Cálculo Numérico

Raízes de Equações: Método da Bissecção

Wellington José Corrêa
@correa.well

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

21 de Junho de 2021

Raízes de Equações

A necessidade de encontrar valores de $x = \xi$ que satisfazem à equação $f(x) = 0$ aparece frequentemente em uma ampla variedade de problemas provenientes das Ciências e das Engenharias. Esses valores especiais são chamados de raízes da equação $f(x) = 0$ ou zeros da função $f(x)$.

Raízes de Equações

A necessidade de encontrar valores de $x = \xi$ que satisfazem à equação $f(x) = 0$ aparece frequentemente em uma ampla variedade de problemas provenientes das Ciências e das Engenharias. Esses valores especiais são chamados de raízes da equação $f(x) = 0$ ou zeros da função $f(x)$.

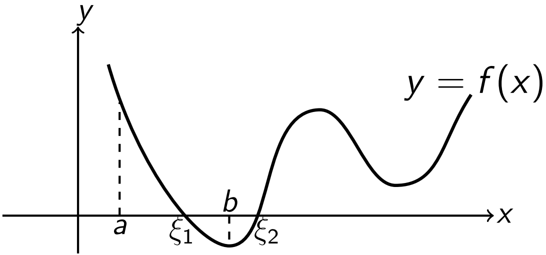


Figura: Raízes ξ_1 e ξ_2 da equação $f(x)$.

Para equações algébricas de grau até quatro, suas raízes podem ser calculadas por meio de uma expressão, tal como $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ para determinar as duas raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Para equações algébricas de grau até quatro, suas raízes podem ser calculadas por meio de uma expressão, tal como $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}$ para determinar as duas raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

No entanto, para equações algébricas de grau superior a quatro e para a grande maioria das equações transcendentes, as raízes não podem ser calculadas analiticamente.

Nesses casos, precisam ser usados métodos que encontrem uma solução aproximada para essas raízes.

Outline

Isolamento de Raízes

O problema de calcular uma raiz pode ser dividido em duas fases:

Isolamento de Raízes

O problema de calcular uma raiz pode ser dividido em duas fases:

1. Isolamento da raiz, isto é, encontrar um intervalo [a,b] que contenha uma, e somente uma, raiz de $f(x) = 0$ (veja figura anterior).

Isolamento de Raízes

O problema de calcular uma raiz pode ser dividido em duas fases:

1. Isolamento da raiz, isto é, encontrar um intervalo [a,b] que contenha uma, e somente uma, raiz de $f(x) = 0$ (veja figura anterior).
2. Refinamento da raiz, ou seja, a partir de um valor inicial $x_0 \in [a, b]$, gerar uma sequência $x_0, x_1, ..., x_k, ...$ que converta para uma raiz exata de ξ de $f(x) = 0$.

Isolamento de Raízes

Teorema 1.1

Se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo [a,b], isto é, $f(a) \cdot f(b) < 0$, então, o intervalo conterá, no mínimo, uma raiz da equação $f(x) = 0$, em outras palavras, haverá, no mínimo, um número $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$.

Isolamento de Raízes

Teorema 1.1

Se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo [a,b], isto é, $f(a) \cdot f(b) < 0$, então, o intervalo conterá, no mínimo, uma raiz da equação $f(x) = 0$, em outras palavras, haverá, no mínimo, um número $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$.

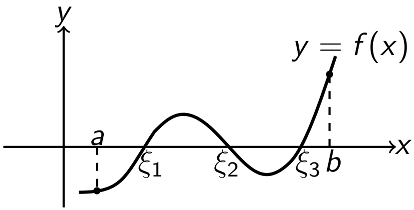


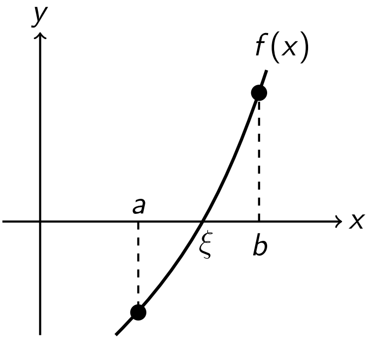
Figura: Veja pelo gráfico que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Isolamento de Raízes

A raiz ξ será definida e única se $f'(x)$ existir e preservar o sinal dentro do intervalo (a, b), isto é, se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ se $x \in (a, b)$.

