Análise de Algoritmos – Tópico 2

Prof. Dr. Juliano Henrique Foleis

1 Conceitos Básicos de Matemática para Análise de Algoritmos

É importante compreender certas ferramentas matemáticas para praticar análise de algoritmos. A revisão a seguir trata dos conceitos matemáticos básicos para esta disciplina.

1.1 Monotonicidade

$f(n)$ é monótona crescente se $m \leq n$ implica $f(m) \leq f(n)$.
$f(n)$ é monótona decrescente se $m \leq n$ implica $f(m) \geq f(n)$.
$f(n)$ é estritamente crescente se $m < n$ implica $f(m) < f(n)$.
$f(n)$ é estritamente decrescente se $m < n$ implica $f(m) > f(n)$.

1.2 Chão e Teto

Para qualquer x real, $\lfloor x \rfloor$, o chão de x, corresponde ao maior inteiro menor ou igual a x. Para qualquer x real, $\lceil x \rceil$, o teto de x, corresponde ao menor inteiro maior ou igual a x.

Para qualquer inteiro n,

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$$

Para qualquer real $x \geq 0$ e inteiros $a, b > 0$,

$$\left\lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{ab} \right\rceil$$
$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$
$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \leq \frac{a + (b-1)}{b}$$
$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \leq \frac{a - (b-1)}{b}$$

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ é monótona crescente e, assim como $f(x) = \lceil x \rceil$ é monótona descrescente.

1.3 Séries

Séries são frequentemente utilizadas na análise de algoritmos para computar o tempo de execução. A seguir são apresentadas propriedades e resultados importantes que são frequentemente utilizados.

Somatórios e Propriedades

Dada uma sequência $a_1, a_2, ..., a_n$ de números, onde n é um inteiro não-negativo, uma soma finita $a_1 + a_2 + ... + a_n$ pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Se $n = 0$, o valor dessa soma é definida em 0. Assim, o valor de uma série finita sempre é bem definida e os termos podem ser somados em qualquer ordem.

Dada uma sequencia infinita $a_1, a_2, ...$ de números, podemos escrever a soma infinita $a_1 + a_2 + ...$ como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

que pode ser interpretado como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Se o limite não existe, a série diverge. Se existe, converge. Séries infinitas convergentes nem sempre podem ser somadas em qualquer ordem, a não ser que seja uma série absolutamente convergente, onde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ também converge.

Linearidade

Para qualquer c real e qualquer sequências finitas $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$,

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Esta propriedade também vale para séries infinitas convergentes.

Em notação assintótica:

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta(f(k)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)$$

Série Aritmética

A soma

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$$

é denominada série aritmética é tem o valor

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Somas de Quadrados e Cubos

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Série Geométrica

Para x real e $x \neq 1$, a soma

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + ... + x^n$$

é a série geométrica, ou exponencial, e tem o valor

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Quando a soma é infinita e $|x| < 1$ tem a série geométrica decrescente

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

Derivando a soma anterior e multiplicando ambos lados por x, temos, também para $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1 - x)^2}$$

Série Harmônica

Para inteiros positivos n, o n-ésimo número harmônico é $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ que é dado por

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = ln(n) + O(1)$$

Série Telescópica

Para qualquer sequência $a_0, a_1, ..., a_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Como cada termo $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ é somado e subtraído exatamente uma vez, dizemos que a soma é telescópica. Outra série telescópica é

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n$$

Exemplo: Considere a série,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

Como cada termo pode ser reescrito como

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

1.4 Logaritmos

$\forall x \in \mathbb{R}(\log_x n = \Theta(\lg n))$
$k^{\lg n} = n^{\lg k}$
$\lg(\frac{a}{b}) = \lg a - \lg b$
$\lg(a.b) = \lg a + \lg b$
$\lg(b^k) = k \lg b$
$\log_b b = 1$

Bibliografia

[CRLS] CORMEN, T. H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática. Elsevier, 2012. 3a Ed. Apêndice A (Fundamentos de Matemática), Seção A.1.