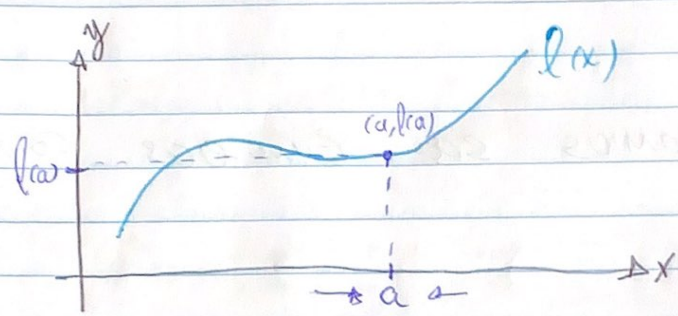
Nome: Felipe Archanjo da Cunha Mendes
RA: 2252740

Funcoes Continuas



Definição: Dizemos que uma função f é continua no ponto a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemplo: $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$
uma função constante.

Note $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c = f(a)$$

Portanto a função const é continua para todo $a \in \mathbb{R}$

EXEMPLO:

$P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ EM

POLINOMIO

$\lim_{x \to a} p(x) = p(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

PORTANTO POLINOMIOS SÃO FUNÇÕES CONTINUAS

EXEMPLO:

FUNÇÕES RAIZ - n-ESIMA

$g(x) = \sqrt[n]{x} \quad , n \in \mathbb{N}$

SE $a > 0$ ENTÃO:

$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \to a} \sqrt[n]{a} = g(a)$

PARA TODO $n \in \mathbb{N}$

SE $a < 0$ E n IMPAR, ENTÃO:

$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} = g(a)$

EXEMPLO:

A FUNÇÃO MÓDULO,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

SE $a > 0$, $\lim_{x \to a} |x| = \lim_{x \to a} x = a = |a|$

SE $a < 0$, $\lim_{x \to a} |x| = \lim_{x \to a} -x = -a = |a|$

SE $a = 0$, $\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = |0|$

$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} -x = 0 = |0|$

DIZEMOS QUE UMA FUNÇÃO f É CONTÍNUA NO INTERVALO (a, b) SE f É CONTÍNUA EM TODOS OS PONTOS PERTENCENTES AO INTERVALO

ANALOGAMENTE PARA INTERVALOS

$(-\infty, b)$; $(a, +\infty)$ ou $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

DEFINIÇÃO: SE UMA FUNÇÃO É DEFINIDA EM $[a,b]$, ENTÃO f É CONTÍNUA EM $[a,b]$ SE f É CONTÍNUA EM (a,b) E

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{E} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

ANALOGAMENTE: INTERVALOS $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$

PROPRIEDADES: SE f E g FUNÇÕES CONTÍNUAS EM UM PONTO a, ENTÃO:

1. $f+g$ É CONTÍNUA EM a
2. $f-g$ É CONTÍNUA EM a
3. $f\cdot g$ É CONTÍNUA EM a
4. f/g É CONTÍNUA EM a, TAL QUE $g(a)\neq 0$

DEM:

1. $$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$= f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

2. ANÁLOGO

③ $\lim (f \cdot g)(x) = \lim [f(x) \cdot g(x)]$

$= \lim f(x) \cdot \lim g(x) = f(a) \cdot g(a) = f \cdot g(x)$

④ $\lim (f/g)(x) = \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

$= \dfrac{f(a)}{g(a)} = (f/g)(a)$

TEOREMA (LEI DO SUBSTITUIÇÃO)

SEJAM f e g FUNÇÕES TAIS QUE $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e g é CONTÍNUA EM b.

ENTÃO, $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b)$

COROLÁRIO: SE f É UMA FUNÇÃO CONTÍNUA EM a e g É CONTÍNUA EM $f(a)$, ENTÃO $g \circ f$ É CONTÍNUA EM a.

