UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profª Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Capítulo 3

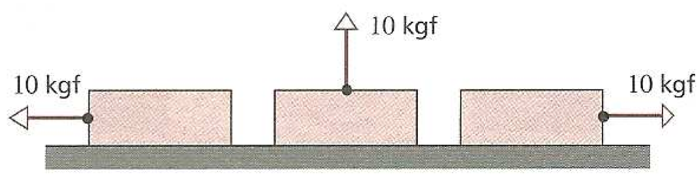
Vetores - Parte 1

Os vetores são usados na navegação, bem como no estudo de forças e do movimento. Vetores em dimensões maiores ocorrem em campos tão diversos como a Genética, a Economia e a Ecologia. E mais, os vetores também são utilizados na Teoria da Relatividade para ajudar a descrever a natureza da gravidade, do espaço e da matéria.

3.1 Introdução

Existem grandezas chamadas escalares, exemplos: ***área, comprimento, massa, temperatura, etc...*** que ficam completamente determinadas assim que for dada sua magnitude. Outras quantidades físicas no entanto requerem mais do que isso. Por exemplo, uma ***força*** ou uma ***velocidade***, para que fiquem bem definidas, precisamos dar a direção, a intensidade e o sentido. Tais ***grandezas*** são chamadas ***vetoriais.***

Observação 3.1.1. *Mesma magnitude mas efeitos diferentes.*

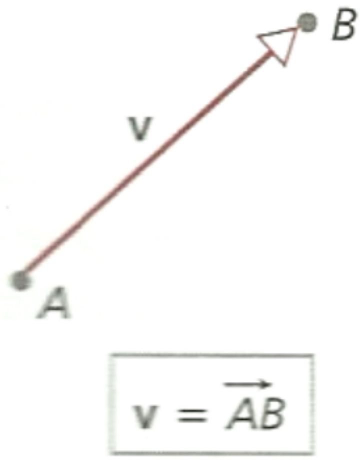


Vetores no plano ou no espaço podem ser representados geometricamente por setas: o comprimento da seta é proporcional à magnitude (parte numérica) do vetor.

O corpo da seta indica a direção e a ponta da seta o sentido.

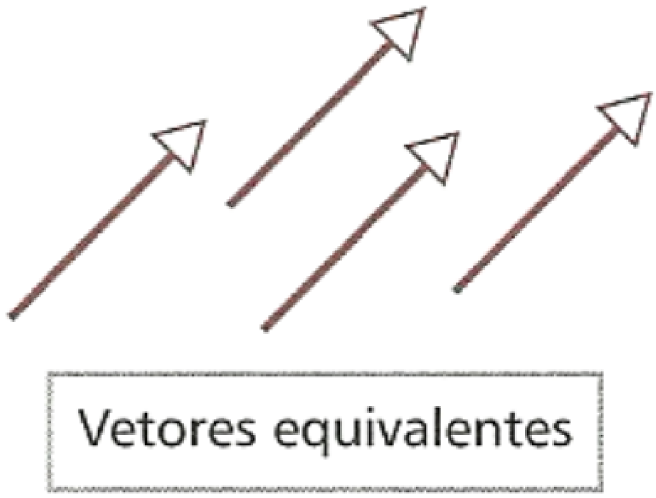
Notação: indicaremos vetores por letras minúsculas (por exemplo, u, v, w, ...).

Observação 3.1.2. *Se um vetor v tem ponto inicial A e ponto final B então denotamos o vetor por $v = \overrightarrow{AB}$.*



Nas aplicações, existem dois tipos de vetores: os fixos e os livres. Um vetor fixo ou físico é um vetor cujo efeito físico depende da localização do ponto inicial, além da magnitude, direção e sentido, enquanto que um vetor livre ou geométrico é um vetor cujo efeito físico depende somente da magnitude, direção e sentido. Aqui, **trabalharemos com vetores livres**. Veja o conteúdo complementar.

