UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profa. Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Capítulo 2

Sistemas de Equações Lineares

2.1 Introdução

Os sistemas de equações algébricas lineares e suas soluções constituem um dos principais tópicos estudados em cursos de Álgebra Linear. Tais sistemas de equações lineares (ou simplesmente sistemas lineares) com milhares de variáveis, ou até com milhões de variáveis, ocorrem nas engenharias, na análise econômica, nas imagens de ressonância magnética, na análise de fluxo de tráfego, na previsão do tempo e na formulação de decisões e de estrátegias comerciais.

Temos ainda a aplicação no balanceamento de equações químicas, ou seja, uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o mesmo número de átomos de cada tipo do lado esquerdo e direito.

Assim, iremos introduzir conceitos básicos e discutir alguns métodos para resolver estes sistemas lineares.

Definição 1. *Definimos uma equação linear nas n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ como uma equação que pode ser expressa na forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveis, e b é o termo independente. As variáveis de uma equação linear são chamadas ***incógnitas****.*

Observação 2.1.1. *Uma equação linear não envolve quaisquer produtos ou raízes de variáveis. Todas as variáveis ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas ou exponenciais.*

Exemplo 2.1.1. *As equações*

$$x + 3y = 7, \qquad y = \frac{1}{2}x + 3z + 1, \qquad x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$

são lineares. Entretanto, as equações

$$x + 3\sqrt{y} = 5, \qquad 3x + 2y - z + xz = 4, \qquad y = sen(x)$$

são não-lineares.

Exemplo 2.1.2. *Dadas as equações algébricas abaixo, classifique-as em equações lineares ou equações não-lineares.*
a) $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$
b) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$
c) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{\frac{1}{3}}$

Solução: Link da solução.

Definição 2. *Uma **solução** da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ é uma n-upla $(s_1, s_2, ..., s_n)$ tais que a equação é satisfeita quando substituímos $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções de uma equação linear é chamado **conjunto-solução** ou **solução geral** da equação linear.*

Em outra palavras, os valores das variáveis que satisfazem à equação linear, constituem sua solução. Esses valores são denominados **raízes** da equação linear.

Definição 3. *Um conjunto finito de equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é denominado **sistema de equações lineares**, ou simplesmente **sistema linear**.*

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde b_i, a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, *pertencem a* $\mathbb{R}$.

A n*-upla* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *é chamada* ***solução*** *do sistema linear se* $s_1, s_2, ..., s_n$ *satisfazem a todas as equações do sistema. Esses valores são denominados raízes do sistema de equações lineares.*

Exemplo 2.1.3. *O sistema* $\begin{cases} 2x & + & y & + & 3z & = & 8 \\ 4x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & -12 \end{cases}$ *tem como raízes* $x = 2$, $y = -5$ *e* $z = 3$. *Verifique.*

Solução: *Link da solução.*

Definição 4. *Dado um sistema de equações lineares cujos termos independentes são todos nulos, o sistema é chamado* ***sistema linear homogêneo****, ou simplesmente, sistema homogêneo.*

Exemplo 2.1.4. *O sistema* $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 7x - 2y = 0 \end{cases}$ *é homogêneo.*

Observação 2.1.2. *1. O sistema linear* S*, dado acima, pode ser escrito como* $AX = B$ *(notação matricial), ou seja,*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ é denominada } \textbf{\textit{matriz dos coeficientes}}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ é denominada } \textbf{\textit{matriz das incógnitas}}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ é denominada } \textbf{\textit{matriz dos termos independentes}}.$$

2. *Outra matriz associada ao sistema de equações lineares dado é denominada* ***matriz ampliada*** *(ou matriz aumentada) do sistema linear, e é escrita como*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Exemplo 2.1.5. *A forma matricial do sistema* $S : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ *é escrito como*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e a matriz ampliada associada ao sistema é } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Exemplo 2.1.6. *Encontre a matriz ampliada de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares:*

(a) $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4x + 5y = 3 \\ 7x + 3y = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 6x + y - z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y - t + w = 1 \\ 3y + z - w = 2 \\ z + 7w = 1 \end{cases}$

Solução: *Link da solução.*

2.2 Sistemas Lineares Equivalentes

Definição 5. *Dados dois sistemas de equações lineares, eles são denominados equivalentes quando admitem a mesma solução.*

Definição 6. *Dado um sistema de equações lineares, a obtenção de um sistema linear equivalente ocorre por meio das seguintes operações elementares:*

