NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740

DERIVADAS

$f: I \to \mathbb{R}$ f é CONTINUA EM $a \in I$

$$Tg(\alpha) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DEFINIÇÃO: A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO f É A FUNÇÃO f' DEFINIDA POR

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

PARA TODO x NO QUAL O LIMITE EXISTE

f' É DIFERENCIÁVEL EM $x = a$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$x = a + h \to h = x - a$
$h \to 0 \therefore x \to a$

DEFINIÇÃO: SEJA $a \in I$, ONDE I É UM INTERVALO CONTIDO NO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO f. DIZEMOS QUE f É DERIVÁVEL À DIREITA NO PONTO a QUANDO

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EXISTE.

NOTAÇÃO: $f'_+(a)$ OU $f'(a^+)$

DIZEMOS QUE f É DERIVÁVEL À ESQUERDA NO PONTO a QUANDO

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

EXISTE.

NOTAÇÃO: $f'_-(a)$ OU $f'(a^-)$

EXEMPLO:

$$f(x) = \frac{x}{x+12}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\frac{x+h}{x+h+12} - \frac{x}{x+12}}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \frac{(x+h)(x+12) - x(x+h+12)}{(x+h+12)(x+12)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\cancel{x^2} + \cancel{12x} + \cancel{hx} + 12h - \cancel{x^2} - \cancel{xh} - \cancel{12x}}{(x+h+12)(x+12)} \right) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{12\cancel{h}}{(x+h+12)(x+12)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{12}{(x+h+12)(x+12)} = \frac{12}{\lim_{h \to 0} (x+h+12)(x+12)}$$

$$= \frac{12}{(x+12)^2}$$

ENTÃO f É DIFERENCIÁVEL PARA TODO $x \neq -12$

EXEMPLO:

$f(x) = x^2+2$. CALCULAR A DERIVADA DO f NO PONTO $x=1$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+2-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h+2 = 2 \text{ //}$$

EXEMPLO: $f(x) = |x|$ NÃO É DIFERENCIÁVEL EM $x=0$

DE FATO, $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f'(0+h)-f(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1 \text{ //}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1 \text{ //}$$

EXEMPLO: $f(x) = \sqrt{x}$

* $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h + \cancel{\sqrt{x}\sqrt{x+h}} - \cancel{\sqrt{x}\sqrt{x+h}} - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} // = \boxed{\frac{\sqrt{x}}{2x}} //$$

F É DIFERENCIÁVEL $\forall x > 0$

* $x = 0$

$$f'_+(0) = f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

$\sqrt{h} \to 0$ QUANDO $h \to 0^+$

ENTÃO $f(x) = \sqrt{x}$ NÃO É DIFERENCIÁVEL EM $x = 0$

TEOREMA: SE UMA FUNÇÃO f É DIFERENCIÁVEL EM UM PONTO $a \in D(f)$, ENTÃO f É CONTÍNUA EM a.

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \right)$$

DEM.:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \cdot (x-a) + f(a) \right]$$

$$f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} (x+a) + f(a)$$

pois $\cancel{x} \neq a$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} (x+a) \right] + \lim_{x \to a} f(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right] \cdot \lim_{x \to a} (x-a) + f(a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

OU SEJA:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, PROVANDO QUE f É CONTÍNUA EM a.

REGRAS BÁSICAS DE DIFERENCIAÇÃO

TEOREMA: SE $f(x) = c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D(f)$, ENTÃO,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(c)}{dx} = 0$$

DEM: $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{0}{h}\right) = \lim_{h \to 0} 0 = 0$