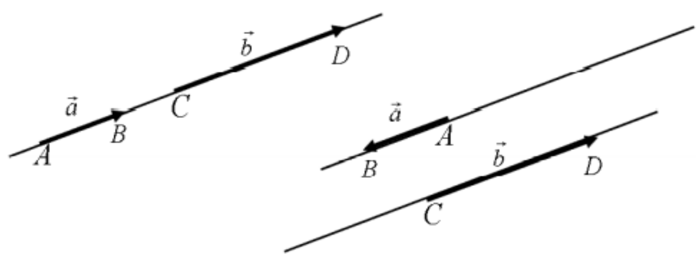
Definição 1. *Dois vetores u e w são iguais (ou equivalentes) se eles forem representados por setas paralelas de mesmo comprimento, direção e sentido.*



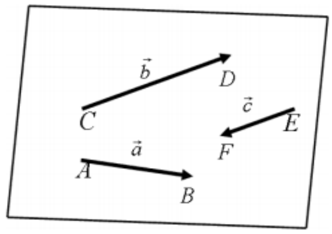
Notação: $u = w$

Observação 3.1.3.

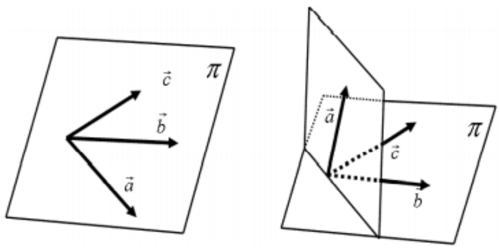
1. *Dois vetores* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CD}$ *são* ***colineares ou paralelos*** *se tiverem a mesma direção, isto é, se seus representantes* AB *e* CD *pertencerem a uma mesma reta ou a retas paralelas.*



2. *Três ou mais vetores são* ***coplanares*** *se possuem representantes pertencentes a um mesmo plano.*



3. *Note que dois vetores quaisquer são sempre coplanares; no entanto, três vetores poderão ou não ser coplanares.*

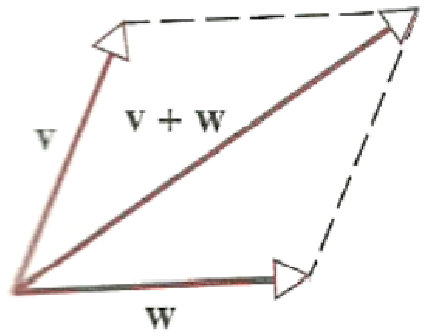


3.2 Operações com Vetores - Geometricamente

Existem várias operações algébricas importantes efetuadas com vetores, todas originadas das Leis da Física.

3.2.1 Adição de Vetores

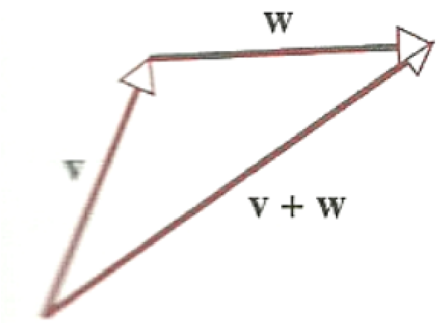
Regra do Paralelogramo para a Adição Vetorial: Se v e w são vetores no plano ou no espaço que estão posicionados de tal modo que seus pontos iniciais coincidem, então os dois vetores formam lados adjacentes de um paralelogramo e a soma $v + w$ é o vetor representado pela seta desde o ponto inicial comum de v e w até o vértice oposto do paralelogramo.



Veja o conteúdo complementar.

Outra maneira:

Regra do Triângulo para Adição Vetorial: Se v e w são vetores no plano ou no espaço que estão posicionados de tal modo que o ponto inicial de w é o ponto terminal de v, então a soma $v + w$ é o vetor representado pela seta desde o ponto inicial de v até o ponto terminal de w.

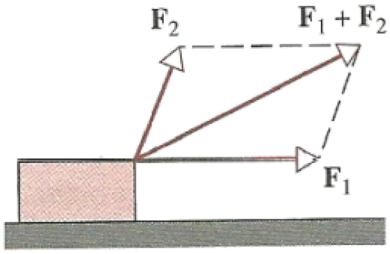


Veja o conteúdo complementar.

