

Lista de Exercícios 02

Filtragem no Domínio da Frequência

Exercício 01: Explique a equação de como um espectro de uma transformada de Fourier é obtido.

A Transformada de Fourier é usada para converter um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência. Basicamente, ela decompõe um sinal em suas componentes de frequência. A equação geral da Transformada de Fourier é:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \times e^{-j2\pi ux} dx$$

Aqui vai o que cada termo representa:

- $f(x)$: É o sinal original no domínio do tempo.
- $F(u)$: É o sinal no domínio da frequência, ou seja, o espectro de Fourier.
- $e^{-j2\pi ux}$: É um termo complexo que realiza a decomposição do sinal em suas componentes de frequência. j é a unidade imaginária (às vezes representada por i).
- u : É a variável da frequência.
- A integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ indica que estamos somando infinitesimais ao longo de todo o domínio do tempo.

Basicamente, o que essa equação faz é somar todas as versões deslocadas no tempo de $f(x)$, cada uma multiplicada por uma exponencial complexa que oscila a uma frequência específica u . O resultado é uma função $F(u)$, que nos diz a amplitude e a fase de cada componente de frequência do sinal original.

Exercício 02: Onde fica a componente dc do espectro? Qual a característica do componente dc do espectro e seu valor é proporcional a que?

A componente dc do espectro fica no centro da transformada de Fourier, se a transformada estiver centralizada. Ela representa a intensidade média da imagem e seu valor é proporcional ao brilho total da imagem.

Exercício 03: Como é possível deslocar a origem de uma transformada de Fourier, $F(u, v)$ de tamanho $M \times N$, para a coordenada de frequência $(M/2, N/2)$

Para deslocar a origem de uma transformada de Fourier $F(u, v)$ de tamanho $M \times N$ para a coordenada de frequência $(M/2, N/2)$, basta multiplicar a imagem original $f(x, y)$ pelo fator $(-1)^{x+y}$ antes de calcular a transformada. Isso centraliza as baixas frequências na origem do espectro.

Exercício 04: Explique em detalhes o teorema da convolução.

O teorema da convolução diz que a convolução de duas funções no domínio do tempo ou espaço é equivalente ao produto das suas transformadas de Fourier no domínio da frequência. Basicamente, se você tem duas funções $f(x)$ e $h(x)$ e quer convoluí-las, você pode transformá-las para o domínio da frequência, multiplicar as transformadas de Fourier $F(u)$ e $H(u)$, e depois aplicar a transformada inversa para voltar ao domínio original. Isso é útil porque a convolução direta pode ser complexa e demorada, mas no domínio da frequência, a multiplicação é bem mais simples e rápida.

Exercício 05: Ao que correspondem as baixas frequências em uma imagem no domínio da frequência? Já as altas frequências correspondem a que em uma imagem no domínio da frequência?

Baixas frequências em uma imagem no domínio da frequência correspondem às áreas com pouca variação, ou seja, as partes mais suaves e homogêneas, como fundos uniformes ou grandes áreas com a mesma cor. Já as altas frequências correspondem aos detalhes finos, como bordas, linhas, texturas e qualquer coisa que muda rapidamente na imagem.

Exercício 06: Como é feito e por que é realizado o zero padding em imagens ao se fazer a filtragem no domínio da frequência. Qual será o tamanho mínimo de uma imagem $M \times N$ após a etapa de zero padding? Qual deve ser o tamanho de um filtro no domínio da frequência aplicado a essa imagem após o zero padding? Esse filtro deve exibir alguma característica relevante?

O zero padding é feito adicionando zeros nas bordas da imagem para evitar erros de wraparound na convolução. Isso acontece porque a DFT assume periodicidade, então o padding ajuda a manter a imagem original intacta durante a filtragem. O tamanho mínimo da imagem após o zero padding será $2M \times 2N$. O filtro aplicado à imagem deve ter o mesmo tamanho $2M \times 2N$ e ser simétrico em relação ao centro para funcionar corretamente no domínio da frequência.

Exercício 07: Enumere os passos para a filtragem no domínio da frequência.

