DISTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE PROBABILIDADE DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

DISTRIBUIÇÃO T DE STUDENT

Trata-se de uma distribuição contínua que:

- É bem parecida com a distribuição normal;
- É mais achatada (maior dispersão) do que a normal;
- Varia com os graus de liberdade, isto é, com o tamanha da amostra;

$$gl = n - 1 \text{ ou } v = n - 1$$

- A medida que o tamanho da amostra aumenta, a distribuição se aproxima da distribuição normal padrão ($n \geq 30$).

DISTRIBUIÇÃO T DE STUDENT

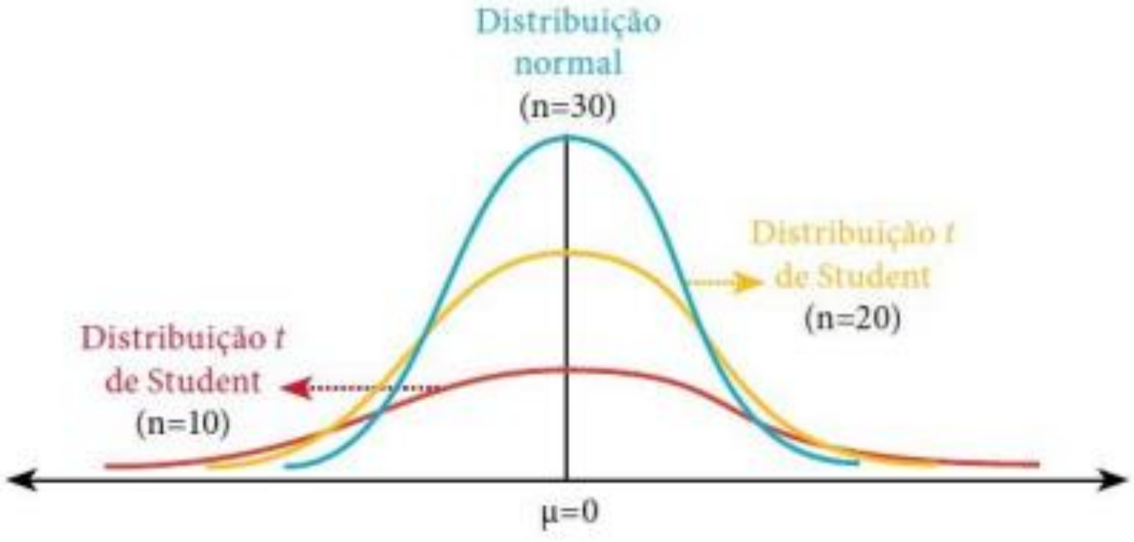


Figura 1

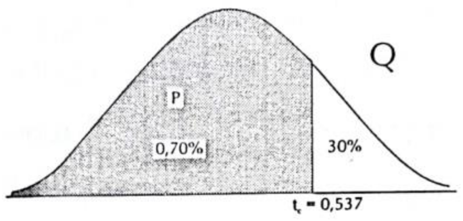
Representação gráfica da Distribuição t-Student

DISTRIBUIÇÃO T DE STUDENT

Tabelas da distribuição t

Como as tabelas da Distribuição Normal Reduzida, que dão conta de todas as distribuições normais gerais, a tabela da distribuição t inclui todas as famílias da distribuição, dependendo do grau de liberdade - ν – e, portanto, do tamanho da amostra. Usualmente apresenta uma coluna com os graus de liberdade e uma linha com valores de proporções tais que dividem a área total da distribuição em duas áreas iguais a P e Q; a proporção indicada na tabela é P.

