Lógica Matemática

Prof. Frank Helbert Borsato

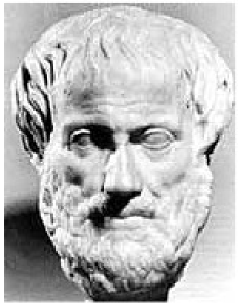
Conteúdos a serem vistos

Lógica proposicional (sentencial) – LS

Lógica de predicados (1a. ordem) – LPO

Teoria dos conjuntos

Lógica Proposicional



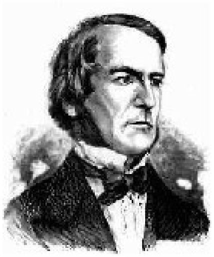
Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), filósofo grego. Produziu uma obra rica e multifacetada. Nela encontramos uma exaustiva compilação dos conhecimentos do seu tempo, mas também, uma filosofia que ainda hoje influência a nossa maneira de pensar.

Responsável por escrever os primeiros grandes trabalhos de lógica:

– Coleção de regras para raciocínio dedutivo que pode ser usado em qualquer área do conhecimento.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), filósofo e matemático alemão, provavelmente mais conhecido por ter inventado o cálculo integral e diferencial independentemente de Isaac Newton.

Propõe o uso de símbolos para mecanizar o processo de raciocínio dedutivo.



George Boole (1815–1864), matemático e filósofo inglês.

Augustus De Morgan (1806–1871), matemático inglês.

Propõem as bases da lógica simbólica moderna usando as idéias de Leibniz.

Lógica

Estudo das “Leis gerais do pensamento”

ou

“Ciência das leis do pensamento” → psicologia???

“A lógica é uma ciência do raciocínio”

. . . a lógica estuda as formas ou estruturas do pensamento, isto é, seu propósito é estudar e estabelecer propriedades das relações formais entre as proposições.

Lógica

Aristóteles se preocupava com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos. Caberia, pois, à Lógica, a formulação de leis gerais de encadeamentos de conceitos e juízos que levariam à descoberta de novas verdades.

Lógica

1. Se eu não tenho carro, a afirmação “meu carro não é azul” é verdadeira ou falsa ?

Lógica

2. A afirmação: “Se um número é primo e quadrado perfeito, então ele é negativo.” é verdadeira, falsa, ou nenhum dos dois?

Lógica

3. Existe um ditado popular que afirma que “toda regra tem exceção”. Considerando que essa frase é, por sua vez, também uma regra, podemos garantir que é verdadeira ? Ou que é falsa ?

Lógica

4. Tenho 9 pérolas idênticas, mas sei que uma delas é falsa, e é mais leve que as outras; como posso identificar a pérola falsa, com apenas duas pesagens em uma balança de dois pratos ?

Termo e proposição

Chama-se **termo**, ou designação, a uma expressão cujo papel é nomear, ou designar alguma coisa.

- 4
- o menor número primo maior que 1000
- a soma de 4 parcelas iguais a 7
- $2 \times (7 - 5)$
- o número real positivo cujo quadrado é dois

Termo e proposição

Chamaremos de **proposição, (enunciado** ou sentença), a todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

- $4 + 5 = 9$
- 9 é um número primo
- o Brasil é um país da América do Sul
- o Frank é legal

Proposição

Uma proposição sempre assume o valor verdadeiro (V) ou falso (F).

Se a proposição p = "O Brasil é um País da América do Sul" é verdadeira então representaremos o valor lógico da proposição p por VAL(p) = V ou VL(p) = V.

Se a proposição p = "São Paulo é a capital do Brasil" é falsa então representaremos o valor lógico da proposição p por VAL(p) = F ou VL(p) = F.

Proposição

"Bom dia!" não é uma proposição, pois não admite o atributo verdadeiro ou falso.

Portanto não serão proposições as seguintes expressões:

Exclamações: "Que belo dia!", "Boa sorte!".

Interrogações: "Vai chover hoje?", "Que horas são?", " O jogo terminou empatado?".

Imperativos: "Faça seu trabalho corretamente.", " Estude e limpe o quarto.".

Paradoxos: "Esta proposição é falsa".

Princípios

1 – Princípio da não-contradição:

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente.

2 – Princípio do terceiro excluído:

Uma proposição só pode ter dois valores verdades, isto é, é verdadeiro (V) ou falso (F), não podendo ter outro valor.

Conectivos

As proposições serão representadas por letras do alfabeto: a, b, c, . . . , p, q, . . .

As proposições simples (átomos) combinam-se com outras, ou são modificadas, através de operadores (conectivos), gerando novas sentenças chamadas de moléculas (ou compostas).

Conectivos

¬ corresponde a “não”

∧ corresponde a “e” (conjunção)

∨ corresponde a “ou” (disjunção)

→ corresponde a “então” (condicional)

↔ corresponde a “se e somente se” (bi-condicional)

Conectivos

Sendo assim, a partir de uma proposição podemos construir uma outra correspondente com a sua negação; e com duas ou mais, podemos formar:

- Conjunções: a $\wedge$ b (lê-se: a e b)

Exemplo:

Sejam a e b proposições tal que: a = “Chove” b = “Faz frio”, então temos que:

a $\wedge$ b = “Chove e faz frio”

Conectivos

- Disjunções: a $\vee$ b (lê-se: a ou b, ou também ou a ou b)

Exemplo:

Sejam a e b proposições tal que: a = “Chove” b = “Faz frio”, então temos que:

a $\vee$ b = “Chove ou faz frio”

Conectivos

- Condicionais: a $\rightarrow$ b (lê-se: Se a então b)

Exemplo:

Sejam a e b proposições tal que: a = “Chove” b = “Faz frio”, então temos que:

a $\rightarrow$ b = “Se chove então faz frio”

Conectivos

- Bi-condicionais: a $\leftrightarrow$ b (lê-se: a se e somente se b)

Exemplo:

Sejam a e b proposições tal que: a = “Chove” b = “Faz frio”, então temos que:

a $\leftrightarrow$ b = “Chove se e somente se faz frio”

Conectivos

Exemplo:

Seja a sentença: “Se eu sou aplicado então passo na disciplina”

Sejam as proposições:

p = “eu sou aplicado”

q = “passo na disciplina”

Então poderemos representar a sentença da seguinte forma:

Se p então q (ou $p \rightarrow q$).

Para treinar

Sejam as proposições p e q, tal que:

p = ”Está calor”

q = ”Está chovendo”

Descrever as seguintes proposições:

a) $\neg p$

b) $p \vee q$

c) $p \wedge q$

d) $p \rightarrow q$

e) $p \leftrightarrow q$

Para treinar

Seja p = “BCC é difícil” e q = “BCC é legal”. Represente cada uma das seguintes afirmações em função de p e q:

a) “BCC é difícil ou legal”

b) “BCC é difícil e legal”

c) “Se BCC é difícil, então é legal”

d) “BCC não é difícil, nem legal”

Tabela verdade

Representaremos então o valor lógico de cada molécula com seu respectivo conectivo através da tabela verdade.

Valor verdade de $\neg P$

P	$\neg P$
V	F
F	V

A negação da proposição P é a proposição $\neg P$, de maneira que se P é verdade então $\neg P$ é falso, e vice-versa.

Tabela verdade

Valor verdade de $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

O valor verdade da molécula $P \wedge Q$ é tal que VAL ($P \wedge Q$) é verdade se e somente se VAL (P) e VAL (Q) são verdades.

