UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profª Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Capítulo 5

Cônicas e Quádricas - Parte 1

Neste capítulo faremos o estudo geométrico e analítico(algébrico) de curvas bidimensionais especiais: as **cônicas** e, as superfícies tridimensionais classificadas como **quádricas**.

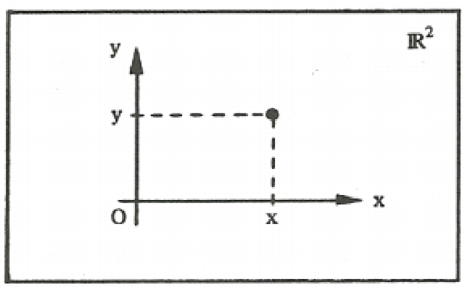
O tratamento dado pelo geômetra grego Apolônio às curvas planas elipse, hipérbole e parábola no século III a.C. é considerado uma das realizações mais profundas da Geometria clássica. Estudadas há mais de dois milênios, essas curvas têm aplicações importantes até hoje. A elipse ganhou relevo na Astronomia, desde que Kleper (1571-1630) estabeleceu que as órbitas dos planetas do sistema solar são elípticas. Uma de suas propriedades geométricas é utilizada na fabricação de alguns tipos especiais de refletores e também explica o fenômeno que ocorre em câmaras de sussuro. A hipérbole é usada no método de navegação LORAN e na descrição da trajetória de uma partícula-alfa sujeita ao campo elétrico gerado por um núcleo atômico. A parábola tem propriedades que são úteis na fabricação de espelhos de fárois de automóvel, de refletores de longo alcance e de antenas parabólicas, que não recebem esse nome por acaso.

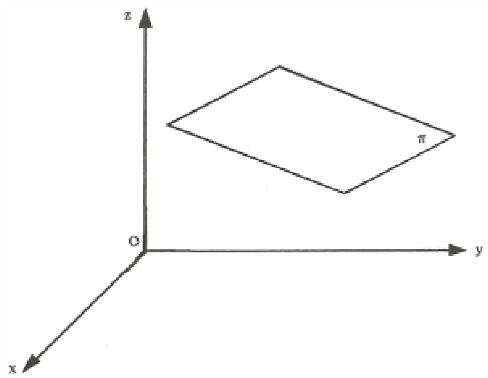
Por fim, dentre as diversas ferramentas que podem ser utilizadas para auxiliar geometricamente no estudo das próximas seções, destaco o uso do software Geogebra ("software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólico"). Este software pode ser baixado ou usado de forma online pelo link `https://www.geogebra.org/`.

5.1 Superfície Cônica e Seção Cônica

Aqui utilizaremos os conceitos de reta e plano (tópicos estudados nos capítulos anteriores). Recorde que, geometricamente, entendemos reta por

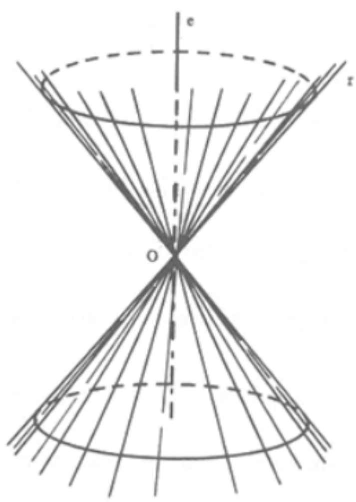
e o plano ($\mathbb{R}^2$) por

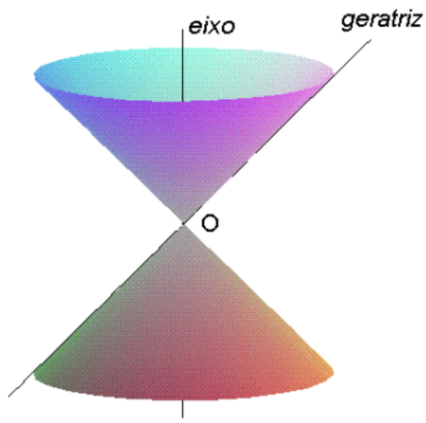




.

Definição 1 (Superfície Cônica). *Sejam duas retas e e r concorrentes em O e não perpendiculares. Conservemos fixa a reta e e façamos r girar 360° em torno de e e mantendo constante o ângulo entre estas retas.*





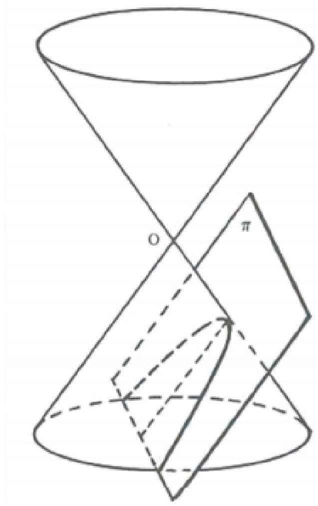
*Assim, a reta r gera uma **superfície cônica** circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O. A reta r é dita geratriz da superfície cônica e a reta e, eixo da superfície.*

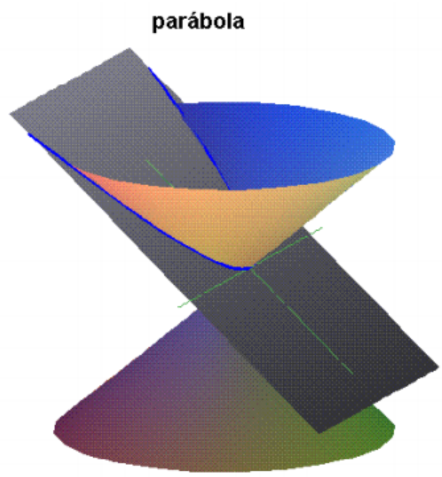
Definição 2 (Seção Cônica)**.** *Chama-se **seção cônica** ao conjunto de pontos que formam a intersecção de um plano com a superfície cônica.*

Temos duas situações:

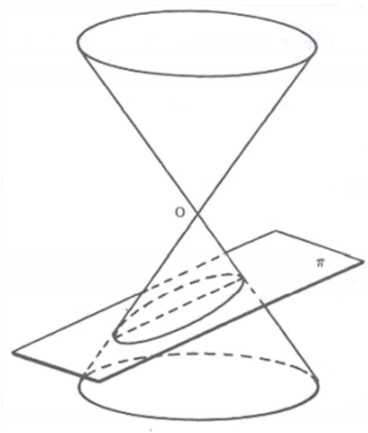
1. A superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O, a seção cônica será:

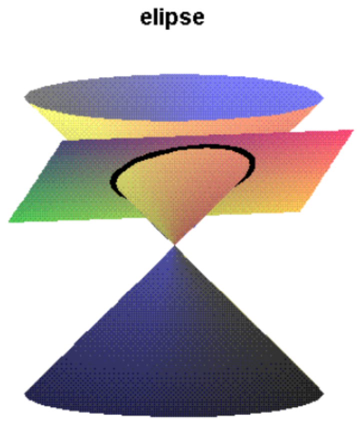
   (a) Uma parábola se π for paralelo a uma geratriz da superfície.



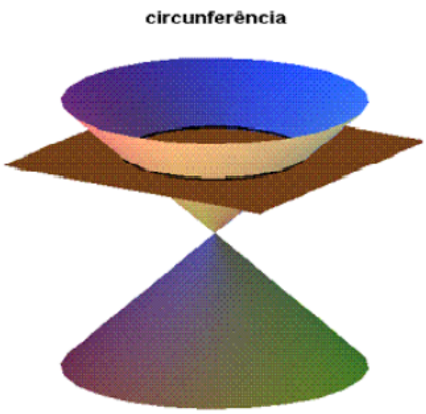


   (b) Uma elipse se π for oblíquo ao eixo e, cortando apenas uma das folhas da superfície.

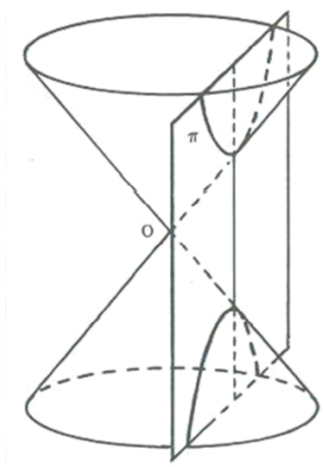


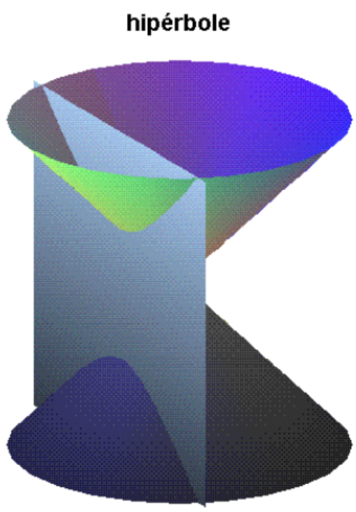


Observação 5.1.1. *Quando π for perpendicular ao eixo e, cortando apenas uma das folhas da superfície obtemos uma circunferência.*



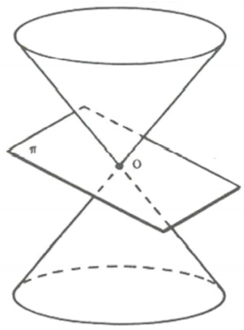
(c) Uma hipérbole se π for paralelo ao eixo e.

