

Análise de Algoritmos – Tópico 4 (Exemplos Adicionais)

Prof. Dr. Juliano Henrique Foleis

Exemplos Adicionais de Análise de Trechos Iterativos

Trecho 6

```
1: soma = 0
2: soma = soma +  $F_1(n)$ 
3: soma = soma +  $F_2(n)$ 
```

Considerando que $F_1(n)$ tem custo $\Theta(n^2)$ e $F_2(n)$ tem custo $\Theta(n \lg(n))$, qual o custo deste trecho?

Análise

As três linhas são executadas em sequência. Logo, todas contribuem para o custo total do trecho. Assim, o custo deste trecho é dado por

$$\underbrace{\Theta(1)}_{\text{linha 1}} + \underbrace{\Theta(n^2)}_{\text{linha 2}} + \underbrace{\Theta(n \lg(n))}_{\text{linha 3}} = \Theta(n^2).$$

Trecho 7

```
1: for  $j = 1; j \leq n; j++$  do
2:    $F_1(n)$ 
3:    $F_2(n)$ 
4: end for
```

Considerando que $F_1(n)$ tem custo $\Theta(n)$ e $F_2(n)$ tem custo $\Theta(\lg(n))$, qual o custo deste trecho?

Análise

Note que ambas $F_1(n)$ e $F_2(n)$ são executadas a cada iteração. Logo, o custo do trecho das linhas 2–3 é

$$\underbrace{\Theta(n)}_{\text{linha 2}} + \underbrace{\Theta(\lg(n))}_{\text{linha 3}} = \Theta(n).$$

Como o trecho das linhas 2 e 3 é executado n vezes pelo laço FOR, o custo do trecho é

$$\underbrace{n}_{\text{FOR}} \cdot \underbrace{\Theta(n)}_{\text{linhas 2-3}} = \Theta(n^2).$$

Trecho 8

```
1:  $a = 0$ 
2: for  $i = 0; i < n; i++$  do
3:    $F(n)$ 
4:   for  $j = 0; j < n; j++$  do
5:      $a = a + 1$ 
6:   end for
7: end for
```

Considerando que $F(n)$ tem custo $\Theta(n^2)$, qual o custo deste trecho?

Análise

Por hipótese, o custo de $F(n)$ é $\Theta(n^2)$. A variável de controle do FOR das linhas 4–6 é independente do valor atual da variável de controle do FOR das linhas 2–7. Portanto, podemos analisá-los separadamente. A linha 5 tem custo unitário $\Theta(1)$ e executa n vezes. Portanto, o custo unitário do laço interno é $\Theta(1) \cdot n = \Theta(n)$. O custo de cada iteração do laço externo (trecho das linhas 3–6) é

$$\underbrace{\Theta(n^2)}_{\text{linha 3}} + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{linhas 4–6}} = \Theta(n^2).$$

Como o laço externo repete n vezes o trecho das linhas 3–6, o custo total do trecho é

$$\underbrace{n}_{\text{FOR Ext.}} \cdot \underbrace{\Theta(n^2)}_{\text{linhas 3–6}} = \Theta(n^3).$$

Trecho 9

```
1: a = 0
2: for i = 1; i ≤ n; i = i * 2 do
3:   F(n)
4:   for j = 0; j < i; j ++ do
5:     a = a + 1
6:   end for
7: end for
```

Considerando que $F(n)$ tem custo $\Theta(n)$, qual o custo deste trecho?

Análise

Os valores que a variável de controle do laço FOR das linhas 4–6 assume depende diretamente do valor atual da variável de controle do FOR das linhas 2–7. Portanto, é necessário analisá-los conjuntamente. Além disso, temos 2 linhas críticas: a linha 3, que, por hipótese, tem custo unitário $\Theta(n)$ e a linha 5, que tem custo unitário $\Theta(1)$. A Tabela 1 mostra quantas vezes a linha 5 é executada para cada valor de i .

i	Valores de j	Linha 5 executa
1	1	1 vez
2	1 .. 2	2 vezes
4	1 .. 4	4 vezes
8	1 .. 8	8 vezes
...
n	1 .. n	n vezes

Tabela 1: Interdependência entre i e j no Trecho 9

Notamos também que a variável i do laço externo assume os valores $1, 2, 4, 8, \dots, n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^k$, tal que $k \in \mathbb{Z}$. Assumindo que n é potência de 2, $2^k = n \Leftrightarrow k = \lg(n)$. Portanto, o laço externo executa $\lg(n)$ vezes. Somando todas as execuções da linha 5, temos que ela executa

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\lg(n)} 2^i &= 2^{\lg(n)+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{\lg(n)} - 1 \\ &= 2 \cdot n^{\lg(2)} - 1 \\ &= 2 \cdot n^1 - 1 \\ &= 2 \cdot n - 1 \\ &= \Theta(n) \text{ vezes.}\end{aligned}$$

Como o custo unitário da linha 5 é $\Theta(1)$ e ela executa $\Theta(n)$ vezes, seu custo total é $\Theta(n)$. Como a linha 3 executa $\lg(n)$ vezes e seu custo unitário é $\Theta(n)$, seu custo total é $\Theta(n \lg(n))$. Assim, o custo total do trecho é

$$\underbrace{\Theta(n \lg(n))}_{\text{linha 3}} + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{linhas 4–6}} = \Theta(n \lg(n)).$$