Primeiro, calcula a DFT da imagem original. Depois, aplica zero padding pra evitar wraparound. Em seguida, multiplica a imagem por $(-1)^{x+y}$ pra centralizar a DFT. Então, aplica o filtro desejado na DFT da imagem. Após isso, calcula a DFT inversa. Finalmente, multiplica de novo por $(-1)^{x+y}$ e corta os zeros adicionados na etapa de padding.

Exercício 08: O que faz e o que se espera de um filtro passa-baixa? Explique um tipo de filtro passa-baixa, suas características e explique sua equação.

Um filtro passa-baixa suaviza a imagem, removendo as altas frequências, que geralmente correspondem a ruídos e bordas abruptas, e deixando passar apenas as baixas frequências, que são as áreas mais suaves da imagem.

Um exemplo é o filtro passa-baixa gaussiano. Ele atenua as altas frequências de forma suave, sem causar o efeito de ringing. A equação do filtro é:

$$H(u, v) = e^{-\frac{D(u,v)^2}{2D_0^2}}$$

Aqui, $D(u,v)$ é a distância entre um ponto (u,v) no domínio da frequência e o centro da transformada, e D_0 é a frequência de corte. O filtro gaussiano é ótimo porque oferece uma transição suave entre as frequências, sem bordas abruptas.

Exercício 09: O que faz e o que se espera de um filtro passa-alta? Explique um tipo de filtro passa-alta, suas características e explique sua equação.

Um filtro passa-alta realça os detalhes de uma imagem, como bordas e linhas, ao deixar passar apenas as altas frequências e atenuar as baixas frequências, que correspondem às áreas suaves da imagem.

Um exemplo é o filtro passa-alta Gaussiano. Ele oferece uma transição suave entre as frequências atenuadas e as passadas, sem causar o efeito de ringing. A equação do filtro é:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D(u,v)^2}{2D_0^2}}$$

Aqui, $D(u,v)$ é a distância entre um ponto (u,v) no domínio da frequência e o centro da transformada, e D_0 é a frequência de corte. O filtro Gaussiano é bom porque oferece uma transição suave entre as frequências, minimizando artefatos indesejados.

Exercício 10: Cite alguma aplicação na qual usar um filtro passa-baixa seja interessante.

Usar um filtro passa-baixa é interessante em processamento de imagens médicas, como em radiografias, para reduzir o ruído e suavizar a imagem, permitindo uma visualização mais clara e detalhada das estruturas anatômicas sem interferências.

Restauração e Reconstrução de Imagens

Exercício 11: Dada uma imagem com ruído periódico, qual a melhor abordagem para remover ou reduzir esse ruído periódico da imagem?

Para remover ou reduzir ruído periódico de uma imagem, a melhor abordagem é usar filtragem no domínio da frequência. Especificamente, um filtro notch é ideal, pois ele rejeita frequências específicas onde o ruído aparece no espectro de Fourier da imagem.

Identificamos os picos de ruído no espectro, aplicamos o filtro notch para eliminar essas frequências e, em seguida, fazemos a transformada inversa de Fourier para voltar ao

domínio espacial. Essa técnica é eficaz para limpar a imagem sem afetar muito os detalhes importantes.

Exercício 12: O filtro de média geométrica é superior em relação ao filtro de média aritmética em que sentido?

O filtro de média geométrica é superior ao filtro de média aritmética porque ele preserva melhor os detalhes da imagem enquanto ainda suaviza e reduz o ruído. Isso ocorre porque o filtro de média geométrica atenua menos os valores de pixels altos e baixos extremos, resultando em menos borramento dos detalhes finos da imagem.

Exercício 13: Filtros de estatística de ordem apresentam bons resultados para que tipo de ruído? Explique um filtro de estatística de ordem.

Filtros de estatística de ordem são ótimos para ruído impulsivo, como ruído "sal e pimenta". Um exemplo é o filtro de mediana, que substitui cada pixel pelo valor mediano dos pixels na sua vizinhança. Isso preserva as bordas enquanto remove o ruído, já que a mediana não é afetada por valores extremos como a média é.

Exercício 14: O que são filtros Notch? Eles operam em que domínio? Qual a vantagem desse tipo de filtro e como ele pode ser obtido?