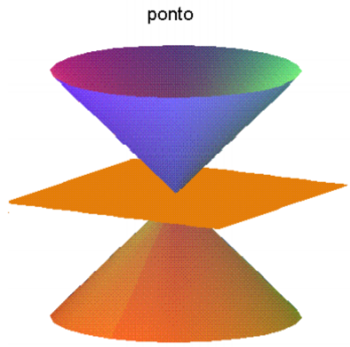




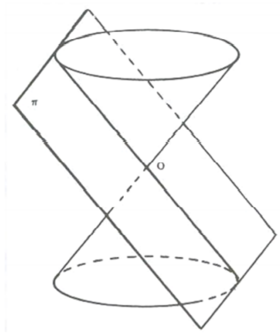
2. π passa pelo vértice O, obtemos as cônicas degeneradas:

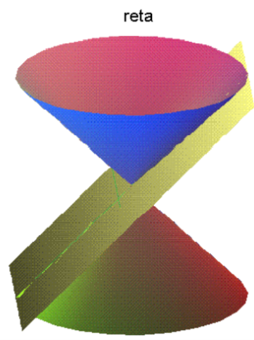
   (a) Um ponto se π só tem o ponto 0 em comum com a superfície.



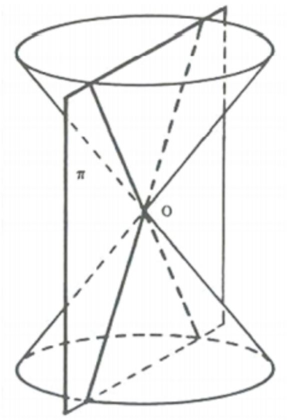


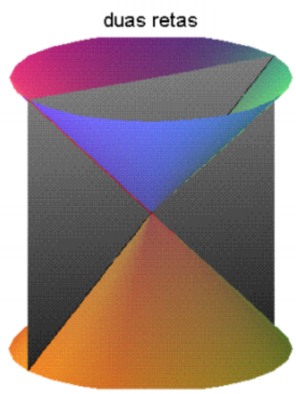
   (b) Uma reta se π tangencia a superfície cônica.





   (c) Duas retas se π forma com o eixo um ângulo menor do que este faz com a geratriz.





Assim, as **cônicas** são curvas planas obtidas pela intersecção de um cone circular duplo com um único plano. Veja o conteúdo complementar.

E mais, a inclinação do plano com relação ao eixo de simetria do cone determinará os diversos tipos de cônicas. São elas: circunferência, elipse, parábola e hipérbole. Tente você obter e visualizar essas interseções utilizando a ferramenta disponível em https://www.geogebra.org/m/g3y7bq68.

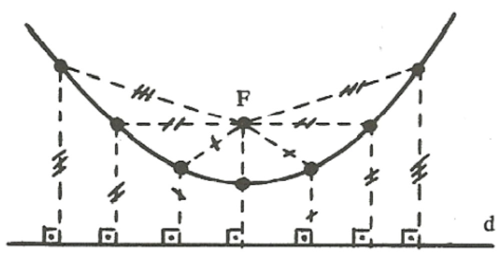
Note que as cônicas degeneradas já foram estudadas em capítulos anteriores e as cônicas não-degeneradas iniciaremos o seu estudo agora (veja as próximas seções).

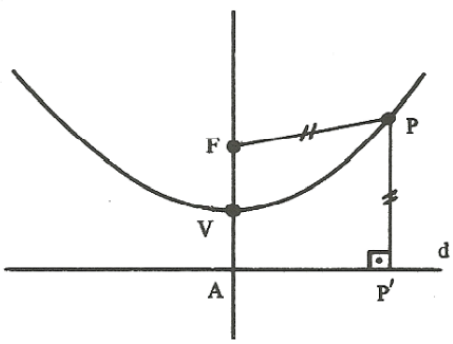
5.2 Cônicas na Origem do Sistema Cartesiano

Nesta seção, apresentamos as cônicas (parábola, elipse e hipérbole) na origem do sistema cartesiano. Mais especificamente, estudaremos a parábola de vértice na origem do sistema, a elipse de centro na origem do sistema e a hipérbole de centro na origem do sistema.

5.2.1 Parábola

Definição 3. *Consideremos em um plano uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Uma **parábola** de foco F é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano que estão a mesma distância de F e de d, ou seja, são equidistante.*





Seja P' o pé da perpendicular de um ponto P do plano sobre a reta d. De acordo com a definição, P pertence à parábola se, e somente se:

$$d(P, F) = d(P, P')$$

onde:

- o ponto F é dito foco;
- a reta d é dita diretriz;
- a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é dito eixo;
- o ponto V (ponto de intersecção do eixo com a parábola) é dito vértice.

Observação 5.2.1. *$d(V,F) = d(V,A),\ A \in d$ (d: diretriz).*

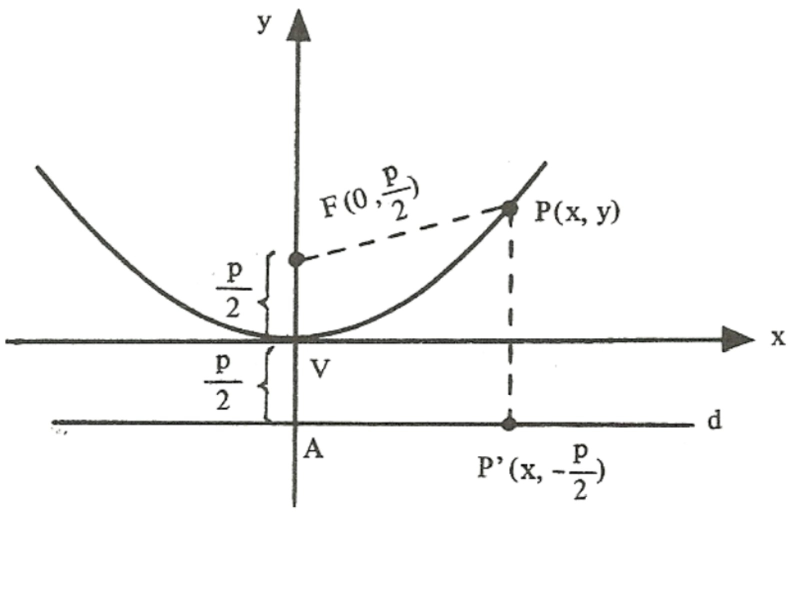
Equação da Parábola de Vértice na Origem do Sistema

1° caso: *O eixo da parábola está sobre o eixo dos y*

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F(0,\frac{p}{2})$. E mais, $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ é dito parâmetro da parábola.

Pela definição de parábola, $||\overrightarrow{PF}|| = ||\overrightarrow{PP'}||$. Logo,

$$||(-x,\frac{p}{2}-y)|| = ||(x-x,-\frac{p}{2}-y)|| \Rightarrow x^2 - 2py = 0 \Rightarrow x^2 = 2py$$

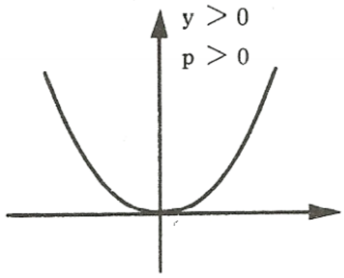


Assim, a equação

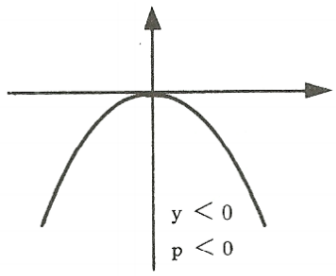
$$x^2 = 2py$$

é chamada equação reduzida da parábola e constitui a forma padrão da **equação da parábola de vértice na origem tendo para eixo o eixo dos** y.

Observação 5.2.2. *1. Se $p > 0$ então a parábola tem concavidade voltada para cima.*



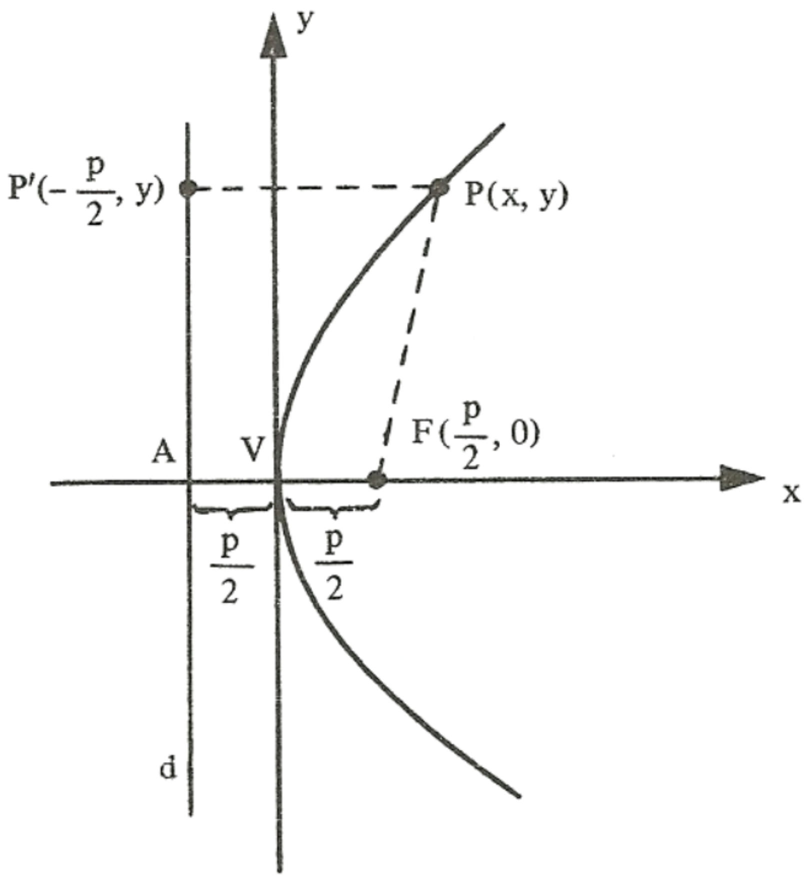
2. Se $p < 0$ então a parábola tem concavidade voltada para baixo.



