Cálculo Numérico

Raízes de Equações: Método da Secante

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

28 de junho de 2021

Método da Secante

O método de Newton é uma ferramenta poderosa, mas tem uma desvantagem considerável: a necessidade de conhecer o valor da derivada em cada aproximação, o que acarreta o uso de mais operações aritméticas que o de simplesmente calcular $f(x)$. Para driblar este entrave, recordemos com enlevo a seguinte definição de derivada:

$$f'(x_k) = \lim_{x \to x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \tag{1}$$

Tomando $x = x_{k-1}$, temos:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \tag{2}$$

Método da Secante

O método de Newton é uma ferramenta poderosa, mas tem uma desvantagem considerável: a necessidade de conhecer o valor da derivada em cada aproximação, o que acarreta o uso de mais operações aritméticas que o de simplesmente calcular $f(x)$. Para driblar este entrave, recordemos com enlevo a seguinte definição de derivada:

$$f'(x_k) = \lim_{x \to x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \tag{1}$$

Tomando $x = x_{k-1}$, temos:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \tag{2}$$

Método da Secante

O método de Newton é uma ferramenta poderosa, mas tem uma desvantagem considerável: a necessidade de conhecer o valor da derivada em cada aproximação, o que acarreta o uso de mais operações aritméticas que o de simplesmente calcular $f(x)$. Para driblar este entrave, recordemos com enlevo a seguinte definição de derivada:

$$f'(x_k) = \lim_{x \to x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \tag{1}$$

Tomando $x = x_{k-1}$, temos:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \tag{2}$$

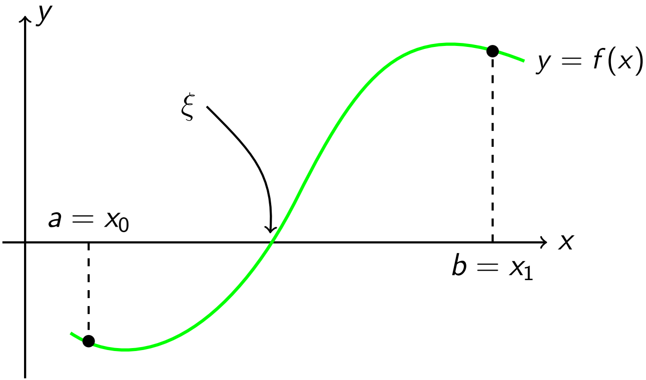
Introdução

Empregando tal aproximação para $f'(x_k)$ na fórmula de Newton, vem que:

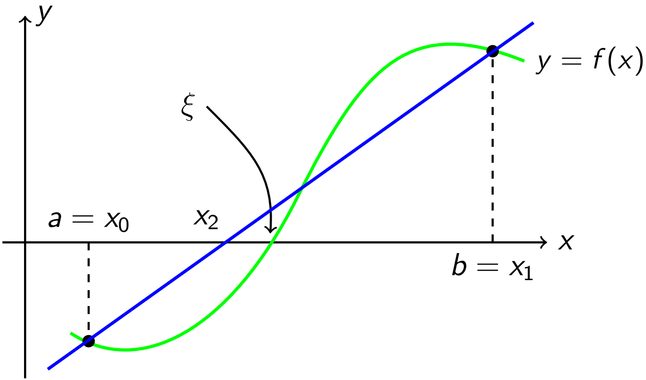
Fórmula de recorrência

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{3}$$

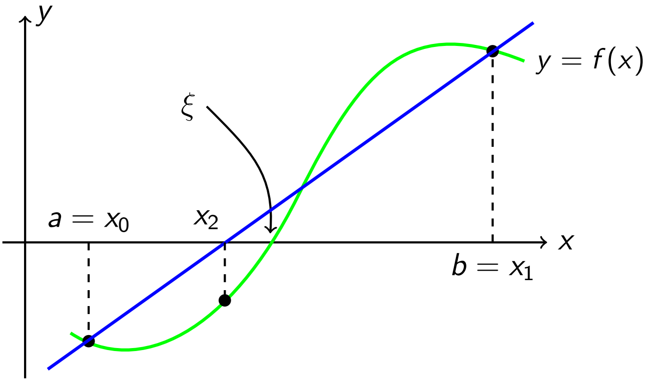
Interpretação Geométrica



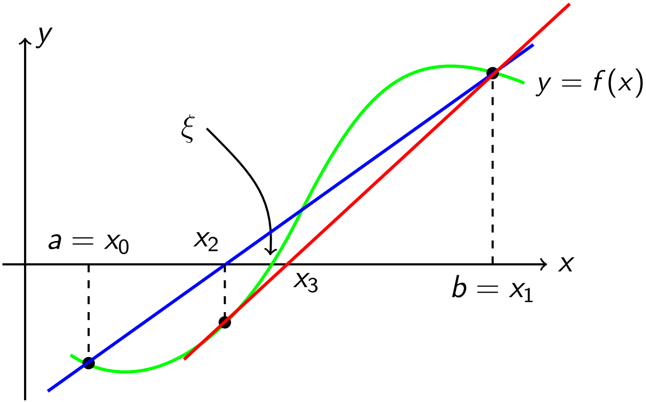
Interpretação Geométrica



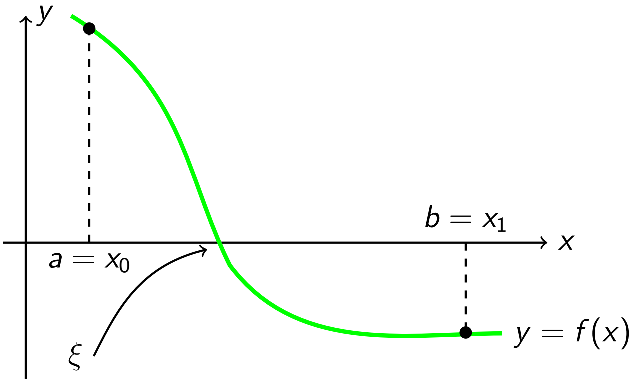
Interpretação Geométrica



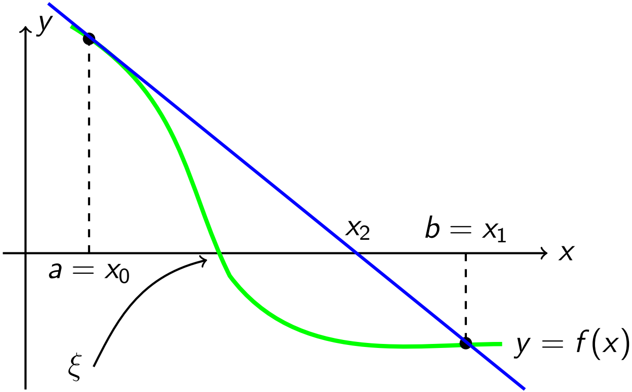
Interpretação Geométrica



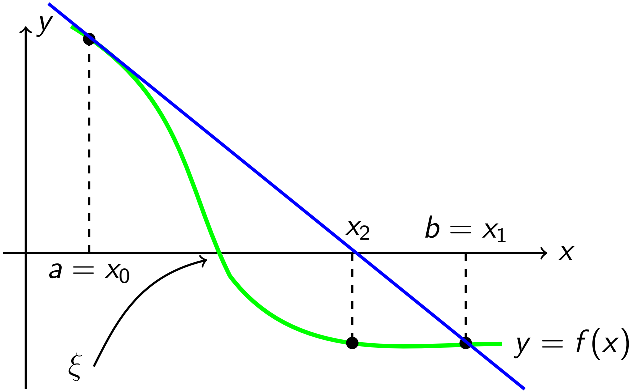
Interpretação Geométrica



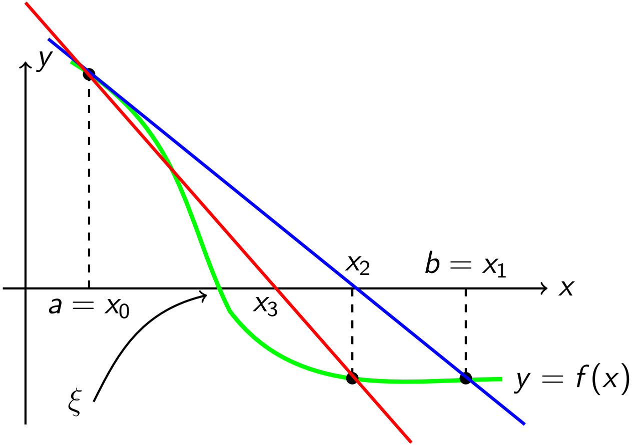
Interpretação Geométrica



Interpretação Geométrica



Interpretação Geométrica



Método da Secante

Convergência do Método da secante

Analogamente ao que foi feito para o Método de Newton-Raphson, podemos provar que

$$|x_{k+1} - \xi| \approx C\,|x_k - \xi|^p,$$

onde p é o *número de ouro* dado por

$$p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618033988749895\,.$$

Logo, o método da secante tem convergência melhor que o método da bissecção (linear), mas não é tão "rápido" quanto o método de Newton que possui convergência quadrática.