I) *Permutação de duas equações;*

II) *Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero;*

III) *Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.*

Observação 2.2.1. *Como as linhas (horizontais) de uma matriz aumentada correspondem às equações no sistema associado, as três operações apontadas acima correspondem às seguintes operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema (já apresentadas no estudo de Matrizes):*

1. Multiplicação de uma linha inteira por um escalar c não-nulo ($L_i \leftarrow cL_i$);

2. Permutação da i*-ésima linha pela* j*-ésima linha* ($L_i \leftrightarrow L_j$).

3. Substituição da i*-ésima linha pela* i*-ésima linha mais c vezes a* j*-ésima linha* ($L_i \leftarrow L_i + cL_j$)*;*

Exemplo 2.2.1. *Aplique as seguintes operações elementares no sistema linear:*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

a) $L_2 \leftarrow 3L_2$

b) $L_2 \leftrightarrow L_3$

c) $L_3 \leftarrow -1L_2 + L_3$

Solução: *Link da solução.*

2.3 Matriz Escalonada e Escalonada Reduzida por Linhas

Nesta seção, estudaremos alguns conceitos relacionados a matrizes, por exemplo, os conceitos de matriz escalonada, matriz escalonada reduzida por linhas e matrizes equivalentes. Recorde que um sistema linear pode ser representado por meio de matrizes. Assim, tais conceitos serão importantes ao estudarmos alguns métodos de resoluções de sistemas lineares.

Definição 7. *Uma matriz A chama-se* ***escalonada*** *ou dizemos que está na forma escalonada, se o número de zeros precedendo o primeiro elemento não-nulo de cada linha aumenta por linhas (ou seja, o primeiro elemento não nulo de uma linha, conhecido como elemento líder ou pivô, está em uma coluna à direita do elemento líder da linha acima) e se aparecerem linhas nulas, estas devem estar abaixo de todas as outras linhas.*

Exemplo 2.3.1. *As matrizes abaixo estão em forma escalonada.*

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Definição 8. *Uma matriz A chama-se* ***escalonada reduzida por linhas*** *se:*

a) *A está escalonada;*

b) *o primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula de A for igual a 1 (ou seja, o* ***pivô*** *é igual a 1 para todas as linhas não-nulas;*

c) *cada coluna de A que contém o primeiro elemento não-nulo de alguma linha de A (pivô) terá todos os outros elementos iguais a zero.*

Exemplo 2.3.2. *As matrizes abaixo estão em forma escalonada reduzida por linhas.*

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 2.3.3. *Dadas as matrizes abaixo, quais são escalonadas e quais são escalonadas reduzidas por linhas?*

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

4. $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solução: *Link da solução.*

Definição 9. *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$, diremos que A é **equivalente por linhas** a B se B pode ser obtida de A após um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.*

Notação: $A \sim B$

Exemplo 2.3.4. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ *é equivalente por linhas a* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Verifique.*

Solução: *Link da solução.*

Teorema 2.3.1. *Toda matriz é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida por linhas.*

Definição 10. *Dois sistemas lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de um deles, é também solução do outro.*

Teorema 2.3.2. *Dois sistemas de equações lineares que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.*

2.4 Classificação de um Sistema Linear

Definição 11. *Diz-se que um sistema de equações lineares é compatível (SC) quando admite solução, e incompatível (SI) quando não admite solução.*

E mais, dentro dos compatíveis temos duas classificação:

Definição 12. *Um sistema compatível é determinado (SCD) quando admite uma única solução.*

Um sistema compatível é indeterminado (SCI) quando admite mais de uma solução (na verdade, infinitas soluções).

Exemplo 2.4.1. *Todo sistema linear homogêneo tem pelo menos uma solução, ou seja,* $x_i = 0$, $i = 1, 2, ..., m$, *que é dita solução trivial. Assim, qualquer sistema homogêneo é compatível.*

Exemplo 2.4.2. *O sistema* $\begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ 3x + 9y = 15 \end{cases}$ *é incompatível.*
<u>Solução:</u> Não existe x *e* y *reais que satisfaçam ao mesmo tempo as duas equações.*

Exemplo 2.4.3. *O sistema* $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ *é compatível determinado.*
<u>Solução:</u> As raízes do sistema linear são determinadas unicamente por $x = 3$ *e* $y = 4$.