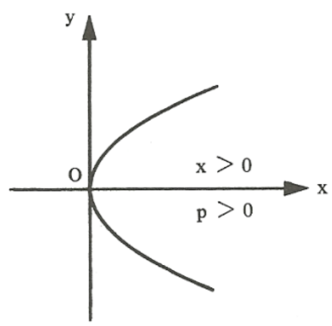
2° caso: *O eixo da parábola é o eixo dos x*

$$y^2 = 2px$$

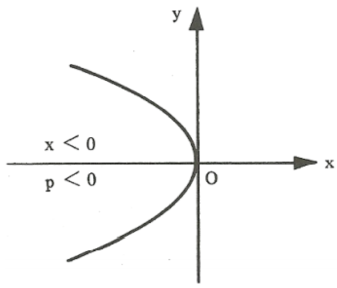
é chamada equação reduzida da parábola e constitui a forma padrão da **equação da parábola de vértice na origem tendo para eixo o eixo dos** x.



Observação 5.2.3. • *Se $p > 0$ então a parábola tem concavidade voltada para a direita.*



• *Se $p < 0$ então a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.*



Exemplo 5.2.1. *Determinar o foco e a equação da diretriz das parábolas* $x^2 = 8y$ *e* $y^2 = -2x$ *e esboce as parábolas.*

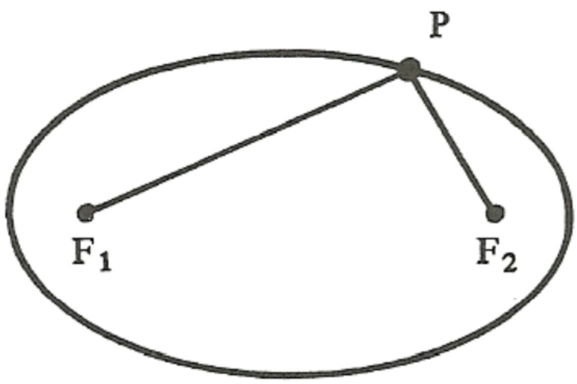
Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 5.2.2. *Determinar a equação da parábola sabendo que* $V(0,0)$ *e* $y = 3$ *(diretriz).*

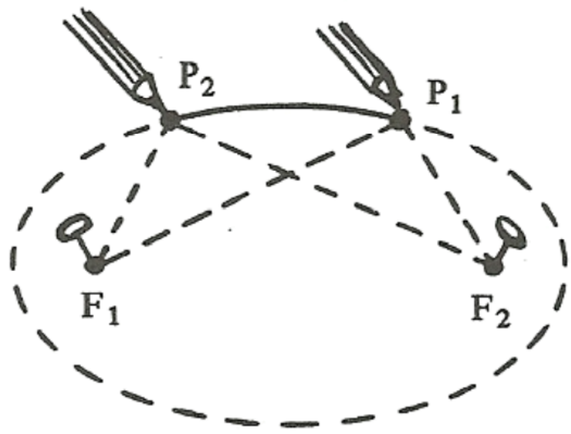
Solução: *Link da Solução.*

5.2.2 Elipse

Definição 4. *Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.*

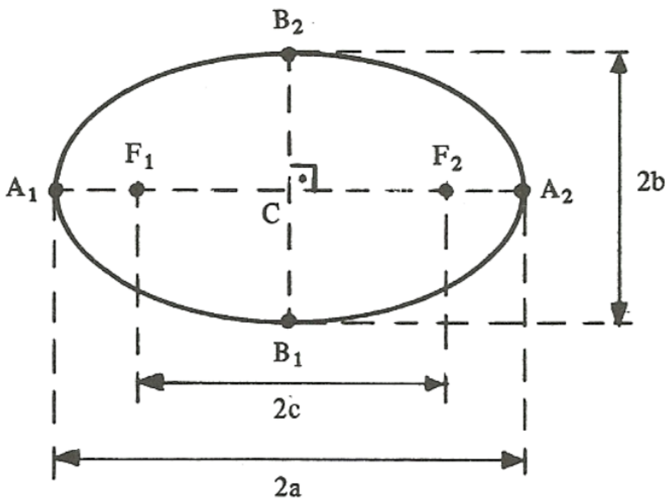


Ou seja, consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2, tal que $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a > 2c$. Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ dá-se o nome de elipse.



Observação 5.2.4. *Uma elipse fica determinada se forem conhecidos os pontos F_1 e F_2 e o número a.*

Elementos de uma elipse:



Focos são os pontos F_1 e F_2;

Distância Focal é a distância $2c$ entre os focos;

Centro é o ponto médio C do segmento F_1F_2;

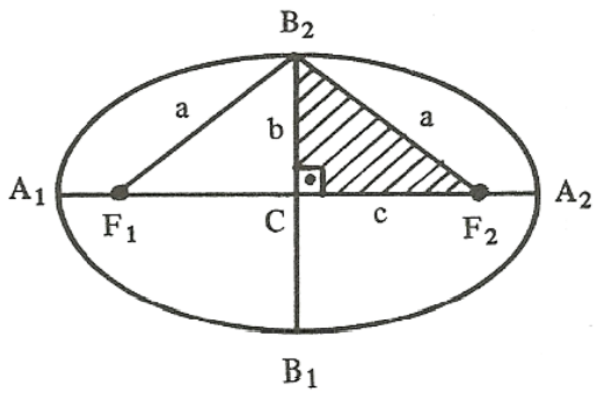
Eixo Maior é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;

Eixo Menor é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$;

Vértice são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2;

Excentricidade é o número $e = \frac{c}{a}$, $(0 < e < 1)$.

Observação 5.2.5. *Em toda elipse vale a relação:* $a^2 = b^2 + c^2$

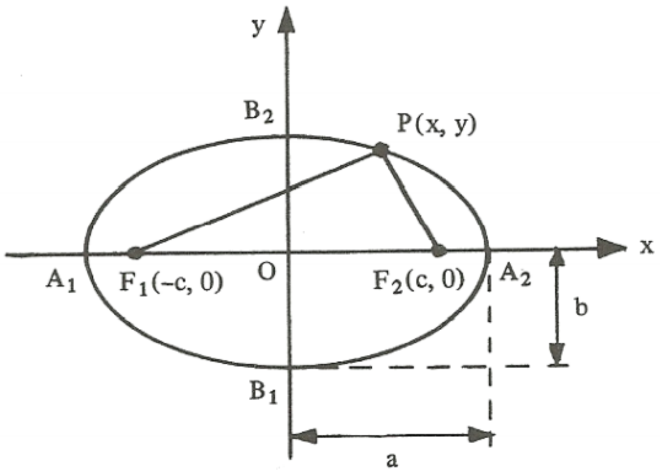


Observação 5.2.6. *A elipse é um conjunto limitado, pois esta contido no retângulo fundamental da elipse (tal retângulo é caracterizado pelas desigualdades* $-a \leq x \leq a$ *e* $-b \leq y \leq b$*) e na coroa fundamental da elipse (tal coroa fundamental é caracterizada pela coroa circular de raios a e b).*

Equação da Elipse de Centro na Origem do Sistema

1º Caso: *O eixo maior está sobre o eixo dos x.*

Consideremos a elipse com focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.



Note que, $\overrightarrow{F_1P} = P - F_1 = (x+c, y)$ e $\overrightarrow{F_2P} = P - F_2 = (x-c, y)$. Portanto, a equação

$$\| \overrightarrow{F_1P} \| + \| \overrightarrow{F_2P} \| = 2a$$

pode ser escrita como:

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} & = & 2a \quad \Rightarrow \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} & = & 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \\
(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 & = & (2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 \quad \Rightarrow \\
(x+c)^2+y^2 & = & 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 \quad \Rightarrow \\
x^2+2xc+c^2+y^2 & = & 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \quad \Rightarrow \\
4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc & \Rightarrow & a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc \quad \Rightarrow \\
(a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 = (a^2-xc)^2 & \Rightarrow & a^2((x-c)^2+y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \quad \Rightarrow \\
a^2(x^2-2xc+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 & \Rightarrow & a^2x^2 - a^2 2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\
a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 & \Rightarrow & a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \\
x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) & \Rightarrow & x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (\text{pois} \quad a^2 = b^2 + c^2)
\end{array}$$

Dividindo ambos os membros da última equação por a^2b^2 (a e b são não-nulos) temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.1)$$

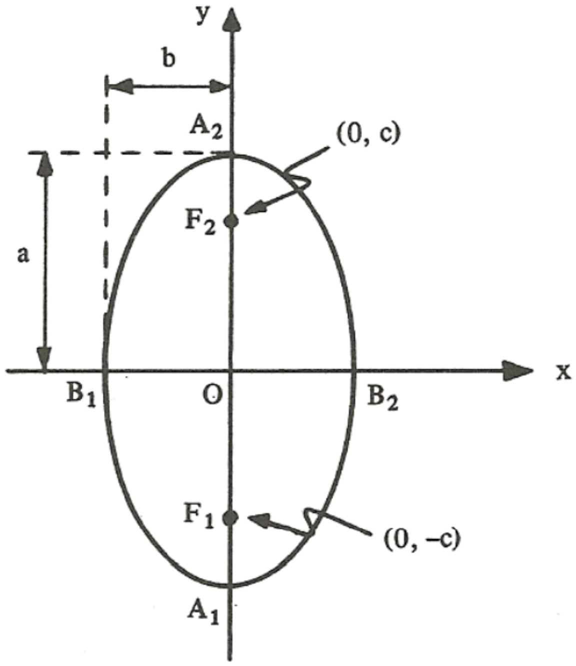
que é a ***equação da elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo x***.

