Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Bacharelado em Ciência da Computação

BCC32B – Elementos de Lógica Digital

Prof. Rodrigo Hübner

Aula 04 – Álgebra de Boole. Teoremas de DeMorgan.

Fundamentos de Lógica

Álgebra de Boole

- Álgebra proposta pelo matemático George Boole em 1854
- Usada para simplificar circuitos lógicos
  - Todas as variáveis têm valor 0 ou 1
  - Tem 3 operadores:

Lógica booleana Matemática (V, F)	Símbolo	Lógica Booleana Digital (0,1)	Símbolo
Conjunção	$A \vee B$	OR (OU)	$A+B$
Disjunção	$A \wedge B$	AND (E)	$A.B$
Negação	$\neg A$	NOT (NÃO)	$\overline{A}$

Fundamentos de Lógica

Álgebra de Boole

A **Álgebra de Boole** é baseada em um conjunto de regras que são derivadas de um pequeno número de **Axiomas.**

Assumimos que:

- Álgebra Booleana envolve elementos com dois valores 0 e 1.
- Os axiomas são verdade:

$$1a.\ \ 0.0=0$$
$$1b.\ \ 1+1=1$$
$$2a.\ \ 1.1=1$$
$$2b.\ \ 0+0=0$$
$$3a.\ \ 0.1=1.0=0$$
$$3b.\ \ 1+0=0+1=1$$
$$4a.\ \ A=0\Rightarrow\overline{A}=1$$
$$4a.\ \ Se\, A=1\,,\, então\, \overline{A}=0$$

Teorema da dualidade

1) Substitui `or` por `and`, `and` por `or`, `1` por `0`, e `0` por `1`
2) Mantém os literais (variáveis)
3) A expressão dual de uma determinada expressão booleana é obtida.

Exemplo:

$$A+0=A$$

$$(A+0)^D=A^D \Rightarrow A\cdot 1=A$$

- O dual de um enunciado verdadeiro também é verdadeiro!
- Qualquer teorema provado → o seu dual também está provado.

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Identidade (Zero e Um)

$$5a.\quad A.0=0$$
$$5b.\quad A+1=1$$
$$6a.\quad A.1=A$$
$$6b.\quad A+0=A$$

Idempotência

$$7a.\quad A.A=A$$
$$7b.\quad A+A=A$$

Complemento

$$8a.\quad A.\overline{A}=0$$
$$8b.\quad A+\overline{A}=1$$

Involução

$$9.\quad \overline{\overline{A}}=A$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Comutativa

$$10a.\quad A.B = B.A$$
$$10b.\quad A+B = B+A$$

Associativa

$$11a.\quad A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C$$
$$11b.\quad A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C$$

Distributiva

$$12a.\quad A.(B+C) = A.B+A.C$$
$$12b.\quad A+(B.C) = (A+B).(A+C)$$
$$(A+B).(A+C) = A+(B.C)$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Absorção

$$13a.\quad A + A.B = A$$
$$13b.\quad A.(A+B) = A$$

$$14a.\quad A + \overline{A}.B = A + B$$
$$14b.\quad A.(\overline{A}+B) = A.B$$

Adjacência lógica

$$15a.\quad A.B + A.\overline{B} = A$$
$$15b.\quad (A+B).(A+\overline{B}) = A$$

Consenso

$$16a.\quad A.B + \overline{A}.C + B.C = A.B + \overline{A}.C$$
$$16b.\quad (A+B).(\overline{A}+C).(B+C) = (A+B).(\overline{A}+C)$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Distributiva - Prova

$$12b.\quad A+B.C=(A+B).(A+C)$$
$$12b.\quad (A+B).(A+C)=A+B.C$$
$$12b.\quad A.A+A.C+A.B+B.C=A+B.C$$
$$12b.\quad A+A.C+A.B+B.C=A+B.C$$
$$12b.\quad A+A.(C+B)+B.C=A+B.C$$
$$12b.\quad A.(1+(C+B))+B.C=A+B.C$$
$$12b.\quad A.1+B.C=A+B.C$$
$$12b.\quad A+B.C=A+B.C$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Absorção - Prova

