LISTA 7

EXERCÍCIOS DO LIVRO:

$\boxed{4.3-1}$

$T(n) = T(n-1) + n = O(n^2)$?

DEVEMOS PROVAR QUE $T(n) \leq C \cdot n^2$ P/ $C > 0$ E $n \geq n_0$

CASO BASE

$T(n) \leq Cn^2$, P/ $C > 0$

$T(n-1) + n \leq C \cdot n^2$, $\boxed{P/ \ n=2}$

$T(2-1) + 2 \leq C \cdot 2^2$

$T(1) + 2 \leq C \cdot 4$

$3 \leq 4C$

$C \geq 3/4$

COMO C É POSITIVO E CONSTANTE, O CASO BASE É VÁLIDO

HIPÓTESE INDUTIVA

$T(k) \leq Ck^2$, P/ $k < n$

$T(n) = \overset{k=n-1}{T(n-1)} + n$

$\leq C(n-1)^2 + n$ (POR HI)

$\leq C(n-1)^2 + n \leq Cn^2$

$\leq C(n^2-2n+1) + n \leq Cn^2$

$\leq \cancel{Cn^2} - 2Cn + C + n \leq \cancel{Cn^2}$

S T Q Q S S D

___/___/___

$C + n \leq 2Cn$

$2Cn - C \geq n$

$C(2n-1) \geq n$

$C \geq \frac{n}{2n-1}$ CONSIDERANDO n SUFICIENTEMENTE GRANDE, $C \approx 0,5 \Rightarrow C > 0$. PORTANTO TEMOS

$C \geq \frac{n}{(2n-1)}$ QUE $T(n) = O(n^2)$ //

$\boxed{4.3-2}$

$T(n) = T(n/2) + 1 = O(\lg n)$?

DEVEMOS PROVAR QUE $T(n) \leq c \lg n$ P/ $C > 0$ E $n \geq n_0$

CASO BASE

$T(n) \leq C \lg n$ (P/ $C > 0$)

$T(n/2) + 1 \leq C \lg n$

$T(2/2) + 1 \leq C \lg 2$ $\rightarrow \boxed{P/\ n=2}$

$2 \leq C \cdot 1$

$C \geq 2$

COMO C É POSITIVO E CONSTANTE, O CASO BASE É VÁLIDO.

spiral

S T Q Q S S D   ___/___/___

<u>Hipotese indutiva</u>

$T(k) \leq c \lg k$, p/ $k < n$

$T(n) = T(n/2) + 1$

$\leq 1 \cdot c \lg n/2 + 1 \leq$ (Pela HI)

$\leq c \lg n/2 + 1 \leq c \lg n$

$\leq 1 \leq c \lg n - c \lg n/2$

$\leq 1 \leq c(\lg n - (\lg n - \lg 2))$

$\leq 1 \leq c(\cancel{\lg n} - \cancel{\lg n} + \lg 2)$

$\leq \boxed{1 \leq c}$

Portanto, $c \lg n/2 + 1 \leq c \lg n$, p/ $c \geq 1$. Assim, como $T(n) \leq c \lg n/2 + 1$, então, por transitividade, $T(n) \leq c \lg n$.

Além disso, considerando $c = 2$ e $n_0 = 2$, temos que as constantes satisfazem as condições necessárias da definição da notação O. Assim, pelo método da substituição, $T(n) = O(\lg n)$ //

$\boxed{4.3-3}$

$T(n) = 2T(n/2) + n = \Omega(n \lg n)$?