Isolamento de Raízes

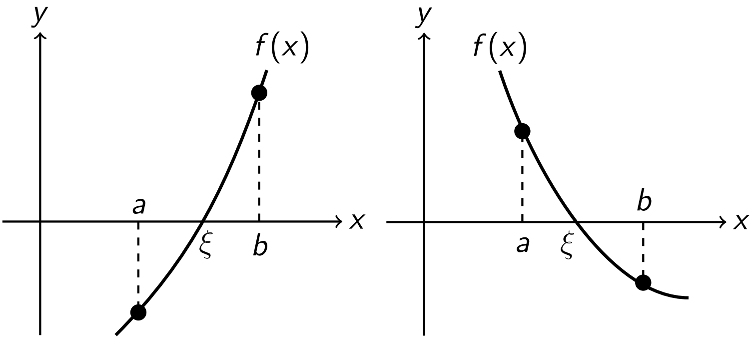
A raiz ξ será definida e única se $f'(x)$ existir e preservar o sinal dentro do intervalo (a, b), isto é, se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ se $x \in (a, b)$.



(a) $f'(x) > 0$

Isolamento de Raízes

A raiz ξ será definida e única se $f'(x)$ existir e preservar o sinal dentro do intervalo (a, b), isto é, se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ se $x \in (a, b)$.



(a) $f'(x) > 0$ (b) $f'(x) < 0$

Outline

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Critério de Parada

Antes de serem abordados métodos para obter a sequência $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, \xi\}$ que convirja para a raiz exata ξ de $f(x) = 0$, é necessário definir um critério de parada, ou seja, quando se deve interromper a geração desta sequência. Na prática, a sequência é interrompida quando seus valores satisfazerem a pelo menos um dos critérios:

Critério de Parada

Antes de serem abordados métodos para obter a sequência $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, \xi\}$ que convirja para a raiz exata ξ de $f(x) = 0$, é necessário definir um critério de parada, ou seja, quando se deve interromper a geração desta sequência. Na prática, a sequência é interrompida quando seus valores satisfazerem a pelo menos um dos critérios:

$$|x_k - x_{k+1}| \leq \varepsilon$$

Critério de Parada

Antes de serem abordados métodos para obter a sequência $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, \xi\}$ que convirja para a raiz exata ξ de $f(x) = 0$, é necessário definir um critério de parada, ou seja, quando se deve interromper a geração desta sequência. Na prática, a sequência é interrompida quando seus valores satisfazerem a pelo menos um dos critérios:

$$|x_k - x_{k+1}| \leq \varepsilon$$

$$\left|\frac{x_k - x_{k+1}}{x_{k+1}}\right| \leq \varepsilon$$

Critério de Parada

Antes de serem abordados métodos para obter a sequência $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, \xi\}$ que convirja para a raiz exata ξ de $f(x) = 0$, é necessário definir um critério de parada, ou seja, quando se deve interromper a geração desta sequência. Na prática, a sequência é interrompida quando seus valores satisfazerem a pelo menos um dos critérios:

$$\left|x_k - x_{k+1}\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|\frac{x_k - x_{k+1}}{x_{k+1}}\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|f(x_k)\right| \leq \varepsilon$$

Critério de Parada

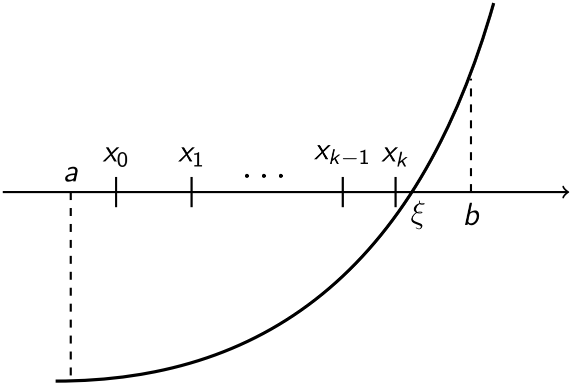


Figura: Refinamento da raiz, a partir de um valor inicial $x_0 \in [a, b]$.

Outline

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método da Bissecção

Seja uma função $f(x)$ contínua no intervalo [a,b] sendo $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dividindo o intervalo [a,b] ao meio, obtém-se dois subintervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$.

