Análise de Algoritmos – Tópico 9

Prof. Dr. Juliano Henrique Foleis

1 Método Mestre

O Método Mestre, provê um método "receita de bolo" para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

tal que $a \geq 1$, $b > 1$, a e b constantes e $f(n)$ assintoticamente positiva. Para usar o método mestre é necessário memorizar três casos que são apresentados logo adiante.

A recorrência que o método mestre descreve o tempo de execução de um algoritmo que divide um problema de tamanho n em a subproblemas, cada um de tamanho $\frac{n}{b}$, a e b constantes positivas. Os subproblemas são resolvidos recursivamente, cada um em tempo $T(\frac{n}{b})$. A função $f(n)$ é o custo da divisão e combinação dos resultados dos subproblemas. Por exemplo, na recorrência $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$, $a = 7$, $b = 2$ e $f(n) = \Theta(n^2)$. Tecnicamente falando, a recorrência não está definida corretamente, já que $\frac{n}{b}$ pode não ser inteiro. No entanto, ao substituir cada um dos a termos de $T(\frac{n}{b})$ com $T(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor)$ ou $T(\lceil \frac{n}{b} \rceil)$ não afeta o comportamento assintótico da recorrência. Portanto, quando trabalhamos com recorrências desta forma é comum omitir piso ou teto.

2 Teorema Mestre

Teorema 1. *Teorema Mestre*

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função assintoticamente positiva e $T(n)$ definida para inteiros não-negativos a recorrência

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

interpretando $\frac{n}{b}$ como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Então $T(n)$ é limitada assintoticamente por:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

No primeiro caso, $f(n)$ nao tem que ser apenas menor que $n^{\log_b a}$, deve ser polinomialmente menor. Ou seja, $f(n)$ deve ser assintoticamente menor que $n^{\log_b a}$ por um fator n^ϵ com $\epsilon > 0$. No terceiro caso, $f(n)$ no somente deve ser maior que $n^{\log_b a}$, deve ser polinomialmente maior e satisfazer a condição $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$, que é satisfeita pela maioria das funções limitadas por polinômios.

No entanto, os três casos não cobrem todas as possibilidades para $f(n)$. Existe um "buraco" entre os casos 1 e 2 quando $f(n)$ é menor que $n^{\log_b a}$ mas não é polinomialmente menor. De forma similar, existe uma lacuna entre os casos 2 e 3, onde $f(n)$ é maior que $n^{\log_b a}$ mas não polinomialmente maior. Se $f(n)$ está em uma destas lacunas ou a condição de regularidade do caso 3 não for verdadeira, não é possível utilizar o método mestre para resolver a recorrência.

3 Exemplos

1. Resolva a recorrência $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$ utilizando o método mestre.

`Solução:`

$a = 9$
$b = 3$

$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2 = \Theta(n^2)$
$f(n) = n$

Como $f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - \epsilon}), \epsilon = 1$, podemos aplicar o caso 1 do método mestre e concluir que $T(n) = \Theta(n^2)$. ■

2. Resolva a recorrência $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$ utilizando o método mestre.

`Solução:`

$a = 1$
$b = \frac{3}{2}$
$n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$
$f(n) = 1$

O caso 2 do teorema mestre aplica, uma vez que $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$. Portanto, a solução de recorrência é $T(n) = \Theta(\lg n)$. ■

3. Resolva a recorrência $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \lg n$ utilizando o método mestre.

`Solução:`

$a = 3$
$b = 4$
$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.793}$
$f(n) = n \lg n$

Como $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + \epsilon}), \epsilon \approx 0.2$, podemos aplicar o caso 3 do método mestre se a condição a seguir for verdadeira:

$$
\begin{aligned}
af\left(\frac{n}{b}\right) &\le cf(n) \\
3\left(\frac{n}{4}\lg\frac{n}{4}\right) &\le cn\lg n \\
\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3}{4}n\lg 4 &\le cn\lg n \\
\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3}{4}2n &\le cn\lg n \\
\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3}{2}n &\le cn\lg n \\
n\lg n\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2\lg n}\right) &\le cn\lg n \\
\frac{3}{4} - \frac{3}{2\lg n} &\le c
\end{aligned}
$$

Portanto, $c \ge \frac{3}{4}$ para n suficientemente grande. Assim, tomando $c = \frac{3}{4} < 1$, $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$. Assim, é possível aplicar o caso 3 do método mestre, e podemos concluir que $T(n) = \Theta(n \lg n)$. ■

4. Resolva a recorrência $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \lg n$ utilizando o método mestre.

`Solução:`

$a = 2$
$b = 2$
$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$
$f(n) = n \lg n$

Parece o caso 3 do teorema mestre pois n é assintoticamente menor que $f(n) = n \lg n$. No entanto, não é polinomialmente menor. Isto é, a razão $f(n)/n^{\log_b a} = n \lg n / n = \lg n$, que é assintoticamente menor que n^ϵ para qualquer constante positiva ϵ. Consequentemente a recorrência cai na lacuna dos casos 2 e 3 e não é resolvida pelo teorema mestre. ■

5. Resolva a recorrência $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$ utilizando o método mestre.

`Solução:`

$a = 2$
$b = 2$
$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$
$f(n) = \Theta(n)$

Como $f(n) = \Theta(n)$ e $n^{\log_b a} = \Theta(n)$, o caso 2 do teorema mestre pode ser aplicado. Assim, a solução é $T(n) = \Theta(n \lg n)$. ■

6. Resolva a recorrência $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$ utilizando o método mestre.

`Solução:`

$a = 8$
$b = 2$
$n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3$
$f(n) = \Theta(n^2)$

Como $f(n) = O(n^{3-\epsilon})$, $\epsilon = 1$, o caso 1 do teorema mestre é usado e $T(n) = \Theta(n^3)$. ■

7. Resolva a recorrência $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$ utilizando o método mestre.

`Solução:`

$a = 7$
$b = 2$
$n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} = n^{\lg 7}$
$f(n) = \Theta(n^2)$

Como $2,8 < \lg 7 < 2,81$, $f(n) = \Theta(n^{\lg 7 - \epsilon})$, $\epsilon = 0,8$. Novamente, caso 1 do teorema mestre é usado e $T(n) = \Theta(n^{\lg 7})$. ■

Bibliografia

[CRLS] CORMEN, T. H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática. Elsevier, 2012. 3a Ed. Capítulo 4 (Divisão e Conquista), Seção 4.5 (Método mestre para resolver recorrências)