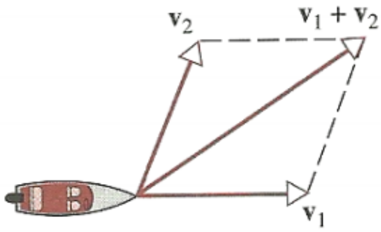
Observação 3.2.1. *1.* $v + w = w + v$. *Veja a justificativa.*

2. A regra do paralelogramo para a adição vetorial descreve corretamente o comportamente aditivo de forças, velocidades e deslocamentos na Engenharia.

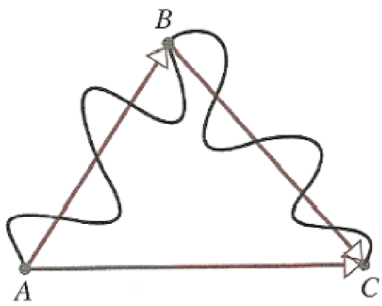
Exemplo 3.2.1. *1. O efeito de se aplicar as duas forças F_1 e F_2 ao bloco na figura abaixo é o mesmo que aplicar a única força $F_1 + F_2$ ao bloco.*



2. Se o motor do barco impõe uma velocidade v_1 e o vento impõe uma velocidade v_2, então o efeito combinado de motor e vento impõe uma velocidade $v_1 + v_2$ ao barco.



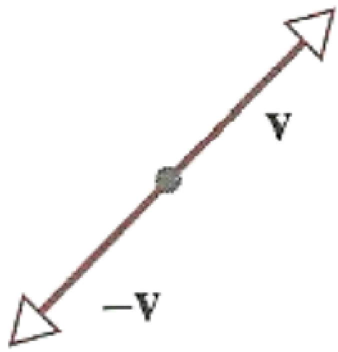
3. Uma partícula sofre um deslocamento $\overrightarrow{AB}$ de A até B e em seguida um deslocamento $\overrightarrow{BC}$ de B a C, então os deslocamentos sucessivos são iguais ao único deslocamento $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ de A a C.



Um pouco de História: a idéia de usar velocidade, força e deslocamento como vetores foi utilizados por Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), Galileu Galilei (1564 - 1642) explicitou tal idéia, e outros.

3.2.2 Subtração de Vetores

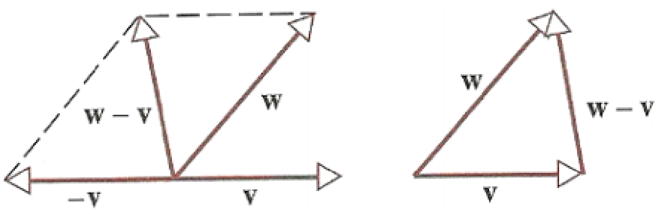
Definição 2. *O negativo de um vetor v, denotado por $-v$, é o vetor que tem o mesmo comprimento e direção do vetor v, mas tem sentido oposto.*



Definição 3. *Dados v e w dois vetores, define-se o vetor diferença de $w - v$ como sendo a soma*

$$w + (-v) = w - v.$$

Notação: $w - v$.



Veja o conteúdo complementar.

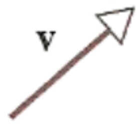
3.2.3 Multiplicação por Escalar

Quando existe a necessidade de mudar o comprimento e/ou sentido de um vetor, lançamos mão de um tipo de multiplicação na qual vetores são multiplicados por escalares.

Definição 4. *Se v é um vetor não-nulo e k é um escalar não-nulo, então o múltiplo escalar de v por k, denotado por kv, é o vetor de mesma direção do que v, mas cujo comprimento é k vezes o comprimento de v e cujo sentido é o mesmo que o de v se $k > 0$ e oposto de v se $k < 0$.*

Veja o conteúdo complementar.