Método da Bissecção

Se $f(x_0) = 0$, então a raiz procurada ξ é x_0. Caso contrário, a raiz ξ estará onde a função tem sinais opostos nos extremos, ou seja, se $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, então, $\xi \in (a, x_0)$, se não $f(a) \cdot f(x_0) > 0$ e $\xi \in (x_0, b)$.

Método da Bissecção

Se $f(x_0) = 0$, então a raiz procurada ξ é x_0. Caso contrário, a raiz ξ estará onde a função tem sinais opostos nos extremos, ou seja, se $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, então, $\xi \in (a, x_0)$, se não $f(a) \cdot f(x_0) > 0$ e $\xi \in (x_0, b)$.

O novo intervalo $[a_1, b_1]$ que contém ξ é dividido ao meio e obtém-se o ponto x_1. O processo se repete até que se obtenha uma aproximação para a raiz exata ξ, com a tolerância desejada.

Método da Bissecção

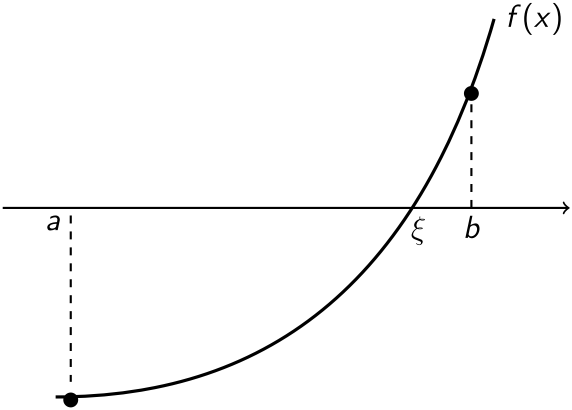


Figura: Escolhemos a e b de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Note que neste caso, $\xi \in (a, b)$.

Método da Bissecção

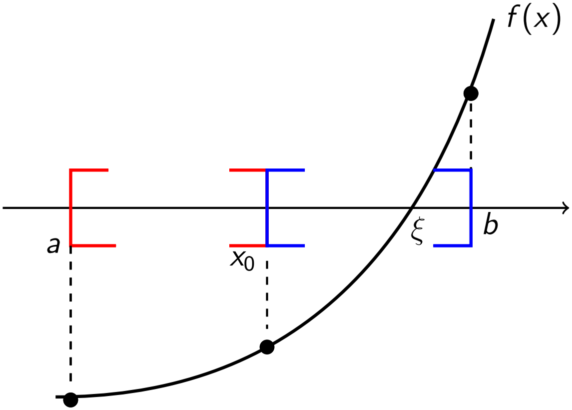


Figura: Dividamos o intervalo $[a, b]$ ao meio obtendo os subintervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$.

Método da Bissecção

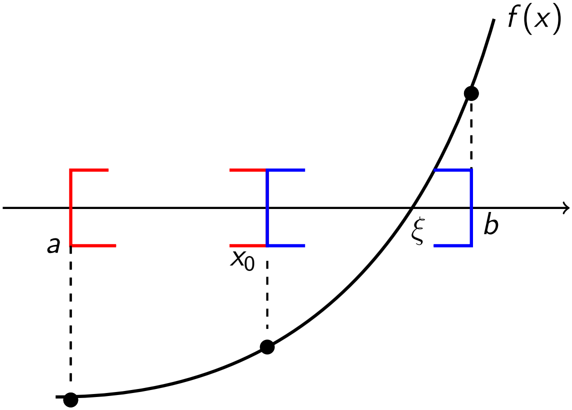


Figura: Veja que $f(x_0) \cdot f(b) < 0$, então $\xi \in (x_0, b)$ e o novo intervalo a ser considerado será $[x_0, b]$.

Método da Bissecção

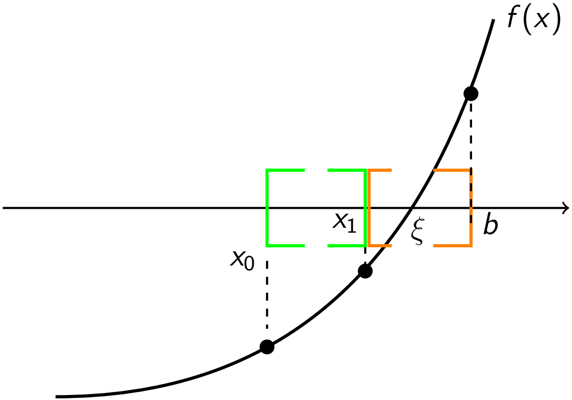


Figura: Dividimos o intervalo $[x_0, b]$ ao meio, obtendo dois novos subintervalos. Note que $f(x_1) \cdot f(b) < 0$ e assim, $\xi \in (x_1, b)$.

