VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

VARIÁVEL ALEATÓRIA

Definição

É uma função no espaço amostral Ω, que costuma ser representada por X, e cujo o valor é um número real determinado pelo resultado de um experimento aleatório.

As variáveis aleatórias podem ser de dois tipos:

a) **Discretas:** quando assume valores num conjunto finito ou infinito, mas enumerável.

b) **Contínuas:** quando assume qualquer valor real num conjunto infinito não enumerável.

VARIÁVEL ALEATÓRIA

Exemplos

São exemplos de variáveis aleatórias:

a) Nº de caras no jogo de duas moedas.

b) Nº de glóbulos brancos por unidade de volume de sangue humano.

c) Peso de alunos de certa universidade.

DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Quando associamos a cada ponto do espaço amostral a correspondente probabilidade de ocorrência do evento, obtemos a distribuição das probabilidades do experimente. Se além disso, associamos a esses mesmos pontos uma variável aleatória indicadora obtemos uma distribuição que pode ser entendida como a distribuição das probabilidades das variáveis aleatórias associadas aos pontos do espaço amostral. A distribuição assim obtida nos mostra como a probabilidade total se divide pelos diversos resultados possíveis do experimento.

DISTRIBUIÇÃO OU FUNÇÃO DE PROBABILIDADE DISCRETA

É a função $P(X = x) = p(x)$ que atribui a cada valor da variável aleatória a sua probabilidade de ocorrência e que satisfaz as seguintes condições:

a) $p(x) \geq 0, \forall x$ e b) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Se X é uma variável discreta e $x_1, x_2, \ldots,$ são seus valores, a distribuição de X pode também ser representada pela tabela abaixo:

Valores de X	x_1 x_2 ...	**Total**
$P(X = x_i)$	$p(x_1)$ $p(x_2)$ ...	1

DISTRIBUIÇÃO OU FUNÇÃO DE PROBABILIDADE DISCRETA

Exemplo 1

Na jogada de duas moedas, o espaço amostral é $\Omega = \{kk, kc, ck, cc\}$, onde k=cara e c=coroa. Seja X a variável aleatória que represente o número de caras. A distribuição de probabilidade de X é:

Valores de X	0	1	2	Total
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25	1

DISTRIBUIÇÃO OU FUNÇÃO DE PROBABILIDADE DISCRETA

Exemplo 2

Consideremos o lançamento de dois dados. Seja X = “soma das 2 faces”. Determinar a distribuição de probabilidades de X.

Solução: Para facilitar a solução desse problema, vamos construir uma tabela de duas entradas, onde cada dimensão representa o resultado de um dado e em cada cela temos a soma das duas faces.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

DISTRIBUIÇÃO OU FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE CONTÍNUA

É a função $f(x)$ que satisfaz as seguintes condições:

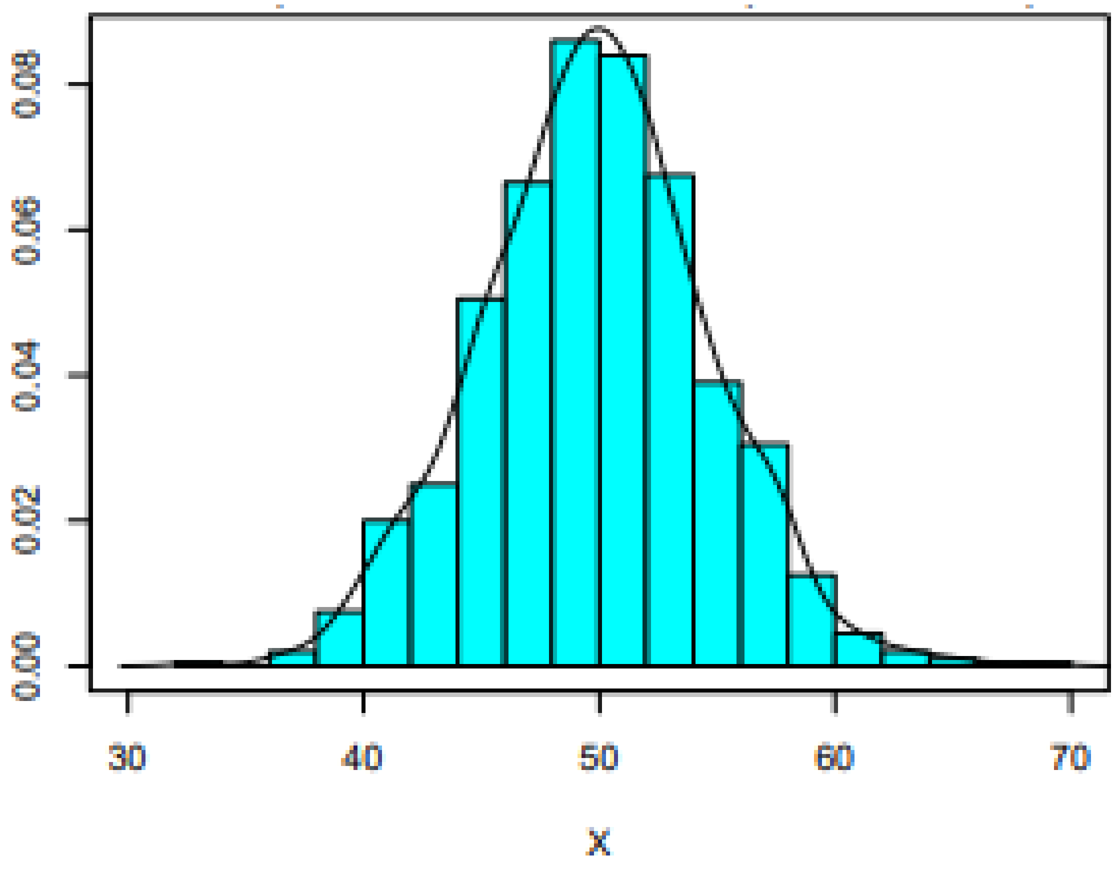
a) $f(x) \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ e b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

c) $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Note que $P(a \leq X \leq b)$ é igual à área sob a curva $f(x)$ do segmento horizontal (a,b):

$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

DISTRIBUIÇÃO OU FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE CONTÍNUA



DISTRIBUIÇÃO OU FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE CONTÍNUA

Exemplo 3

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 \; se \; x < 0 \\ 2e^{-2x} \; se \; x \geq 0 \end{cases}$$

a) Mostre que é uma função densidade de probabilidade.

b) Calcule a probabilidade de $X > 10$.

ESPERANÇA OU MÉDIA E VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Tal como a distribuição de frequências de uma variável qualquer, também uma distribuição de probabilidade pode ser descrita usando uma medida de tendência central e uma medida de dispersão.

A **média ou valor esperado** de uma variável aleatória é uma medida do centro de uma distribuição, representada por E(X) e dada por:

a) E(X) = $\sum x_i p(x_i)$ para variáveis aleatórias discretas.

b) E(X) = $\int_a^b xf(x)dx$ para variáveis aleatórias contínuas.

ESPERANÇA OU MÉDIA E VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Uma medida de dispersão em relação ao valor médio, é dada pela **variância** que pode ser representada por Var(X):

Var(X) = $E(X^2) - [E(X)]^2$

O **desvio padrão** é dado por: $DP(x) = \sqrt{Var(X)}$

Onde:

$E(X^2) = \sum x_i^2\, p(x_i)$ para a variável discreta.

$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx$ para variável contínua.

ESPERANÇA OU MÉDIA E VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Exemplo 4

Calcule a esperança, variância e desvio padrão do exemplo 1.

ESPERANÇA OU MÉDIA E VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Exemplo 5

Calcule a esperança, variância e desvio padrão do exemplo 3.

PROPRIEDADES DA MÉDIA E DA VARIÂNCIA

Média

a) $E(a) = a$

b) $E(a+bX) = a+bE(X)$

c) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

d) Se X e Y forem independentes

$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

Variância

a) $Var(X) \geq 0$

b) $Var(a) = 0$

c) $Var(aX+b) = (a)^2 Var(X)$

d) Se X e Y forem independentes

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$