Exercício 3.2.1. *Dado o vetor v abaixo determine os seguintes vetores:*



(a) $\frac{1}{2}v$

(b) $2v$

(c) $(-1)v$

(d) $(-3)v$

Observação 3.2.2.

- $(-1)v = -v$
- *Se* $k = 0$ *ou* $v = \overrightarrow{0}$ *então tomamos* $kv = \overrightarrow{0}$.

3.3 Vetores em Sistemas de Coordenadas

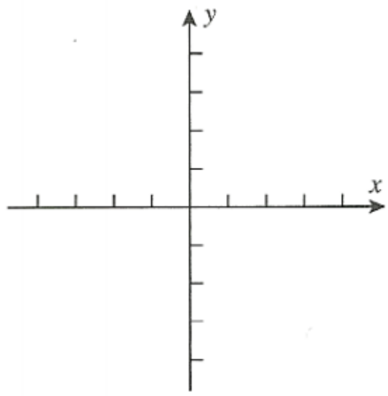
Apesar de útil a idéia geométrica de vetores, é necessário descrever os vetores algebricamente, e faremos isto usando sistemas de coordenadas.

A introdução de um sistema de coordenadas retangulares muitas vezes simplifica problemas envolvendo vetores. O tratamento algébrico, na maioria das situações, é bem mais prático do que o tratamento geométrico (limitado ao $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

3.3.1 Vetores Bidimensionais e Tridimensionais

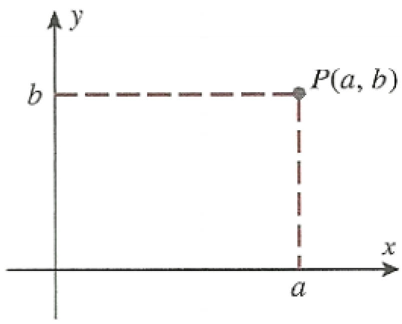
Definição 5. *Um sistema de coordenadas retangulares no plano consiste de dois eixos coordenadas perpendiculares que em geral são denominados eixo x e eixo y.*

O ponto de intersecção dos eixos é denominado a origem do sistema de coordenadas.



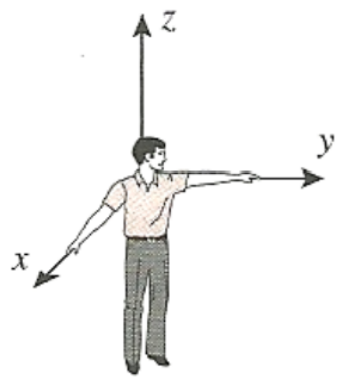
Assim, existe um correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados (x, y) de números reais:

> cada ponto P do plano está associado a um único par ordenado (a, b) de números reais e cada par ordenado de números reais (a, b) está associado a um único ponto P.



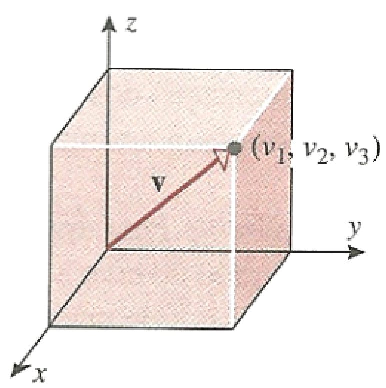
Observação 3.3.1. *Os números do par ordenado são ditos coordenadas de P.*

Definição 6. *Um sistema de coordenadas retangulares no espaço consiste de três eixos coordenados mutuamente perpendiculares que em geral são ditos eixo x, eixo y e eixo z. O ponto de intersecção dos eixos é dito origem do sistema de coordenadas.*



Sistema de mão direita

Definição 7. *Se um vetor v qualquer do plano ou do espaço tem seu ponto inicial na origem do sistema de coordenadas retangulares, então o vetor está completamente determinado pelas coordenadas de seu ponto final e dizemos que estas coordenadas são os componentes do vetor v em relação ao sistema de coordenadas.*



Veja o conteúdo complementar.

