Cálculo Numérico

Sistemas Lineares: Método LU

Wellington José Corrêa
@correa.well

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

5 de julho de 2021

Introdução

A resolução de sistema de equações lineares é um dos modelos mais utilizados para representar diversos problemas da Matemática e da Engenharia, como por exemplo, cálculo estrutural, circuitos elétricos, processos químicos, etc.
Um sistema de n equações lineares é escrito como:

Introdução

A resolução de sistema de equações lineares é um dos modelos mais utilizados para representar diversos problemas da Matemática e da Engenharia, como por exemplo, cálculo estrutural, circuitos elétricos, processos químicos, etc.
Um sistema de n equações lineares é escrito como:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ldots + a_{1n}\,x_n & = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \ldots + a_{2n}\,x_n & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \ldots + a_{nn}\,x_n & = b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

Introdução

e é representado matricialmente por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Introdução

e é representado matricialmente por

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2}
$$

ou simplesmente,

$$
A \cdot X = B \,. \tag{3}
$$

Introdução

Métodos numéricos para solução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grupos:

Introdução

Métodos numéricos para solução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grupos:

Introdução

Métodos numéricos para solução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grupos:

1. Métodos Exatos: são aqueles que conduzem à solução exata, à menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina, após um número finito de passos (operações).

Introdução

Métodos numéricos para solução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grupos:

1. Métodos Exatos: são aqueles que conduzem à solução exata, à menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina, após um número finito de passos (operações).
2. Métodos Iterativos: são métodos que, a partir de uma aproximação inicial x_0, permitem obter uma sequência de aproximação $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ que converge para a solução, considerando uma precisão definida *a priori*.

Métodos Exatos

Exemplo 1.1

Considere os sistemas lineares:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} 3x + 3y = 18 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$$

Observe que estes dois sistemas lineares tem a mesma solução $S = \{(4, 2)\}$. *Neste caso, dizemos que os sistemas são equivalentes.*

Métodos Exatos

Com base neste conceito de sistemas equivalentes, uma maneira conveniente de obter a solução de um sistema linear por meio de métodos numéricos é transformá-lo em outro equivalente, cuja solução seja facilmente obtida; Nesse contexto, nos métodos exatos, nossa solução será obtida resolvendo sistemas triangulares.

Métodos Exatos

Definição 1.1

Um sistema linear de ordem n é triangular inferior se tiver a forma:

$$(4) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 & = b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n & = b_n \end{cases}$$

Métodos Exatos

Definição 1.1

Um sistema linear de ordem n é triangular inferior se tiver a forma:

$$(4) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 & = b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n & = b_n \end{cases}$$

A solução é obtida pelas fórmulas:

$$(5) \quad x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \; x_i = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = 2, 3, \ldots, n$$

Métodos Diretos

Analogamente, um sistema de ordem n é triangular superior se:

Definição 1.2

$$
(6) \qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 & +a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ & \quad a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ & \qquad\qquad\qquad \vdots \quad = \;\vdots \\ & \qquad\qquad\qquad a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}
$$

Métodos Diretos

Analogamente, um sistema de ordem n é triangular superior se:

Definição 1.2

$$
\begin{cases}
a_{11}\,x_1 \quad +a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\
\qquad\qquad a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad = \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}\,x_n = b_n
\end{cases}
\tag{6}
$$

de solução

$$
x_n = \frac{b_n}{a_{nn}};\;\; x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}},\, i = n-1, \ldots, 2, 1\,. \tag{7}
$$

Menor Principal da Matriz A

A seguir, um conceito importante para o nosso estudo.

Menor Principal da Matriz A

A seguir, um conceito importante para o nosso estudo.

Definição 1.3

Definamos A_k o menor principal, constituído das k primeiras linhas e k primeiras colunas da matriz A.