EXEMPLOS: $f(x) = -\pi \therefore f'(x) = 0$

$r(t) = \sqrt{x} \therefore \frac{dr}{dt} = 0$ OU $r'(t) = 0$

$u(x) = e^{100} \therefore u'(x) = 0$

TEOREMA: REGRA DA POTÊNCIA
SE $f(x) = x^n$, ONDE $n \in \mathbb{N}^*$, ENTÃO

$f'(x) = n x^{n-1}$

DESDE $x \neq 0$ PARA $n < 0$

EXEMPLO: $f(x) = x^5$

$$\frac{df}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$$

EXEMPLO: $y = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$

$$y' = (x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

$$= \frac{-4}{x^5}$$

EXEMPLO: $h(t) = t^2$

$$h'(t) = 2t$$

EXEMPLO: $y = x$

$$y' = x^0 = 1$$

TEOREMA: SEJAM f e g FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS e $a, b \in \mathbb{R}$. ENTÃO $af + bg$ é DIFERENCIÁVEL

$$\frac{d}{dx}(af + bg)(x) = a \cdot \frac{df(x)}{dx} + b\frac{dg(x)}{dx}$$

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

EXEMPLO: $c=0$

$$\frac{d}{dx}(a \cdot f) = a \cdot \frac{df}{dx}$$

EXEMPLO: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$p'(x) = a_n (x^n)' + a_{n-1} (x^{n-1})' + \dots + a_2 (x^2)' + a_1 (x)' + a_0'$$

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

EXEMPLO: $g(t) = t^5 + t^2 - 3t + 2$

$$g'(t) = 5t^4 + 2t - 3$$

DERIVADA DO PRODUTO

TEOREMA: SEJAM f e g FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS EM x, ENTÃO $f \cdot g$ É DIFERENCIÁVEL EM x

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{d(x)}$$

$$(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Exemplo: $f(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{x} + 2\right)}_{u(x)} \underbrace{(x^2 - 1)}_{v(x)}$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= (x^{-1} + 2)' (x^2 - 1) + (x^{-1} + 2)(x^2 - 1)'$$

$$= (-x^{-2} + 2)(x^2 - 1) + (x^{-1} + 2)(2x)$$

$$= \frac{1}{x^2} + 4x + 1 \quad //$$

Exemplo: $y = \underbrace{4x(1 - x^{-2})}_{u(x)} \underbrace{(x^2 + 2)}_{v(x)}$

$$y' = u'v + u \cdot v'$$

$$= [4x(1 - x^{-2})]' \cdot (x^2 + 2) + [4x(1 - x^{-2})] \cdot (x^2 + 2)'$$

$$= \left[(4x)'(1 - x^{-2}) + 4x(1 - x^{-2})' \right] (x^2 + 2) + \left[4x(1 - x^{-2}) \right] (2x)$$

$$= \left[32(1 - x^{-2}) x^{-2} \right] (x^2 + 2) + 8x^2(1 - x^{-2})$$

DERIVADA DO QUOCIENTE

SEJAM f E g FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS EM x TAL QUE $g(x) \neq 0$, ENTÃO f/g É DIFERENCIÁVEL E

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

EXEMPLO: $f(x) = \dfrac{\overbrace{x^2-1}^{u(x)}}{\underbrace{3x-7}_{v(x)}}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)' \cdot (3x-7) - (x^2-1)(3x-7)'}{(3x-7)^2}$$

$$= \frac{2x(3x-7) - (x^2-1)3}{(3x-7)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 14x - 3x^2 + 3}{(3x-7)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 14x + 3}{(3x-7)^2}$$

EXEMPLO: $y = \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{1 - 4x}$

$$y' = \frac{(2x^3 - 3x + 1)'(1 - 4x) - (2x^3 - 3x + 1)(1 - 4x)'}{(1 - 4x)^2}$$

$$= \frac{(6x^2 - 3)(1 - 4x) - (2x^3 - 3x + 1)(-4)}{(1 - 4x)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 3 - 24x^3 + 6x^2 - 3 + 12x + 8x^3 - 12x + 4}{(1 - 4x)^2}$$

$$= \frac{-16x^3 + 12x^2 - 2}{(1 - 4x)^2}$$