Método da Secante

Convergência do Método da secante

Analogamente ao que foi feito para o Método de Newton-Raphson, podemos provar que

$$|x_{k+1} - \xi| \approx C\,|x_k - \xi|^p,$$

onde p é o *número de ouro* dado por

$$p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618033988749895\,.$$

Logo, o método da secante tem convergência melhor que o método da bissecção (linear), mas não é tão "rápido" quanto o método de Newton que possui convergência quadrática.

Método da Secante

Exemplo 3.1

Use o método da secante para obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos x - x = 0$ *com* $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

Solução: Usaremos o mesmo exemplo do método de Newton-Raphson para compararmos os métodos. Para tanto, vamos usar os mesmos valores de a e b, a saber, $a = 0,5$ e $b = 1$.

Assim, pelo método da secante, automaticamente resulta que $x_0 = a = 0,5$ e $x_1 = b = 1$.

Método da Secante

Exemplo 3.1

Use o método da secante para obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos x - x = 0$ *com* $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

Solução: Usaremos o mesmo exemplo do método de Newton-Raphson para compararmos os métodos. Para tanto, vamos usar os mesmos valores de a e b, a saber, $a = 0,5$ e $b = 1$.

Assim, pelo método da secante, automaticamente resulta que $x_0 = a = 0,5$ e $x_1 = b = 1$.

Método da Secante

Exemplo 3.1

Use o método da secante para obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos x - x = 0$ *com* $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

Solução: Usaremos o mesmo exemplo do método de Newton-Raphson para compararmos os métodos. Para tanto, vamos usar os mesmos valores de a e b, a saber, $a = 0,5$ e $b = 1$.

Assim, pelo método da secante, automaticamente resulta que $x_0 = a = 0,5$ e $x_1 = b = 1$.

Recorrendo à fórmula de recorrência (3), temos que

$$
\begin{aligned}
k = 1 :& \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\
&= 1 - \frac{f(1)\cdot(1-0,5)}{f(1) - f(0,5)} \\
&= 1 - \frac{(\cos(1) - 1)\cdot 0,5}{\cos(1) - 1 - (\cos(0,5) - 0,5)} \\
&= 1 - \left(\frac{-0,229848847}{-0,837280256}\right) \\
&= 0,725481587063930
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
|x_2 - x_1| = |0,725481587 - 1| = 0,2745184129360 7 > 10^{-5}.
$$

Recorrendo à fórmula de recorrência (3), temos que

$$
\begin{aligned}
k = 1 :& \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\
&= 1 - \frac{f(1)\cdot(1 - 0,5)}{f(1) - f(0,5)} \\
&= 1 - \frac{(\cos(1) - 1)\cdot 0,5}{\cos(1) - 1 - (\cos(0,5) - 0,5)} \\
&= 1 - \left(\frac{-0,229848847}{-0,837280256}\right) \\
&= 0,725481587063930
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$|x_2 - x_1| = |0,725481587 - 1| = 0,27451841293607 > 10^{-5}.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Recorrendo à fórmula de recorrência (3), temos que

$$
\begin{aligned}
k = 1:& \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\
&= 1 - \frac{f(1)\cdot(1-0,5)}{f(1) - f(0,5)} \\
&= 1 - \frac{(\cos(1) - 1)\cdot 0,5}{\cos(1) - 1 - (\cos(0,5) - 0,5)} \\
&= 1 - \left(\frac{-0,229848847}{-0,837280256}\right) \\
&= 0,725481587063930
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$|x_2 - x_1| = |0,725481587 - 1| = 0,27451841293607 > 10^{-5}.$$

$k = 2:$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$= 0,725481587063930 - \frac{f(0,725481587063930)\cdot(0,725481587063930 - 1)}{f(0,725481587063930) - f(1)}$$

$$= 0,725481587063930 - \frac{(\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930)\cdot(0,725481587063930 - 1)}{\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930 - (\cos(1) - 1)}$$

$$= 0,738398620137094$$

Pelo critério da parada,

$$|x_3 - x_2| = |0,738398620137094 - 0,725481587063930|$$
$$= 0,012917033073164 > 10^{-5}.$$