Tabela verdade

Valor verdade de $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

O valor verdade da molécula $P \vee Q$ é tal que $VAL(P \vee Q)$ é falso se e somente se $VAL(P)$ e $VAL(Q)$ são falsos.

Tabela verdade

Valor verdade de $P \rightarrow Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

O valor verdade da molécula $P \rightarrow Q$ é tal que

$VAL(P \rightarrow Q) = F$ se e somente se

$VAL(P) = V$ e $VAL(Q) = F$

Tabela verdade

Valor verdade de $P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

O valor verdade da molécula $P \leftrightarrow Q$ é tal que $VAL(P \leftrightarrow Q) = V$ se e somente se $VAL(P)$ e $VAL(Q)$ tem os mesmos valores verdade.

Para treinar

Se p é uma proposição verdadeira, então, analise:

a) $(p \rightarrow q)$ é uma proposição verdadeira, para qualquer que seja a proposição q.

b) $(p \wedge q)$ é uma proposição verdadeira, para qualquer que seja a proposição q.

c) $(p \leftrightarrow q)$ é uma proposição verdadeira, para qualquer que seja a proposição q.

d) $(p \vee q)$ é uma proposição verdadeira, para qualquer que seja a proposição q.

e) $(\neg p)$ é uma proposição verdadeira, para qualquer que seja a proposição q.

Para treinar

Se $(p \rightarrow q)$ é uma proposição verdadeira então podemos afirmar que:

a) p é uma proposição verdadeira.

b) q é uma proposição verdadeira.

c) Se p é uma proposição falsa, então q é uma proposição verdadeira.

d) se q é uma proposição verdadeira então p é uma proposição verdadeira.

e) se q é uma proposição falsa então p é uma proposição falsa.

Para treinar

Sejam p e q proposições. Complete a tabela verdade:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \lor q$	$p \land q$
V	V	F			
V	F		V		
F	V			V	F
F	F		V		

Para treinar

Sejam p e q proposições. Complete a tabela verdade abaixo

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
V	V				V	
V	F	F				F
F	V		F			
F	F			V		

Para treinar

Sejam p e q proposições. Complete a tabela verdade abaixo

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F		V	V	F	
V	F	F					
F	V	V		V	F		
F	F	V				V	V

Exercícios

Avalie:

1 - Se as proposições P e Q são ambas verdadeiras, então a proposição $(\neg P) \lor (\neg Q)$ também é verdadeira.

2 - Há duas proposições no seguinte conjunto de sentenças:

(I) O Brasil tem mais de 500 anos.

(II) Faça seu trabalho corretamente.

(III) Frank tem exatamente 1 cachorro.

Exercícios

Avalie:

3 - Se a proposição T é verdadeira e a proposição R é falsa, então a proposição $R \rightarrow (\neg T)$ é falsa.

4 - A proposição $(P \wedge Q) \vee R$ possui, no máximo, 4 avaliações V.

5 - Se as proposições P e Q são verdadeiras e a proposição R é falsa, então a proposição $(P \wedge R) \rightarrow (\neg Q)$ é verdadeira.

Exercícios

Avalie:

6 - Determine o valor verdade da sentença

$[A \wedge (B \rightarrow C)] \leftrightarrow [\neg A \wedge (B \vee C)]$, sabendo-se que:

VAL (A) = V, VAL (B) = F e VAL (C) = V

7 - Determinar o valor da sentença

$A \rightarrow [(\neg B \leftrightarrow C) \wedge (C \vee D)]$, sabendo-se que:

VAL (A) = V, VAL (B) = F, VAL (C) = F e

VAL (D) = V

Exercícios

Avalie (Edgard de Alencar Filho):

8 - Determine o valor verdade da proposição

$P(p,q,r) = (q \leftrightarrow (r \rightarrow \sim p)) \vee ((\sim q \rightarrow p) \leftrightarrow r)$,

sabendo-se que: $V(p) = V$, $V(q) = F$ e $V(r) = F$

9 - Determinar a tabela verdade de

$P(p,q) = \sim(p \vee q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$

Tautologia

São moléculas que possuem o seu valor verdade sempre verdadeiro independentemente dos valores lógicos das proposições (átomos) que as compõem.

Para verificar se uma proposição é uma tautologia basta fazer a tabela verdade da proposição. Se todos os valores da proposição forem verdadeiros teremos uma tautologia.

Para treinar

Assinale quais das proposições abaixo são tautologias.

a) $(p \vee \neg p)$

b) $(p \rightarrow p)$

c) $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$

Contradições

São moléculas que são sempre falsas, independentemente do valor lógico das proposições (átomos) as compõem. Para verificar se uma proposição é uma contradição basta fazer a tabela verdade da proposição. Se todos os valores da proposição forem falsos teremos uma contradição.

Para treinar

Assinale quais das proposições abaixo são contradições.

a) $(p \land \neg p)$

b) $(p \leftrightarrow \neg p)$

Contingências

São moléculas em que os valores lógicos dependem dos valores das proposições (átomos).

Para treinar

Assinale quais das proposições abaixo são contingências.

a) $\neg p \lor \neg q$

b) $\neg p \lor q$

Precedência de operadores

A expressão $p \wedge q \vee r$ é equivalente a

I) $(p \wedge q) \vee r$?

II) $p \wedge (q \vee r)$?

… não dá para saber, neste caso, o uso dos parênteses é obrigatório.

Precedência de operadores

$\neg$ afeta a proposição mais próxima à sua direita.

A proposição ($\neg p \vee q$) é uma disjunção, pois o não($\neg$) só afeta a proposição p.

Ordem de precedência:

0. (e), [e] e { e }
1. $\neg$ (mais fraco) mais precedência
2. $\vee$, $\wedge$ e $\underline{\vee}$
3. $\rightarrow$
4. $\leftrightarrow$ (mais forte) menos precedência (resolvo depois)

Precedência de operadores

Expresse a proposição $p \rightarrow q \leftrightarrow s \wedge r$

Usando parênteses, de forma a manter seu significado.

Agora converta em uma condicional.

Agora em uma conjunção.

Equivalência lógica

Duas moléculas são equivalentes se elas possuem as mesmas tabelas verdade. Para verificar se duas proposições são equivalentes basta calcular a tabela verdade de cada uma, se as tabelas forem iguais elas são equivalentes.

Para treinar

Assinale se as proposições abaixo são equivalentes.

a) $\neg(p \wedge q)$ é equivalente a $(\neg p \vee \neg q)$

b) $\neg(p \vee q)$ é equivalente a $(\neg p \wedge \neg q)$

c) $(p \rightarrow q)$ é equivalente a $(\neg p \vee q)$

d) $(p \rightarrow q)$ é equivalente a $(\neg q \rightarrow \neg p)$

Equivalências relevantes $\Leftrightarrow$

$(p \vee q)$ é equivalente a $(q \vee p)$, $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

$(p \wedge q)$ é equivalente a $(q \wedge p)$

$(p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $(q \leftrightarrow p)$

$\neg(\neg p)$ é equivalente a p

$\neg(\neg(\neg p))$ é equivalente a $(\neg p)$

$\neg(p \wedge q)$ é equivalente a $(\neg p \vee \neg q)$

$\neg(p \vee q)$ é equivalente a $(\neg p \wedge \neg q)$

$\neg(p \rightarrow q)$ é equivalente a $(p \wedge \neg q)$

$(p \rightarrow q)$ é equivalente a $(\neg p \vee q)$

$\neg(p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $(p \leftrightarrow \neg q)$

$(p \rightarrow q)$ é equivalente a $(\neg q \rightarrow \neg p)$

Para treinar

Uma sentença lógica equivalente a “Se Pedro é economista, então Luisa é solteira.” é:

a) Pedro é economista ou Luisa é solteira.

b) Pedro é economista ou Luisa não é solteira.

c) Se Luisa é solteira, Pedro é economista.

d) Se Pedro não é economista, então Luisa não é solteira.

e) Se Luisa não é solteira, então Pedro não é economista.