As áreas P e Q na distribuição t de Student que separam 70% inferiores



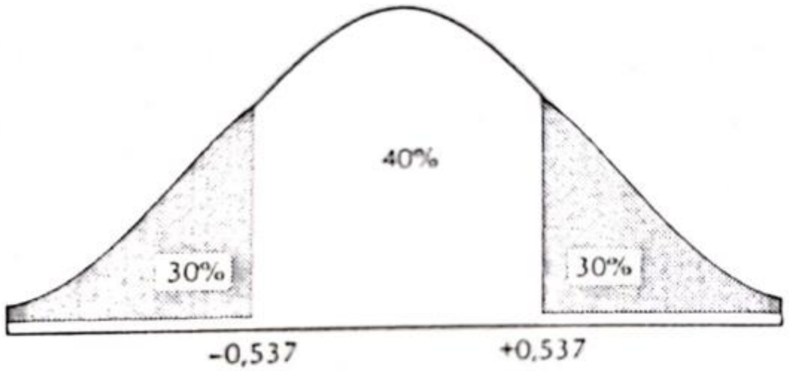
DISTRIBUIÇÃO T DE STUDENT

Vejamos um exemplo. Se tivermos uma amostra de 15 indivíduos – desde que n = 15 e $v = 14$. Então, procuramos na Tabela H na coluna de v o número 14. Então, procuramos na Tabela H na coluna de v o número 14. Se quisermos um valor de t que supere 70% dos valores amostrais de t, procuraremos na linha superior a proporção 0,70 (expresso como $t_{0,70}$ é $t_p = 0{,}537$.

Então, t = 0,537 dividiria a área total da curva em duas áreas P e Q, de tal modo que P = 0,70 e Q = 0,30. Como a curva é simétrica, o valor de $t_p = -0{,}537$ estaria acima de 30% (ou 0,30) dos valores amostrais de t.

DISTRIBUIÇÃO T DE STUDENT

Valores de t que separam os 30% inferiores e os 30% superiores dos valores amostrais para n = 15 (ν = 14)



Portanto, a probabilidade de se obter, por acaso, um valor de t_p superior a 0,537 é igual a 0,30, o mesmo ocorrendo com um valor de t_p inferior a $-0{,}537$. Quanto à probabilidade de se obter um t_p entre $-0{,}537$ e +0,537 é de 0,40.

DISTRIBUIÇÃO T DE STUDENT

Exemplo

O gráfico da distribuição t de Student está representado abaixo. Determinar os valores t_p para os quais:

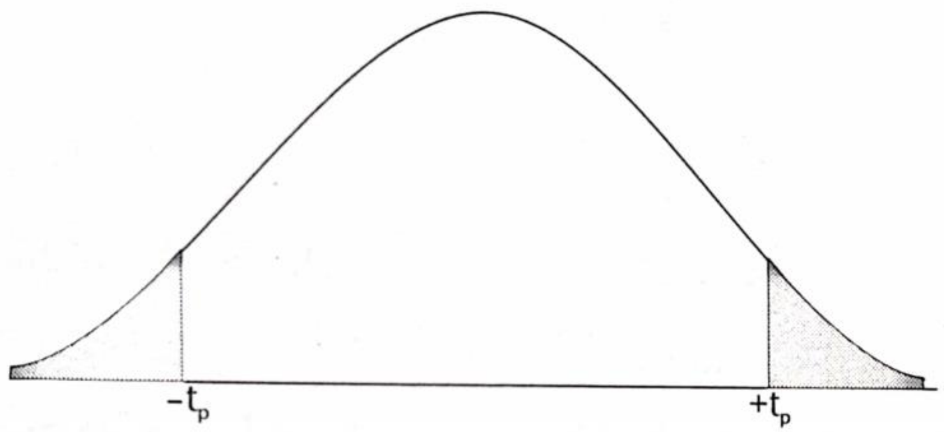
a) a área sombreada à direita = 0,05;

b) a área sombreada total = 0,05;

c) a área não sombreada total = 0,99;

d) a área sombreada à esquerda = 0,01;

e) a área à esquerda de $t_p = 0{,}90$.



Considere em todas as situações n = 11.

DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO -χ^2

A distribuição χ^2 resulta da seleção aleatória dos desvios reduzidos (z) da curva normal, elevados ao quadrado. Então, no caso de uma única variável, teremos $\chi^2 = z^2$, no caso de duas variáveis extraídas independente e aleatoriamente da distribuição normal, teremos $\chi^2 = {z_1}^2 + {z_2}^2$ e assim por diante.

