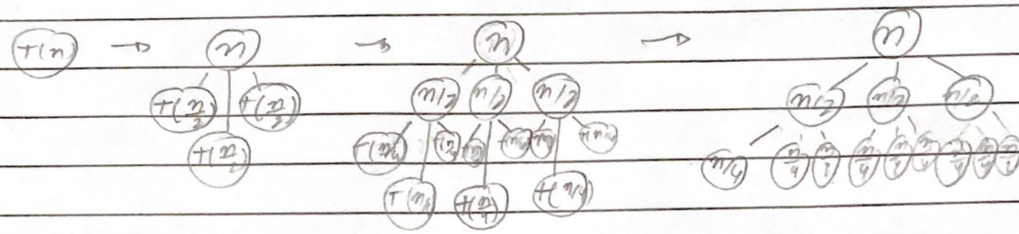
Lista 8

4.4-1 $T(n) = 3T(n/2) + n$



NIVEL	CUSTO	TSD
0	$n = (\frac{3}{2})^0 \cdot n$	$n = n/2^0$
1	$\frac{3n}{2} = (\frac{3}{2})^1 \cdot n$	$n/2 = n/2^1$
2	$\frac{9n}{4} = (\frac{3}{2})^2 \cdot n$	$n/4 = n/2^2$
3	$\frac{27n}{8} = (\frac{3}{2})^3 \cdot n$	$n/8 = n/2^3$
⋮	⋮	⋮
K	?	$1 = n/2^K$

$2^K = n$

$K = \lg n$

Sabemos que no último nível (K), $1 = n/2^K$ ∴ $K = \lg(n)$

Como a árvore gera 3 ramificações em cada nó, há 3^i nós em um nível i, se n for potência de 3 então a árvore está completamente balanceada. Portanto no último nível há $3^k = 3^{\lg n} = n^{\lg 3}$ nós

Como o custo dos nós do último nível é 1, então o custo do último nível é $n^{\lg 3} \cdot 1 = \Theta(n^{\lg 3})$.
Somando o custo dos níveis intermediários,

$$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i \cdot n + \Theta(n^{\lg 3})$$

$$= n \sum_{i=0}^{\lg n - 1} \left(\frac{3}{2}\right)^i + \Theta(n^{\lg 3})$$

$$= n \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1}{3/2 - 1} \right) + \Theta(n^{\lg 3})$$

$$= 2n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg n} - 1 \right) + \Theta(n^{\lg 3})$$

$$= 2n \left(n^{\lg 3/2} - 1 \right) + \Theta(n^{\lg 3})$$

$$= 2 \cdot n^{\lg 3/2 + 1} - 2n + \Theta(n^{\lg 3})$$

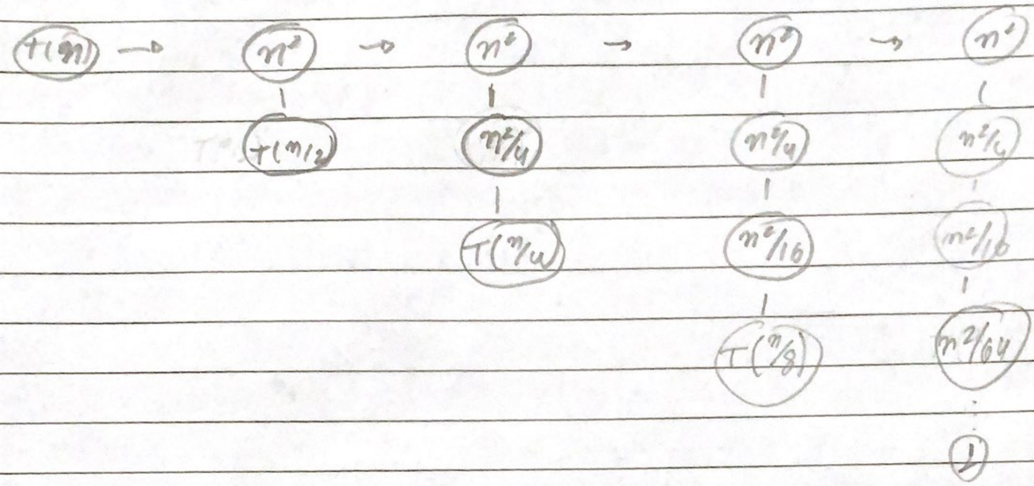
$$= 2 \cdot n^{\lg 3 - \cancel{\lg 2 + 1}} - 2n + \Theta(n^{\lg 3})$$