Para treinar

Dizer que “André é artista ou Bernardo não é engenheiro” é logicamente equivalente a dizer que:

a) André é artista se e somente se Bernardo não é engenheiro.

b) Se André é artista, então Bernardo não é engenheiro.

c) Se André não é artista, então Bernardo é engenheiro

d) Se Bernardo é engenheiro, então André é artista.

e) André não é artista e Bernardo é engenheiro

Para treinar

Uma sentença lógica equivalente a “Se Pedro é economista, então Luisa é solteira.” é:

a) Pedro é economista ou Luisa é solteira.

b) Pedro é economista ou Luisa não é solteira.

c) Se Luisa é solteira, Pedro é economista.

d) Se Pedro não é economista, então Luisa não é solteira.

e) Se Luisa não é solteira, então Pedro não é economista.

Para treinar

Dizer que “Pedro não é pedreiro ou Paulo é paulista” é, do ponto de vista lógico, o mesmo que dizer que:

a) se Pedro é pedreiro, então Paulo é paulista

b) se Paulo é paulista, então Pedro é pedreiro

c) se Pedro não é pedreiro, então Paulo é paulista

d) se Pedro é pedreiro, então Paulo não é paulista

e) se Pedro não é pedreiro, então Paulo não é paulista

Para treinar

A negação da afirmação condicional “se estiver chovendo, eu levo o guarda-chuva” é:

a) se não estiver chovendo, eu levo o guarda-chuva

b) não está chovendo e eu levo o guarda-chuva

c) não está chovendo e eu não levo o guarda-chuva

d) se estiver chovendo, eu não levo o guarda-chuva

e) está chovendo e eu não levo o guarda-chuva

Para treinar

Das proposições abaixo, a única que é logicamente equivalente a $(\sim p \wedge \sim q)$ é

a) $\sim(p \vee q)$

b) $(\sim p \wedge q)$

c) $(p \vee q)$

d) $(p \wedge \sim q)$

e) $(\sim p \vee q)$

Tautologias que sabemos

Se relacionarmos duas proposições equivalentes através do conectivo $\leftrightarrow$, teremos uma tautologia.

$(p \lor \neg p)$

$(p \rightarrow p)$

$(p \leftrightarrow p)$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ (Contra-positiva)

$\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$ (De Morgan)

$\neg(p \lor q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$ (De Morgan)

$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \land \neg q)$

$\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

Condições necessárias e suficientes

Na proposição condicional $(p \rightarrow q)$ denotamos a proposição p como antecedente e a proposição q como conseqüente. A proposição antecedente p é chamada de condição suficiente para a proposição conseqüente q, e a proposição conseqüente q é chamada de condição necessária para p.

Condições necessárias e suficientes

Exemplo:

Sejam as proposições:

p = "O gato é preto".

q = "O gato é fêmea".

Temos que a proposição $p \rightarrow q$ representa a seguinte sentença: "Se o gato é preto então o gato é fêmea".

Podemos dizer que a sentença "O gato é preto" é condição suficiente para a sentença "O gato é fêmea". Por outro lado a sentença "O gato é fêmea" é condição necessária para a sentença "O gato é preto".

Recíproca, contrária e contra-positiva

Se p e q são proposições então:

Chamamos de recíproca de $(p \rightarrow q)$

a proposição $(q \rightarrow p)$.

Chamamos de contrária de $(p \rightarrow q)$

a proposição $(\neg p \rightarrow \neg q)$

Chamamos de contra-positiva de $(p \rightarrow q)$

a proposição $(\neg q \rightarrow \neg p)$ (equivalentes)

Recíproca, contrária e contra-positiva

Exemplo:

Considere a sentença condicional “Se o Frank é feio então todos são feios”. Temos então:

- A recíproca é “Se todos são feios então o Frank é feio”.
- A contrária é “Se o Frank não é feio então todos não são feios”.
- A contra-positiva é “Se todos não são feios então o Frank não é feio”.

Para treinar

Escreva a recíproca e a contrapositiva de cada uma das proposições abaixo:

-Se a lua está cheia, os vampiros saem de casa à noite.

-Se uma girafa tem dor de garganta, ela não faz gargarejo.

-Se uma função é derivável, então ela é contínua.

Condições necessárias e suficientes

Na proposição bicondicional (p $\leftrightarrow$ q) denotamos a proposição p como antecedente e a proposição q como conseqüente . A proposição antecedente p é chamada de condição necessária e suficiente para a proposição conseqüente q, e a proposição conseqüente q é

chamada de condição necessária e suficiente para p.

Condições necessárias e suficientes

Exemplo: Sejam as proposições:

p = "O gato é preto".

q = "O gato é fêmea".

Temos que a proposição $p \leftrightarrow q$ representa a seguinte sentença: "O gato é preto se, e somente se, o gato é fêmea".

Podemos dizer que a sentença "O gato é preto" é condição necessária e suficiente para a sentença "O gato é fêmea". Por outro lado a sentença "O gato é fêmea" é condição necessária e suficiente para a sentença "O gato é preto".

Condições necessárias e suficientes

A proposição ($p \leftrightarrow q$) é lida de várias maneira distintas, como segue:

- p se e somente se q
- p se e só se q
- p é condição necessária e suficiente para q
- p é equivalente a q (menos preferida)

Equivalências de $(p \leftrightarrow q)$

$(p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Isto quer dizer que "(p se e somente se q) é equivalente a (se p então q) e (se q então p)".

Podemos então afirmar que a sentença "Levo o guarda-chuva se e somente se o tempo está fechado" é equivalente a "Se levo o guarda-chuva então o tempo está fechado, e se o tempo está fechado então levo o guarda-chuva".

Equivalências de $(p \leftrightarrow q)$

$(p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $(\neg q \leftrightarrow \neg p)$ (contra-positiva)

Isto quer dizer que "(p se e somente se q) é equivalente a (não q se e somente se não p)".

Podemos então afirmar que a sentença "Levo o guarda-chuva se e somente se o tempo está fechado" é equivalente a "O tempo não está fechado se e somente se não levo o guarda-chuva".

Equivalências de $(p \leftrightarrow q)$

$(p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $(q \leftrightarrow p)$ (recíproca)

Isto quer dizer que "(p se e somente se q) é equivalente a (q se e somente se p)".

Podemos então afirmar que a sentença "Levo o guarda-chuva se e somente se o tempo está fechado" é equivalente a "O tempo está fechado se e somente se levo o guarda-chuva".

Equivalências de $(p \leftrightarrow q)$

$(p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ (contrária)

Isto quer dizer que "(p se e somente se q) é equivalente a (não p se e somente se não q)".

Podemos então afirmar que a sentença "Levo o guarda-chuva se e somente se o tempo está fechado" é equivalente a "Não levo o guarda-chuva se e somente se o tempo não está fechado".