A função matemática correspondente à densidade de probabilidade de cada valor possível de χ^2 é dada por

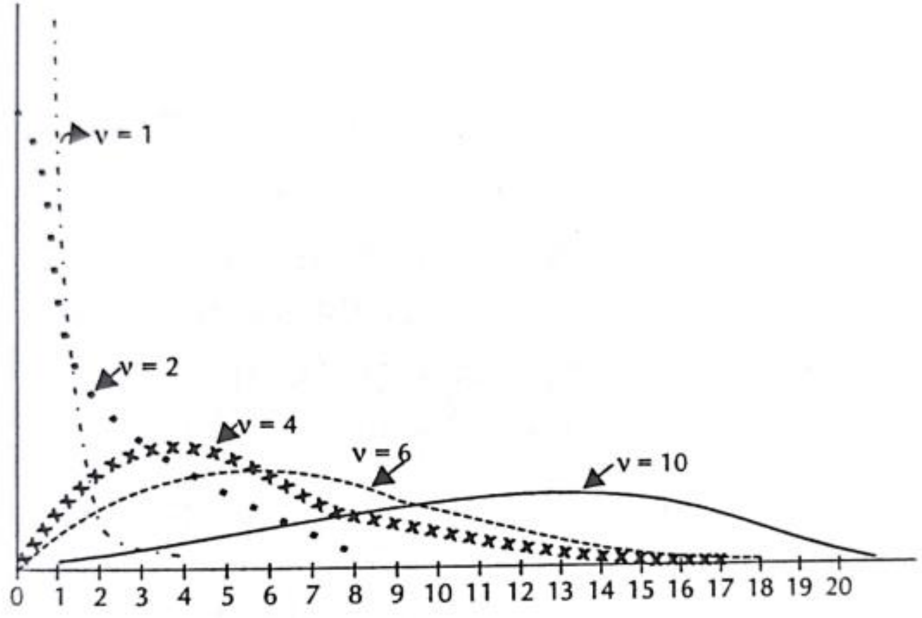
$$\chi^2 = h(v)e^{\frac{-\chi^2}{2}}(\chi^2)^{\left(\frac{v}{2}\right)^{-1}}$$

em que χ^2 é sempre maior ou igual a 0, pois $\chi^2 = \sum \frac{(x-\bar{x})^2}{n} = z^2$, não havendo possibilidade de número negativo. O v também é sempre maior que 0, pois o tamanho mínimo da amostra é 2, que resulta em $v = 1$.

DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO -χ^2

Assim como a distribuição t, a distribuição de χ^2 depende apenas dos graus de liberdade, ou seja, do parâmetro v. Contrariamente às distribuições normal e t, χ^2 é assimétrica e sempre positiva, com seus valores variando de 0 a $+\infty$.

