UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profa. Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Capítulo 1

Matrizes - Parte 1

1.1 Introdução

As informações numéricas são, muitas vezes, organizadas em tabelas denominadas matrizes.

As matrizes são tabelas de números reais utilizadas em vários ramos da Ciência e da Engenharia, por exemplo, para resolver sistemas de equações lineares, e para armazenamento e manipulação das informações tabeladas, e também como ferramentas na transmissão de imagens e sons digitalizados pela internet. Várias operações executadas por cérebros eletrônicos são computações por matrizes.

Exemplo 1.1.1. *Considere a tabela a seguir, que indica as notas* $(0-10)$ *dos Alunos A1, A2 e A3 em uma determinada disciplina do curso de Engenharia:*

Aluno	*Prova 1*	*Atividade*
Aluno A1	*9,0*	*7,0*
Aluno A2	*3,0*	*5,0*
Aluno A3	*6,5*	*8,4*

No quadro indicado os números colocados nas disposições horizontais formam o que denominamos ***linha*** *e os colocados nas disposições verticais formam o que denominamos* ***coluna.***

*Para sabermos a nota de atividade do Aluno A_3 basta procuramos o número que está na **terceira linha** e na **segunda coluna**.*

Se nós suprimirmos os títulos, ficaremos com a seguinte coleção retangular de números com três linhas e duas colunas, denominada matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 9,0 & 7,0 \\ 3,0 & 5,0 \\ 6,5 & 8,4 \end{bmatrix}$$

Generalizando, apresentamos a seguinte definição.

1.2 Definição e seus elementos

Definição 1. *Uma matriz de ordem m por n é um quadro de $m \times n$ elementos (números, polinômios, funções etc.) dispostos em m linhas e n colunas:*

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

em que os números a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq i \leq n$, em nosso estudo, são números reais. O número a_{ij} chama-se o elemento de ordem ij de A.

Notação: De forma mais compacta, a matriz acima pode ser escrita como

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \text{ ou } A = [a_{ij}]$$

(Usamos letras maiúsculas para denotar matrizes e letras minúsculas para denotar quantidades numéricas.)

Observação 1.2.1. *Indicaremos o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$, com elementos em $\mathbb{R}$, por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.*

Observação 1.2.2. *1. A* i-ésima linha *de A é a* n-*upla*

$$A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$$

2. A j-ésima coluna *de A é a* m-*upla*

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.2.1. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *é de ordem* 2×2.

Exemplo 1.2.2. *A matriz* $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ *é de ordem* 3×3.

Exemplo 1.2.3. *A matriz* $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *é de ordem* 2×1.

Exemplo 1.2.4. *A matriz* $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$ *é de ordem* 1×2.

Exemplo 1.2.5. *O quadro* $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ *é uma matriz real de ordem* 2×3, *onde:* $a_{11} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 1\ a_{21} = 3,\ a_{22} = -2,\ a_{23} = 5$.

Exemplo 1.2.6. $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ *é uma matriz real de ordem* 1×4.

Exemplo 1.2.7. $G = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$ *é uma matriz real de ordem* 1×1.

Questão: Sempre podemos comparar duas matrizes? Justifique.

Definição 2. *Duas matrizes* $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B_{r\times s} = [b_{ij}]_{r\times s}$ *são iguais se elas têm o mesmo número de linhas* $(m = r)$, *o mesmo número de colunas* $(n = s)$, *e se todos os seus elementos correspondentes são iguais* $(a_{ij} = b_{ij})$.

Notação: $A = B$.

Exemplo 1.2.8. *Verdadeiro (V) ou Falso (F). Justifique.*

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;
2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ y & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;
3. $\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log(1) \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \sin(90°) & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Solução:

1.3 Operações Usuais com Matrizes

Apresentamos a seguir uma aritmética de matrizes na qual as matrizes podem ser somadas, subtraídas e multiplicadas.