Exemplo 2.4.4. *O sistema* $\begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ 8x + 4y = 200 \end{cases}$ *é compatível indeterminado.*

Solução: *Note que o sistema linear admite infinitas soluções, por exemplo,* $x = 0$ *e* $y = 50$ *são soluções, bem como* $x = 25$ *e* $y = 0$*, ou ainda* $x = 20$ *e* $y = 10$*.*

Definição 13. *Dado uma matriz A, define-se* ***posto*** *de uma matriz A como o número de linhas não nulas de alguma matriz escalonada equivalente a A.*

Exemplo 2.4.5. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *determine seu posto.*

Solução: *Link da solução.*

Teorema 2.4.1. *Consideremos um sistema linear de m equações a n variáveis. Seja* P_c *o posto da matriz dos coeficientes e* P_α *o posto da matriz ampliada do sistema.*

a) *Se* $P_c = P_\alpha = p$*, então o sistema tem solução única no caso em que* $n = p$ *(SCD) e tem infinitas soluções se* $p < n$ *(SCI);*

b) *Se* $P_c \neq P_\alpha$ *então o sistema não tem solução. (SI)*

Observação 2.4.1. *No caso de um sistema de n incógnitas apresentar infinitas soluções, obtemos que p variáveis podem ser escrita em função de outras* $n - p$ *escolhidas convenientemente. Estas* $n - p$ *variáveis são chamadas de variáveis livres e o número* $(n - p)$ *denota o* ***grau de liberdade do sistema.***

Teorema 2.4.2. *Todo sistema de equações lineares homogêneo, cujo número de equações é menor que o número de incógnitas, possui solução não-nula, isto é, possui infinitas soluções.*

Exemplo 2.4.6. *O sistema linear homogêneo* $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$ *é compatível indeterminado. Verifique.*

Solução: *Link da solução.*

2.5 Resolução de Sistemas Lineares

Agora, apresentaremos métodos ou procedimentos sistemáticos para resolver sistemas de equações lineares. Tais métodos são úteis para resolver sistemas pequenos a mão e também formam o fundamento da maioria dos algoritmos utilizados por computadores para resolver sistemas lineares grandes.

2.5.1 O Método de Eliminação Gaussiana

Aqui estudaremos um método para resolução de sistemas lineares, de qualquer tamanho. O processo consiste em substituir o sistema inicial por um sistema "equivalente", cada vez mais simples, fazendo a eliminação sucessiva das incógnitas através de operações elementares até que possamos visualizar facilmente a solução do sistema.

Em outras palavras, o Método da Eliminação Gaussiana é um procedimento para obter a matriz ampliada em forma "escalonada" de um sistema a partir da matriz ampliada inicial do sistema linear.

Além disso, quando aplicamos operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada associada a um sistema até transformarmos na forma escalonada, obtemos um novo sistema equivalente que pode ser resolvido por substituição de trás para frente.

Método de Gauss ou Eliminação Gaussiana:

1. Escreva a matriz ampliada A do sistema dado;

2. Use as operações elementares sobre as linhas da matriz A até transformá-la em uma matriz A' escalonada equivalente a matriz A;

3. Fazendo substituição de trás para frente, resolva o sistema equivalente associado a matriz A'.

Exemplo 2.5.1. *Determine a solução do sistema S utilizando o Método de Gauss.*

$$S : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 3z = 5 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Solução: *Link da solução.*

2.5.2 O Método de Eliminação de Gauss-Jordan

Neste método, procedemos de modo semelhante ao Método de Eliminação de Gauss (ou Eliminação Gaussiana), mas reduzimos ainda mais a matriz ampliada até à forma escalonada reduzida por linhas.

Método de Gauss-Jordan:

1. Escreva a matriz ampliada A do sistema;

2. Use operações elementares sobre as linhas de A até transformá-la numa matriz A' escalonada reduzida por linhas;

3. Se o sistema for compatível determinado, então a matriz A' indica a solução;

4. Se o sistema resultante for compatível indeterminado, então resolva-o para as variáveis dependentes em termos de quaisquer variáveis livres que tenham sobrado.

