Quadratura de Gauss

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

9 de agosto de 2021

As fórmulas de Newton - Cotes usam valores da função em pontos igualmente espaçados. Essa restrição é conveniente quando as fórmulas são combinadas para formar a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson generalizada, contudo, em alguns casos, tal situação pode reduzir significativamente a precisão da aproximação.

A quadratura de Gauss (1614) escolhe os pontos para o cálculo de uma forma ótima, em vez de igualmente espaçada. Os nós $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no intervalo $[a, b]$ e os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são escolhidos para minimizar o erro esperado na aproximação:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i\, f(x_i)\,.$$

Suponha que desejemos determinar c_1, c_2, x_1 e x_2 de modo que a fórmula de integração acima para $n = 2$, $a = -1$ e $b = 1$ dada por

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1\,f(x_1) + c_2\,f(x_2)$$

nos forneça o resultado exato sempre que $f(x)$ seja um polinômio de grau menor a $2 \cdot 2 - 1 = 3$, isto é, isto é equivalente a mostrar que a fórmula fornece resultados exatos quando $f(x)$ é $1, x, x^2$ e x^3.

Consequentemente, necessitamos de c_1, c_2, x_1 e x_2 de forma que

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1\,dx \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Consequentemente, necessitamos de c_1, c_2, x_1 e x_2 de forma que

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Consequentemente, necessitamos de c_1, c_2, x_1 e x_2 de forma que

$$
\begin{cases}
c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \\[2ex]
c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x\, dx \\[10ex]
\end{cases}
$$

Consequentemente, necessitamos de c_1, c_2, x_1 e x_2 de forma que

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \\ c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Consequentemente, necessitamos de c_1, c_2, x_1 e x_2 de forma que

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \\ c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \\ c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx \\ \\ \end{cases}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Consequentemente, necessitamos de c_1, c_2, x_1 e x_2 de forma que

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \\ c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \\ c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Consequentemente, necessitamos de c_1, c_2, x_1 e x_2 de forma que

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \\ c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \\ c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \dfrac{2}{3} \\ c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\, dx \end{cases}$$

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Consequentemente, necessitamos de c_1, c_2, x_1 e x_2 de forma que

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \\ c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \\ c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \\ c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0 \end{cases}$$

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Resolvendo este sistema de equações, obteremos a solução única:

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

Resolvendo este sistema de equações, obteremos a solução única:

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

que nos fornece a fórmula de aproximação

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

A fórmula acima fornece o resultado exato para todo polinômio de grau menor ou igual a 3.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Poderíamos usar essa técnica para polinômios de grau maior, no entanto, um método alternativo e atrativo, baseado na teoria que envolve o conjunto de polinômios de Legendre, uma coleção $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots\}$ com as propriedades:

Poderíamos usar essa técnica para polinômios de grau maior, no entanto, um método alternativo e atrativo, baseado na teoria que envolve o conjunto de polinômios de Legendre, uma coleção $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots\}$ com as propriedades:

(a) Para cada n, $P_n(x)$ é um polinômio mônico de grau n (o coeficiente do termo dominante é 1).

Poderíamos usar essa técnica para polinômios de grau maior, no entanto, um método alternativo e atrativo, baseado na teoria que envolve o conjunto de polinômios de Legendre, uma coleção $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots\}$ com as propriedades:

(a) Para cada n, $P_n(x)$ é um polinômio mônico de grau n (o coeficiente do termo dominante é 1).

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x) \cdot P_n(x)\, dx = 0$ sempre que $P(x)$ for um polinômio de grau menor que n.

Os primeiros polinômios de Legendre são

$$P_0(x) = 1, \; P_1(x) = x, \; P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \;\text{ e }\; P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Os primeiros polinômios de Legendre são

$$P_0(x) = 1, \; P_1(x) = x, \; P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \;\text{ e }\; P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}.$$

As raízes desses polinômios são distintas, estão no intervalo $(-1, 1)$, têm simetria em relação à origem e, o mais importante: são a escolha correta para a determinação dos parâmetros que resolvem o problema da quadratura de Gauss.

Pode-se demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 0.1

Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sejam as raízes do n-ésimo polinômio de Legendre $P_n(x)$ e que para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, os números c_i sejam definidos por

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, . \tag{1}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Pode-se demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 0.1

Suponha que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sejam as raízes do n-ésimo polinômio de Legendre $P_n(x)$ e que para todo $i = 1, 2, \dots, n$, os números c_i sejam definidos por

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,. \tag{1}$$

Se $P(x)$ é qualquer polinômio de grau menor que $2\,n$, então,

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot P(x_i)\,. \tag{2}$$

Os valores das contantes c_i quanto das raízes x_i dos polinômios de Legendre são extensivamente tabuladas. A seguinte tabela lista esses valores para $n = 2, 3, 4$ e 5.

n	raízes x_i	Coeficientes c_i	i
2	0,5773502692	1	1
	-0,5773502692	1	2
3	0,7745966692	0,5555555556	1
	0	0,8888888889	2
	-0,7745966692	0,5555555556	3
4	0,8611363116	0,3478548451	1
	0,3399810436	0,6521451549	2
	-0,3399810436	0,6521451549	3
	-0,8611363116	0,3478548451	4
5	0,9061798459	0,2369268850	1
	0,5384693101	0,4786286705	2
	0	0,5688888889	3
	-0,5384693101	0,4786286705	4
	-0,9061798459	0,2369268850	5

Figura: Tabela que lista os valores das raízes x_i e dos coeficientes c_i para $n = 2, 3, 4, 5$.

