Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

4ª Lista de Cálculo Numérico

DAMAT, 2021

Nome: ____

Na maioria dos exercícios desta lista, o aluno terá que verificar suas respostas fazendo uso da plataforma *Google Colab*.

1 *Prove o seguinte resultado:*

Teorema 1 (Existência e Unicidade) *Seja* $f(x)$ *definida em* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ *pontos distintos de um intervalo* $[a,b]$. *Então, existe um único polinômio* $P(x)$ *de grau menor ou igual a* n *tal que* $P(x_i) = f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sugestão: *Considere o polinômio de grau* n

$$P(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots\, a_n\, x^n$$

tal que $P(x_i) = f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Substituindo* $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots\, n$ *em* $P(x)$ *obteremos um sistema linear* $A \cdot X = B$. *Por fim, mostre que a solução deste sistema é única e conclua a existência e unicidade de* $P(x)$.

2 *A integral elíptica completa é definida por*

$$K(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \operatorname{sen}^2 x}}.$$

Por uma tabela de valores dessa integral, encontramos:

κ	*1*	*2*	*3*
$K(\kappa)$	*1,5708*	*1,5719*	*1,5739*

Determine $K(2,5)$ *recorrendo ao polinômio interpolador na forma de Lagrange.*

3 *Usando a fórmula de interpolação de Lagrange sobre os pontos* $x_0 = 9, x_1 = 16$ *e* $x_2 = 25$ *para a função* $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Determine o polinômio interpolador.

(b) Estime $\sqrt{17}$ *pelo polinômio interpolador.*

(c) Avalie a precisão da estimativa, usando um limitante para o erro da interpolação .

(d) Utilize o valor de $\sqrt{17}$ *dado pela sua calculadora e compare com o valor estimado pela interpolação.*

4 *A função Gama foi definida por Euler por meio da integral*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}{-t}\, dt.$$

Com respeito a função Gama, temos a tabela:

x	1	1,02	1,04
$\Gamma(x)$	1,0000	0,9888	0,9784

Usando a fórmula de Newton, calcule $\Gamma(1,01)$ *e* $\Gamma(1,03)$

5 *Denominamos* <u>*interpolação inversa*</u> *quando conhecidos os valores de uma função* $f(x)$ *definida em* $(n+1)$ *pontos distintos* x_i, $i = 0, \ldots, n$ *necessitamos calcular o valor numérico da variável* $\bar{x}$ *correspondente a um valor* $\bar{y} = f(\bar{x})$ *conhecido inicialmente. Considere a seguinte função* $f(x)$ *tabelada:*

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1,31	3,51	3,78

Faça uso da interpolação inversa pela fórmula de Newton de grau 2, determine $\bar{x}$ *tal que* $f(\bar{x}) = 3,63$.
Sugestão: *Use um polinômio interpolador que interpola a função* $h(y) = f^{-1}(y)$ *nos pontos* $y_0 = 1,31, y_1 = 3,51$ *e* $y_2 = 3,78$.

6 *Conhecendo-se o diâmetro e a resistividade de um fio cilíndrico, verificou-se a resistência do fio de acordo com o comprimento. Os dados obtidos estão indicados a seguir:*

Comp.(m)	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000
Res.(Ohms)	2,74	5,48	7,90	11	13,93	16,43	20,24	23,52

Determine quais serão as prováveis resistências deste fio para comprimentos de:

(a) 1730 m

(b) 3200 m

usando a fórmula de Newton com um polinômio de grau 2. Além disso, obtenha uma estimativa do erro nos valores indicados nos itens (a) e (b).

7 *Use a porção dada a seguir de uma tabela de vapor d'água superaquecido em 200 MPa para encontrar:*

v, m^3/kg	0,10377	0,11144	0,12547
s, KJ/(kg K)	6,4147	6,5453	6,7664

(a) a entropia correspondente s para um volume específico v de 0,118 com interpolação linear;

(b) Uma estimativa do erro para um volume específico v de 0,118 obtido no item anterior;

(c) a mesma entropia correspondente utilizando interpolação quadrática;

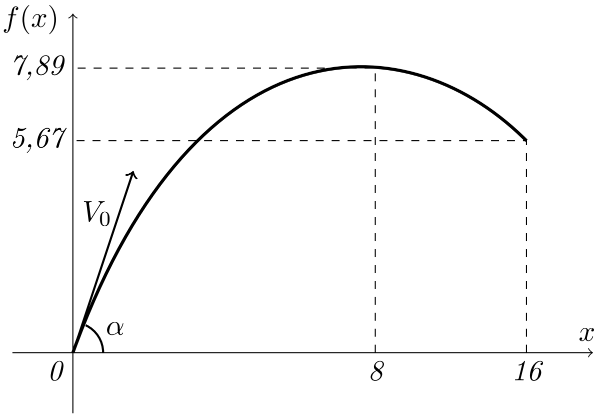
(d) o volume correspondente a uma entropia de 6,45 utilizando interpolação inversa.