Menor Principal da Matriz A

Exemplo 1.2

Determine os menores principais da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Menor Principal da Matriz A

Exemplo 1.2

Determine os menores principais da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Solução: Com deleite, veja que

Menor Principal da Matriz A

Exemplo 1.2

Determine os menores principais da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Solução: Com deleite, veja que

$$A_1 = (5)$$

Menor Principal da Matriz A

Exemplo 1.2

Determine os menores principais da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Solução: Com deleite, veja que

$$A_1 = (5)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Menor Principal da Matriz A

Exemplo 1.2

Determine os menores principais da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Solução: Com deleite, veja que

$$\begin{aligned} A_1 &= (5) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ A_3 &= A\,. \end{aligned}$$

Decomposição LU

Teorema 2.1

Sejam $A = (a_{ij})_{n \times n}$ *e* A_k *o menor principal de* A. *Assumimos que* $det(A_k) \neq 0$ *para* $k = 1, 2, ..., n-1$. *Então, existe uma única matriz triangular inferior* $L = (l_{ij})$ *com* $l_{11} = l_{22} = \ldots = l_{nn} = 1$ *e uma única matriz triangular superior* $U = (u_{ij})$ *tal que* $L \cdot U = A$. *Além disso,*

$$det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn} \,.$$

Decomposição LU

$$L \cdot U = A \tag{8}$$

Decomposição LU

$$
\begin{array}{ccccccc}
L & \cdot & U & = & A \\
\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & \text{\huge 0} & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & \cdots & u_{n1} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{n2} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.
\end{array} \tag{8}
$$

Decomposição LU

Para verificar o fato que

$$det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn},$$

recordemos a seguinte propriedade de determinantes:

Decomposição LU

Para verificar o fato que

$$det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn},$$

recordemos a seguinte propriedade de determinantes:

$$\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y),$$

logo,

Decomposição LU

Para verificar o fato que

$$det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn},$$

recordemos a seguinte propriedade de determinantes:

$$\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y),$$

logo,

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U) \,.$$

Decomposição LU

Para verificar o fato que

$$det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn},$$

recordemos a seguinte propriedade de determinantes:

$$\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y),$$

logo,

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U)\,.$$

Uma vez que $\det(L) = 1$ e $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$, resulta o desejado, pois,

Decomposição LU

Para verificar o fato que

$$det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn},$$

recordemos a seguinte propriedade de determinantes:

$$\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y),$$

logo,

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U)\,.$$

Uma vez que $\det(L) = 1$ e $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$, resulta o desejado, pois,

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U)$$

.

Decomposição LU

Para verificar o fato que

$$det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn},$$

recordemos a seguinte propriedade de determinantes:

$$\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y),$$

logo,

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U)\,.$$

Uma vez que $\det(L) = 1$ e $\det(U) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$, resulta o desejado, pois,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U) \\ &= 1 \cdot u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn} = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}\,. \end{aligned}$$

Aplicação à Solução de Sistemas Lineares

Seja $AX = B$, onde A satisfaz as condições da decomposição LU, logo $A = L \cdot U$. Então,

$$L \cdot U \cdot X = B$$

Aplicação à Solução de Sistemas Lineares

Seja $AX = B$, onde A satisfaz as condições da decomposição LU, logo $A = L \cdot U$. Então,

$$L \cdot U \cdot X = B$$

Fazendo $U \cdot X = Y$, então temos o sistema triangular inferior:

$$L \cdot Y = B$$

Aplicação à Solução de Sistemas Lineares

Seja $AX = B$, onde A satisfaz as condições da decomposição LU, logo $A = L \cdot U$. Então,

$$L \cdot U \cdot X = B$$

Fazendo $U \cdot X = Y$, então temos o sistema triangular inferior:

$$L \cdot Y = B$$

Resolvendo este sistema, obteremos o vetor Y e substituindo o valor de Y obtido no sistema triangular superior $U \cdot X = Y$, cuja solução é o vetor X que almejávamos.

Decomposição LU

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$\det(A_k) \neq 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1$?

Decomposição LU

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$$\begin{array}{c} \det(A_k) \neq 0 \\ \forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1? \end{array}$$

$$\Big\downarrow \text{não}$$

O método não é aplicável!

Decomposição LU

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$\det(A_k) \neq 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1$? $\xrightarrow{\text{Sim}}$ A decomposição LU é válida!

$\downarrow$ não

O método não é aplicável!

Decomposição LU

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$\det(A_k) \neq 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1$? $\xrightarrow{\text{Sim}}$ A decomposição LU é válida! $\longrightarrow$ Obtenha as matrizes triangulares L e U

$\downarrow$ não

O método não é aplicável!

Decomposição LU

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$\det(A_k) \neq 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1$?