$$13a. \quad A + A.B = A$$
$$13a. \quad A.1 + A.B = A$$
$$13a. \quad A.(1 + B) = A$$
$$13a. \quad A.1 = A$$
$$13a. \quad A = A$$

$$13b. \quad A.(A + B) = A$$
$$13b. \quad (A + 0).(A + B) = A$$
$$13b. \quad A + A.B = A$$
$$13b. \quad A = A$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Absorção - Prova

$$14a.\quad A+\overline{A}.B=A+B$$
$$14a.\quad (A+\overline{A}).(A+B)=A+B$$
$$14a.\quad 1.(A+B)=A+B$$
$$14a.\quad A+B=A+B$$

$$14b.\quad A.(\overline{A}+B)=A.B$$
$$14b.\quad A.\overline{A}+A.B=A.B$$
$$14b.\quad 0+A.B=A.B$$
$$14b.\quad A.B=A.B$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Adjacência lógica - Prova

$$15a.\quad A.B + A.\overline{B} = A$$
$$15a.\quad A.(B + \overline{B}) = A$$
$$15a.\quad A.1 = A$$
$$15a.\quad A = A$$

$$15b.\quad (A + B).(A + \overline{B}) = A$$
$$15b.\quad A + (B.\overline{B}) = A$$
$$15b.\quad A + 0 = A$$
$$15b.\quad A = A$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Consenso - Prova

$$16a.\quad A.B+\overline{A}.C+B.C=A.B+\overline{A}.C$$
$$16a.\quad A.B+\overline{A}.C+B.C.(A+\overline{A})=A.B+\overline{A}.C$$
$$16a.\quad A.B+\overline{A}.C+B.C.A+B.C.\overline{A}=A.B+\overline{A}.C$$
$$16a.\quad A.B+A.B.C+\overline{A}.C+\overline{A}.C.B=A.B+\overline{A}.C$$
$$16a.\quad A.B.(1+C)+\overline{A}.C.(1+B)=A.B+\overline{A}.C$$
$$16a.\quad A.B.1+\overline{A}.C.1=A.B+\overline{A}.C$$
$$16a.\quad A.B+\overline{A}.C=A.B+\overline{A}.C$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Consenso - Prova

$$16b.\ (A+B).(\overline{A}+C).(B+C)=(A+B).(\overline{A}+C)$$
$$16b.\ (A+B).(\overline{A}+C).((B+C)+A.\overline{A})=(A+B).(\overline{A}+C)$$
$$16b.\ (A+B).(\overline{A}+C).(B+C+A).(B+C+\overline{A})=(A+B).(\overline{A}+C)$$
$$16b.\ (A+B).(A+B+C).(\overline{A}+C).(\overline{A}+C+B)=(A+B).(\overline{A}+C)$$
$$16b.\ ((A+B)+(0.C)).(\overline{A}+C)+(0.B)=(A+B).(\overline{A}+C)$$
$$16b.\ (A+B+0).(\overline{A}+C+0)=(A+B).(\overline{A}+C)$$
$$16b.\ (A+B).(\overline{A}+C)=(A+B).(\overline{A}+C)$$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

Teorema de DeMorgan

$$17\,a.\quad \overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$$
$$17\,b.\quad \overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$$

Fundamentos de Lógica

Teoremas de De Morgan

Usados para simplificar expressões booleanas

1º Teorema: Complemento do Produto é igual à Soma dos Complementos

$$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Prova

Saídas Iguais

A	B	$\overline{A.B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Fundamentos de Lógica

Teoremas de DeMorgan

Usados para simplificar expressões booleanas

2º Teorema: Complemento do Soma é igual ao Produto dos Complementos

$$\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$$

Exercício!

Solução

Prova do 2º Teorema:

2º Teorema:

Complemento do Soma é igual ao Produto dos Complementos

$$\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$$

Prova

Saídas Iguais

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}.\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Próxima Aula

- Obter circuito a partir da expressão;
- Obter expressão a partir de circuito.