\|v\|_\infty, \|v\|_1, \|v\|_E$.

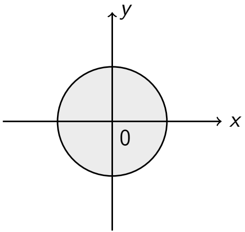
Note que

$$\|u\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 3} |u_i| = |-5| = 5 \quad \text{e} \quad \|v\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 3} |v_i| = |4| = 4;$$

$$\|u\|_1 = |1| + |-5| + |3| = 9 \quad \text{e} \quad \|v\|_1 = |4| + |2| + |-3| = 9;$$

$$\|u\|_E = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35} \quad \text{e} \quad \|v\|_E = \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{29};$$

Interpretação Geométrica da Esfera Unitária em $\mathbb{R}^2$

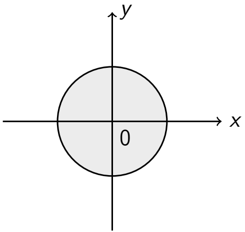


Esfera unitária

na norma euclidiana:

$$\|u\|_E \leq 1$$

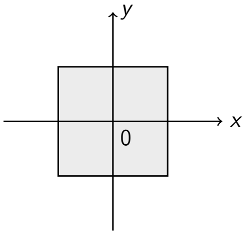
Interpretação Geométrica da Esfera Unitária em $\mathbb{R}^2$



Esfera unitária

na norma euclidiana:

$\|u\|_E \leq 1$

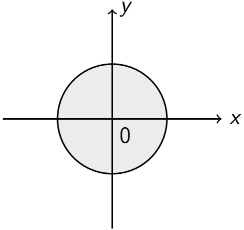


Esfera unitária

na norma do máximo:

$\|u\|_\infty \leq 1$

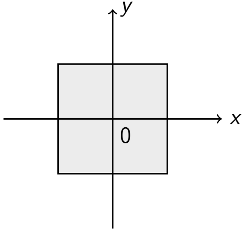
Interpretação Geométrica da Esfera Unitária em $\mathbb{R}^2$



Esfera unitária

na norma euclidiana:

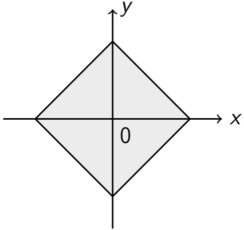
$$\|u\|_E \leq 1$$



Esfera unitária

na norma do máximo:

$$\|u\|_\infty \leq 1$$



Esfera unitária

na norma da soma:

$$\|u\|_1 \leq 1$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Norma de uma Matriz

Definição 1.2

A norma de uma matriz A denotada por $\|A\|$ *é uma função definida em* $M_n(\mathbb{R})$ *com valores em* $\mathbb{R}_+$ *que satisfaz:*

Norma de uma Matriz

Definição 1.2

A norma de uma matriz A denotada por $\|A\|$ *é uma função definida em* $M_n(\mathbb{R})$ *com valores em* $\mathbb{R}_+$ *que satisfaz:*

1. $\|A\| \geqq 0$ *e* $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *(matriz nula).*

Norma de uma Matriz

Definição 1.2

A norma de uma matriz A denotada por $\|A\|$ *é uma função definida em* $M_n(\mathbb{R})$ *com valores em* $\mathbb{R}_+$ *que satisfaz:*

1. $\|A\| \geqq 0$ *e* $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *(matriz nula).*
2. $\|\lambda\, A\| = |\lambda| \cdot \|A\|, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Norma de uma Matriz

Definição 1.2

A norma de uma matriz A denotada por $||A||$ *é uma função definida em* $M_n(\mathbb{R})$ *com valores em* $\mathbb{R}_+$ *que satisfaz:*

1. $||A|| \geqq 0$ *e* $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *(matriz nula).*
2. $||\lambda\, A|| = |\lambda| \cdot ||A||, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||; \forall\, A, B \in M_n(\mathbb{R})$. *(desigualdade triangular)*

Norma de Matriz

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definamos:

Norma de Matriz

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definamos:

- Norma do Máximo (norma linha): $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;

Norma de Matriz

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definamos:

1. Norma do Máximo (norma linha): $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;
2. Norma da Soma (norma coluna): $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$;

Norma de Matriz

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Definamos:

1. Norma do Máximo (norma linha): $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;
2. Norma da Soma (norma coluna): $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$;
3. Norma Euclidiana: $\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$

Exemplo

Exemplo 1.1

Calcule $\|A\|_\infty, \|A\|_1$ *e* $\|A\|_E$ *da seguinte matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \\ -8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

Solução:

- Cálculo de $\| A \|_\infty$:
  - i : 1.

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}| = |3| + |-5| + |7| = 3 + 5 + 7 = 15\,.$$

  - i : 2.

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}| = 1 + 2 + 4 = 7\,.$$

  - i : 3.

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}| = 8 + 1 + 7 = 16\,.$$

Logo, $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{15, 7, 16\} = 16\,.$

- Cálculo de $\| A \|_1$:
  - j : 1.

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i1}| = |a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}| = |3| + |1| + |-8| = 3 + 1 + 8 = 12\,.$$

- Cálculo de $\| A \|_1$:
  - $j : 1$.

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i1}| = |a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}| = |3| + |1| + |-8| = 3 + 1 + 8 = 12\,.$$

  - $j : 2$.

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i2}| = |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}| = 8\,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de $\| A \|_1$:
  - j : 1.

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i1}| = |a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}| = |3| + |1| + |-8| = 3 + 1 + 8 = 12\,.$$

  - j : 2.

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i2}| = |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}| = 8\,.$$

  - j : 3.

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i3}| = |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{33}| = 18\,.$$

- Cálculo de $\| A \|_1$:
  - $j : 1.$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i1}| = |a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}| = |3| + |1| + |-8| = 3 + 1 + 8 = 12\,.$$

  - $j : 2.$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i2}| = |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}| = 8\,.$$

  - $j : 3.$

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i3}| = |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{33}| = 18\,.$$

Logo, $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{12, 8, 18\} = 18\,.$

- Cálculo de $\|A\|_E$:

$$
\begin{aligned}
\|A\|_E &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \\
&= \left[3^2 + (-5)^2 + 7^2 + 1^2 + (-2)^2 + 4^2 + (-8)^2 + 1 + (-7)^2\right]^{1/2} \\
&= \sqrt{218} \approx 14,76482306 \,.
\end{aligned}
$$