$\xrightarrow{\text{Sim}}$ A decomposição LU é válida! $\longrightarrow$ Obtenha as matrizes triangulares L e U $\longrightarrow$ Resolva o sistema triangular inferior $L\,Y = B$

$\downarrow$ não

O método não é aplicável!

Decomposição LU

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

$\det(A_k) \neq 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1$? $\xrightarrow{\text{Sim}}$ A decomposição LU é válida! $\longrightarrow$ Obtenha as matrizes triangulares L e U $\longrightarrow$ Resolva o sistema triangular inferior $L\,Y = B$ $\longrightarrow$ Resolva o sistema triangular superior $U\,X = Y$ $\longrightarrow$ Obtendo a solução almejada X do sistema $A \cdot X = B$

$\downarrow$ não

O método não é aplicável!

Decomposição LU

Podemos usar o seguinte esquema para a resolução de sistemas lineares:

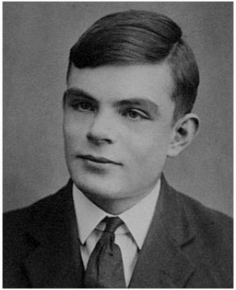
$\det(A_k) \neq 0$
$\forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1$? $\xrightarrow{\text{Sim}}$ A decomposição LU é válida! $\longrightarrow$ Obtenha as matrizes triangulares L e U $\longrightarrow$ Resolva o sistema triangular inferior $L\,Y = B$ $\longrightarrow$ Resolva o sistema triangular superior $U\,X = Y$ $\longrightarrow$ Obtendo a solução almejada X do sistema $A \cdot X = B$

$\downarrow$ não

O método não é aplicável!

Alan Turing

Alan Mathison Turing (1912-1954), inglês, foi influente no desenvolvimento da ciência da computação e na formalização do conceito de algoritmo e computação com a máquina de Turing, desempenhando um papel importante na criação do computador moderno. Foi também pioneiro na inteligência artificial e na ciência da computação. É conhecido como o pai da computação. Ele é que criou a decomposição LU.



Fórmula Geral

Passo 1: Primeira linha de U.

$$u_{1j} = a_{1j},\ j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Fórmula Geral

Passo 1: Primeira linha de U .

$$u_{1j} = a_{1j},\, j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Passo 2: Primeira coluna de L .

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}},\, i = 2, \ldots, n\,.$$

Fórmula Geral

Passo 3: Segunda linha de U.

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}\, u_{1j},\; j = 2, \ldots, n\,.$$

Fórmula Geral

Passo 3: Segunda linha de U.

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}\, u_{1j},\ j = 2, \ldots, n\,.$$

Passo 4: Segunda coluna de L.

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}\, u_{12}}{u_{22}},\ i = 3, \ldots, n\,.$$

Fórmula Geral

Passo 5: Terceira linha de U, $3^{\underline{a}}$ coluna de L, $4^{\underline{a}}$ linha de U, $4^{\underline{a}}$ de L, etc.

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}, \; i \leqslant j$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}}{u_{jj}}, \; i > j\,.$$

Exemplo 4.1

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a. *Verifique-se A satisfaz as condições da decomposição LU;*
b. *Decomponha A em LU;*
c. *Por meio da decomposição LU, calcule $\det(A)$;*
d. *Resolva o sistema $A \cdot X = B$, onde $B = (0, -7, -5)^t$, empregando a decomposição LU.*

Solução: (a) Primeiramente, devemos calcular os menores principais A_k da matriz A para $k = 1, 2$.

Solução: (a) Primeiramente, devemos calcular os menores principais A_k da matriz A para $k = 1, 2$. De fato, note que

$$A_1 = (5) \Rightarrow \det(A_1) = 5 \neq 0;$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = -1 \neq 0\,.$$

Solução: (a) Primeiramente, devemos calcular os menores principais A_k da matriz A para $k = 1, 2$. De fato, note que

$$A_1 = (5) \Rightarrow \det(A_1) = 5 \neq 0;$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = -1 \neq 0\,.$$

Assim, pelo Teorema 2.1, o método LU é garantido, ou seja, a matriz A é decomponível no produto $L \cdot U$:

Portanto,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}.$$

Deste modo, podemos usar as fórmulas apresentadas na seção anterior.