1.3.1 Adição de Matrizes

Considere a tabela das notas dos alunos A1, A2 e A3:

Aluno	Prova 1	Atividade
Aluno A1	9,0	7,0
Aluno A2	3,0	5,0
Aluno A3	6,5	8,4

.

Supondo que foram aplicadas outras duas avaliações e os resultados obtidos estão descritos nas tabelas

Aluno	Prova 2	Atividade
Aluno A1	9,5	3,0
Aluno A2	7,3	5,5
Aluno A3	8,5	4,4

Aluno	Prova 3	Atividade
Aluno A1	6,0	4,0
Aluno A2	7,0	6,0
Aluno A3	5,5	9,4

para as quais extraindo somente os números, obtemos:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 9,0 & 7,0 \\ 3,0 & 5,0 \\ 6,5 & 8,4 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 9,5 & 3,0 \\ 7,3 & 5,5 \\ 8,5 & 4,4 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 6,0 & 4,0 \\ 7,0 & 6,0 \\ 5,5 & 9,4 \end{bmatrix}.$$

Somando as entradas correspondentes (de mesma posição matricial) de P_1, P_2 e P_3, temos:

$$S = P_1 + P_2 + P_3 = \begin{bmatrix} 9,0+9,5+6,0 & 7,0+3,0+4,0 \\ 3,0+7,3+7,0 & 5,0+5,5+6,0 \\ 6,5+8,5+5,5 & 8,4+4,4+9,4 \end{bmatrix}$$

logo,

$$S = \begin{bmatrix} 24,5 & 14,0 \\ 17,3 & 16,5 \\ 20,5 & 22,2 \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa o total de pontos obtidos por cada aluno em provas e atividades na disciplina.

Generalizando, temos:

Definição 3. *A soma de duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, de ordem $m \times n$, é uma matriz $C = [c_{ij}]$, de ordem $m \times n$, tal que*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação: $A + B = C$ ou $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$.

Exemplo 1.3.1. *Dadas as matrizes A e B abaixo, calcule $A + B$.*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Solução:

1.3.2 Subtração de Matrizes

Suponhamos que o professor citado nos exemplos anteriores, queira comparar os primeiros e segundos resultados obtidos pelos alunos nas provas 1 e 2 e nas respectivas atividades.

Para saber se houve aumento e/ou diminuição de nota, podemos calcular a diferença $D = P_2 - P_1$, ou seja, $d_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$, entre as respectivas notas de provas e atividades.

Se $d_{ij} > 0$ então, houve um aumento de nota da prova 1 para a prova 2;

Se $d_{ij} < 0$ então, houve uma diminuição de nota da prova 1 para a prova 2;

Se $d_{ij} = 0$ então, a nota se manteve.

Fazendo o cálculo da diferença entre as respectivas notas de provas e atividades, temos:

$$P_2 - P_1 = \begin{bmatrix} 9,5 & 3,0 \\ 7,3 & 5,5 \\ 8,5 & 4,4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9,0 & 7,0 \\ 3,0 & 5,0 \\ 6,5 & 8,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -4,0 \\ 4,3 & 0,5 \\ 2,0 & -4,0 \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz diferença $P_2 - P_1$ podemos concluir que todos alunos aumentaram suas notas de provas e dois alunos teve diminuição da nota de atividade.

Por outro lado, podemos calcular $D_1 = P_3 - P_2$, ou seja, o cálculo da diferença das notas da terceira prova e atividade com as notas referente a segunda prova e atividade, respectivamente. Disso, temos:

$$P_3 - P_2 = \begin{bmatrix} 6,0 & 4,0 \\ 7,0 & 6,0 \\ 5,5 & 9,4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9,5 & 3,0 \\ 7,3 & 5,5 \\ 8,5 & 4,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,5 & 1,0 \\ -0,3 & 0,5 \\ -3,0 & 5,0 \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz diferença $P_3 - P_2$ podemos concluir que todos alunos diminuíram suas notas de provas, mas todos obtiveram aumento da nota de atividade.