$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(f(a))$

$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a)$

EXEMPLO:

COM $f(x) = x^{1/n}$ ONDE n É UM INTEIRO POSITIVO, APLICANDO A LEI DA SUBSTITUIÇÃO

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

SOB A HIPÓTESE DE QUE EXISTE O LIMITE DE $g(x)$ QUANDO $x \to a$ (E SEJA POSITIVO SE n FOR PAR)

SE $g(x) = x^m$ $\quad m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{a^m}$$

COM A CONDIÇÃO DE QUE $a^m > 0$ PARA n PAR.

EXEMPLO: $f(x) = \left(\overbrace{\frac{x+2}{x^2+2x+2}}^{r(x)}\right)^{2/3} \; g(x)$

$$r(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+2} = \frac{x+2}{(x+1)^2+1} > 0$$

$$\lim_{x\to a} r(x) = \frac{\lim_{x\to a} x+2}{\lim_{x\to a} x^2+2x+2} = \frac{a+2}{a^2+2a+2} = r(a)$$

$g(x) = x^{2/3}$ é contínua $\quad f(x) = g(r(x))$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(r(x)) = g\left(\lim_{x \to a} r(x)\right) = g(r(a)) = f(a)$$

Outra forma:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{x+2}{x^2+2x+2} \right)^{2/3} = \left(\lim_{x \to a} \frac{x+2}{x^2+2x+2} \right)^{2/3}$$

Considerando que $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 > 0 \; \forall a \in \mathbb{R}$

$$= \left(\frac{\lim x+2}{\lim x^2+2x+2} \right)^{2/3} = \left(\frac{a+2}{a^2+2a+2} \right)^{2/3} = f(a)$$

Exemplo

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ é definida em $[-2, 2]$.

Se $a \in (-2, 2)$ então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x \to a} (4-x^2)} \quad \text{pois}$$

se $a \in (-2, 2) \Rightarrow 4-a^2 > 0$

$$= \sqrt{4-a^2} = f(a)$$

No caso $a=-2$:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 2^+} 4-x^2} = \sqrt{4-(-2)^2} = 0 = f(-2)$$

No caso $a=2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 2^-} 4-x^2} = \sqrt{4-(2)^2} = 0 = f(2)$$

Portanto f é contínua em $[-2,2]$

TEOREMA: Seja $e \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ e $a \in \mathbb{R}$.
Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ então:

① $\lim_{x\to a} \operatorname{sen}(f(x)) = \operatorname{sen}(\lim_{x\to a} f(x)) = \operatorname{sen}(L)$

② $\lim_{x\to a} \cos(f(x)) = \cos(\lim_{x\to a} f(x)) = \cos(L)$

③ $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)} = e^{L}$

④ $\lim_{x\to a} \log_e(f(x)) = \log_e(\lim_{x\to a} f(x)) = \log_e(L)$

$L>0$

⑤ $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

$\forall n$ e $L \geq 0$ e só para n ímpar só $L < 0$

⑥ $\lim_{x \to a} |f(x)| = |\lim_{x \to a} f(x)| = |L|$

EXEMPLO:

$\lim_{x \to 0} e^{\frac{|x|}{2}}$

$\lim_{x \to 0} e^{\frac{|x|}{2}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{2}} = e^{\frac{1}{2}(\lim_{x \to 0} |x|)} = e^{1/2 \cdot 0}$

$= e^0 = 1$ //

EXEMPLO:

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$

$(x-2) = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 =$

$= (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})$

$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}}{\cancel{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 2} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{4}}{12}}$

$$\lim_{x \to -3} \log(x^4 - 3x + 10)$$

Como $\lim_{x \to -3}(x^4 - 3x + 10) = (-3)^4 - 3(-3) + 10 = 100 > 0$

$\lim_{x \to -3} \log(x^4 - 3x + 10) = \log\left(\lim_{x \to -3}(x^4 - 3x + 10)\right) = \log 100 = 2$ //