Filtros Notch são usados para remover frequências específicas e indesejadas de uma imagem. Eles operam no domínio da frequência. A vantagem é que eles podem remover ruído periódico sem afetar outras partes da imagem. Eles podem ser obtidos aplicando máscaras que bloqueiam as frequências indesejadas diretamente no espectro de Fourier da imagem.

Processamento de Imagens Coloridas

Exercício 15: Qual a diferença entre os processo aditivo e o processo de pigmentação na formação de cores? Quais são as cores primárias em cada um desses processos? Cite um modelo de cor que se enquadra em cada um desses processos.

O processo aditivo cria cores somando luzes de diferentes cores, com as cores primárias sendo vermelho, verde e azul (RGB). É usado em telas de TV e monitores.

O processo de pigmentação, ou subtrativo, cria cores removendo partes da luz branca com pigmentos ou tintas, e as cores primárias são ciano, magenta e amarelo (CMY). É usado na impressão.

Modelos de cor: RGB para aditivo e CMYK para subtrativo.

Exercício 16: Explique o modelo de cor HSI e o que representa cada uma das suas componentes, explicando-as.

O modelo de cor HSI representa a cor com três componentes: Hue (H), Saturation (S) e Intensity (I).

- **Hue (H)** é a tonalidade ou matiz da cor, que indica qual cor percebemos (vermelho, azul, verde, etc.). É medida como um ângulo, geralmente de 0 a 360 graus.
- **Saturation (S)** é a pureza da cor, que indica quanta cor está misturada com branco. Uma saturação alta significa uma cor pura, enquanto uma saturação baixa significa uma cor mais acinzentada.
- **Intensity (I)** é o brilho da cor, que mostra o quão claro ou escuro é a cor. Vai de preto a branco, passando pelos tons de cinza.

O modelo HSI é útil porque separa a cor em componentes que são mais intuitivas para os humanos compreenderem e manipular.

Exercício 17: Por que geralmente não observamos as exatas mesmas cores de uma imagem que você olhou no monitor e mandou imprimir-la.

A diferença ocorre porque monitores e impressoras usam modelos de cor diferentes. Monitores usam o modelo RGB (aditivo) e as impressoras usam CMYK (subtrativo). Cada dispositivo também tem suas próprias gamas de cor, o que significa que nem todas as cores exibidas no monitor podem ser reproduzidas exatamente pela impressora. Além disso, as configurações de brilho, contraste e calibração de cada dispositivo também influenciam na percepção das cores.

Exercício 18: Quais as vantagens do modelo HSI frente aos demais modelos?

O modelo HSI é vantajoso porque separa a cor em componentes que são mais intuitivas para os humanos: tonalidade, saturação e intensidade. Isso facilita a manipulação e análise das cores, especialmente para tarefas de processamento de imagens, como realce e segmentação, onde queremos alterar apenas a cor ou o brilho de uma imagem sem afetar outras características. Além disso, o HSI corresponde melhor à percepção humana das cores, tornando os ajustes mais naturais.

Exercício 19: Imagine um cor no modelo RGB com valores (0.7, 0.3, 0.0):

a) **Quais são os valores dessa cor no modelo CMY?**

$$C = 1 - R = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$M = 1 - G = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$Y = 1 - B = 1 - 0 = 1$$

Portanto, os valores CMY são (0.3, 0.7, 1).

b) **Quais são os valores dessa cor no modelo HSI? A componente H também deve estar no intervalo [0, 1].**

$$I = \frac{R+G+B}{3} = \frac{0.7+0.3+0}{3} = 0.333$$

$$S = 1 - \frac{\min(R,G,B)}{I} = 1 - \frac{0}{0.333} = 1$$

Para o hue:

$$\theta = \cos^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2}[(R-G)+(R-B)]}{[(R-G)^2 + (R-B)(G-B)]^{\frac{1}{2}}} \right\} = 25.84 \text{ graus}$$

Como $B \leq G$, $H = \frac{\theta}{360}$:

$$H = \frac{25.84}{360} = 0.072$$

Portanto, os valores HSI são (0.072, 1, 0.333)

Exercício 20: Qual a diferença entre o processamento de imagens pseudo-color e o processamento de imagens full-color? Explique a técnica de intensity slicing. Essa técnica pertence a qual das duas categorias?