2º Caso: *O eixo maior está sobre o eixo dos y.*

Analogamente, se tomarmos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$, obtemos a equação

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (5.2)$$

que é a ***equação da elipse com centro na origem e eixo maior sobre o eixo y***.

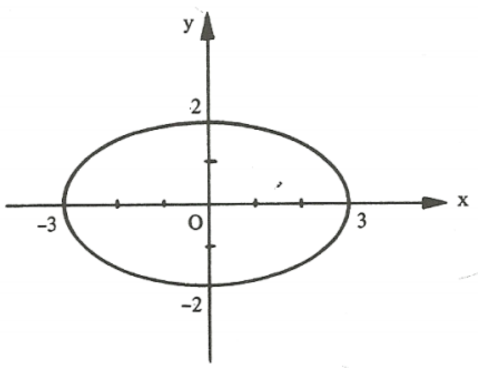


Observação 5.2.7. 1. *Sempre o maior dos denominadores na equação reduzida representa o número a^2, onde a é a medida do semi-eixo maior.*

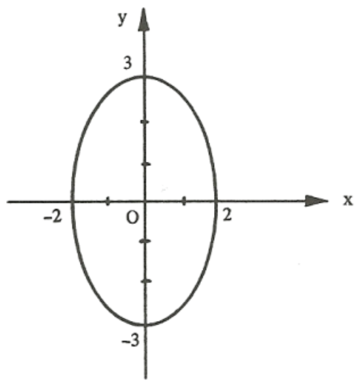
2. *Se na equação da elipse o número a^2 é denominado de x^2, a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo dos x.*

Exemplo 5.2.3. *Determine a equação da elipse dada na figura:*

(a)



(b)



Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 5.2.4. *Dado a elipse* $9x^2 + 25y^2 = 225$ *determine a medida dos semi-eixos, um esboço do gráfico, os focos e a excentricidade.*

Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 5.2.5. *Uma elipse de centro na origem tem um foco no ponto* $(3, 0)$ *e a medida do eixo maior é* 8*. Determine sua equação.*

Solução: *Link da Solução.*

Exercício 5.2.1. *Determine os elementos de cada uma das elipses a seguir:*

a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

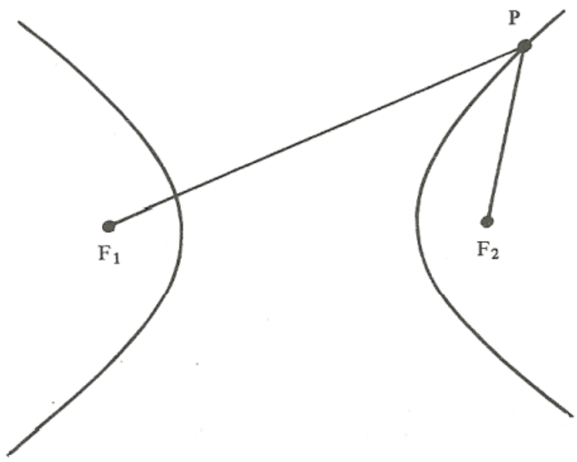
b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $9x^2 + 25y^2 = 225$

d) $4x^2 + y^2 = 16$

5.2.3 Hipérbole

Definição 5. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano é constante.*



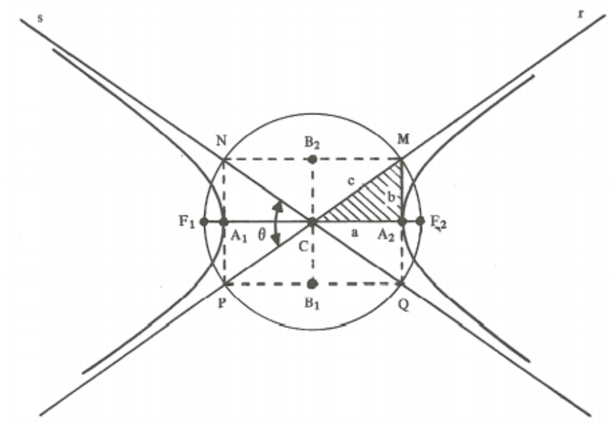
Em outras palavras, consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a < 2c$. Ao conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano tais que:

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$$

dá-se o nome de **hipérbole**.

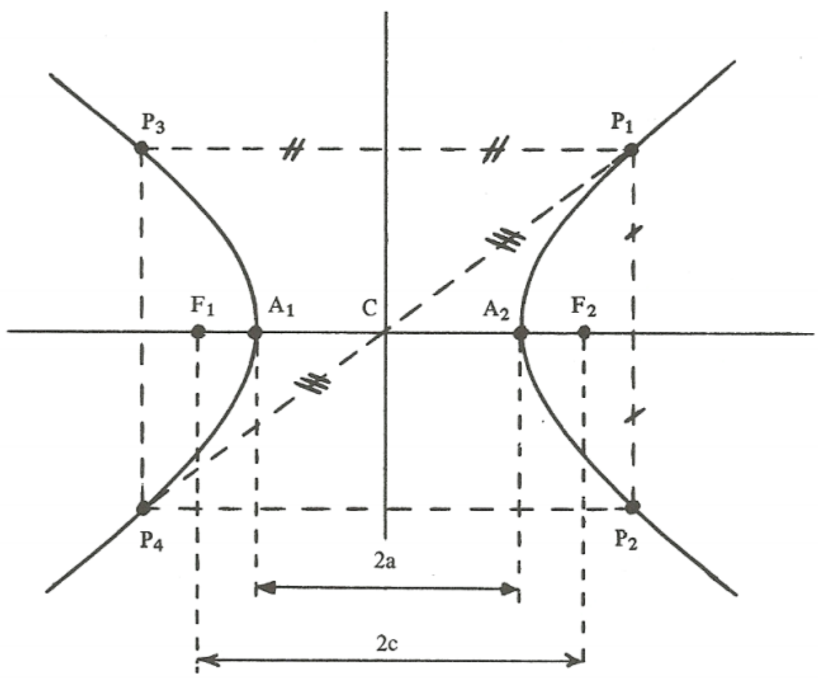
Observação 5.2.8. *A hipérbole é uma curva com dois ramos. Quando P estiver no ramo da direita, a diferença é $+2a$, caso contrário, será $-2a$.*

Consideremos a reta que passa por F_1 e F_2 e sejam A_1 e A_2 os pontos de intersecção da hipérbole com esta reta. Consideremos outra reta perpendicular a esta passando pelo ponto médio C do segmento F_1F_2.

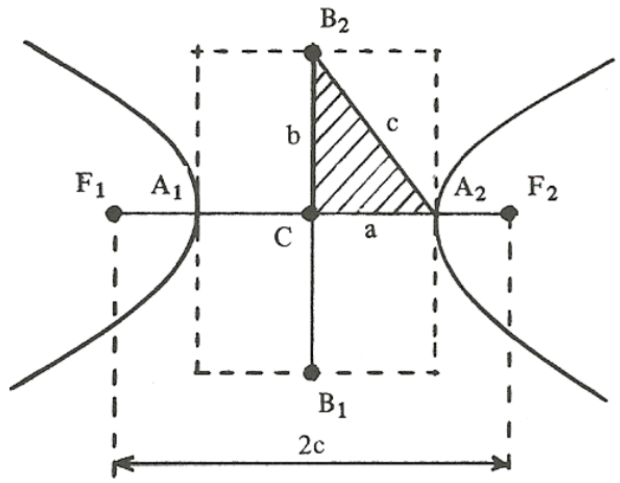


Observação 5.2.9. *A hipérbole é uma curva simétrica em relação a estas duas retas, como também em relação ao ponto C.*

Elementos da Hipérbole



- ***Focos*** são os pontos F_1 e F_2;
- ***Distância focal*** é a distância $2c$ entre os focos;
- ***Centro*** é o ponto médio C do segmento F_1F_2;
- ***Vértices*** são os pontos A_1 e A_2;
- ***Eixo real*** é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;
- ***Eixo imaginário*** é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$;
- ***Excentricidade*** é o número e dado por $e = \dfrac{c}{a}$. Como $c > a$, temos $e > 1$.
- ***Assíntotas*** são as retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$;
- ***Abertura da Hipérbole*** é o ângulo θ.