Equivalências de $(p \leftrightarrow q)$

$\neg (p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $(p \leftrightarrow \neg q)$

Isto quer dizer que a negação de "(p se e somente se q) é (p se e somente se não q)".

Podemos então afirmar que a negação da sentença "Levo o guarda-chuva se e somente se o tempo está fechado" é equivalente a "Levo o guarda-chuva se e somente se o tempo não está fechado".

Diversão

Diga se a proposição abaixo é uma tautologia, contradição ou uma contingência:

$$(p \vee q) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge {\sim}q) \vee ({\sim}p \wedge q))$$

Ou exclusivo

Valor verdade de $P\underline{\vee}Q$ (ou p ou q mas não ambos)

P	Q	$P\underline{\vee}Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A proposição p $\underline{\vee}$ q representará a disjunção exclusiva(ou exclusivo), e significa ou p ou q mas não ambos.

Ou exclusivo

Exemplo:

Sejam as proposições:

p = “O gato é macho”

q = “O gato é fêmea”

A proposição p $\underline{\vee}$ q significa “Ou o gato é macho ou é fêmea, mas não ambos”.

Equivalências

$p \underline{\vee} q$ é equivalente a $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Isto quer dizer que (p ou q, mas não ambos) é equivalente a (p e não q) ou (não p e q)".

Podemos então afirmar que a sentença "Ou faz calor, ou frio, mas não ambos" é equivalente a "Faz calor e não faz frio, ou não faz calor e faz frio".

Equivalências

$\neg(p \leftrightarrow q)$ é equivalente a $p \veebar q$

Isto quer dizer que a negação de (p se e somente se q) é equivalente a (p ou q, mas não ambos).

Podemos então afirmar que a sentença “Ou faz calor, ou frio, mas não ambos” é equivalente a negação de “Faz calor se e somente se faz frio”.

Para treinar

Uma proposição logicamente equivalente a "Se eu me chamo Frank, então passo em LM." é:

(A) Se eu não me chamo Frank, então eu não passo em LM.

(B) Se eu passo em LM, então me chamo Frank.

(C) Se eu não passo em LM, então me chamo Frank.

(D) Se eu não passo em LM, então não me chamo Frank.

(E) Eu passo em LM e não me chamo Frank.

Para treinar

A negação de “se hoje chove então vou pra UTFPR” é:

(A) hoje não chove e vou pra UTFPR.

(B) hoje chove e não vou pra UTFPR.

(C) hoje chove ou não vou pra UTFPR.

(D) hoje não chove ou vou pra UTFPR.

(E) se hoje chove então não vou pra UTFPR.

Para treinar

Considere as fórmulas:

I - $(p \wedge q) \rightarrow p$

II - $(p \vee q) \rightarrow p$

III - $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

É(São) tautologia(s) a(s) fórmula(s):

(A) I, somente.

(B) II, somente.

(C) III, somente.

(D) I e III, somente.

(E) I, II e III.

Para treinar

Assinale qual das alternativas abaixo representa uma contradição.

a) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

b) $(p \vee q) \rightarrow q$

c) $(\sim p \vee p) \rightarrow (\sim p \wedge p)$

d) $p \rightarrow (p \wedge q)$

e) $p \rightarrow (p \vee q)$

Para treinar

Assinale qual das alternativas abaixo representa uma tautologia.

a) $(\sim p \lor p) \rightarrow q$

b) $(p \lor q) \rightarrow (p \land q)$

c) $(p \lor q) \rightarrow q$

d) $p \rightarrow (p \land q)$

e) $p \rightarrow (p \lor q)$

Para treinar

Na tabela-verdade abaixo, p e q são proposições.

p	q	?
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

A proposição composta que substitui o ? é

a) $(p \wedge q)$

b) $(\sim p \wedge \sim q)$

c) $(p \wedge \sim q)$

d) $(\sim p \wedge q)$

e) $(p \rightarrow q)$

Para treinar

Numa proposição composta s, aparecem as proposições simples p, q e r. Sua tabela-verdade é

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	V	F
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Determine s.

Para treinar

Considere as afirmações abaixo.

I – Se p e q são proposições então $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim (p \leftrightarrow q)$ é uma tautologia.

II - Se p e q são proposições então $(p \rightarrow q) \vee \sim q)$ é uma tautologia.

III – Se p e q são proposições então a recíproca de $(p \rightarrow q)$ é $(q \rightarrow p)$.

É verdade o que se afirma APENAS em

(A) I

(B) II e III

(C) I e III

(D) I e II

(E) I, II e III

Para treinar

Ou o presidente não sabia, ou houve desacato a autoridade, mas não ambos.

A negação formal desta declaração é:

a) Para que tenha havido desacato a autoridade é necessário e suficiente que o presidente sabia.

b) Ou o presidente sabia, ou não houve desacato a autoridade, mas não ambos.

c) Para que não tenha havido desacato a autoridade é necessário e suficiente que o presidente sabia.

d) Se não houve desacato a autoridade então o presidente sabia.

e)Se o presidente sabia então houve desacato a autoridade.

Para treinar

Dar a negação em linguagem natural de cada uma das seguintes proposições:

a) Não está frio ou que está chovendo.

b) O pai de Marcos é pernambucano ou a mãe é gaúcha.

c) As vendas estão diminuindo e os preços estão aumentando.

d) Jorge estuda Física, mas não Química.

e) Rosas são vermelhas e violetas são azuis.

Implicação lógica ($\Rightarrow$)

Uma proposição P implica logicamente ou apenas implica uma proposição Q, se Q é verdadeira todas as vezes que P é verdadeira.

Toda proposição implica uma tautologia.

$P \Rightarrow P$ (reflexiva)

Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$, então $P \Rightarrow R$ (transitiva)

Implicação lógica ($\Rightarrow$)

Exemplo (construir a tabela verdade para):

$p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$

Logo,

$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

$p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$

Regras de inferência (que se pode tirar pela tabela):

(I) $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ (adição)

(II) $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$ (simplificação)

Para treinar

Diga se as implicações lógicas abaixo são válidas:

a) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

b) $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$

c) $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow q$

d) $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (Modus ponens)

e) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (Modus tollens)

f) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$ (silogismo hipotético) provar por contradição

g) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

h) $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow \sim q \Rightarrow r \rightarrow \sim p$

i) $\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p) \Rightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

Implicação lógica ($\Rightarrow$)

A proposição $p \Rightarrow q$, se e somente se, $p \rightarrow q$ é tautológica.

Os símbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são distintos, pois, o primeiro é de operação lógica (aplicado a proposições p e q gera uma nova proposição $p \rightarrow q$), enquanto que o segundo é de relação (estabelece que a condicional $p \rightarrow q$ é tautológica).

Implicação lógica ($\Rightarrow$)

A condicional "$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$" é tautológica (olhando para a última coluna de sua tabela verdade, só encontramos valores V).

Logo, subsiste a implicação lógica:

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

Para diversão

- Mostrar:

a) $q \Rightarrow p \rightarrow q$

b) $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$

- Mostrar que $p \leftrightarrow \sim q$ não implica $p \rightarrow q$
- Mostrar que $(x = y \vee x < 4) \wedge x \not< 4 \Rightarrow x = y$
- Mostrar que $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge x \neq y \Rightarrow x = 0$

Negação conjunta (↓)

A negação conjunta de duas proposições p e q é a proposição "não p e não q".