8 *Um veículo de fabricação nacional, após vários testes, apresentou os resultados a seguir, quando analisou-se o consumo de combustível de acordo com a velocidade média imposta ao veículo. Os testes foram realizados em rodovia em operação normal de tráfego, numa distância de 72 km, conforme tabela a seguir:*

Velocidade (km/h)	55	70	85	100	115	130
Consumo (km/l)	14,08	13,56	13,28	12,27	11,30	10,40

Verifique o consumo apropriado para o caso de ser desenvolvida a velocidade de 105 km/h pela fórmula de Newton - Gregory de grau 3.

9 *Um projétil foi lançado de um ponto tomado como origem e fez-se as seguintes observações:*



Observando o gráfico vemos que este possui o comportamento de uma parábola, podemos assim obter aproximadamente valores para a altitude do projétil em diversos momentos usando interpolação, donde é possível comparar posteriormente com a equação teórica da trajetória dada por

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

onde α é o ângulo com a horizontal, v_0 é a velocidade inicial e $g = 9,86 m/s^2$.

(a) Determine o polinômio interpolador.

(b) Avalie o valor da altitude do projétil a 12,5 metros do lançamento.

10 *Dada a tabela*

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-1	α	5	β	7	γ	13

calcule α, β e γ, sabendo-se que ela corresponde a um polinômio de grau 3.

11 *Em um experimento foram obtidos os seguintes valores*

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0,98	-3,01	-6,99	-11,01	-15

Usando o método dos mínimos quadrados, determine dentre todas as retas $g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x$ e calcule o erro.

12 *Aproxime a função $f(x) = 4\, x^3$ por uma reta no intervalo $[0, 1]$.*

13 *Aproximar a função $y = f(x)$ definida pela tabela a seguir, por uma função spline cúbica natural interpoladora.*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	1	2

14 *Construa a função spline cúbica natural dada pela seguinte função $f(x)$ tabelada:*

x	0,1	0,2	0,3	0,4
$f(x)$	-0,62049958	-0,28398668	0,00660095	0,2484244

15 *Interpole $f(x) = x^4$ no intervalo $[-1, 1]$ usando uma spline cúbica natural correspondentes aos nós $x_0 = -1, x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.*

16 *A função $p(x)$ representa uma spline cúbica natural descreve a quantidade de um nutriente na corrente sanguínea na primeira hora ($0 < t < 1$) após a administração de um complexo vitamínico entre a segunda e a quinta hora ($1 < t < 5$):*

$$p(t) = \begin{cases} p_1(t) = a\,t^3 + 2,9\,t + 1, & 0 < t < 1 \\ p_2(t) = -0,025\,t^3 + b\,t^2 + 2,525\,t + 1,125, & 1 < t < 5 \end{cases}$$

Calcule os valores de a e b para os quais a spline natural se aproxime de uma função nos pontos $t = 0, 1$ e 5.

Sugestão: basta usar os conceitos de *spline* natural, a saber:

- $\mu_0 = p_0''(0) = 0$, $\mu_2 = p_2''(5) = 0$;
- A *spline* cúbica é contínua até a derivada de ordem 2: $p_0(1) = p_1(1)$; $p_0'(1) = p_1'(1)$; $p_0''(1) = p_1''(1)$;

Obtendo estas relações, encontram-se os valores de a e b.