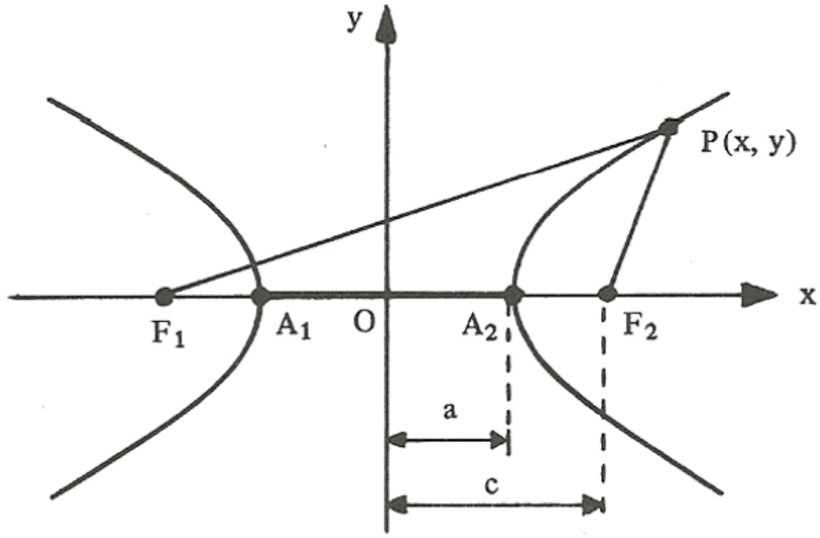


Observação 5.2.10. *O valor b é definido por $c^2 = a^2 + b^2$.*

Equação da Hipérbole de Centro na Origem do Sistema

1° caso: *O eixo real está sobre o eixo dos x*

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.



A partir da definição de hipérbole obtemos

$$\begin{aligned}
|d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= 2a \quad \Rightarrow \\
|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| &= 2a \quad \Rightarrow \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a \quad \Rightarrow \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Com procedimento análogo ao que foi usado na dedução da equação da elipse e usando a relação $c^2 = a^2 + b^2$ obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.3}$$

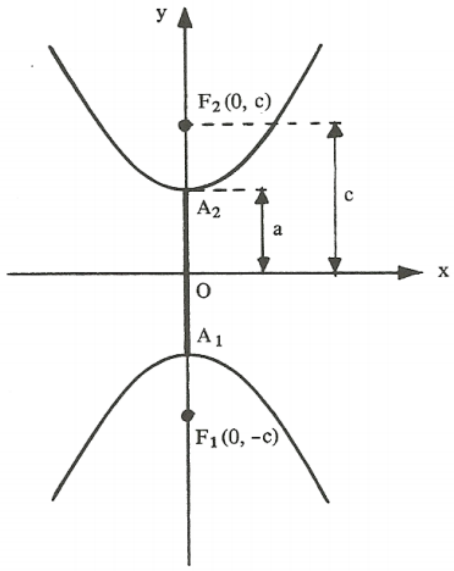
que é a ***equação da hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo x.***

2° caso: *O eixo real está sobre o eixo dos y*

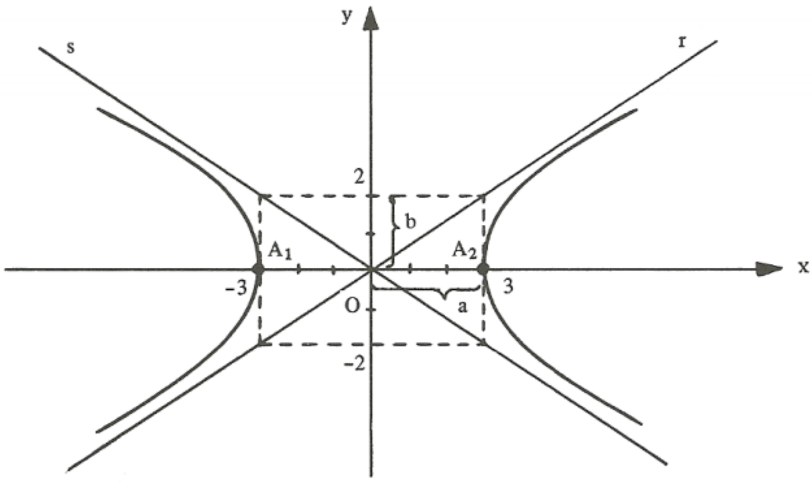
Analogamente, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole de focos $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$, obtemos

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{5.4}$$

que é a ***equação da hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo y.***



Exemplo 5.2.6. *Determine a equação da hipérbole dada na figura:*



Solução: *Link da Solução.*

Exemplo 5.2.7. *Esboce a hipérbole dada pela equação* $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ *e determine:*

a) a medida dos semi-eixos;

b) os vértices;

c) os focos;

d) a excentricidade;

e) as equações das assíntotas.

Solução: *Link da Solução.*

Exercício 5.2.2. *Esboce as hipérboles a seguir e determine:*

a) a medida dos semi-eixos;

b) os vértices;

c) os focos;

d) a excentricidade;

e) as equações das assíntotas.

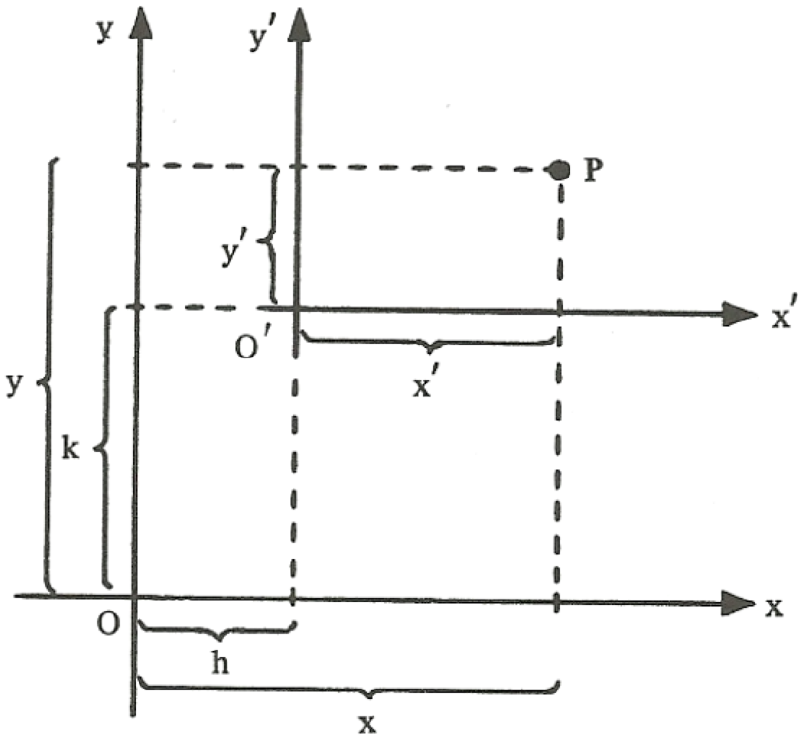
I) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ *II)* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ *III)* $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

5.3 Cônicas fora da Origem do Sistema Cartesiano

Nesta seção, apresentamos as cônicas (parábola, elipse e hipérbole) fora da origem do sistema cartesiano. Mais especificamente, estudaremos a parábola de vértice fora da oriegem do sistema, a elipse de centro fora da origem do sistema e a hipérbole de centro fora da origem do sistema. Para tanto, iniciaremos detalhando a translação de eixos.

5.3.1 Translação de Eixos

Consideremos no plano cartesiano xOy um ponto $O'(h, k)$, arbitrário. Introduziremos um novo sistema $x'O'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy. Nestas condições, um sistema pode ser obtido do outro, através de uma translação de eixos.



Seja um ponto P qualquer do plano tal que suas coordenadas são:

x e y em relação ao sistema xOy;

x' e y' em relação ao sistema $x'O'y'$.

Assim, as relações entre as coordenadas do ponto P podem ser escrita pelo seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad \text{e/ou} \quad \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

ou seja, são fórmulas de translação e que permitem transformar coordenadas de um sistema para outro.

Por fim, vale destacar que mediante uma adequada translação de eixos, a equação em x e y transforma-se numa equação em x' e y' bem mais simples, ambas com o mesmo gráfico.

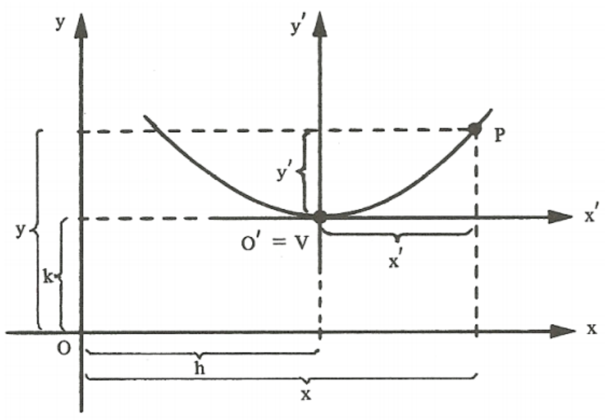
Exemplo 5.3.1. *Considere $x'^2 = 4y'$ no sistema $x'O'y'$, onde $O' = (3,2)$. Determine a equação no sistema xOy.*

Solução: *Link da Solução.*

5.3.2 Parábola de Centro fora da Origem

Nesta subseção, estudamos a equação da parábola de vértice fora da origem do sistema.