Forma geral da distribuição χ^2 para diversos valores de ν

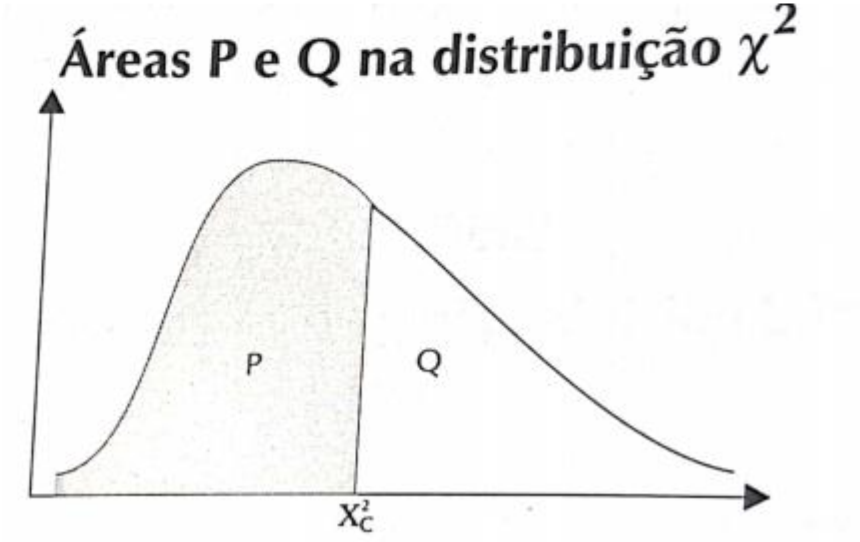


DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO -χ^2

Uma informação pertinente a respeito da distribuição qui-quadrado é que sua média=n, o seu número de observações é independente e a sua variância $\sigma^2 = 2v$. Assim, ao fornecer os graus de liberdade, temos acesso a todas informações necessárias para determinar completamente uma distribuição qui-quadrado em particular. Além disso, da mesma forma que a distribuição t de Student, a qui-quadrado aproxima-se da normal à medida que aumentam os graus de liberdade ($v \geq 30$).

DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO -χ^2

Tabelas da distribuição qui-quadrado



A Tabela I é uma tabela condensada, mostrando os valores de χ^2 correspondentes a pontos percentuais em várias distribuições determinadas por ν. A primeira coluna da tabela lista vários graus de liberdade ν e a linha superior apresenta as proporções Q. Os números no "corpo" da tabela fornecem os valores de χ^2 tais que o valor amostral de χ^2 seja igual ou superior a Q.

DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO -χ^2

Por exemplo, suponhamos que estamos lidando com uma distribuição qui-quadrado em que $\nu = 10$. Qual o valor crítico (da tabela) correspondente a uma área Q=0,05, ou seja, cuja probabilidade de ocorrência de um valor amostral é de pelo menos 5%?

Procurando na Tabela I temos $\chi^2 = 18{,}30$; concluímos que, numa distribuição com 10 graus de liberdade, valores de qui-quadrado de 18,30 ou mais ocorrem com probabilidade de 0,05.

Observe que, como para grandes valores de ν, a distribuição qui-quadrado aproxima-se da normal; nesta situação, as tabelas da mesma podem ser utilizadas como uma alternativa.

DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO -χ^2

Exemplo

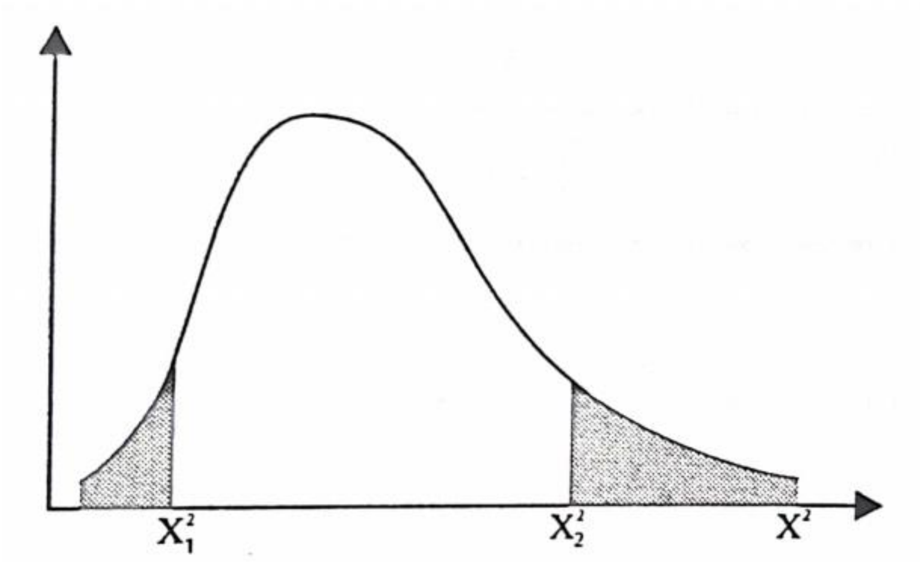
O gráfico da distribuição de qui-quadrado com 10 graus de liberdade está representado na figura abaixo. Determinar os valores críticos de χ^2 para os quais:

a) a área sombreada à direita = 0,10;

b) a área total sombreada = 0,05;

c) a área sombreada à esquerda = 0,10;

d) a área sombreada à direita = 0,01.