Exemplo 2.5.2. *Determine a solução do sistema abaixo usando o Método de Eliminação de Gauss-Jordan.*

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ -x - y = -2 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Solução: *Link da solução.*

Exercício 2.5.1. *Determine a solução de cada sistema abaixo usando o Método de Eliminação de Gauss-Jordan ou o Método de Eliminação de Gauss.*

a) $$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = -6 \\ 3x - 2y - 4z = -38 \\ x + 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x + 2y - z + w = 0 \\ -x - y + 2z - 3t + w = 0 \\ x + y - 2z - w = 0 \\ z + t + w = 0 \end{cases}$$

c) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ -x - y = 0 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$

2.5.3 Regra de Cramer

A Regra de Cramer consiste em um instrumento para a resolução de sistemas lineares que possuem o mesmo número de equações e incógnitas.

Esse método apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes.

Contudo, possui o inconveniente (em comparação ao método de Gauss ou Gauss-Jordan) de só ser possível aplicá-lo quando o determinante da matriz de coeficientes é diferente de zero (ou seja, quando o sistema possui solução única).

Além disso, se considerarmos, por exemplo um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas, teremos mais trabalho em calcular quatro determinantes do que escalonar uma única matriz 3×3, ou seja, mais uma desvantagem da regra de Cramer em relação ao método de Gauss ou Gauss-Jordan.

Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_3 \end{cases}$$

onde a forma matricial é $AX = B$ e cujo determinante da matriz de coeficientes, A, seja diferente de zero, o que significa que as linhas da matriz de coeficientes são linearmente independentes (L.I.) e portanto que o sistema possui solução única.

Trabalharemos com as vetores-colunas associados ao sistema linear, ou seja, $c_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $c_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $c_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Assim, temos que todo sistema linear, nas condições acima, possui uma única solução dada por

$$x = \frac{det[b, c_2, c_3]}{det[c_1, c_2, c_3]} = \frac{D_x}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{det[c_1, b, c_3]}{det[c_1, c_2, c_3]} = \frac{D_y}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

e

$$z = \frac{det[c_1, c_2, b]}{det[c_1, c_2, c_3]} = \frac{D_z}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

onde $det(A)$ é o determinante da matriz de coeficientes associada ao sistema, D_x é o determinante obtido pela substituição, na matriz de coeficientes, da 1ª coluna pela coluna formada pelos termos independentes, D_y é o determinante obtido pela substituição, na matriz de coeficientes, da 2ª coluna pela coluna formada pelos termos independentes, e D_z é o determinante obtido pela substituição, na matriz de coeficientes, da 3ª coluna pela coluna formada pelos termos independentes.

Observação 2.5.1. *A regra de Cramer só se aplica quando a matriz dos coeficientes do sistema tem determinante diferente de zero. Tentar utilizá-la fora desse caso pode conduzir a erros.*

Exemplo 2.5.3. *Resolva o sistema linear* $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 2 \\ 4x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$ *com o auxílio da Regra de Cramer.*

Solução: *Link da solução.*

2.5.4 O Método da Matriz Inversa

Por fim, este método aplica-se apenas aos sistemas lineares quadrados, ou seja, aqueles cujo número de equações é igual ao número de incógnitas. Equivalentemente, sistemas lineares ao qual a matriz de coeficientes seja uma matriz quadrada.

Seja o sistema de n equações lineares com n variáveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Sob a forma matricial obtemos $AX = B$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Admitindo a existência da matriz A^{-1}, obtemos que a solução do sistema é dado por

$$X = A^{-1}B.$$

Método de Matriz-Inversa:

1. Escreva a matriz dos coeficientes A do sistema;

2. Verifique se a matriz A tem inversa ($det(A) \neq 0$), em caso afirmativo, determine a inversa da matriz A, ou seja, calcule A^{-1};

3. Calcule o seguinte produto $A^{-1}B$, ou seja, a solução do sistema linear dado.

Exemplo 2.5.4. *Resolva o sistema* $\begin{cases} 2x & + & y & + & 7z & = & 16 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & -5 \\ 5x & + & 3y & + & 4z & = & 11 \end{cases}$ *pelo Método da Matriz Inversa.*

Solução: *Link da solução.*

Observação 2.5.2. *1. É conveniente empregar o Método da Eliminação Gaussiana e/ou o Método de Gauss-Jordan quando se tem para resolver um único sistema ou um conjunto de sistemas, tais que as matrizes dos coeficientes das variáveis sejam diferentes umas das outras.*

2. O Método da Matriz Inversa é conveniente no caso em que se tem para resolver conjunto de sistemas, tais que as matrizes dos coeficientes das variáveis sejam todas iguais, variando somente os termos independentes. Mesmo neste caso pode-se aplicar os outros dois métodos acima.