1° caso: *O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y*

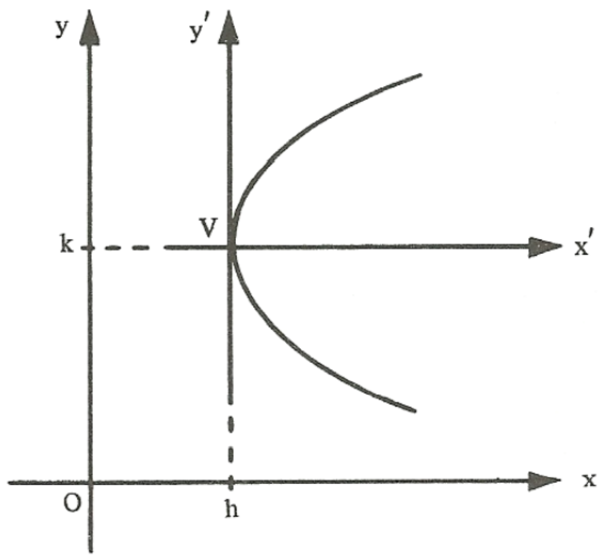


$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

é a forma padrão da equação de uma parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y.

Observação 5.3.1. *No sistema $x'O'y'$: $x'^2 = 2py'$.*

2° caso: *O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x*



$$(y-k)^2 = 2p(x-h)$$

é a forma padrão da equação de uma parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelo ao eixo dos x.

Exemplo 5.3.2. *Determinar a equação da parábola de vértice $V(3,-1)$ sabendo que $y=1$ é a equação de sua diretriz.*

Solução: *A partir do $V(3,-1)$ obtemos $h=3$ e $k=-1$. Além disso, foi dado $y=1$, ou seja, a reta diretriz.*

Note que a distância entre o vértice da parábola e a reta diretriz é 2. E ainda, ao visualizar geometricamente o vértice e a reta diretriz (veja a Figura 5.1), segue que a parábola tem concavidade para baixo, ou seja, $p<0$.

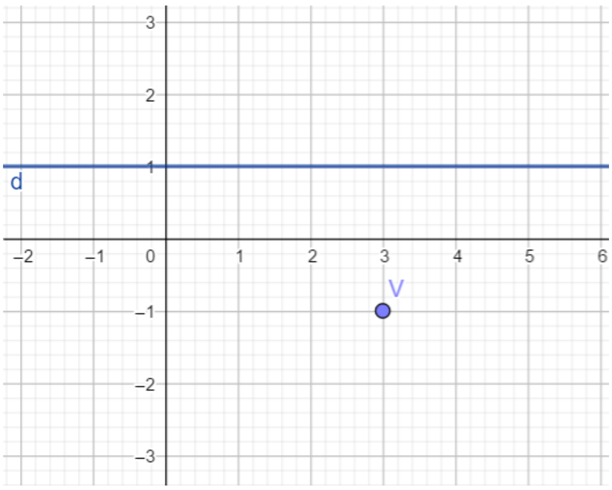


Figura 5.1: Vértice e reta diretriz do Exemplo 5.3.2

E mais, $|p/2| = 2 \quad \Rightarrow \quad |p| = 4$. Assim, como $|p| = 4$ e $p<0$, obtemos $p=-4$. Consequentemente, a equação da parábola dada é

$$(x-3)^2 = -8(y+1).$$

Por fim, na Figura 5.2 é apresentado o esboço da parábola dada.

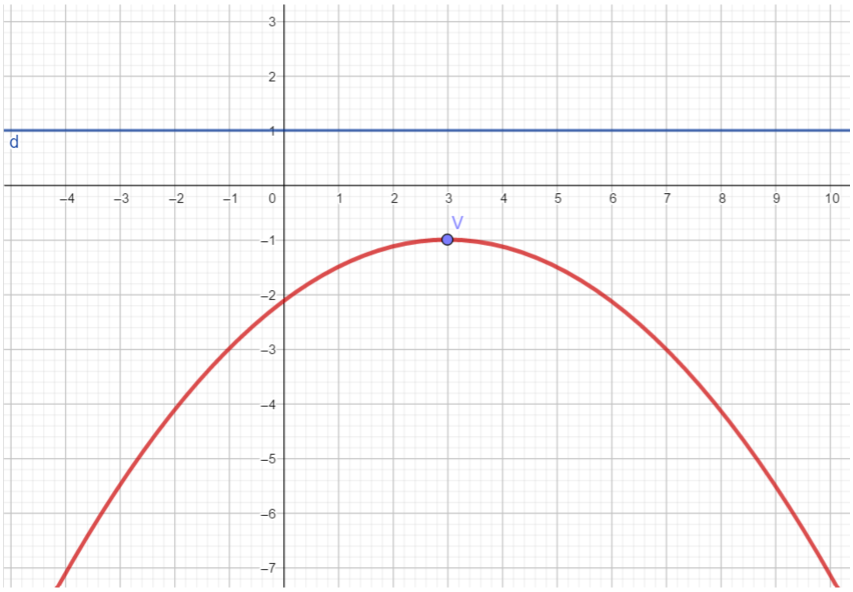


Figura 5.2: Parábola do Exemplo 5.3.2

Exemplo 5.3.3. *Determinar a equação da reta diretriz, o vértice e o foco da parábola* $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$ *e esboce a parábola.*

Solução: *Recorde que* $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \;\Rightarrow\; x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$.

Assim, podemos reescrever $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$. *E então, substituindo na equação da parábola dada obtemos:*

$$y^2 + 6y - 8x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (y+3)^2 - 9 - 8x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (y+3)^2 = 8(x+1)$$

Portanto, a partir da equação da parábola obtida acima, podemos afirmar que a parábola tem vértice fora da origem. Mais especificamente, $h = -1$ *e* $k = -3$*, ou seja, o vértice da parábola é dado pelo ponto* $V = (-1, -3)$.

E mais, a partir da equação da parábola obtida acima, podemos afirmar que $2p = 8$*, ou seja,* $p = 4 > 0$ *significa que a parábola tem concavidade para a direita.*

Assim, diante de tais informações e da sua visualização geométrica (veja a Figura 5.3), obtemos que $x = -3$ *é a reta diretriz e* $F(1, -3)$ *é o foco da parábola.*

Por fim, na Figura 5.4 é apresentado o esboço da parábola dada.

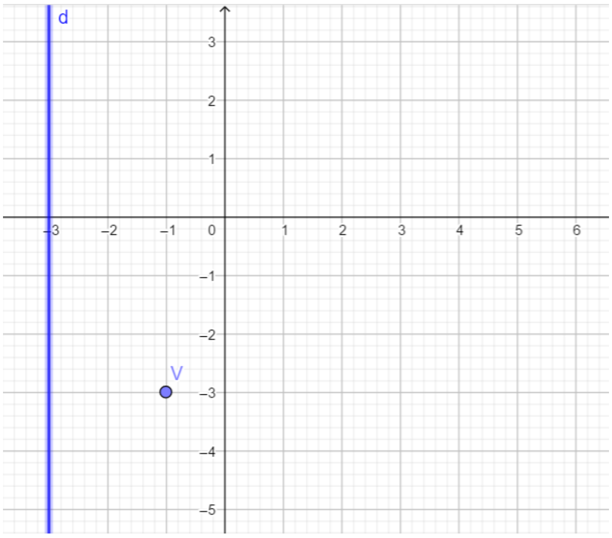


Figura 5.3: Vértice e reta diretriz do Exemplo 5.3.3

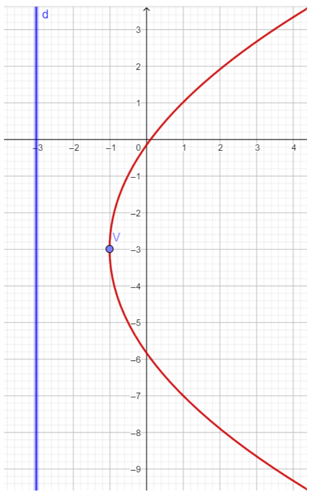


Figura 5.4: Parábola do Exemplo 5.3.3

Equação da Parábola na forma Explícita

Sabemos que a equação de uma parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y tem a forma padrão:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k).$$

A equação acima pode ser apresentada na forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

chamada forma explícita da equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo Oy.

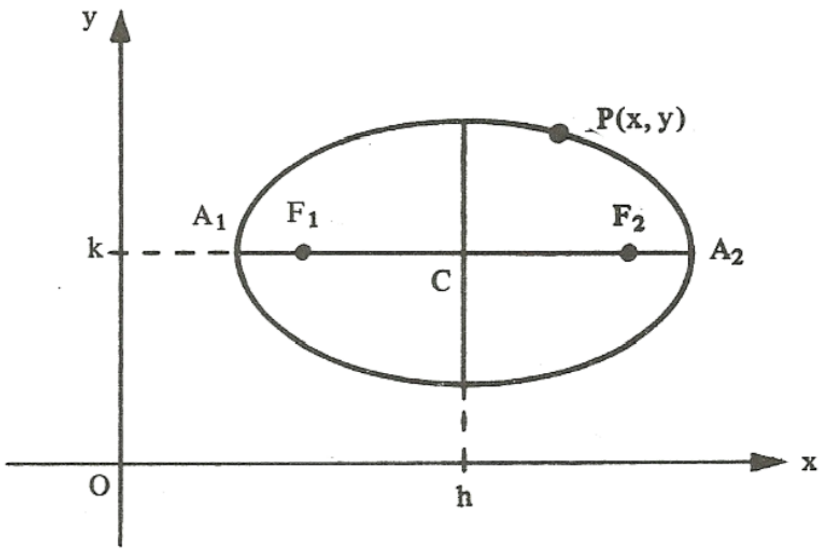
Exercício 5.3.1. *Dê a forma explícita da parábola* $(x-2)^2 = \frac{1}{4}(y+1)$.