Notação:

(1) $v = (v_1, v_2)$ para o vetor v no plano com componentes (v_1, v_2);

(2) $v = (v_1, v_2, v_3)$ para o vetor v no espaço com componentes (v_1, v_2, v_3).

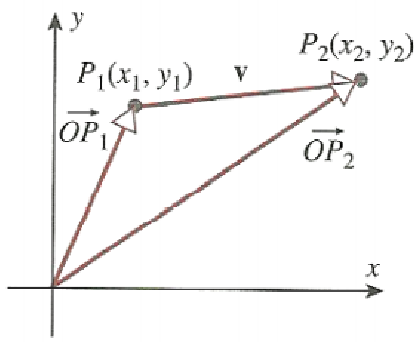
Definição 8. *Os vetores* $v = (v_1, v_2)$ *e* $w = (w_1, w_2)$ *são equivalentes se, e somente se,* $v_1 = w_1$ *e* $v_2 = w_2$.

Observação 3.3.2.

1. *Vale para o espaço, os vetores* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $w = (w_1, w_2, w_3)$ *são equivalentes se, e somente se,* $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ *e* $v_3 = w_3$.

2. *Algebricamente, os vetores no plano podem ser vistos como pares ordenados de números reais e os vetores no espaço como ternos ordenados de números reais. Assim, denotaremos o conjunto de todos os vetores do plano por* $\mathbb{R}^2$ *e o conjunto de todos vetores do espaço por* $\mathbb{R}^3$.

Surge uma questão: Como determinar os componentes de um vetor v em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ que não tem seu ponto inicial na origem?



$$v = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = P_2 - P_1$$

Veja o conteúdo complementar.

Definição 9. **(a)** *O vetor no plano que tem ponto inicial* $P_1(x_1, y_1)$ *e ponto final* $P_2(x_2, y_2)$ *é* $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

(b) *O vetor no espaço que tem ponto inicial* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *e ponto final* $P_2(x_2, y_2, z_2)$ *é* $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Exemplo 3.3.1. *Determine os componentes do vetor* v *que tem ponto inicial em* $P_1(2, -1)$ *e ponto final em* $P_2(3, 5)$. *Represente geometricamente o vetor* v.
Solução: Link da solução.

Exemplo 3.3.2. *Determine os componentes do vetor* v *que tem ponto inicial em* $P_1(2, -1, 4)$ *e ponto final em* $P_2(3, 5, -3)$. *Representar geometricamente o vetor* v.
Solução: Link da solução.

3.3.2 Vetores n-dimensionais

Definição 10. *Se* n *é um número inteiro positivo, então uma* n*-upla (ou ênupla) ordenada é uma sequência de* n *números reais* $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$.

O conjunto de todas as ênuplas ordenadas é denominado o espaço n-dimensional e é denotado por $\mathbb{R}^n$.

Notação: $v = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$ notação vetorial.

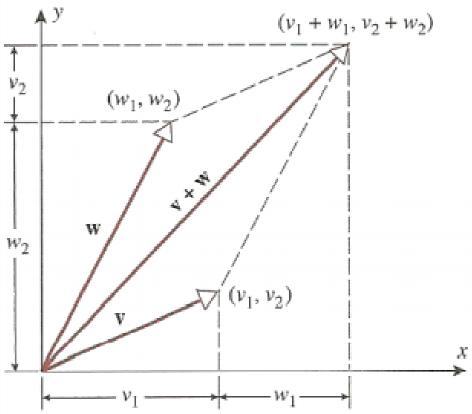
Observação 3.3.3. *Pensamos nos números de uma ênupla* $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$ *ou como as coordenadas de um ponto generalizado ou como as componentes de um vetor generalizado.*

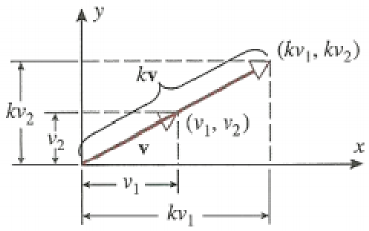
Observação 3.3.4. *Dentre as várias aplicações do* $\mathbb{R}^n$ *podemos citar: dados experimentais, circuitos elétricos, economia, entre outros.*

E mais, Albert Einstein (1879-1955) trabalhava com espaço de dimensão 4 na teoria do Campo Unificado (eletromagnetismo + gravidade).