(b) Com efeito,

Passo 1: Primeira linha de U.

$$u_{1j} = a_{1j},\ j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

(b) Com efeito,

Passo 1: Primeira linha de U .

$$u_{1j} = a_{1j},\ j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Logo,

$$u_{11} = a_{11} = 5,\ u_{12} = a_{12} = 2,\ \text{ e } u_{13} = a_{13} = 1\,.$$

Passo 2: Primeira coluna de L.

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \; i = 2, \ldots, n\,.$$

Perceba que para $i = 2, 3$, resulta que

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{3}{5};$$
$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{1}{5};$$

Passo 3: Segunda linha de U.

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}\, u_{1j},\; j = 2, \ldots, n\,.$$

Passo 3: Segunda linha de U .

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}\, u_{1j},\; j = 2, \ldots, n\,.$$

Para $j = 2, 3$, temos:

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12}$$

Passo 3: Segunda linha de U .

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}\, u_{1j},\ j = 2, \ldots, n\,.$$

Para $j = 2, 3$, temos:

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12} = 1 - \frac{3}{5} \cdot 2 = -\frac{1}{5}\,.$$

Passo 3: Segunda linha de U .

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}\, u_{1j},\ j = 2, \ldots, n\,.$$

Para $j = 2, 3$, temos:

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12} = 1 - \frac{3}{5} \cdot 2 = -\frac{1}{5}\,.$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}\, u_{13}$$

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Passo 3: Segunda linha de U.

$$u_{2j} = a_{2j} - l_{21}\, u_{1j},\, j = 2, \ldots, n\,.$$

Para $j = 2, 3$, temos:

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}\, u_{12} = 1 - \frac{3}{5} \cdot 2 = -\frac{1}{5}\,.$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}\, u_{13} = 4 - \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{17}{5}\,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Passo 4: Segunda coluna de L.

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}\, u_{12}}{u_{22}}, \; i = 3, \ldots, n\,.$$

Passo 4: Segunda coluna de L.

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}\, u_{12}}{u_{22}},\ i = 3, \ldots, n\,.$$

Para $i = 3$, vem que

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}\, u_{12}}{u_{22}}$$

Passo 4: Segunda coluna de L.

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}\, u_{12}}{u_{22}}, \; i = 3, \ldots, n\,.$$

Para $i = 3$, vem que

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}\, u_{12}}{u_{22}} = \frac{1 - \frac{1}{5} \times 2}{-\frac{1}{5}}$$

Passo 4: Segunda coluna de L.

$$l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1}\, u_{12}}{u_{22}}, \; i = 3, \ldots, n\,.$$

Para $i = 3$, vem que

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}\, u_{12}}{u_{22}} = \frac{1 - \frac{1}{5} \times 2}{-\frac{1}{5}} = -3\,.$$

Como agora só nos resta o elemento u_{33}, temos:

Passo 5: Terceira linha de U

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}, \; i \leqslant j$$

Como agora só nos resta o elemento u_{33}, temos:

Passo 5: Terceira linha de U

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj},\; i \leqslant j$$

Para $i = j = 3$, obtemos:

$$u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^{\overbrace{3-1}^{=2}} l_{3k}\, u_{k3}$$

Como agora só nos resta o elemento u_{33}, temos:

Passo 5: Terceira linha de U

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}, \; i \leqslant j$$

Para $i = j = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} u_{33} &= a_{33} - \sum_{k=1}^{\overbrace{3-1}^{=2}} l_{3k}\, u_{k3} \\ &= a_{33} - (l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23}) \end{aligned}$$

Como agora só nos resta o elemento u_{33}, temos:

Passo 5: Terceira linha de U

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj},\; i \leqslant j$$

Para $i = j = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} u_{33} &= a_{33} - \sum_{k=1}^{\overbrace{3-1}^{=2}} l_{3k}\, u_{k3} \\ &= a_{33} - (l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23}) \\ &= 3 - \frac{1}{5} \times 1 - (-3) \times \frac{17}{5} \end{aligned}$$

Como agora só nos resta o elemento u_{33}, temos:

Passo 5: Terceira linha de U

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj},\ i \leqslant j$$

Para $i = j = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} u_{33} &= a_{33} - \sum_{k=1}^{\overbrace{3-1}^{=2}} l_{3k}\, u_{k3} \\ &= a_{33} - (l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23}) \\ &= 3 - \frac{1}{5} \times 1 - (-3) \times \frac{17}{5} = 13\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

(c) Pelo Teorema 2.1, resulta que

$$\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33}$$

Portanto,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{5} & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

(c) Pelo Teorema 2.1, resulta que

$$\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 13$$

Portanto,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{5} & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

(c) Pelo Teorema 2.1, resulta que

$$\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot u_{33} = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 13 = -13\,.$$

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $L \cdot Y = B$ donde $U \cdot X = Y$.

