NOÇÕES DE PROBABILIDADE

PARTE II

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Sejam $A \subset \Omega$ e B ⊂ Ω. A probabilidade de um evento A ocorrer, sabendo que um outro evento B já ocorreu, é chamada de "probabilidade condicional de A dado B". Essa probabilidade é representada por P(A/B) e calculada por:

P(A/B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, se $P(B) \neq 0$

Também:

P(B/A) = $\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, se $P(A) \neq 0$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Exemplo 1

Consideremos 250 alunos que cursam o primeiro ciclo de uma Universidade. Destes alunos 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M), 110 [40(H) e 70(M)] cursam Física (F) e 140 [60(H) e 80(M)] cursam Química (Q). Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

TEOREMA DO PRODUTO

Da definição da probabilidade condicional temos o TEOREMA DO PRODUTO.

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$. (Para eventos condicionados).

Para eventos independentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

TEOREMA DO PRODUTO

Exemplo 2

Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Três peças são retiradas aleatoriamente, uma após a outra. Encontre a probabilidade P de todas essas três peças serem não-defeituosas.

TEOREMA DO PRODUTO

Generalizando o Teorema do Produto temos:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1).p(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2).\cdots .P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

EVENTOS INDEPENDENTES

Seja $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$
Intuitivamente se A e B são independentes, $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.
Definição: A e B são eventos independentes se $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Um evento B é dito independente de um evento A, se a probabilidade de B ocorrer não é influenciada pelo fato de A ter ocorrido ou não. Em outras palavras, se a probabilidade de B é igual à probabilidade condicional de B dado A: $P(B) = P(B|A)$. Substituindo $P(B)$ por $P(B|A)$ no Teorema das Multiplicações, $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$, obtemos

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

EVENTOS INDEPENDENTES

Exemplo 3

Lançam-se 3 moedas. Verificar se são independentes os eventos: A: saída de cara na 1ª moeda e B: saída de coroa na 2ª e 3ª moeda.

EVENTOS INDEPENDENTES

Observações

- Para verificarmos se 3 eventos A,B e C são independentes, devemos verificar se as 4 proposições são satisfeitas:
  1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
  2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
  3. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
  4. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
- Se A e B são mutuamente exclusivos, então A e B são dependentes, pois se A ocorre, B não ocorre, isto é, a ocorrência de um evento condiciona a não-ocorrência do outro.

EVENTOS INDEPENDENTES

Exemplo 4

Seja A e B eventos tais que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = P$, $P(A \cup B) = 0{,}6$. Calcular P considerando A e B:

a) mutuamente exclusivos;

b) independentes.

TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral. seja B um evento desse espaço. Então

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Exemplo 5

Um piloto de Fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida?

TEOREMA DE BAYES

No Teorema da Probabilidade Total, a probabilidade $P(A_i)$ é denominada probabilidade a priori do evento A_i. Agora suponhamos que o evento B tenha ocorrido.

Vamos usar essa informação para calcular a probabilidade a posteriori do evento A_i, ou seja, vamos calcular $P(A_i|B)$.

Por definição temos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Usando a regra da multiplicação e o teorema da probabilidade total, resulta que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Esse resultado é conhecido como Teorema de Bayes.

TEOREMA DE BAYES

Seja A_1, A_2, ..., A_n uma partição do espaço amostral Ω e seja B um evento qualquer em Ω. Então

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}, i = 1, 2, \dots, n$$

TEOREMA DE BAYES

Exemplo 6

Em uma turma de Administração, 65% dos alunos são do sexo masculino. Sabe-se que 30% dos alunos têm carro, enquanto essa proporção entre as alunas se reduz para 18%. Sorteia-se ao acaso um estudante dessa turma usando o seu número de matrícula e constata-se que possui carro. Qual é a probabilidade de que a pessoa sorteada seja do sexo feminino?