De modo geral, definimos:

Definição 4. *A diferença $A - B$ de duas matrizes de ordem $m \times n$ é uma matriz C tal que:*

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{12} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação: $A - B = C$ ou $a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$

Exemplo 1.3.2. *Considere as matrizes abaixo:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, *e calcule* $A - B$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$, *calcule* $B - A$.

Solução:

Propriedades: Sejam A, B, C matrizes de ordem $m \times n$.

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
2. $A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A$;
3. $-A + A = A - A = 0_{m\times n}$;
4. $A + B = B + A$.

1.3.3 Produto de uma Matriz por um Escalar

Seja S a matriz que representa o total de pontos dos alunos em uma determinada disciplina avaliada por meio de três provas e três atividades.

Para obter a média aritmética do total de pontos em provas e atividades calcula-se $\frac{1}{3}$ de cada nota disponibilizada nas colunas de S, ou seja,

$$M = \frac{1}{3} \cdot S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot 24,5 & \frac{1}{3} \cdot 14,0 \\ \frac{1}{3} \cdot 17,3 & \frac{1}{3} \cdot 16,5 \\ \frac{1}{3} \cdot 20,5 & \frac{1}{3} \cdot 22,2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$M = \begin{bmatrix} 8,2 & 4,7 \\ 5,8 & 5,5 \\ 6,8 & 7,4 \end{bmatrix}$$

representa a média aritmética do total de pontos em provas e avaliações.

Generalizando, definimos:

Definição 5. *Seja λ um escalar, o produto de uma matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem $m \times n$, por esse escalar é uma matriz $B = [b_{ij}]$, de ordem $m \times n$, tal que*

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Assim,

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Notação: $\lambda A = B$ ou $\lambda a_{ij} = b_{ij}$.

Exemplo 1.3.3. *Considere as matrizes:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ *e calcule* $5 \cdot A$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *calcule* $-2B$ *e* $3B$.

<u>*Solução:*</u>

Propriedades: Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e λ_1, λ_2 escalares reais.

1. $A + (-1)A = 0_{m\times n}$;

2. $\lambda_1(A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$;

3. $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$;

4. $(\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$;

5. $1A = A$.

Observação 1.3.1. *A matriz $(-1)A$, denotada por $-A$, é a chamada* ***matriz oposta*** *de A.*

Exemplo 1.3.4. *Determine a matriz oposta da matriz* $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução:

1.4 Tipos de Matrizes

A seguir apresentamos algumas matrizes que aparecem com uma certa frequência, devido a isto recebem nomes especiais.

1. **Matriz Retangular:** é a matriz na qual o número de linhas é diferente do número de colunas, ou seja, $m \neq n$.

   Exemplo 1.4.1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$.

2. **Matriz Linha:** é a matriz de ordem $1 \times n$.

   Exemplo 1.4.2. $A = [a_{11}\ a_{12}\ \cdots a_{1n}]$, $B = [1\ 2\ 3]$, $C = [1\ 0\ 3\ 3\ 1]$.

3. **Matriz coluna:** é a matriz de ordem $n \times 1$.

   Exemplo 1.4.3. $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$, $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{4\times 1}$.

4. **Matriz Quadrada:** é a matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas. Diz-se que a matriz tem ordem n (ou $n \times n$).

Exemplo 1.4.4. $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\qquad B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Observação 1.4.1. *Em uma matriz quadrada temos a diagonal principal e secundária.*

- *Numa matriz quadrada* $A = [a_{ij}]$, *de ordem* n, *os elementos* a_{ij}, *em que*

  $$i = j$$

  constituem a diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Numa matriz quadrada* $A = [a_{ij}]$, *de ordem* n, *os elementos* a_{ij}, *em que*

  $$i + j = n + 1$$

  constituem a diagonal secundária.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

5. **Matriz Diagonal:** é uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$, quando $i \neq j$.