3.4 Operações com Vetores - Algebricamente

Sejam $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ vetores do $\mathbb{R}^2$ e k um número real.





Definição 11. *Sejam $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ vetores do $\mathbb{R}^2$ e k um número real. Definimos:*

$$v + w = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

$$kv = k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2)$$

$$-v = (-1)(v_1, v_2) = (-v_1, -v_2)$$

$$v - w = v + (-w) = (v_1, v_2) + (-w_1, -w_2) = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$$

Observação 3.4.1. *Obtêm-se analogamente a definição acima para vetores do $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, ..., \mathbb{R}^n$.*

Exemplo 3.4.1. *1) Dados os vetores $v = (1, 4)$ e $w = (2, 5)$, calcule:*

(a) $v + w$ *(b) $2v$* *(c) $-w$* *(d) $v - w$*

2) Dados os vetores $v = (1, 3, 4)$ e $w = (5, 9, -1)$, calcule:

(a) $v + w$ *(b) $3v$* *(c) $-4w$* *(d) $w - v$*

Solução: Link da solução.

Propriedades: Sejam u, v e w vetores e k_1, k_2 escalares:

(a) $u + v = v + u$

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(c) $u + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + u = u$

(d) $u + (-u) = \overrightarrow{0}$

(e) $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v$

(f) $k_1(v + w) = k_1 v + k_1 w$

(g) $k_1(k_2 u) = (k_1 k_2)u$

(h) $1u = u$

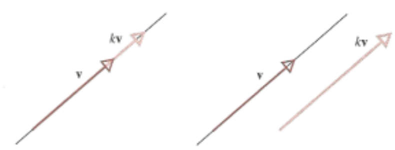
(i) $0v = \overrightarrow{0}$

(j) $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

(k) $(-1)v = -v$

Definição 12. *Dois vetores são paralelos (ou colineares) se pelo menos um dos dois vetores é um múltiplo escalar do outro, ou seja,*

$$u = kv$$



Exemplo 3.4.2. *O vetor $u = (-2, 1, 0)$ é paralelo ao vetor $v = (4, 2, 0)$?*
Solução: *Link da solução.*

Frequentemente utilizamos a adição, a subtração e a multiplicação por escalar em combinação para formar novos vetores.

Definição 13. *Um vetor w é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ se w pode ser expresso na forma:*

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k$$

onde $c_1, c_2, ..., c_k$ são escalares e são ditos coeficientes da combinação linear.

Exemplo 3.4.3. *O vetor $u = (2, 3)$ é uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{j} = (0, 1)$.*

Solução: *Link da solução.*

Observação 3.4.2. *Todo vetor $v = (x, y)$ do plano bidimensional pode ser decomposto segundo as direções dos vetores $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{j} = (0, 1)$. Isto é, existem números reais a e b tais que,*

$$\overrightarrow{v} = a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j}$$

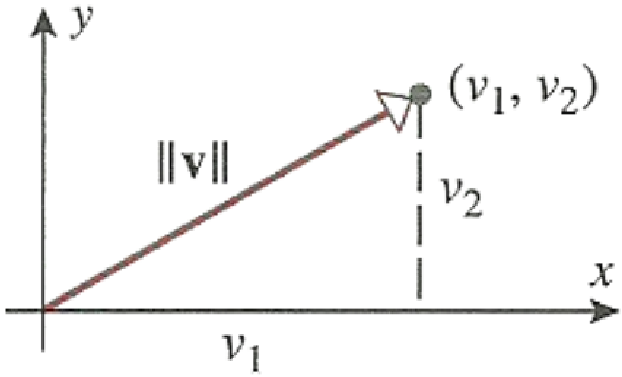
Neste caso, dizemos que v é combinação linear de $\overrightarrow{i}$ e $\overrightarrow{j}$.