$$= 2 \cdot n^{\lg 3} - 2n + \Theta(n^{\lg 3})$$

$$= \Theta(n^{\lg 3}) \; //$$

S T Q Q S S D　　　__/__/__

4.4-2 $T(n) = T(n/2) + n^2$



NÍVEL	CUSTO	TSP
0	n^2	$n = n/2^0$
1	$n^2/4$	$n/2 = n/2^1$
2	$n^2/16$	$n/4 = n/2^2$
3	$n^2/64$	$n/8 = n/2^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K	?	$1 = n/2^K$

$$2^K = n$$
$$K = \lg n$$

SABEMOS QUE NO ÚLTIMO NÍVEL (K), $1 = n/2^K$, OU SEJA, $K = \lg(n)$

COMO A ÁRVORE GERA UMA RAMIFICAÇÃO EM CADA NÓ, HÁ APENAS UM NÓ EM CADA NÍVEL i. COM ISSO, NO ÚLTIMO NÍVEL HÁ 1 NÓ.

COMO O CUSTO DO NÓ DO ÚLTIMO NÍVEL É 1, ENTÃO O CUSTO DO ÚLTIMO NÍVEL $1 = \Theta(1)$

___/___/___ S T Q Q S S D

SOMANDO OS CUSTOS DOS NÓS INTERMEDIÁRIOS,

$$T(n) = \sum_{i=0}^{K-1} \frac{n^2}{4^i} + \Theta(1) = n^2 \sum_{i=0}^{\lg n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^i + \Theta(1)$$

$$n^2\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\lg n} - 1}{1/4 - 1}\right) + \Theta(1) = n^2\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\lg n} - 1}{-3/4}\right)$$

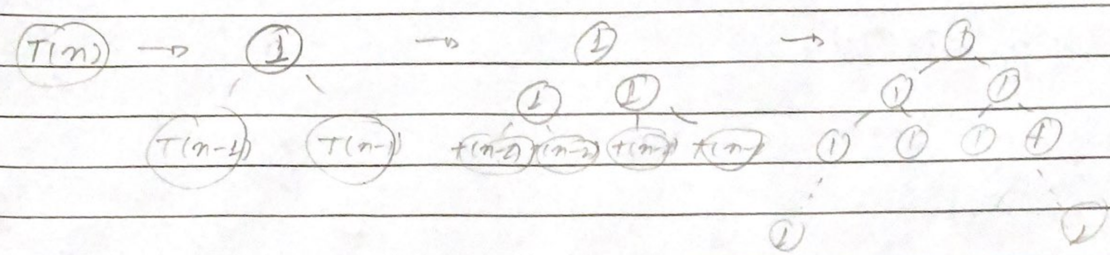
$$= n^2\left(\frac{n^{\lg 1/4} - 1}{-3/4}\right) = n^2\left(\frac{n^{\lg 1 - \lg 4} - 1}{-3/4}\right)$$

$$= n^2\left(\frac{n^{-\lg 4} - 1}{-3/4}\right) = n^2\left(\frac{n^{-2} - 1}{-3/4}\right) + \Theta(1)$$

$$= \frac{n^0 - n^2}{-3/4} + \Theta(1) = \frac{1 - n^2}{-3/4} + \Theta(1) = \Theta(n^2)$$

spiral

4.4-4 $T(n) = 2T(n-1) + 1$



NÍVEL	CUSTO	TSP
0	$1 = 2^0$	$n = n-0$
1	$2 = 2^1$	$n-1 = n-1$
2	$4 = 2^2$	$n-2 = n-2$
3	$8 = 2^3$	$n-3 = n-3$
⋮	⋮	⋮
K	⋮	$1 = n-K$
		$\boxed{K = n-1}$

SABEMOS QUE NO ÚLTIMO NÍVEL (K), $1 = n-K$ E $K = n-1$

COMO A ÁRVORE É BINÁRIA, HÁ 2^i NÓS EM UM NÍVEL i. SE n FOR POTÊNCIA DE 2 ENTÃO A ÁRVORE ESTÁ COMPLETAMENTE BALANCEADA. PORTANTO NO ÚLTIMO NÍVEL HÁ $2^K = 2^{n-1}$ NÓS