5.3.3 Elipse de Centro Fora da Origem

Nesta subseção, estudamos a equação da elipse de centro fora da origem do sistema.

1º Caso: *O eixo maior é paralelo ao eixo dos* x.

Consideremos uma elipse de centro $C(h,k)$ e seja $P(x,y)$ um ponto qualquer da mesma.

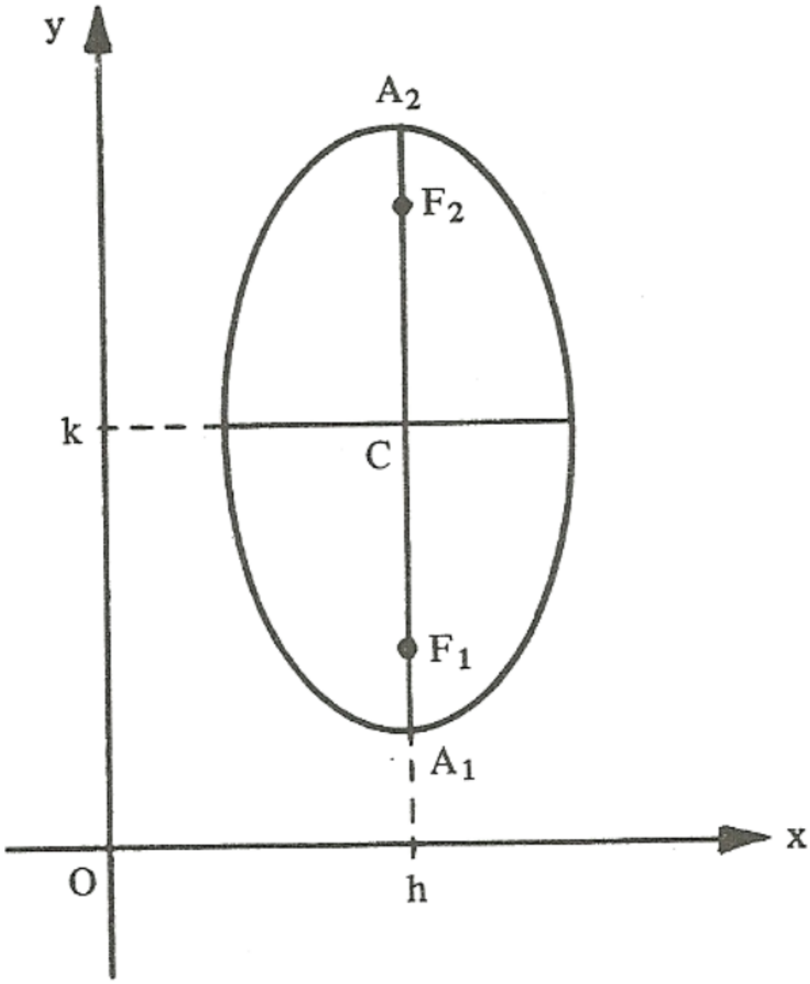


$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

que é a ***equação da elipse com centro*** $C(h,k)$ ***e eixo maior paralelo ao eixo dos*** x.

Observação 5.3.2. *Note que os focos são dados pelos pontos* $F_1(h-c,k)$ *e* $F_2(h+c,k)$.

2º Caso: *O eixo maior é paralelo ao eixo dos* y.



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$$

é a ***equação da elipse com centro*** $C(h,k)$ ***e eixo maior paralelo ao eixo dos*** y.

Observação 5.3.3. *Note que os focos são dados pelos pontos* $F_1(h, k-c)$ *e* $F_2(h, k+c)$.

Exemplo 5.3.4. *Determinar a equação da elipse, cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos y, tem centro C(4, -2), excentricidade* $e = \dfrac{1}{2}$ *e eixo menor de medida 6.*

Solução: Como a elipse procurada tem o eixo maior é paralelo ao eixo dos y, segue que a sua equação geral é da forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

E mais, do fato que o centro da elipse é dado por $C(4,-2)$, *obtemos que* $h = 4$ *e* $k = -2$.

Note ainda que, o eixo menor tem medida 6, ou seja, $2b = 6 \leftrightarrow b = 3$. *Em outras palavras, o semi-eixo menor mede 3.*

Diante de tais dados, podemos reescrever a equação geral da elipse da seguinte forma

$$\frac{(x-4)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{a^2} = 1.$$

Assim, para determinarmos completamente a equação da elipse dada, falta calcularmos a medida do semi-eixo maior, ou seja, o valor a.

Para tanto, foi dado que a excentricidade é igual a $1/2$, *e sabemos que* $e = \dfrac{c}{a}$. *Logo, obtemos* $a = 2c$.

Recorde ainda que para elipse vale a seguinte relação $a^2 = b^2 + c^2$. *Então, substituindo* $b = 3$ *e* $a = 2c$ *nesta relação, obtemos* $c = \sqrt{3}$. *Consequentemente, temos* $a = 2\sqrt{3}$, *e* $a^2 = 12$.

Portanto, a equação da elipse é

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1.$$

A Figura 5.5 apresenta um esboço da elipse dada.

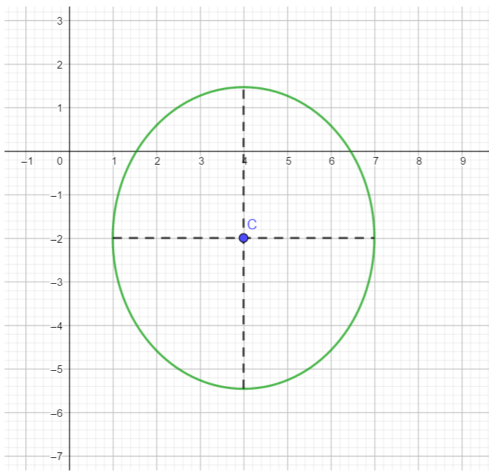


Figura 5.5: Elipse do Exemplo 5.3.4

Exercício 5.3.2. *Determinar o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação* $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$.

Dica: *A equação da elipse* $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ *pode ser reescrita na sua forma padrão, a saber,*

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

Observação 5.3.4. *Na equação da elipse, sendo* $a = b$ *temos:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

ou ainda,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2,$$

que é a equação da circunferência de centro (h, k) *e raio* $r = a$.

Exercício 5.3.3. *Determinar o centro e o raio das circunferências:*

a) $x^2 + y^2 = 9$

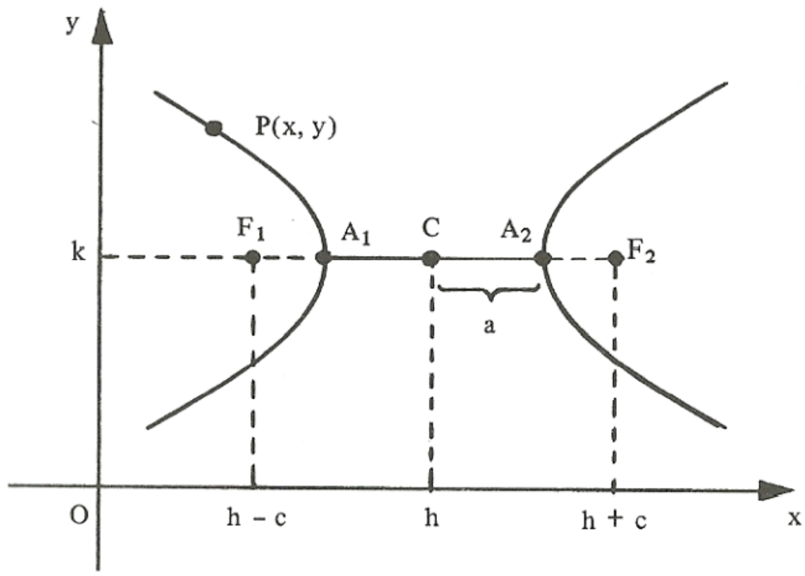
b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

5.3.4 Hipérbole de Centro Fora da Origem

Nesta subseção, estudamos a equação da hipérbole de centro fora da origem do sistema.

$\mathbf{1^0}$ **caso:** *O eixo real é paralelo ao eixo dos* x.

Consideremos uma hipérbole de centro $C(h, k)$ e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer dessa hipérbole.



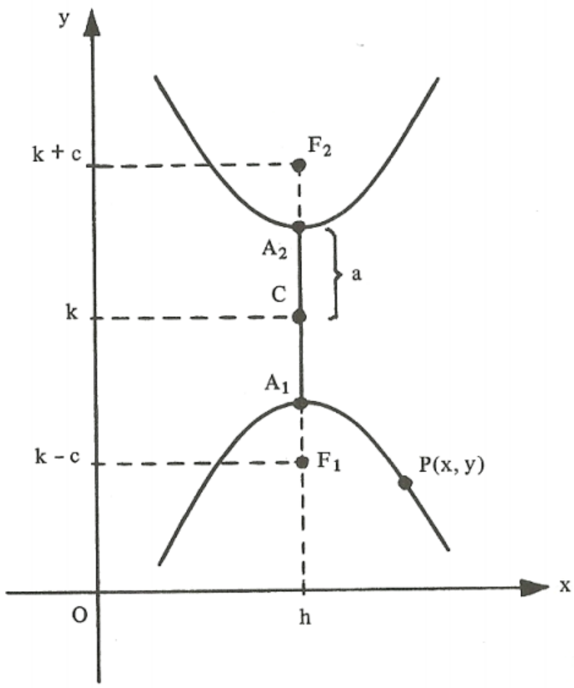
Analogamente ao estudo da elipse, temos que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é a equação de uma hipérbole com centro $C(0,0)$ e eixo real sobre o eixo dos x; quando o eixo real for paralelo ao eixo dos x e o centro é $C(h,k)$, sua equação passa a ser:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

2^0 caso: *O eixo real é paralelo ao eixo dos y*



Neste caso, a equação é:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Exemplo 5.3.5. *Esboce o gráfico da hipérbole* $\dfrac{(y-1)^2}{9} - \dfrac{(x-3)^2}{4} = 1$ *e determine:*

a) o centro;

b) os vértices;

c) os focos;

d) a excentricidade.