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 1

Obtenha uma aproximação para a integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x \cos x \, dx$ *utilizando a quadratura de Gauss com* $n = 3$.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Solução: De fato, pondo $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$, pela fórmula (2), temos que:

Solução: De fato, pondo $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$, pela fórmula (2), temos que:

(3) $$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \cos x \, dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Solução: De fato, pondo $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$, pela fórmula (2), temos que:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \cos x \, dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)\,. \tag{3}$$

Recorrendo a tabela 1, a aproximação em (3) nos dá:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \cos x \, dx &\approx 0,5555555556\,\mathrm{e}^{0,7745966692} \cos(0,7745966692) + 0,8888888889\,\mathrm{e}^{0} \cos(0) \\ &+ 0,5555555556\,\mathrm{e}^{-0,7745966692} \cos(-0,7745966692)\end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Solução: De fato, pondo $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$, pela fórmula (2), temos que:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \cos x \, dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)\,. \tag{3}$$

Recorrendo a tabela 1, a aproximação em (3) nos dá:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \cos x \, dx &\approx 0,5555555556\, \mathrm{e}^{0,7745966692} \cos(0,7745966692) + 0,8888888889\, \mathrm{e}^0 \cos(0) \\
&+ 0,5555555556\, \mathrm{e}^{-0,7745966692} \cos(-0,7745966692) \\
&= 1,9333904\,.
\end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Para aplicar o método da quadratura de Gauss para a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sobre um intervalo arbitrário $[a, b]$, devemos usar a seguinte mudança de variável

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)\,t + a + b],$$

Para aplicar o método da quadratura de Gauss para a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sobre um intervalo arbitrário $[a, b]$, devemos usar a seguinte mudança de variável

$$x = \frac{1}{2}[(b-a)\,t + a + b],$$

o que resulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)\,t + a + b}{2}\right)dt\,. \tag{4}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 2

Utilize o método da Quadratura de Gauss com $n = 2$ *para obter uma aproximação da integral* $\displaystyle\int_{1}^{1,5} e^{-x^2}\,dx$.

Exemplo 2

Utilize o método da Quadratura de Gauss com $n = 2$ para obter uma aproximação da integral $\displaystyle\int_1^{1,5} e^{-x^2}\, dx$.

Solução: Primeiramente devemos transformar esta integral em outra cujo intervalo de integração seja $[-1, 1]$.

Exemplo 2

Utilize o método da Quadratura de Gauss com $n = 2$ para obter uma aproximação da integral $\displaystyle\int_1^{1,5} e^{-x^2}\,dx$.

Solução: Primeiramente devemos transformar esta integral em outra cujo intervalo de integração seja $[-1, 1]$. Empregando a fórmula (4), resulta que

$$\begin{aligned}\int_1^{1,5} f(x)\,dx &= \frac{(1,5-1)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(1,5-1)\,t+1+1,5}{2}\right)dt\\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{0,5\,t+2,5}{2}\right)^2}\,dt\\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\frac{-(t+5)^2}{16}}\,dt\,.\end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 2

Utilize o método da Quadratura de Gauss com $n = 2$ para obter uma aproximação da integral $\displaystyle\int_1^{1,5} e^{-x^2}\,dx$.

Solução: Primeiramente devemos transformar esta integral em outra cujo intervalo de integração seja $[-1, 1]$. Empregando a fórmula (4), resulta que

$$\int_1^{1,5} f(x)\,dx = \frac{(1,5-1)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(1,5-1)\,t+1+1,5}{2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\frac{-(t+5)^2}{16}}\,dt\,.$$

Exemplo 2

Utilize o método da Quadratura de Gauss com $n = 2$ para obter uma aproximação da integral $\displaystyle\int_{1}^{1,5} e^{-x^2}\,dx$.

Solução: Primeiramente devemos transformar esta integral em outra cujo intervalo de integração seja $[-1, 1]$. Empregando a fórmula (4), resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{1,5} f(x)\,dx &= \frac{(1,5-1)}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{(1,5-1)\,t+1+1,5}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{0,5\,t+2,5}{2}\right)^2}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\frac{-(t+5)^2}{16}}\,dt\,.
\end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Deste modo, os valores da tabela 1 fornecem as seguintes aproximações da Quadratura de Gauss para este problema:

Deste modo, os valores da tabela 1 fornecem as seguintes aproximações da Quadratura de Gauss para este problema:

$$\int_1^{1,5} f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[1 \cdot e^{-(0{,}5773502692+5)^2/16} + 1 \cdot e^{-(-0{,}5773502692+5)^2/16}\right]$$
$$= 0,1094003\,.$$

Deste modo, os valores da tabela 1 fornecem as seguintes aproximações da Quadratura de Gauss para este problema:

$$\int_{1}^{1,5} f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[1 \cdot \mathrm{e}^{-(0,5773502692+5)^2/16} + 1 \cdot \mathrm{e}^{-(-0,5773502692+5)^2/16}\right]$$
$$= 0,1094003\,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