Simbolicamente:

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

Tabela verdade:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Negação disjunta (↑)

A negação disjunta de duas proposições p e q é a proposição "não p ou não q".

Simbolicamente:

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Tabela verdade:

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Os símbolos "↓" e "↑" são chamados "conectivos de SCHEFFER"

Para treinar

- Mostrar utilizando a tabela verdade:

a) $\sim p \Leftrightarrow p \downarrow p$

b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

c) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

Equivalências (+1)

Propriedades Comutativas:

$(A \lor B) \lor C \Leftrightarrow A \lor (B \lor C)$

$(A \land B) \land C \Leftrightarrow A \land (B \land C)$

Propriedades Associativas:

$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$

$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$

$(A \lor B) \land C$ não é equivalente a $A \lor (B \land C)$

Método dedutivo

As implicações e as equivalências podem ser demonstradas pelo método dedutivo.

Mostrar: (mostrar que a condicional é tautológica)

(a) $c \Rightarrow p$ onde c é falso

(b) $p \Rightarrow t$ onde t é verdadeiro

(c) $p \wedge q \Rightarrow p$ (simplificação)

(d) $p \Rightarrow p$ ou q (adição)

(e) $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (Modus ponens)

(f) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (Modus tollens)

(g) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ (Silogismo disjuntivo)

Método dedutivo

Mostrar: (mostrar que a condicional é tautológica)

(Fazer o lado direito primeiro)

(h) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

(i) $p \Rightarrow q \rightarrow p$

(j) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

(k) $p \Rightarrow \sim p \rightarrow q$

(l) $(p \rightarrow q) \Rightarrow p \wedge r \rightarrow q$

(m) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow q$

(n) $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(o) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \vee q \rightarrow r$

Redução do número de conectivos

Entre os cinco conectivos fundamentais ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), três exprimem-se em termos de apenas **dois** dos seguintes pares:

(1) $\sim$ e $\vee$ (2) $\sim$ e $\wedge$ (3) $\sim$ e $\rightarrow$

Expresse em termos de $\sim$ e $\vee$:

(a) $p \wedge q$

Expresse em termos de $\sim$ e $\wedge$:

(a) $p \leftrightarrow q$

Expresse em termos de $\sim$ e $\rightarrow$:

(a) $p \vee q$

Argumentos

Argumento é um conjunto de proposições com uma estrutura lógica de maneira tal que algumas delas acarretam ou tem como conseqüência outra proposição.

Isto é, o conjunto de proposições p1, p2, p3, . . . , pn que tem como conseqüência outra proposição q.

Chamaremos as proposições p1, p2, p3, . . . , pn de premissas do argumento, e a proposição q de conclusão do argumento.

Argumentos

Podemos representar por:

$$\begin{array}{l} p1 \\ p2 \\ p3 \\ . \\ . \\ . \\ pn \\ \hline \therefore q \end{array}$$

ou

$$p1, p2, p3 \ \ldots, pn \vdash q$$

Argumentos

Exemplos:

1) Se eu passar em LM, então vou beber

Passei em LM

∴ Vou beber

2) Se a avaliação daquela disciplina for difícil, então vou estudar LM

Não estudei LM

∴ A avaliação daquela disciplina não foi difícil

Validade de um argumento

Uma proposição é verdadeira ou falsa. No caso de um Argumento, diremos que ele é válido ou não válido.

A validade é uma propriedade dos argumentos dedutivos que depende da forma (estrutura) lógica das suas proposições (premissas e conclusões) e não do conteúdo delas.

Validade de um argumento

Podemos dizer que um argumento é válido se, quando todas as suas premissas são verdadeiras acarreta que sua conclusão também é verdadeira. Portanto um argumento será não válido se existir a possibilidade de suas premissas serem verdadeiras e sua conclusão falsa.

Argumento válido:

A verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.

Argumento não válido = sofisma

Validade de um argumento

Um argumento $p1, p2, p3 \ldots, pn \vdash q$ é válido se, e somente se,

$$(p1 \land p2 \land \ldots \land pn) \rightarrow q \quad \text{é tautológica}$$

Argumentos dedutivos válidos

Regra da adição (AD):

$$\frac{p}{p \lor q} \qquad \frac{p}{q \lor p}$$

Regra da simplificação (SIM):

$$\frac{p \land q}{p} \qquad \frac{p \land q}{q}$$

Argumentos dedutivos válidos

Regra da conjunção (CONJ):

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{p \land q} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{q \land p}$$

Regra da absorção (ABS):

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \land q)}$$

Argumentos dedutivos válidos

Regra Modus ponens (MP):

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

Regra Modus tollens (MT):

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q \qquad\quad} \\ \sim p \end{array}$$

Argumentos dedutivos válidos

Regra do silogismo disjuntivo (SD):

$$\begin{array}{l} p \lor q \\ \sim p \\ \hline q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p \lor q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}$$

Regra do silogismo hipotético (SH):

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

Argumentos dedutivos válidos

Regra do dilema construtivo (DC):

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ p \vee r \\ \hline q \vee s \end{array}$$

Regra do dilema destrutivo (DD):

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \sim p \vee \sim r \end{array}$$

Para treinar

Indique a regra de inferência que justifica a validade dos argumentos seguintes:

$p \rightarrow q \;\; |\text{---} \;\; (p \rightarrow q) \vee \sim r$ AD

$p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r \;\; |\text{---} \;\; p \rightarrow \sim r$ SH

$(q \vee r) \rightarrow \sim p, \sim\sim p \;\; |\text{---} \;\; \sim(q \vee r)$ MT

$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r), \sim(\sim p \wedge r) \;|\text{---}\; p \wedge q$ SD

$(p \leftrightarrow q \vee r) \wedge (\sim\sim\sim p) \;|\text{---}\; (p \leftrightarrow q \vee r)$ SIM

$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s), p \rightarrow q \;|\text{---}\; r \rightarrow s$ MP

$(r \vee s \vee \sim q) \rightarrow q, (r \vee s \vee \sim q) \;|\text{---}\; q$ MP

$(q \leftrightarrow r) \rightarrow r, r \rightarrow \sim(p \leftrightarrow s) \;|\text{---}\; (q \leftrightarrow r) \rightarrow \sim(p \leftrightarrow s)$ SH

Para treinar

Indique a regra de inferência que justifica a validade dos argumentos seguintes:

$3 < 5 \ |\!\text{---} \ 3 < 5 \vee 3 < 2$ AD

$\beta > 4 \wedge \beta > 8 \ |\!\text{---} \ \beta > 4$ SIM

Para treinar

Use a regra *Modus Ponens* para deduzir a conclusão de cada um dos argumentos abaixo:

$x = y \wedge y = z, (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z \mid\!\!—$ $x=z$

$(x, y \in \mathbf{R} \rightarrow x \,.\, y \in \mathbf{R}), (x, y \in \mathbf{R})\mid\!\!—$ $x \,.\, y \in \mathbf{R}$

$x + 1 = 2, x + 1 = 2 \rightarrow x = 1 \mid\!\!—$ $x = 1$

$(x > y \wedge y > z) \rightarrow x > z, x > y \wedge y > z \mid\!\!—$ $x > z$

Para treinar

Use a regra *Modus Tollens* para deduzir a conclusão de cada um dos argumentos abaixo:

$x \neq 0 \rightarrow x + y \neq y,\ x + y = y \vdash$ $x = 0$

$x = z \rightarrow x = 6,\ x \neq 6 \vdash$ $x \neq z$

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim(r \wedge s),\ \sim\sim(r \wedge s) \vdash$ $\sim(p \leftrightarrow q)$