Exemplo 1.4.5. $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6. **Matriz Identidade (ou Unidade):** é uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 1$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$, ou seja, os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os elementos fora da diagonal principal são 0. Denotamos por I_n, ou simplesmente, I.

Exemplo 1.4.6. $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. **Matriz Nula:** é a matriz que possui todos os elementos nulos. Denotamos a matriz nula por $0_{m\times n}$.

Exemplo 1.4.7. $0_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$, $\qquad 0_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\qquad 0_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8. **Matriz Triangular Superior:** é uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$, ou seja, é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplo 1.4.8. $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. **Matriz Triangular Inferior:** é uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$, quando $i < j$, ou seja, é uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

   Exemplo 1.4.9. $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

10. **Matriz Transposta:** A matriz transposta da matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ é a matriz $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$, que se obtém da matriz A permutando as linhas pelas colunas de mesmo índice.

    Exemplo 1.4.10. *A transposta da matriz* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ *é dada pela matriz* $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$.

    Propriedades: Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

    (a) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

    (b) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;

    (c) $(A^t)^t = A$.

    Exemplo 1.4.11. *Determine a transposta da matriz* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

    Solução:

11. **Matriz Anti-Simétrica:** é uma matriz quadrada tal que $A^t = -A$, ou seja, os elementos que estão dispostos simetricamente em relação à diagonal são opostos ($a_{ij} = -a_{ji}$) e os elementos da diagonal principal são nulos.

Exemplo 1.4.12. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ *é anti-simétrica pois*

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

12. **Matriz Simétrica:** é uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que satisfaz $A^t = A$, ou seja, os elementos que estão dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais ($a_{ij} = a_{ji}$).

Exemplo 1.4.13. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ *é simétrica.*

Solução: *Note que* $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} = A$. *Portanto, a matriz A é simétrica.*

Exemplo 1.4.14. *Determine se a matriz* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ *é simétrica.*

Solução:

1.5 Produto de uma Matriz por outra Matriz

Até aqui nós definimos a multiplicação de uma matriz por um escalar mas não a multiplicação de duas matrizes. Como na definição da adição (e subtração) somamos (e subtraímos) as entradas correspondentes, pareceria natural definir a multiplicação de matrizes multiplicando as entradas correspondentes. Contudo, ocorre que tal definição não seria muito útil na maioria dos problemas práticos e teóricos. A experiência levou os matemáticos à uma definição mais útil para a multiplicação de matrizes.

Ilustraremos a devida definição dando continuidade a situação exposta anteriormente:

Seja $M = \begin{bmatrix} 8,2 & 4,7 \\ 5,8 & 5,5 \\ 6,8 & 7,4 \end{bmatrix}$ a matriz que representa o total de pontos dos alunos em uma determinada disciplina avaliada por meio de provas e atividades.

Atribuindo peso $8,0$ para as provas e peso $2,0$ para as atividades podemos obter a nota final de cada aluno da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Nota Final} &= \frac{\text{Média das Provas} \cdot 8 + \text{Média das Atividades} \cdot 2}{8+2} \\ &= \text{Média das Provas} \cdot 0.8 + \text{Média das Atividades} \cdot 0.2 \end{aligned}$$

E mais, denotaremos os pesos na matriz $P = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix}$.

Assim, segue que:

$$\text{Nota Final } = M \cdot P = \begin{bmatrix} 8,2 & 4,7 \\ 5,8 & 5,5 \\ 6,8 & 7,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,2 \cdot 0,8 + 4,7 \cdot 0,2 \\ 5,8 \cdot 0,8 + 5,5 \cdot 0,2 \\ 6,8 \cdot 0,8 + 7,4 \cdot 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5 \\ 5,7 \\ 6,9 \end{bmatrix}$$

Este exemplo nos leva às seguintes observações:

- para tornar possível o produto $M \cdot P$ o número de colunas de M deve coincidir com o número de linhas de P;

- o produto da linha i de M pela coluna j de P resulta em um único valor.