COMO O CUSTO DOS NÓS NO ÚLTIMO NÍVEL É 1 ENTÃO O CUSTO DO ÚLTIMO NÍVEL É $2^{n-1} = \Theta(2^{n-1})$

SOMANDO OS CUSTOS INTERMEDIÁRIOS,

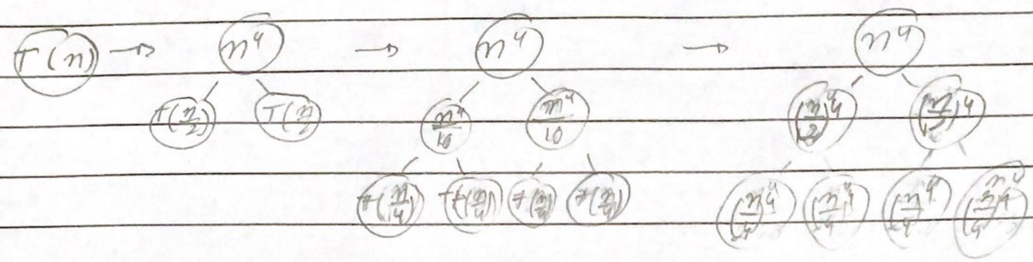
$$T(n) = \sum_{i=0}^{K-1} 2^i + \Theta(2^{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i + \Theta(2^{n-1}) = 2^{n} - 1 + \Theta(2^{n-1}).$$

$$= \Theta(2^n)$$

___/___/___ S T Q Q S S D

①

a) $T(n) = 2T(n/2) + n^4$



NIVEL	CUSTO	TSP
0	$n^4 = n^4/8^0$	$n = n/2^0$
1	$n^4/8 = n^4/8$	$n/2 = n/2^1$
2	$n^4/64 = n^4/8^2$	$n/4 = n/2^2$
3	$n^4/512 = n^4/8^3$	$n/8 = n/2^3$
⋮	⋮	⋮
K	?	$1 = n/2^K$
		$K = \lg(n)$

SABEMOS QUE NO ULTIMO NIVEL (K), $1 = n/2^K$, $K = \lg(n)$

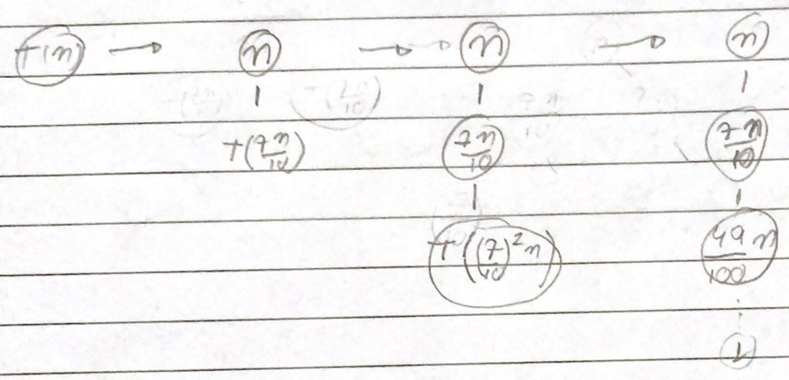
COMO A ARVORE É BINARIA, HÁ 2^i NÓS EM UM NIVEL i. SE N FOR POTENCIA DE 2, A ARVORE ESTA COMPLETAMENTE BALANCEADA. PORTANTO NO ULTIMO NIVEL HÁ $2^K = 2^{\lg(n)} = n$ NÓS. PORTANTO O CUSTO DO ULTIMO NIVEL É $1 \cdot n = n = \Theta(n)$.