$x > 3 \rightarrow x > y,\ x \leq y \vdash$ $x \leq 3$

Para treinar

Use a regra *Modus Tollens* para deduzir a conclusão de cada um dos argumentos abaixo:

$x \neq 0 \rightarrow x + y \neq y,\ x + y = y \mid\!—$ $x = 0$

$x = z \rightarrow x = 6,\ x \neq 6 \mid\!—$ $x \neq z$

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim(r \wedge s),\ \sim\sim(r \wedge s) \mid\!—$ $\sim(p \leftrightarrow q)$

$x > 3 \rightarrow x > y,\ x \leq y \mid\!—$ $x \leq 3$

Para treinar

Use a regra *Silogismo Disjuntivo* para deduzir a conclusão de cada um dos argumentos abaixo:

$(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow s), \sim (p \leftrightarrow q) \vdash$ $(q \leftrightarrow s)$

$s \vee (r \wedge t), \sim s \vdash$ $(r \wedge t)$

$\sim p \vee \sim q, \ \sim\sim q \vdash$ $\sim p$

$(u \vee t \vee \sim s) \vee \sim p, \sim(u \vee t \vee \sim s) \vdash$ $\sim p$

Para treinar

Use a regra *Silogismo Hipotético* para deduzir a conclusão de cada um dos argumentos abaixo:

$(r \vee \sim s \rightarrow t), (p \rightarrow r \vee \sim s) \vdash$ $p \rightarrow t$

$x = 3 \rightarrow x < y,\ x < y \rightarrow x \neq z \vdash$ $x = 3 \rightarrow x \neq z$

$r \wedge q \rightarrow \sim p, s \vee t \rightarrow r \wedge q \vdash$ $s \vee t \rightarrow \sim p$

$x.y = 6 \rightarrow x.y + 5 = 11, x.y + 5 = 11 \rightarrow y = 2 \vdash$ $x.y = 6 \rightarrow y = 2$

Para treinar

Use a regra *Dilema Construtivo* para deduzir a conclusão de cada um dos argumentos abaixo:

$(p \rightarrow r), (\sim q \rightarrow \sim s), p \vee \sim q \vdash$ $r \vee \sim s$

$x = 5 \vee x < y, x = 5 \rightarrow x > 3, x < y \rightarrow z < 2 \vdash$ $x > 3 \vee z < 2$

$y = 0 \rightarrow x.y = 0, y > 1 \rightarrow x.y > 3, y = 0 \vee y > 1 \vdash$ $x.y = 0 \vee x.y > 3$

$x = 2 \rightarrow x^2 = 4, x = 2 \vee y = 3, y = 3 \rightarrow y^2 = 9 \vdash$ $x2 = 4 \vee y2 = 9$

Para treinar

Use a regra *Dilema Destrutivo* para deduzir a conclusão de cada um dos argumentos abaixo:

$p \wedge q \rightarrow r,\ \ q \rightarrow r \wedge s,\ \sim r \vee \sim(r \wedge s) \vdash$ $\sim(p \wedge q) \vee \sim q$

$p \rightarrow \sim r \wedge q,\ \ \sim(\sim r \wedge q) \vee \sim s,\ \sim q \rightarrow s \vdash$ $\sim p \vee \sim\sim q$

$x < 3 \rightarrow x \neq y,\ \ x > 4 \rightarrow x < y,\ \ x = y \vee\ x \geq y \vdash$ $x \geq 3 \vee x \leq 4$

$y \neq 9 \vee y \neq 18,\ \ x = 2 \rightarrow y = 9,\ \ x = 8 \rightarrow y = 18 \vdash$ $x \neq 2 \vee x \neq 8$

Para treinar

Indique a regra de inferência que justifica a validade dos argumentos seguintes:

$p \rightarrow q \;\; |\text{---} \;\; (p \rightarrow q) \vee \sim r$ AD

$p \rightarrow q,\; q \rightarrow \sim r \;\; |\text{---} \;\; p \rightarrow \sim r$ SH

$(q \vee r) \rightarrow \sim p,\; \sim\sim p \;\; |\text{---} \;\; \sim(q \vee r)$ MT

$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r),\; \sim(\sim p \wedge r) \; |\text{---} \; p \wedge q$ SD

$(p \leftrightarrow q \vee r) \wedge (\sim\sim\sim p) \; |\text{---} \;\; (p \leftrightarrow q \vee r)$ SIM

$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s),\; p \rightarrow q \; |\text{---} \;\; r \rightarrow s$ MP

$(r \vee s \vee \sim q) \rightarrow q,\; (r \vee s \vee \sim q) \; |\text{---} \; q$ MP

$(q \leftrightarrow r) \rightarrow r,\; r \rightarrow \sim(p \leftrightarrow s) \; |\text{---} \; (q \leftrightarrow r) \rightarrow \sim(p \leftrightarrow s)$ SH

$3 < 5 \;\; |\text{---} \;\; 3 < 5 \vee 3 < 2$ AD

$\beta > 4 \wedge \beta > 8 \;\; |\text{---} \;\; \beta > 4$ SIM

Validade de um argumento: Como analisar a validade?

1. Identifique as premissas e conclusão do argumento.
2. Construa a tabela da verdade identificando as colunas das premissas e da conclusão.
3. Identifique as linhas onde todas as premissas são verdadeiras (linhas críticas).
4. Para cada linha crítica verifique se a conclusão do argumento é verdadeira.

   Se for para todas as linhas críticas então a forma do argumento é válida.

Exemplo argumento válido

					Premissas		Conclusão
	p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
1.	V	V	V	V	V	F	
2. $\longrightarrow$	V	V	F	V	V	V	V
3.	V	F	V	V	V	F	
4. $\longrightarrow$	V	F	F	F	V	V	V
5.	F	V	V	V	V	F	
6. $\longrightarrow$	F	V	F	V	V	V	V
7.	F	F	V	V	V	F	
8.	F	F	F	F	F	V	

Exemplo argumento inválido

						Premissas		Conclusão
p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	$p \rightarrow q \vee \neg r$	$q \rightarrow p \wedge r$	$p \rightarrow r$
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	F	
V	F	V	F	F	V	F	V	
V	F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F	
F	V	F	V	V	F	V	F	
F	F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V

Exemplo de argumento com linguagem natural

Verifique a validade dos argumentos utilizando regras de inferência:

Se Zeus é humano então Zeus é mortal.

Zeus não é mortal.

Zeus não é humano.

Exemplo de argumento com linguagem natural

Verifique a validade dos argumentos utilizando regras de inferência:

Se existem mais pássaros que ninhos então dois pássaros terão que chocar no mesmo ninho;

Existem mais pássaros que ninhos;

Dois pássaros chocam no mesmo ninho.