17 *Complete os detalhes da dedução das fórmulas de Splines cúbicas naturais apresentadas em sala.*

(a) Sejam $h_i = x_{i+1} - x_i$ e $\mu_i = p_i''(x)$. Dada a fórmula

$$p_i''(x) = \frac{1}{h_i}\Big(\mu_i(x_{i+1} - x) + \mu_{i+1}(x - x_i)\Big),$$

por meio de integração sobre $p_i''(x)$, prove que

$$p_i'(x) = \left[-\frac{\mu_i\,(x_{i+1} - x)^2}{2\,h_i} + c_i\right] + \left[\frac{\mu_{i+1}\,(x - x_i)^2}{2\,h_i} + d_i\right]$$

e

$$p_i(x) = \left[\frac{\mu_i\,(x_{i+1} - x)^3}{6\,h_i} - c_i(x_{i+1} - x)\right] + \left[\frac{\mu_{i+1}\,(x - x_i)^3}{6\,h_i} + d_i(x - x_i)\right] + e_i,$$

onde c_i, d_i e e_i são constantes de integração.

(b) *Tendo em mente o fato que* $p_i(x)$ *é um polinômio interpolador, isto é,* $y_i = p_i(x_i)$ *e* $y_{i+1} = p_i(x_{i+1})$*, mostre que*

$$c_i = -\frac{y_i}{h_i} + \frac{\mu_i\, h_i}{6} + \frac{e_i}{h_i}$$

e

$$d_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{\mu_{i+1}\, h_i}{6} - \frac{e_i}{h_i}\,.$$

(c) *Fazendo uso dos itens anteriores e o fato que*

$$p_i'(x_i) = p_{i-1}'(x_i),$$

deduza o seguinte sistema linear:

$$h_{i-1}\,\mu_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\,\mu_i + h_i\,\mu_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right),\ i = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

18 (Ajuste Exponencial) *Suponha que dados experimentais sejam aproximados pela função* $g(x) = a\,b^x$ *com* a *e* b *positivos. O método dos mínimos quadrados desenvolvido anteriormente pode ser usado fazendo a seguinte transformação:*

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(g(x)) \\ &= \ln(a\,\cdot\,b^x) \\ &= \ln a + \ln b^x \\ &= \ln a + x\,\ln b\,. \end{aligned}$$

Definindo-se:

$$\begin{aligned} a_1 &= \ln a \to \mathrm{e}^{a_1} = a \\ a_2 &= \ln b \to \mathrm{e}^{a_2} = b, \end{aligned}$$

temos que

$$h(x) = a_1 + a_2\,x\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(x) &\approx f(x) \\ \ln(g(x)) &\approx \ln(f(x)) \end{aligned}$$

Desta forma, temos a seguinte tabela:

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_m
$\ln(f(x))$	$\ln(f(x_1))$	$\ln(f(x_2))$	$\ln(f(x_3))$	$\ldots$	$\ln(f(x_m))$

Após bela explanação, considere uma função tabelada nos pontos, como segue:

x	-1	-0,9	-0,8	0	1	2
$f(x)$	6,01	5,39	4,80	2,01	0,65	0,21

Ajuste os pontos da tabela para a função exponencial $g(x) = a\, b^x$.

19 *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Mostre que existe um polinômio de grau* ≤ 2 *tal que* $P(-1) = a, P(0) = b, P(1) = c$ *e* $P(3) = d$ *se, e somente se,* $3\,a - 8\,b + 6\,c - d = 0$.

20 (Ajuste Hiperbólico) *Suponha que dados experimentais sejam aproximados pela função* $g(x) = \dfrac{1}{a_1\, x + a_2}$ *com* a_1 *não-nulo. O método dos mínimos quadrados desenvolvido anteriormente pode ser usado fazendo a seguinte transformação:*

$$h(x) = \frac{1}{g(x)} = a_1\, x + a_2,$$

donde, temos que

$$h(x) = a_1 + a_2\, x\,.$$

Assim,

$$g(x) \approx f(x)$$
$$\frac{1}{g(x)} \approx \frac{1}{f(x)}$$

Desta forma, temos a seguinte tabela:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_m
$1/f(x)$	$1/f(x_1)$	$1/f(x_2)$	$1/f(x_3)$	$\dots$	$1/f(x_m)$

Com deleite, no que segue, considere uma função tabelada nos pontos, como segue:

x	-3	-2	-1	-0,5	-0,4
$f(x)$	$-7,6923$	-5	-2,0408	-0,4975	-0,2004

Ajuste os pontos da tabela para a função exponencial $g(x) = \dfrac{1}{a_1\, x + a_2}$.

21 *Prove que*

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_{j0}, x_{j1}, x_{j2}]$$

onde (j_0, j_1, j_2) *é qualquer permutação dos inteiros positivos* $0, 1, 2$.

Sucesso!!!