SOMANDO O CUSTO DOS NÍVEIS INTERMEDIÁRIO

$$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n^4}{8^i} + \theta(n) = n^4 \sum_{i=0}^{\lg n - 1} \frac{1}{8^i} + \theta(n)$$

$$= n^4 \left(\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{\lg n} - 1}{1/8 - 1} \right) + \theta(n) = \theta(n^4)$$

b) $T(n) = T(7n/10) + n$



NÍVEL	CUSTO	TSP
0	$n = \left(\frac{7}{10}\right)^0 \cdot n$	$n = \left(\frac{7}{10}\right)^0 n$
1	$7n/10 = \left(\frac{7}{10}\right)^1 \cdot n$	$\frac{7n}{10} = \left(\frac{7}{10}\right)^1 n$
2	$49n/100 = \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot n$	$\frac{49n}{100} = \left(\frac{7}{10}\right)^2 n$
3	$343n/1000 = \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot n$	$\frac{343n}{1000} = \left(\frac{7}{10}\right)^3 n$
⋮	⋮	⋮
k	?	$1 = \left(\frac{7}{10}\right)^k n$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^k = n$$

$$\boxed{k = \log_{\frac{10}{7}} n}$$

Sabemos que no último nível (k), $1 = \left(\frac{7}{10}\right)^k n$, ou seja, $k = \log_{\frac{10}{7}} n$.

Como a árvore é de apenas uma ramificação, há um nó em qualquer nível i. No último nível há 1 nó. Portanto o custo do último nível é $1 \cdot 1$

Como o custo dos nós no último nível é 1, então o custo do último nível é $\left(\frac{7}{10}\right)^k \cdot n = \left(\frac{7}{10}\right)^{\log_{\frac{10}{7}} n} \cdot n = n^{\log_{\frac{10}{7}}(7/10)+1} = 1$

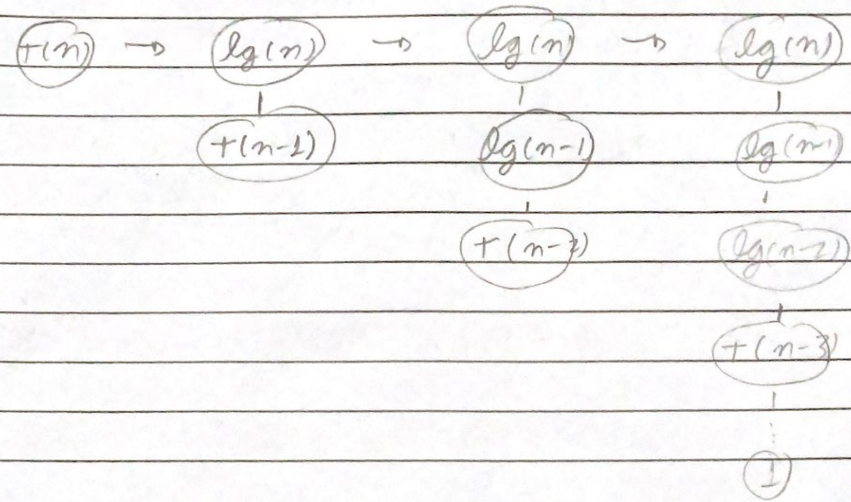
Somando os custos intermediários

$$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{7}{10}\right)^i \cdot n + 1 = n \sum_{i=0}^{\log_{\frac{10}{7}} n - 1} \left(\frac{7}{10}\right)^i + 1$$

$$= n \left(\frac{\left(\frac{7}{10}\right)^{\log_{\frac{10}{7}} n} - 1}{\frac{7}{10} - 1} \right) + 1 = n \left(\frac{n^{-1} - 1}{-3/10} \right) + 1,$$

$$= \frac{1 - n}{-3/10} + 1 = \Theta(n)$$

e) $T(n) = T(n-1) + \lg(n)$



NÍVEL	CUSTO	TSP
0	$\lg(n)$	n
1	$\lg(n-1)$	$n-1$
2	$\lg(n-2)$	$n-2$
3	$\lg(n-3)$	$n-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K	?	$1 = n - K$
		$\boxed{K = n-1}$

SABEMOS QUE NO NÍVEL K, $1 = n-K$, OU SEJA, $K = n-1$

COMO A ÁRVORE É UNITÁRIA, HÁ APENAS UM NÓ EM QUALQUER NÍVEL i. NO ÚLTIMO NÍVEL HÁ 1 NÓ.

COMO O CUSTO DO NÓ NO ÚLTIMO NÍVEL É 1, O CUSTO DO ÚLTIMO NÍVEL É $\lg(n-K) = \lg(n-n+1) = 1$

SOMANDO OS CUSTOS INTERMEDIÁRIOS,

$$T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \lg(n-i) + 1 = \Theta(\lg n)$$