Devemos provar que $T(n) \geq n \lg n$ p/ $c > 0$ e $n \geq n_0$

<u>Caso base</u>

$T(n) \geq c n \lg n$ (p/ $c > 0$)

$2T(n/2) + n \geq c n \lg n$

$2T(2/2) + 2 \geq c\, 2 \lg 2 \rightarrow \boxed{\text{p/ } n = 2}$

$2 + 2 \geq 2c$

$4 \geq 2c$

$\boxed{c \leq 2}$

Como existe c positivo e $c > 0$, o caso base é válido

S T Q Q S S D

__/__/__

HIPOTESE INDUTIVA

$T(k) \geq Ck\lg k, \quad p/ \ k < n$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$
$$\geq 2 \cdot C \cdot \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} + n \quad (HI)$$
$$\geq Cn\lg \frac{n}{2} + n$$
$$\geq Cn\lg(n) - Cn + n \geq Cn\lg(n)$$

SE E SOMENTE SE...

$$-Cn + n \geq 0$$
$$n \geq Cn$$
$$\boxed{C \leq 1}$$

ASSIM, CONSIDERANDO $C = 1$ E $n_0 \geq 2$,
$2T(n/2) + n = \Omega(n\lg(n))$.
COM ISSO, $T(n) = \Theta(n\lg(n))$.

EXERCICIOS ADICIONAIS

1. $T(n) = 4T(n/2) + n^2 = O(n^2\lg n)$?

DEVEMOS PROVAR QUE $T(n) \leq Cn^2\lg n$ p/ $C > 0$ E $n \geq n_0$

CASO BASE

$T(n) \leq Cn^2\lg n \quad (p/ \ C > 0)$

$$4T(n/2) + n^2 \leq Cn^2\lg n$$
$$4T(1) + 2^2 \leq C \cdot 4\lg 2$$
$$8 \leq 4C$$
$$\boxed{C \geq 2} \rightarrow \text{CASO BASE VALIDO}$$

S T Q Q S S D

__/__/__

<u>HIPÓTESE INDUTIVA</u>

$T(k) \leq ck^2 \lg k$, p/ $k < n$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$\leq 4c\left(\frac{n}{2}\right)^2 \lg \frac{n}{2} + n^2$ (HI)

$\leq \cancel{4}c\frac{n^2}{\cancel{4}} \lg \frac{n}{2} + n^2$

$\leq cn^2 \lg n - cn^2 \cancel{\lg} 2 + n^2$

$\leq cn^2 \lg n - cn^2 + n^2 \leq cn^2 \lg n$

SE E SOMENTE SE

$\cancel{cn^2 \lg n} - cn^2 + n^2 \leq \cancel{cn^2 \lg n}$

$-cn^2 + n^2 \leq 0$

$cn^2 \geq n^2$

$\boxed{c \geq 1}$

ASSIM, $cn^2 \lg n - cn^2 + n^2 \leq cn^2 \lg n$, p/ $c \geq 1$. ASSIM COMO $T(n) \leq cn^2 \lg n - cn^2 + n^2$. ENTÃO, POR TRANSITIVIDADE, $T(n) \leq cn^2 \lg n$, OU SEJA, $T(n) = O(n^2 \lg n)$.

3 $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n = O(n^2)$??

DEVEMOS PROVAR QUE $T(n) \leq cn^2$ p/ $c > 0$ E $n \geq n_0$

<u>CASO BASE</u>

$T(n) \leq cn^2$ (p/ $c > 0$)

$4T(\frac{n}{2}) + n \leq cn^2$

$4T(\frac{2}{2}) + 2 \leq c \cdot 4$

$6 \leq 4c$

$c \geq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ → CASO VÁLIDO

__/__/__

S T Q Q S S D

HIP. INDUTIVA

$T(K) \leq CK^2$, p/ $k < n$

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

$\leq \cancel{4}C \frac{n^2}{\cancel{4}} + n$

$\leq cn^2 + n \leq cn^2$

SE E SOMENTE SE

$\cancel{cn^2} + n \leq \cancel{cn^2}$

$n \leq 0$ → ABSURDO

NÃO É POSSÍVEL MOSTRAR QUE $cn^2 + n \leq cn^2$ POIS $n \leq 0$, O QUE É UM ABSURDO.

LOGO, $T(n) \neq O(n^2)$ //

spiral