Método da Bissecção

Tal método é um dos poucos nos quais é possível determinar *a priori*, o número de iterações k necessárias para calcular a raiz com uma tolerância ε a partir de um intervalo $[a, b]$.

Método da Bissecção

Tal método é um dos poucos nos quais é possível determinar *a priori*, o número de iterações k necessárias para calcular a raiz com uma tolerância ε a partir de um intervalo $[a, b]$. Tal número k é dado por

$$k \geqslant \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1\,. \tag{1}$$

Método da Bissecção

Tal método é um dos poucos nos quais é possível determinar *a priori*, o número de iterações k necessárias para calcular a raiz com uma tolerância ε a partir de um intervalo $[a, b]$. Tal número k é dado por

$$k \geqslant \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1\,. \tag{1}$$

Este resultado é deixado ao aluno como exercício na lista 2.

Método da Bissecção

Exemplo 3.1

Calcule a raiz positiva da equação $f(x) = x^2 - 3$ *com* $\varepsilon \leqslant 0,01$.

Método da Bissecção

Exemplo 3.1

Calcule a raiz positiva da equação $f(x) = x^2 - 3$ *com* $\varepsilon \leqslant 0,01$.

Solução: Primeiramente, note que

$$f(1) = -2 \text{ e } f(2) = 1,$$

donde $f(1) \cdot f(2) < 0$.

Método da Bissecção

Exemplo 3.1

Calcule a raiz positiva da equação $f(x) = x^2 - 3$ com $\varepsilon \leqslant 0,01$.

Solução: Primeiramente, note que

$$f(1) = -2 \text{ e } f(2) = 1,$$

donde $f(1) \cdot f(2) < 0$. Assim,

$$a = 1 \text{ e } b = 2.$$

Em seguida, vamos descobrir quantas iterações serão necessárias pela fórmula (1). Com efeito,

Em seguida, vamos descobrir quantas iterações serão necessárias pela fórmula (1). Com efeito,

$$
\begin{aligned}
k &\geqslant \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1 \\
&= \log_2\left(\frac{2-1}{0,01}\right) - 1 \\
&\approx 5,64385619 \\
\Rightarrow\ k &\geqslant 6,
\end{aligned}
$$

ou seja, serão necessárias pelo menos 6 iterações.

Em seguida, vamos descobrir quantas iterações serão necessárias pela fórmula (1). Com efeito,

$$
\begin{aligned}
k &\geqslant \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) - 1 \\
&= \log_2\left(\frac{2-1}{0,01}\right) - 1 \\
&\approx 5,64385619 \\
\Rightarrow\ k &\geqslant 6,
\end{aligned}
$$

ou seja, serão necessárias pelo menos 6 iterações.
Faremos a seguinte tabela:

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1	2	-2	1			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$		

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1		2		1			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$		

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$		$-0,75$				

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$		

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3		$1,75$					

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$		

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4		$1,75$		$0,0625$			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$- -$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$		

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5		$1,75$		$0,0625$			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$			

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$- -$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$	$1,734375$		

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$	$1,734375$	$0,008056640625$	

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$	$1,734375$	$0,008056640625$	$0,015625$

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$	$1,734375$	$0,008056640625$	$0,015625$
6	$1,71875$		$-0,0458984375$				

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$	$1,734375$	$0,008056640625$	$0,015625$
6	$1,71875$	$1,734375$	$-0,0458984375$	$0,00856640625$			

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$- -$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$	$1,734375$	$0,008056640625$	$0,015625$
6	$1,71875$	$1,734375$	$-0,0458984375$	$0,00856640625$	$1,7265625$		

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$	$1,734375$	$0,008056640625$	$0,015625$
6	$1,71875$	$1,734375$	$-0,0458984375$	$0,00856640625$	$1,7265625$	$-0,0189819335975$	