Exemplo

Verifique a validade dos argumentos utilizando regras de inferência:

1) $r \rightarrow p \vee q, r, \sim p \mid\!\!-\, q$

1. $r \rightarrow p \vee q$
2. r
3. $\sim p$

----

4. $p \vee q$ MP em 1 e 2
5. q SD em 3 e 4

Exemplo

Verifique a validade dos argumentos utilizando regras de inferência:

2) $p \rightarrow q, \sim q, p \vee r \vdash r$

1. $p \rightarrow q$
2. $\sim q$
3. $p \vee r$

----

4. $\sim p$ MT em 1 e 2
5. r SD em 3 e 4

Exemplo

Verifique a validade dos argumentos utilizando regras de inferência:

3) $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ \sim r \mid\!\!— q \vee s$

1. $p \vee q$
2. $p \rightarrow r$
3. $\sim r$

----

4. $\sim p$ MT em 2 e 3
5. q SD em 4 e 1
6. $q \vee s$ AD em 5

Exemplo de argumento com linguagem natural

Você está saindo para a UTFPR de tarde e percebe que não está usando os óculos. Ao tentar descobrir onde estão os óculos você começa a pensar sobre os seguintes fatos que são verdadeiros:

(a) Se os meus óculos estão na mesa da cozinha então eu os vi no almoço;

(b) Eu estava lendo o jornal na sala de estar ou eu estava lendo o jornal na cozinha;

(c) Se eu estava lendo o jornal na sala de estar então meus óculos estão no porão;

Exemplo de argumento com linguagem natural

(d) Eu não vi meus óculos no almoço;

(e) Se eu estava lendo um livro na cama então meus óculos estão no criado-mudo;

(f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha então meus óculos estão na mesa da cozinha;

Exemplo de argumento com linguagem natural

Sejam os seguintes argumentos:

p = Os meus óculos estão na mesa da cozinha.

q = Eu vi meus óculos no almoço.

r = Eu estava lendo o jornal na sala de estar.

s = Eu estava lendo o jornal na cozinha.

t = Meus óculos estão no porão.

u = Eu estava lendo um livro na cama.

v = Meus óculos estão no criado-mudo.

Falácias

Falácia = erro no raciocínio que resulta num argumento inválido.

Falácias comuns:

– Usar uma premissa vaga ou ambígua;

– Assumir como verdadeiro o que deve ser provado;

– Concluir uma premissa sem uma argumentação adequada;

– Erro oposto;

– Erro inverso.

Falácias

Como mostrar que um argumento é inválido?

– Construir a tabela da verdade e achar uma linha crítica com a conclusão falsa.

– Achar um argumento com premissas verdadeiras e conclusão falsa.

Falácias: Erro oposto

Se Zeca é um gênio então Zeca senta na primeira carteira na sala de aula;

Zeca senta na primeira carteira na sala de aula;

Zeca é um gênio.

Falácias: Erro inverso

Se as taxas de juro subirem então os preços das ações irão cair;

As taxas de juro não estão subindo;

Os preços das ações não irão cair.

Para treinar

Verifique a validade dos argumentos utilizando regras de inferência:

4) $t, t \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim s \vdash \sim s$

SH 2 e 3, MP 1 e 4

5) $\sim a \rightarrow b, b \rightarrow c, \sim c \vdash a$

SH 1 e 2, MT 3 e 4, Dupla negação em 5

6) $r \rightarrow t, s \rightarrow q, t \vee q \rightarrow \sim p, r \vee s \vdash \sim p$

DC 1, 2 e 4, MP 3 e 5

7) $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$

MP 1 e 3, MP 2 e 3, MP 4 e 5

8) $p \vee \sim q, \sim q \rightarrow r, p \rightarrow s, \sim r \vdash s$

MT 2 e 4, dupla negação em 5, SD 6 e 1, MP 7 e 3

Para treinar

Verifique a validade dos argumentos utilizando regras de inferência:

9) $p \rightarrow s,\ p \wedge q,\ s \wedge r \rightarrow \sim t,\ q \rightarrow r \mid\!\!-\ \sim t$

SIM em 2, SIM em 2, MP em 5 e 1, MP em 6 e 4, CONJ em 7 e 8, MP em 9 e 3

10) $p \wedge q,\ p \vee r \rightarrow s \mid\!\!-\ p \wedge s$

SIM em 1, AD em 3, MP em 2 e 4, CONJ em 3 e 5

11) $s \wedge q,\ t \rightarrow \sim q,\ \sim t \rightarrow r \mid\!\!-\ r \vee \sim s$

SIM em 1, MT em 4 e 2, MP em 5 e 3, AD em 6

12) $p \vee q \rightarrow (\ p \rightarrow s \wedge t\ ),\ p \wedge r \mid\!\!-\ t \vee u$

SIM em 2, AD em 3, MP em 4 e 1, MP em 3 e 5, SIM em 6, AD em 7

Para treinar

Considere que as afirmativas “Se Mara acertou na loteria então ela ficou rica” e “Mara não acertou na loteria” sejam ambas proposições verdadeiras. Simbolizando adequadamente essas proposições pode-se garantir que a proposição “Ela não ficou rica” é também verdadeira.

Para treinar

Considere que a proposição “Sílvia ama Joaquim ou Sílvia ama Tadeu” seja verdadeira. Então pode-se garantir que a proposição “Sílvia ama Tadeu” é verdadeira.

Para treinar

Considere as seguintes proposições:

P: “Mara trabalha” e Q: “Mara ganha dinheiro”

Nessa situação, é válido o argumento em que as premissas são “Mara não trabalha ou Mara ganha dinheiro” e “Mara não trabalha”, e a conclusão é “Mara não ganha dinheiro”.

Para treinar

(FCC) Um argumento é composto pelas seguintes premissas:

- Se as metas de inflação não são reais, então a crise econômica não demorará a ser superada.
- Se as metas de inflação são reais, então os superávits primários não serão fantasiosos.
- Os superávits serão fantasiosos.

Para que o argumento seja válido, a conclusão deve ser:

(A) A crise econômica não demorará a ser superada.

(B) As metas de inflação são irreais ou os superávits são fantasiosos.

(C) As metas de inflação são irreais e os superávits são fantasiosos.

(D) Os superávits econômicos serão fantasiosos.

Desafio

(ESAF) Homero não é honesto, ou Júlio é justo. Homero é honesto, ou Júlio é justo, ou Beto é bondoso. Beto é bondoso, ou Júlio não é justo. Beto não é bondoso, ou Homero é honesto. Logo,

a) Beto é bondoso, Homero é honesto, Júlio não é justo.

b) Beto não é bondoso, Homero é honesto, Júlio não é justo.

C) Beto é bondoso, Homero é honesto, Júlio é justo.

d) Beto não é bondoso, Homero não é honesto, Júlio não é justo.

e) Beto não é bondoso, Homero é honesto, Júlio é justo.

Desafio

(ESAF) Investigando uma fraude bancária, um famoso detetive colheu evidências que o convenceram da verdade das seguintes afirmações:

1) Se Homero é culpado, então João é culpado.

2) Se Homero é inocente, então João ou Adolfo são culpados.

3) Se Adolfo é inocente, então João é inocente.

4) Se Adolfo é culpado, então Homero é culpado.

As evidências colhidas pelo famoso detetive indicam, portanto, que:

a) Homero, João e Adolfo são inocentes. B) Homero, João e Adolfo são culpados. c) Homero é culpado, mas João e Adolfo são inocentes.

d) Homero e João são inocentes, mas Adolfo é culpado. e) Homero e Adolfo são culpados, mas João é inocente

Sentenças abertas e sentenças gerais

As seguintes sentenças abertas, não podem receber o atributo verdadeiro ou falso:

1) n é um número natural.

2) $x + y > 5$

Se atribuirmos um valor para as variáveis n, x e y, nas sentenças abertas acima, poderíamos ter as proposições:

1) 8 é um número natural.