No processamento de imagens full-color, trabalhamos com imagens que já possuem informação de cor em cada pixel, geralmente no modelo RGB. Já no processamento pseudo-color, adicionamos cores a imagens monocromáticas (em tons de cinza) para destacar características específicas.

A técnica de intensity slicing é usada no processamento pseudo-color. Ela consiste em dividir a imagem em níveis de intensidade e mapear cada nível para uma cor específica. Isso ajuda a visualizar diferentes regiões da imagem com mais clareza.

Exercício 21: Imagine uma imagem RGB que possui um desbalanceamento de cores e possui azul em abundância, quais são as duas formas pelas quais podemos corrigir esse desbalanceamento?

Para corrigir o desbalanceamento de uma imagem com excesso de azul, podemos:

1. Reduzir a quantidade de azul diretamente.
2. Aumentar a quantidade das cores complementares, vermelho e verde, para equilibrar a cor.

Exercício 22: Como é feito a equalização do histograma de uma imagem colorida?

A equalização do histograma de uma imagem colorida é feita no modelo HSI. Primeiro, convertemos a imagem de RGB para HSI. Em seguida, equalizamos apenas a componente de intensidade (I), mantendo as componentes de matiz (H) e saturação (S) inalteradas. Depois, convertemos a imagem de volta para RGB. Isso melhora o contraste sem distorcer as cores.

Segmentação de Imagens

Exercício 23: Na detecção de bordas, usa-se geralmente o gradiente. Quais são as máscaras dos operadores de Sobel usados no cálculo do gradiente? Escreva também uma das fórmulas pela qual é possível calcular a magnitude do gradiente.

Os operadores de Sobel usam as seguintes máscaras para calcular o gradiente em uma imagem:

Para a direção x:

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Para a direção y:

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

Uma fórmula para calcular a magnitude do gradiente é:

$$M(x, y) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

Outra forma simplificada é:

$$M(x, y) = |g_x| + |g_y|$$

Exercício 24: Na detecção de bordas além do gradiente, também usa-se geralmente técnicas de suavização e limiarização. Em que momento cada uma dessas técnicas é aplicada (antes ou depois do cálculo do gradiente) e qual o objetivo de cada uma dessas técnicas?

Na detecção de bordas, a suavização é aplicada antes do cálculo do gradiente para reduzir o ruído na imagem, o que evita a detecção de bordas falsas. A limiarização é aplicada depois do cálculo do gradiente para selecionar apenas os pixels com magnitude de gradiente acima de um certo valor, destacando assim as bordas mais significativas.

Exercício 25: Por que a transformada de Hough é utilizada na detecção de bordas? Qual o seu objetivo?

A transformada de Hough é usada na detecção de bordas para identificar formas geométricas, como linhas e círculos, em imagens. Seu objetivo é localizar e destacar essas formas mesmo em presença de ruído ou bordas quebradas, transformando o problema da detecção de bordas em um problema de detecção de picos em um espaço de parâmetros.

Exercício 26: Técnicas de limiarização particionam a imagem diretamente em regiões baseando-se em valores intensidades. Dado um limiar T , qual é a equação que faz a limiarização de uma imagem $f(x, y)$?

A equação para limiarização de uma imagem $f(x,y)$ dado um limiar T é:

$$\begin{aligned} 0, & \text{ se } f(x, y) < T \\ 1, & \text{ se } f(x, y) \geq T \end{aligned}$$

Aqui, $g(x, y)$ é a imagem binarizada resultante.

Exercício 27: Explique como o ruído afeta as técnicas de limiarização e como podemos solucionar esse problema.

O ruído afeta as técnicas de limiarização criando falsos positivos e negativos, fazendo com que regiões de interesse sejam mal segmentadas. Para solucionar isso, aplicamos uma suavização na imagem antes da limiarização, usando filtros como média ou Gaussiano, que reduzem o ruído e melhoram a precisão da segmentação.