Exercício 2.5.2. *Resolva os seguintes sistemas de equações lineares:*

$$\begin{cases} 2x + y + 7z = b_1 \\ x + 3y + 2z = b_2 \\ 5x + 3y + 4z = b_3 \end{cases}$$

a) $b_1 = 16, \quad b_2 = -5, \quad b_3 = 11$

b) $b_1 = 25, \quad b_2 = -11, \quad b_3 = -5$

c) $b_1 = 3, \quad b_2 = 5, \quad b_3 = -5$

2.6 Exercícios sobre Sistemas de Equações Lineares

Exercício 2.6.1. *Quais das seguintes matrizes* 3×3 *estão em forma escalonada?*

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.6.2. *Quais das seguintes matrizes* 3×3 *estão em forma escalonada reduzida por linhas?*

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.6.3. *Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, escalonada reduzida por linhas, ambas ou nenhuma das duas.*

$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$d) \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad e) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercício 2.6.4. *Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada ou à forma escalonada reduzida por linhas. Resolva o sistema.*

$a) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$ $\quad b) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right]$ $\quad c) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$d) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\quad e) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Exercício 2.6.5. *Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss.*

$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$ $\quad (b) \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1 \end{cases}$

$(c) \begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases}$ $\quad (d) \begin{cases} -2y + 3z = 1 \\ 3x + 6y - 3z = -2 \\ 6x + 6y + 3z = 5 \end{cases}$

$$(e)\ \begin{cases} 3x + 2y - z = -15 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 11 \\ -6x - 4y + 2z = 30 \end{cases}$$

Exercício 2.6.6. *Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.*

$$(a)\ \begin{cases} 10y - 4z + w = 1 \\ x + 4y - z + w = 2 \\ 3x + 2y + z + 2w = 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w = -4 \\ x - 6y + 3z = 1 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x - 2y + z - 4w = 1 \\ x + 3y + 7z + 2w = 2 \\ x - 12y - 11z - 16w = 5 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 7 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} 2x - 3y + 4z - w = 0 \\ 7x + y - 8z + 9w = 0 \\ 2x + 8y + z - w = 0 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ -y - 3z + w = 0 \\ 3x + y + z + 2w = 0 \\ x + 3y - 2z - 2w = 0 \end{cases}$$

Exercício 2.6.7. *Resolva os seguintes sistemas por eliminação de Gauss ou elimação de Gauss-Jordan.*

$$(a)\ \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ 2u + 3v + 2w - x = 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x = 0 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x+3y+w=0 \\ x+4y+2z=0 \\ -2y-2z-w=0 \\ 2x-4y+z+w=0 \\ x-2y-z+w=0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} 2x-y+3z+4w=9 \\ x-2z+7w=11 \\ 3x-3y+z+5w=8 \\ 2x+y+4z+4w=10 \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} z+w+t=0 \\ -x-y+2z-3w+t=0 \\ x+y-2z-t=0 \\ 2x+2y-z+t=0 \end{cases}$$

Exercício 2.6.8. *Classifique e resolva os sistemas lineares abaixo:*

a) $$\begin{cases} 5x+8y=34 \\ 10x+16y=50 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 4x-y-3z=15 \\ 3x-2y+5z=-7 \\ 2x+3y+4z=7 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 2x+3y-2z=2 \\ 3x-5y+4z=5 \\ x-2y-7z=-24 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x+4y+6z=0 \\ -\frac{3}{2}x-6y-9z=0 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 3x+4y+6z=23 \\ 3x+2y+3z=10 \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} 5x-3y-7z=-5 \\ 4x-y-z=2 \\ -2x+4y+8z=10 \end{cases}$$

g) $\begin{cases} 3x - 8y - 9z = 14 \\ 7x + 3y + 2z = -12 \\ -8x - 9y + 6z = 11 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4x - 3y = -18 \\ 2y + 5z = -8 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x - 5y - z = -8 \\ 3x - 2y - 4z = -11 \\ -5x + y + z = -9 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 3x + 9y + 12z = 24 \\ 4x + 16y + 26z = 46 \\ x + 7y + 14z = 20 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 5x + y + z = 7 \\ 6x - y - z = 4 \\ 7x + 2y + 2z = 14 \end{cases}$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[3] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[4] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[5] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[7] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[8] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[9] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.