DISTRIBUIÇÃO F

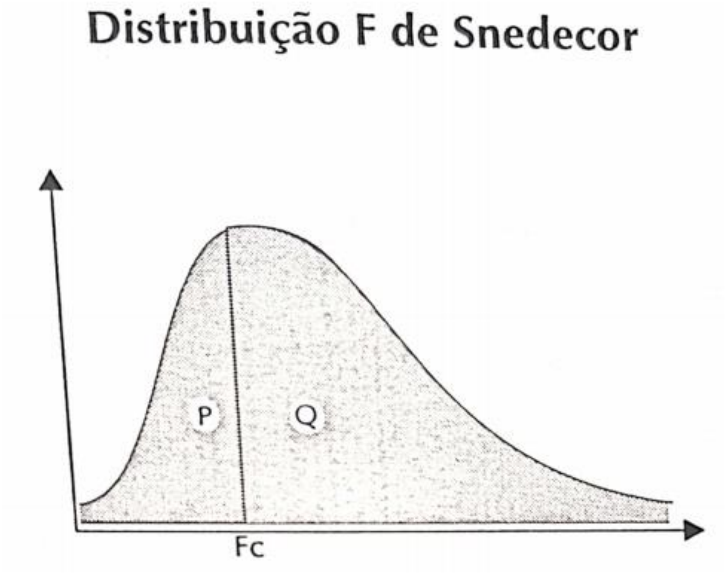
A razão F é constituída pela relação entre duas variáveis qui-quadrado independentes, cada qual dividida pelo seu respectivo grau de liberdade, implicando também na relação entre variâncias, assim expressa:

$$F = \frac{\hat{s}_1^{\,2}}{\hat{s}_2^{\,2}} = \frac{\frac{\chi_1^{\,2}}{v_1}}{\frac{\chi_2^{\,2}}{v_2}}$$

São requisitos para a utilização da distribuição F que as duas populações das quais as amostras foram retiradas sejam normais, independentes e tenham a mesma variância. Apesar da importância destes requisitos básicos, eles podem ser violados sem que as aplicações da distribuição F sejam invalidadas, por isso esta distribuição é denominada “robusta”.

DISTRIBUIÇÃO F

A curva da distribuição F depende apenas de dois graus de liberdade: estes são relativos a um formato de distribuição cuja forma geral é acentuadamente assimétrica, com média = 1 e valores variando de 0 a $+\infty$; valores negativos não podem ocorrer, pois tanto o numerador como o denominador da razão são necessariamente positivos.



DISTRIBUIÇÃO F

Utilização das tabelas F

Pelo fato de dependerem de dois parâmetros, v_1 e v_2, ao contrário das distribuições χ^2 e t, que são função de apenas um parâmetro, as tabelas F costumam ser apresentadas de forma muito condensada (Tabela J e L), restritas a apenas dois Q.

Tais tabelas fornecem o valor de F que delimita a porção superior da curva Q em uma distribuição F, com graus de liberdade v_1 e v_2. Os valores Q para as tabelas J e L são 0,05 e 0,01, que correspondem ao nível de significância (α). Vejamos como consulta-las.

DISTRIBUIÇÃO F

Na primeira linha das duas tabelas estão colocados o grau de liberdade v_1, do numerador; a primeira coluna apresenta o grau de liberdade v_2 do denominador. O cruzamento entre estes dois graus de liberdade é um valor F_c do "corpo" da tabela para determinado nível de significância (α) ou Q.

A utilização da tabela F poderá ser ilustrada por meio do seguinte exemplo: suponha que sejam retiradas duas amostras independentes, sendo $n_1 = 17$ e $n_2 = 11$ casos, respectivamente. Os graus de liberdade associados às duas variâncias são, então, $v_1 = 16$ e $v_2 = 10$. Procurando o valor de F que separa os 5% valores superiores (tabela J) temos $F_c = 2{,}82$. Se desejássemos Q = 0,01 (tabela L), o correspondente seria $F_c = 4{,}52$.

DISTRIBUIÇÃO F

Exemplo

Para uma distribuição F em que $v_1 = 20$ e $v_2 = 14$ determine os valores F_c para:

a) Q = 0,05;

b) Q = 0,01.