Solução: A partir da equação da hipérbole dada, $\dfrac{(y-1)^2}{9} - \dfrac{(x-3)^2}{4} = 1$*, podemos afirmar a hipérbole tem centro fora da origem e eixo real paralelo ao eixo* y*, bem como temos que* $h = 3$ *e* $k = 1$*, ou seja, o centro da hipérbole é dada pelo ponto* $C(3, 1)$*.*

E mais, a medida do semi-eixo real é $a = 3$ *e do semi-eixo imaginário* $b = 2$*.*

Diante de tais informações, temos que os vértices são os pontos $A_1 = (3, -2)$ *e* $A_2 = (3, 4)$*.*

Recorde ainda que para hipérbole vale a seguinte relação $c^2 = a^2 + b^2$*. Então, substituindo* $a^2 = 9$ *e* $b^2 = 4$ *nesta relação, obtemos* $c = \sqrt{13}$*. Consequentemente, temos que os focos são dados pelos pontos* $F_1 = (3, 1 - \sqrt{13})$ *e* $F_2 = (3, 3, 1 + \sqrt{13})$*.*

Além disso, munido do valor $c = \sqrt{13}$ e $a = 3$ temos que a excentricidade é igual a $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Por fim, a Figura 5.6 apresenta um esboço da hipérbole dada.

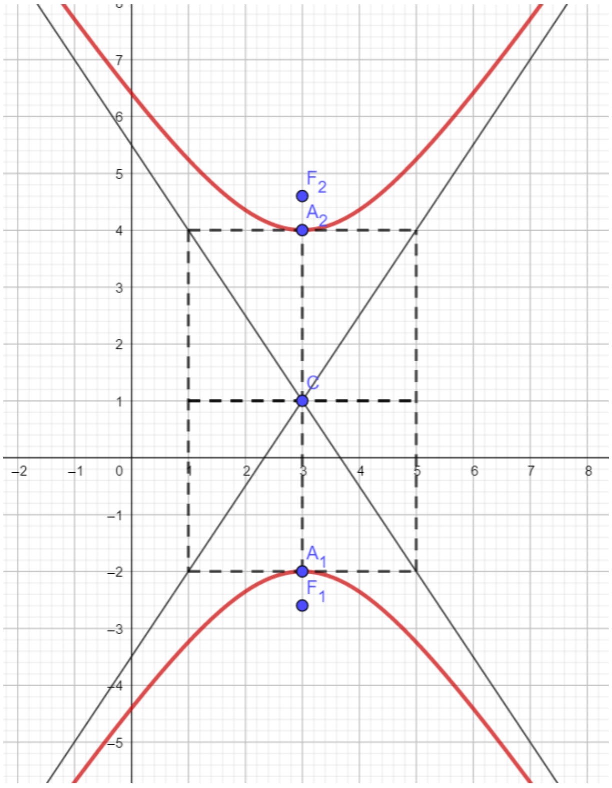


Figura 5.6: Hipérbole do Exemplo 5.3.5

5.4 Exercícios sobre Cônicas e Quádricas - Parte 1

Exercício 5.4.1. *Estabeleça a equação de cada uma das parábolas, sabendo que:*

(a) $V(0,0)$ *e* $d : y = -2$ *(b)* $V(0,0)$ *e* $F(-3,0)$

(c) $V(0,0)$*, simetria em relação ao eixo dos y e passando pelo ponto* $P(2,-3)$*;*

(d) $V(-2,3)$ *e* $F(-2,1)$ *(e)* $V(4,1)$ *e* $d : x + 4 = 0$

(f) $F(6,4)$ *e* $d : y = -2$ *(g)* $F(3,-1)$ *e* $d : x = \frac{1}{2}$.

Exercício 5.4.2. *Dado a equação da parábola abaixo, determine o vértice, o foco, uma equação para a diretriz e uma equação para o eixo. Esboce o gráfico.*

(a) $x^2 = -12y$ *(b)* $y^2 = -100x$ *(c)* $x^2 = 10y$

(d) $x^2 + 4x + 8y + 12 = 0$ *(e)* $y^2 + 4y + 16x - 44 = 0$ *(f)* $y = x^2 - 4x + 2$

(g) $x^2 = 12(y - 6)$ *(h)* $y = 4x - x^2$

Exercício 5.4.3. *Escreva as equações das seguintes parábolas:*

(a) $F(0, 2)$ *e* $d : y = -2$ *(b)* $F(0, 2)$ *e* $d : y = -4$

(c) $F(0, -3)$ *e* $d : y = 3$ *(d)* $F(0, 0)$ *e* $d : x + y = 2$

Exercício 5.4.4. *Determine os vértices* A_1 *e* A_2*, os focos e a excentricidade das elipses dadas abaixo. Esboce o gráfico.*

(a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ *(b)* $x^2 + 25y^2 = 25$ *(c)* $4x^2 + 25y^2 = 1$

Exercício 5.4.5. *Determine a equação da elipse que satisfaz as condições dadas:*

(a) eixo maior mede 10 e focos $(\pm 4, 0)$*;*

(b) centro $C(0, 0)$*, um foco* $F(\frac{3}{4}, 0)$ *e um vértice* $A(1, 0)$*;*

(c) centro $C(0, 0)$*, eixo menor mede 6, focos no eixo* x *e passa pelo ponto* $P(-2\sqrt{5}, 2)$*;*

(d) centro $C(2, 4)$*, um foco* $F(5, 4)$ *e a excentricidade* $\frac{3}{4}$*;*

(e) eixo maior mede 10 e focos $F_1(2, -1)$ *e* $F_2(2, 5)$*.*

Exercício 5.4.6. *Determine o centro, os vértices* A_1 *e* A_2*, os focos e a excentricidade das elipses dadas abaixo. Esboce o gráfico.*

(a) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$*;*

(b) $16x^2 + y^2 + 64x - 4y + 52 = 0$*;*

(c) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$*.*

Exercício 5.4.7. *Escreva a equação das seguintes elipses:*

(a) os focos são $F_1(-1, 2)$*,* $F_2(3, 2)$ *e a soma dos raios focais é 6;*

(b) os focos são $F_1(-1, 1)$*,* $F_2(1, 1)$ *e a soma dos raios focais é 2.*

Exercício 5.4.8. *Escreva a equação das seguintes hipérboles:*

(a) os focos são $F_1(3,-1)$, $F_2(3,4)$ *e a diferença dos raios focais é 3;*

(b) os focos são $F_1(-1,1)$, $F_2(1,1)$ *e a soma dos raios focais é 2.*

Exercício 5.4.9. *Determine os vértices, os focos e a excentricidade das hipérboles dadas abaixo. Esboce o gráfico.*

(a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$ *(b)* $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{64} = 1$ *(c)* $x^2 - 2y^2 - 8 = 0$

(d) $x^2 - y^2 = 1$ *(e)* $2y^2 - 4x^2 = 1$

Exercício 5.4.10. *Determine a equação da hipérbole que satisfaz as condições dadas:*

(a) focos $F(\pm 5, 0)$, *vértices* $A(\pm 3, 0)$;

(b) focos $F(0, \pm 3)$, *vértices* $A(0, \pm 2)$;

(c) vértices $A(\pm 4, 0)$, *passando por* $P(8, 2)$;

(d) vértices $A(\pm 3, 0)$, *equações das assíntotas* $y = \pm 2x$;

(e) vértices em $(5, -2)$ *e* $(3, -2)$, *um foco em* $(7, -2)$;

(f) vértices em $(5, 5)$ *e* $(5, -1)$, *excentricidade* $e = 2$.

Exercício 5.4.11. *Determine o centro, os vértices, os focos e a excentricidade das hipérboles dadas abaixo. Esboce o gráfico.*

(a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$ *(b)* $4x^2 - y^2 - 32x + 4y + 24 = 0$

(c) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$ *(d)* $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 36 = 0$

(e) $y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$ *(f)* $x^2 + 2x + 8y - 15 = 0$

(g) $-25x^2 + 9y^2 - 90y - 50x = 25$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea*. Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BIANCHINI, Waldecir. *Planos*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/VXMuWTtE

[3] BOBKO, Nara. *Seções Cônicas*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/g3y7bq68

[4] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. Editora Blucher, 2012.

[5] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[6] CASSOL, Henrique L. G. *Equações Paramétricas da reta*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/RqkquH6P

[7] LEMKE, Raiane. *Retas no* $\mathbb{R}^3$*: Parametrização e gráfico de retas no* $\mathbb{R}^3$. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4

[8] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[9] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[10] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[11] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio*. volume único. São Paulo: Editora Ática.

[12] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[13] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.