2) $3 + 10 > 5$

Sentenças abertas e sentenças gerais

Existe outra maneira de transformarmos as sentenças abertas em proposições, que consiste no uso do quantificador universal e do quantificador existencial.

Quantificador universal:

∀ - Significa “Para todo ...”, “Qualquer que seja ...”.

Quantificador Existencial:

∃ - Significa “Existe ...”, “Há um ...”.

Sentenças abertas e sentenças gerais

Utilizando-se os quantificadores podemos transformar as sentenças abertas em proposições falsas ou verdadeiras, por exemplo:

a) A sentença "$\exists\ n \in \mathbb{R}$, n é um número natural" é uma proposição verdadeira.

b) A sentença "$(\forall\ x \in \mathbb{R})(\forall\ y \in \mathbb{R})(x + y > 10)$" é uma proposição falsa.

As proposições que iniciam com os quantificadores são chamadas de sentenças gerais.

Sentenças abertas e sentenças gerais

As negações das sentenças gerais podem ser feitas da seguinte maneira.

Sejam Px, Qx, Rx,... sentenças abertas de variável x.

Então temos:

$\neg (\forall x)(Px)$ é equivalente a $(\exists x)(\neg Px)$

$\neg (\exists x)(Px)$ é equivalente a $(\forall x)(\neg Px)$

$\neg (\forall x)(Px \rightarrow Qx)$ é equivalente a $(\exists x)(Px \wedge \neg Qx)$

$\neg (\forall x)(Px \vee Qx)$ é equivalente a $(\exists x)(\neg Px \wedge \neg Qx)$

$\neg (\forall x)(Px \wedge Qx)$ é equivalente a $(\exists x)(\neg Px \vee \neg Qx)$

Para treinar

1) Escreva as sentenças a seguir na linguagem natural:

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y < 2)$

b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 \geq 0)$

Para treinar

2) (CESGRANRIO) Sendo A e B conjuntos, considere a afirmação:

“para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $x < y$”.

Negar tal afirmação equivale a afirmar que:

a) para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $x > y$.

b) para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $x \geq y$.

c) existe $x \in A$ tal que, para todo $y \in B$, $x > y$.

d) existe $x \in A$ tal que, para todo $y \in B$, $x \geq y$. *

e) existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $x \geq y$.

Para treinar

3) Podemos afirmar que a negação da sentença "todos os números reais são naturais" é:

a) $(\forall x)(x \notin \mathbb{R} \rightarrow x \notin \mathbb{N})$

b) $(\forall x)(x \in \mathbb{R} \vee x \notin \mathbb{N})$

c) $(\exists x)(x \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{N})$

d) $(\exists x)(x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{N})$*

e) $(\exists x)(x \notin \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{N})$

Para treinar

4) A negação da proposição

$(\forall x)(\forall y)(x + y < 2 \rightarrow (x \geq 0 \vee y < 0))$ é:

a) $(\exists x)(\forall y)(x + y \geq 2 \rightarrow (x < 0 \vee y \geq 0))$

b) $(\exists x)(\exists y)(x + y < 2 \rightarrow (x < 0 \wedge y \geq 0))$

c) $(\exists x)(\exists y)(x + y < 2 \wedge (x < 0 \wedge y \geq 0))$*

d) $(\forall x)(\exists y)(x + y \geq 2 \rightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 0))$

e) $(\exists x)(\exists y)(x + y \geq 2 \wedge (x < 0 \vee y \geq 0))$

Para treinar

5) (CESGRANRIO) A negação de “João sempre vai de carro para o trabalho” é:

a) “João sempre vai a pé para o trabalho”.
b) “João nunca vai de carro para o trabalho”.
c) “João, às vezes, não vai de carro para o trabalho”. *
d) “João, às vezes, vai a pé para o trabalho”.
e) “João nunca vai a pé para o trabalho”.

Para treinar

6) Para que a proposição "todos os homens são bons cozinheiros" seja falsa, é necessário que:

a) todas as mulheres sejam cozinheiras.

b) algumas mulheres sejam boas cozinheiras.

c) Nenhum homem seja bom cozinheiro.

d) Todos os homens sejam maus cozinheiros.

e) Pelo menos um homem seja mau cozinheiro.

Para treinar

6) Para que a proposição “todos os homens são bons cozinheiros” seja falsa, é necessário que:

Solução

A negação de todos pode ser Algum..., Existe um ..., Pelo menos um... etc.

Sendo assim, para que a afirmação “todos os homens são bons cozinheiros” seja falsa é necessário que “Pelo menos um homem seja mau cozinheiro”.

Resposta: E

Para treinar

7) Considerando que a proposição “todos os pelicanos comem peixe” seja verdadeira, quais das proposições abaixo são verdadeiras?

*vc sabe que um pelicano é uma ave

a) Se uma ave é um pelicano, então ela come peixe.*

b) Se uma ave não é um pelicano, então ela não come peixe.

c) Se uma ave come peixe, então ela é um pelicano.

d) Se uma ave não come peixe, então ela não é um pelicano.*

Para relembrar

8) Afirmações são dadas e aceitas como verdadeiras. Deduza uma afirmação delas, se possível.

a)

Se houver uma mosca em sua sopa, você deve tomar devagar cada colherada.

Você pode tomar rápido cada colherada.

Não há uma mosca em sua sopa.

b)

Nenhum disco voador voa a uma velocidade maior do que a da luz.

O objeto acima não é um disco voador.

Não há

Para relembrar

8) Afirmações são dadas e aceitas como verdadeiras. Deduza uma afirmação delas, se possível.

c)

Se Nestor disse a verdade, Júlia e Raul mentiram.

Se Raul mentiu, Lauro falou a verdade.

Se Lauro falou a verdade, há um leão feroz nesta sala.

Não há um leão feroz nesta sala.

Lauro mentiu, Raul falou a verdade e Nestor mentiu.

Para treinar

9) Expresse as proposições abaixo em forma simbólica utilizando o quantificador existencial:

a) A equação $x^3 = 27$ tem uma solução no conjunto dos números naturais.

b) 1.000.000 não é o maior número natural.

c) Existe um número irracional.

d) Existe um número primo par.

Para treinar

10) Expresse as proposições abaixo em forma simbólica utilizando o quantificador universal:

a) A equação $x^3 = 27$ não tem uma solução no conjunto dos números naturais.

b) Zero é o menor número natural.

c) Todo número racional é real.

d) Todos os números primos maiores do que dois são ímpares.

Para treinar

11) Expresse as proposições abaixo em forma simbólica utilizando quantificadores no conjunto de todas as pessoas:

a) Everybody loves somebody.

b) Todo mundo gosta de LM.

c) Todas as pessoas são altas ou baixas

Para treinar

12) Sejam A = {2, 3, 4, 5}, $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Determine o valor lógico das proposições abaixo, justificando a sua resposta.

(a) $(\exists! x \in A)(x + 3 = 8)$

(b) $(\forall x \in A)(x + 3 = 8)$

(c) $(\forall \mathrm{x} \in \mathrm{A})(\mathrm{x} + 3 > 5)$

(d) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$

(e) $(\forall \mathrm{x} \in \mathbf{R})(|\mathrm{x}| = -\mathrm{x})$

(f) $(\exists x \in \mathbf{R})(|x| = 0)$

(g) $(\forall \mathrm{x} \in \mathrm{N})(|\mathrm{x}| = \mathrm{x})$

(h) $(\exists x \in \mathbf{R})(x + 1 > x)$