$k = 2:$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \\
&= 0,725481587063930 - \frac{f(0,725481587063930)\cdot(0,725481587063930 - 1)}{f(0,725481587063930) - f(1)} \\
&= 0,725481587063930 - \frac{(\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930)\cdot(0,725481587063930 - 1)}{\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930 - (\cos(1) - 1)} \\
&= 0,738398620137094
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_3 - x_2| &= |0,738398620137094 - 0,725481587063930| \\
&= 0,012917033073164 > 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

$k = 2:$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \\
&= 0,725481587063930 - \frac{f(0,725481587063930)\ \cdot\ (0,725481587063930 - 1)}{f(0,725481587063930) - f(1)} \\
&= 0,725481587063930 - \frac{(\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930)\ \cdot\ (0,725481587063930 - 1)}{\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930 - (\cos(1) - 1)} \\
&= 0,738398620137094
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_3 - x_2| &= |0,738398620137094 - 0,725481587063930| \\
&= 0,012917033073164 > 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

$k = 3:$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)}$$

$$= 0,738398620137094 - \frac{f(0,738398620137094)\cdot(0,738398620137094 - 0,725481587063930)}{f(0,738398620137094) - f(0,725481587063930)}$$

$$= 0,739087210820866$$

Pelo critério da parada,

$$|x_4 - x_3| = |0,739087210820866 - 0,738398620137094|$$
$$= 0,000688590683772361 > 10^{-5}.$$

$k = 3:$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \\
&= 0,738398620137094 - \frac{f(0,738398620137094)\cdot(0,738398620137094 - 0,725481587063930)}{f(0,738398620137094) - f(0,725481587063930)} \\
&= 0,739087210820866
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_4 - x_3| &= |0,739087210820866 - 0,738398620137094| \\
&= 0,000688590683772361 > 10^{-5}\,.
\end{aligned}
$$

$k = 3:$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \\ &= 0,738398620137094 - \frac{f(0,738398620137094)\cdot(0,738398620137094 - 0,725481587063930)}{f(0,738398620137094) - f(0,725481587063930)} \\ &= 0,739087210820866 \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$\begin{aligned} |x_4 - x_3| &= |0,739087210820866 - 0,738398620137094| \\ &= 0,000688590683772361 > 10^{-5}. \end{aligned}$$

$k = 4:$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)}$$

$$= 0,739087210820866 - \frac{f(0,739087210820866)\cdot(0,739087210820866 - 0,738398620137094)}{f(0,739087210820866) - f(0,738398620137094)}$$

$$= 0,739085132900112$$

Pelo critério da parada,

$$|x_5 - x_4| = |0,739085132900112 - 0,73908721082086|$$
$$= 2,07792075390678 \times 10^{-6} < 10^{-5},$$

doravante, a raiz é

$$\xi \approx x_5 = 0,739085132900112\,.$$

$k = 4:$

$$
\begin{aligned}
x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \\
&= 0,739087210820866 - \frac{f(0,739087210820866)\cdot(0,739087210820866 - 0,738398620137094)}{f(0,739087210820866) - f(0,738398620137094)} \\
&= 0,739085132900112
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_5 - x_4| &= |0,739085132900112 - 0,73908721082086| \\
&= 2,07792075390678 \times 10^{-6} < 10^{-5},
\end{aligned}
$$

doravante, a raiz é

$$\xi \approx x_5 = 0,739085132900112\,.$$

$k = 4:$

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \\ &= 0,739087210820866 - \frac{f(0,739087210820866)\cdot(0,739087210820866 - 0,738398620137094)}{f(0,739087210820866) - f(0,738398620137094)} \\ &= 0,739085132900112 \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$\begin{aligned} |x_5 - x_4| &= |0,739085132900112 - 0,73908721082086| \\ &= 2,07792075390678 \times 10^{-6} < 10^{-5}, \end{aligned}$$

doravante, a raiz é

$$\xi \approx x_5 = 0,739085132900112\,.$$

$k = 4:$

$$
\begin{aligned}
x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \\
&= 0,739087210820866 - \frac{f(0,739087210820866)\cdot(0,739087210820866 - 0,738398620137094)}{f(0,739087210820866) - f(0,738398620137094)} \\
&= 0,739085132900112
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_5 - x_4| &= |0,739085132900112 - 0,73908721082086| \\
&= 2,07792075390678 \times 10^{-6} < 10^{-5},
\end{aligned}
$$

doravante, a raiz é

$$\xi \approx x_5 = 0,739085132900112\,.$$

Exemplo 3.2

Determine pelo menos uma raiz positiva de cada equação $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 20 = 0$ *com* $\varepsilon \leqslant 10^{-4}$ *pelo método da secante.*