Generalizando, definimos:

Definição 6. *Sejam as matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ e $B_{n\times p} = [b_{ij}]$, o produto da matriz A pela matriz B, denotado por AB, é uma matriz $C_{m\times p} = [c_{ij}]$ tal que*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Observação 1.5.1. *1. O elemento de ordem ij do produto AB é obtido multiplicando ordenadamente, os elementos da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima* *coluna de B e somando-se os produtos assim obtidos. Isto é,*

$$(ab)_{ij} = A_i B^j = (a_{i1} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

para $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq p$.

2. *O produto AB só está definido se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.*

Exemplo 1.5.1. (a) *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, *determine o produto AB.*

(b) *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, *determine o produto AB.*

(c) *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, *determine o produto AB.*

Solução:

Resolução do Exemplo

(a): Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, determine o produto AB.

Resolução:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (4 \cdot 6) + (3 \cdot 4) + (2 \cdot 5) + (5 \cdot 3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24 + 12 + 10 + 15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 61 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine o produto AB.

Resolução:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (4 \cdot 6) + (3 \cdot 4) + (2 \cdot 5) + (5 \cdot 3) & (4 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + (2 \cdot 7) + (5 \cdot 4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24 + 12 + 10 + 15 & 4 + 6 + 14 + 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 61 & 48 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, determine o produto AB.

Resolução:

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (4\cdot 5)+(2\cdot 2)+(6\cdot 1) & (4\cdot 2)+(2\cdot 3)+(6\cdot 2) & (4\cdot 4)+(2\cdot 1)+(6\cdot 7) \\ (2\cdot 5)+(5\cdot 2)+(3\cdot 1) & (2\cdot 2)+(5\cdot 3)+(3\cdot 2) & (2\cdot 4)+(5\cdot 1)+(3\cdot 7) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 20+4+6 & 8+6+12 & 16+2+42 \\ 10+10+3 & 4+15+6 & 8+5+21 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 30 & 26 & 60 \\ 23 & 25 & 34 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Observação 1.5.2. *Em geral a existência do produto AB não implica a existência do produto BA.*

Exemplo 1.5.2. *Note que $A_{3\times 5} \times B_{5\times 6} = C_{3\times 6}$ mas, $B_{5\times 6} \times A_{3\times 5}$ não existe.*

Observação 1.5.3. *Mesmo quando as multiplicações $A \times B$ e $B \times A$ são possíveis, os dois produtos são, em geral, diferentes.*

Exemplo 1.5.3.

1. $A_{4\times 3} \times B_{3\times 4} = C_{4\times 4}$ *e* $B_{3\times 4} \times A_{4\times 3} = C_{3\times 3}$

2. *Dado as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$, *calcule os produtos AB e BA.*

   Solução:

Propriedades: Dado as matrizes A, B e C obtemos, desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades:

1. $(AB)C = A(BC)$;

2. $(A+B)C = AC + BC$;

3. $C(A+B) = CA + CB$;

4. $AI = IA = A$;

5. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

6. Se $AB = 0_{m\times n}$, matriz nula, não é necessário que A ou B sejam matrizes nula;

   Exemplo 1.5.4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. $(AB)^t = B^tA^t$;

8. AA^t é uma matriz simétrica (ou seja, $B^t = B$).

Definição 7. *Dados A e B matrizes tais que $AB = BA = I$, dizemos que a matriz A é inversível e B é sua inversa ($B = A^{-1}$).*

Observação 1.5.4. *1. Se uma matriz admite inversa, esta é única.*

2. Veremos um método, mais adiante, de como determinar a inversa.

Exemplo 1.5.5. *Dado as matrizes $A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA.*

Solução:

Definição 8. *Uma matriz M cuja inversa coincide com a transposta é dita matriz ortogonal, ou seja,*

$$M^{-1} = M^t.$$

Observação 1.5.5. *Assim, dado uma matriz ortogonal M obtemos que*

$$MM^t = M^tM = I.$$

Exemplo 1.5.6. *A matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal? Justifique.*

Solução:

Definição 9. *Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ pode ser multiplicada n vezes por si mesma. A matriz que resulta dessas operações, e que se representa por A^n, é chamada potência n da matriz A.*

Exemplo 1.5.7. *Dado a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$*, calcule:*

(a) A^2

(b) A^3

(c) A^4

Solução:

1.6 Exercícios sobre Matrizes - Parte 1

Exercício 1.6.1. *Classifique cada afirmação como verdadeiro (V) ou falso (F):*

a) ( ) *Toda matriz identidade é necessariamente quadrada.*

b) ( ) *Existe matriz identidade que não é quadrada.*

c) ( ) *Toda matriz nula é necessariamente quadrada.*

d) ( ) *Existe matriz nula que não é quadrada.*

e) ( ) $(A^t)^t = A$*, qualquer que seja a matriz* A*.*

f) ( ) $A^t \neq A$ *para qualquer matriz* A*.*

g) ( ) *Existe alguma matriz tal que* $A^t \neq A$*.*

h) ( ) *Se a matriz* A *é do tipo* 2×3*, então* A^t *é do tipo* 3×2*.*

i) ( ) *Se uma matriz* A *é simétrica, então* $A^t = A$*.*

Exercício 1.6.2. *Um conglomerado é composto por cinco lojas, numeradas de 1 a 5. A matriz a seguir apresenta o faturamento em reais de cada loja nos quatro primeiros dias de fevereiro.*

$$F = \begin{bmatrix} 1950 & 2030 & 1800 & 1950 \\ 1500 & 1820 & 1740 & 1680 \\ 3100 & 2800 & 2700 & 3050 \\ 2500 & 2420 & 2300 & 2680 \\ 1800 & 2020 & 2040 & 1950 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.

a) *Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?*

b) *Qual foi o faturamento de todas as lojas no dia 3?*

c) *Qual foi o faturamento da loja 1 nos quatro dias?*

Exercício 1.6.3. *Calcule os valores de m para que as matrizes A e B sejam iguais.*

a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 15n \\ 12+m & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 8 & 75 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} m^2-40 & n^2+4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 41 & 13 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

Exercício 1.6.4. *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -9 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, *calcule:*

a) $A + B$

b) $B + C$

c) $A - C$

d) $X = 4A - 3B + 5C$

Exercício 1.6.5. *Dadas as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -7 \\ 6 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, *calcule:*

a) AB

b) $A(BD)$

c) $(BA)C$

Exercício 1.6.6. *Verificar se a matriz B é inversa da matriz A.*

a) $A = \begin{bmatrix} -0,5 & -1,5 & 1 \\ -0,5 & -2,5 & 0,5 \\ -0,5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -12 & -4 & 14 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ -7 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Exercício 1.6.7. *Determinar a matriz A^t transposta da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & -7 & 0 & -2 \\ 8 & -9 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.6.8. *Dada as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}$ *e*

$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, *calcule:*

a) $(AB)^t$

b) $(AB)D^t$

c) $A(BD^t)$

Exercício 1.6.9. *Dada as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \\ 8 & 1 & -9 \end{bmatrix}$, *classifique (tipos especiais de matrizes):*

a) $B + B^t$

b) AA^t

c) $C - C^t$

Exercício 1.6.10. *Dada as matrizes triangulares superiores* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *e, inferiores* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, *calcule e classifique (tipos especiais de matrizes):*

a) AB

b) CD

Exercício 1.6.11. *Dada as matrizes diagonais* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ *calcule* AB *e classifique (tipos especiais de matrizes) esse produto.*

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[3] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[4] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[5] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[7] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[8] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[9] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.