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Tabela pelo método da bissecção para $f(x) = x^2 - 3, a = 1, b = 2$ e $\varepsilon = 0,01$.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	1	2	-2	1	$1,5$	$-0,75$	$--$
1	$1,5$	2	$-0,75$	1	$1,75$	$0,0625$	$0,25$
2	$1,5$	$1,75$	$-0,75$	$0,0625$	$1,625$	$-0,359375$	$0,125$
3	$1,625$	$1,75$	$-0,359375$	$0,0625$	$1,6875$	$-0,15234375$	$0,0625$
4	$1,6875$	$1,75$	$-0,15234375$	$0,0625$	$1,71875$	$-0,0458984375$	$0,03125$
5	$1,71875$	$1,75$	$-0,0458984375$	$0,0625$	$1,734375$	$0,008056640625$	$0,015625$
6	$1,71875$	$1,734375$	$-0,0458984375$	$0,00856640625$	$1,7265625$	$-0,0189819335975$	$0,0078125$

Outline

Convergência nos processos numéricos

Nos processos iterativos, as soluções são obtidas a partir de uma sucessão de estimativas $x_1, x_2, \ldots$ que se aproxima do valor exato ξ.

Convergência nos processos numéricos

Nos processos iterativos, as soluções são obtidas a partir de uma sucessão de estimativas $x_1, x_2, \ldots$ que se aproxima do valor exato ξ.
Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ *converge* para ξ se, e somente se,

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \xi \, .$$

Convergência nos processos numéricos

Nos processos iterativos, as soluções são obtidas a partir de uma sucessão de estimativas $x_1, x_2, \ldots$ que se aproxima do valor exato ξ.
Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ *converge* para ξ se, e somente se,

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \xi \,.$$

A "velocidade" com que a sequência converge para o valor exato indica quão rápida será a aproximação. Quanto *maior* for a velocidade de convergência, *menor* será a quantidade necessária de passos para se atingir determinada tolerância.

Convergência nos processos numéricos

Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ converge para ξ, se existem constantes positivas c e r tais que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^r} = c\,.$$

Convergência nos processos numéricos

Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ converge para ξ, se existem constantes positivas c e r tais que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^r} = c\,.$$

Note que quanto maior o valor de r, mais rápida será a convergência da sequência.

Convergência nos processos numéricos

Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ converge para ξ, se existem constantes positivas c e r tais que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^r} = c\,.$$

Note que quanto maior o valor de r, mais rápida será a convergência da sequência. Neste caso, dizemos que **ordem de convergência** da sequência é r e o **coeficiente assintótico de convergência** é c.

Convergência nos processos numéricos

Dizemos que uma sequência $\{x_k\}$ converge para ξ, se existem constantes positivas c e r tais que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^r} = c\,.$$

Note que quanto maior o valor de r, mais rápida será a convergência da sequência. Neste caso, dizemos que **ordem de convergência** da sequência é r e o **coeficiente assintótico de convergência** é c.
Além disso, o limite acima nos diz que

$$|x_{k+1} - \xi| \approx c\,|x_k - \xi|^r.$$

Outline

Convergência do Método da Bissecção

Perceba que a cada iteração, a distância entre a aproximação $\{x_k\}$ e o zero da função ξ é menor que a metade do tamanho do intervalo $[a_k, b_k]$ (veja Figura 7 e a tabela do exemplo anterior), ou seja,

$$|x_k - \xi| < \frac{b_k - a_k}{2}. \tag{2}$$

Note que a cada iteração, o intervalo $[a, b]$ é dividido ao meio, assim, na k - ésima iteração, o comprimento do intervalo será

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \tag{3}$$

Convergência do Método da Bissecção

Combinando (2) e (3), temos que

$$|x_k - \xi| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}\right). \tag{4}$$

Convergência do Método da Bissecção

Combinando (2) e (3), temos que

$$|x_k - \xi| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}\right). \tag{4}$$

Por outro lado, trocando k por $k-1$ na equação (2), temos que

$$|x_{k-1} - \xi| < \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}. \tag{5}$$

Convergência do Método da Bissecção

Combinando (2) e (3), temos que

$$(4) \qquad |x_k - \xi| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}\right).$$

Por outro lado, trocando k por $k-1$ na equação (2), temos que

$$(5) \qquad |x_{k-1} - \xi| < \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}.$$

Assim, combinando (4) e (5), obtemos que

$$|x_{k+1} - \xi| \approx \frac{1}{2}|x_k - \xi|^{1},$$

ou seja, a ordem de convergência é $r = 1$ (linear) e o coeficiente assintótico de convergência é $c = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4.1

Obtenha a raiz da equação $f(x) = x^2 + \ln x$ *com* $\varepsilon \leqslant 0,01$.