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $L \cdot Y = B$ donde $U \cdot X = Y$.
Em verdade,

$$L \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ \frac{3}{5}\, y_1 + y_2 = -7 \\ \frac{1}{5}\, y_1 - 3\, y_2 + y_3 = -5 \end{cases} ,$$

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $L \cdot Y = B$ donde $U \cdot X = Y$.

Em verdade,

$$L \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{5} & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ \frac{3}{5}\, y_1 + y_2 = -7 \Rightarrow \; y_2 = -7 \\ \frac{1}{5}\, y_1 - 3\, y_2 + y_3 = -5 \end{cases},$$

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $L \cdot Y = B$ donde $U \cdot X = Y$.
Em verdade,

$$L \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ \frac{3}{5} y_1 + y_2 = -7 \Rightarrow \ y_2 = -7 \\ \frac{1}{5} y_1 - 3 y_2 + y_3 = -5 \Rightarrow \ y_3 = -26 \end{cases},$$

(d)

Para obter a solução do sistema $AX = B$, devemos resolver primeiramente o sistema triangular inferior $L \cdot Y = B$ donde $U \cdot X = Y$.
Em verdade,

$$L \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ \frac{3}{5}\, y_1 + y_2 = -7 \Rightarrow \; y_2 = -7 \\ \frac{1}{5}\, y_1 - 3\, y_2 + y_3 = -5 \Rightarrow \; y_3 = -26 \end{cases},$$

Logo, a solução do sistema $L \cdot Y = B$ é $Y = (0, -7, -26)^t$.

Retornando ao sistema triangular superior $U \cdot X = Y$, obtemos:

Retornando ao sistema triangular superior $U \cdot X = Y$, obtemos:

$$U \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Retornando ao sistema triangular superior $U \cdot X = Y$, obtemos:

$$U \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13\,x_3 = -26 \\ -\frac{1}{5}\,x_2 + \frac{17}{5}x_3 = -7 \\ 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \end{cases} ,$$

Retornando ao sistema triangular superior $U \cdot X = Y$, obtemos:

$$U \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13\,x_3 = -26 \Rightarrow \; x_3 = -2 \\ -\frac{1}{5}\,x_2 + \frac{17}{5}x_3 = -7 \\ 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \end{cases},$$

Retornando ao sistema triangular superior $U \cdot X = Y$, obtemos:

$$U \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13\,x_3 = -26 \Rightarrow \ x_3 = -2 \\ -\frac{1}{5}\,x_2 + \frac{17}{5}x_3 = -7 \Rightarrow \ x_2 = 1 \\ 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \end{cases},$$

Retornando ao sistema triangular superior $U \cdot X = Y$, obtemos:

$$U \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13\,x_3 = -26 \Rightarrow \; x_3 = -2 \\ -\frac{1}{5}\,x_2 + \frac{17}{5}x_3 = -7 \Rightarrow \; x_2 = 1 \\ 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \; x_1 = 0 \end{cases},$$

Retornando ao sistema triangular superior $U \cdot X = Y$, obtemos:

$$U \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{5} & \dfrac{17}{5} \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 13\,x_3 = -26 \Rightarrow \; x_3 = -2 \\ -\frac{1}{5}\,x_2 + \frac{17}{5}x_3 = -7 \Rightarrow \; x_2 = 1 \\ 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \; x_1 = 0 \end{cases},$$

Doravante, a solução do sistema $A \cdot X = B$ é $X = (0, 1, -2)^t$.

Exemplo

Exemplo 4.2

Considere o sistema

$$\begin{cases} 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 & = -12 \\ -\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 & = 20 \\ 2\,x_1 - 3\,x_2 + 10\,x_3 & = 3 \end{cases}$$

- (a) *Resolva o sistema, se possível, fazendo uso da decomposição LU.*
- (b) *Usando a decomposição, calcule o determinante da matriz dos coeficientes.*