Notações para vetores:

- $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ usual
- $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n \end{bmatrix}$ vetor-linha
- $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ vetor-coluna

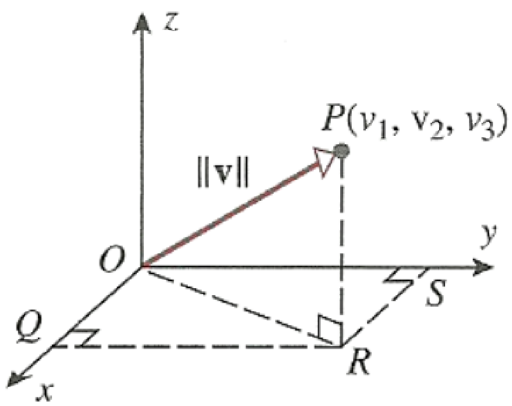
Agora estudaremos os conceitos de comprimento, ângulo, distância e perpendicularidade em $\mathbb{R}^2$ e os estenderemos ao $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

3.5 Norma de um Vetor e Vetores Unitários



Observe que temos um triângulo retângulo. Assim, utilizando o Teorema de Pitágoras obtemos que

$$\| v \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



De forma análoga, no $\mathbb{R}^3$ obtemos

$$\| v \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Definição 14. *Se $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ é um vetor em $\mathbb{R}^n$, então o comprimento de v, também denominado norma de v ou magnitude de v, é denotado por $||v||$ e definido como*

$$\| v \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2}$$

Exemplo 3.5.1. *Dado o vetor $u = (-1, 2)$ em $\mathbb{R}^2$, calcule $||u||$ e esboce geometricamente o vetor.*

Solução: *Link da solução.*

Exercício 3.5.1. *Dado o vetor $u = (-3, 2, 1)$ em $\mathbb{R}^3$, calcule $||u||$ e esboce geometricamente o vetor.*

Exemplo 3.5.2. *Dado o vetor $u = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^7$, calcule $||u||$.*

Solução: *Link da solução.*

Propriedades: Seja v um vetor em $\mathbb{R}^n$ e k um escalar qualquer. Então,

(a) $||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \overrightarrow{0}$

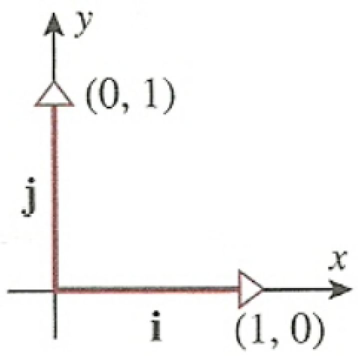
(b) $||kv|| = |k| \cdot ||v||$

Definição 15. *Um vetor de comprimento 1 é denominado um vetor unitário.*

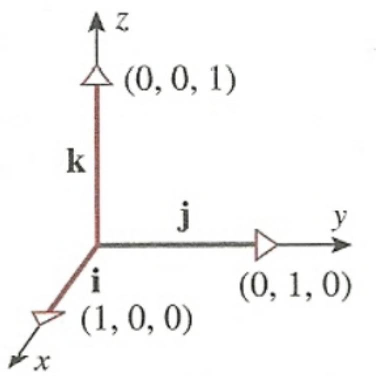
Os Vetores Unitários Canônicos

Quando consideramos um sistema de coordenadas retangulares em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, dizemos que os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados são os vetores unitários canônicos.

- No $\mathbb{R}^2$ estes vetores são denotados por $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{j} = (0, 1)$



- No $\mathbb{R}^3$ estes vetores são denotados por $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ e $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$



Mais geralmente, definimos os vetores unitários canônicos de $\mathbb{R}^n$ por $e_1 = (1,0,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$,..., $e_n = (0,0,0,...,1)$.

Observação 3.5.1.

1. *Cada vetor $v = (v_1, v_2)$ em $\mathbb{R}^2$ pode ser expresso em termos de vetores unitários canônicos como*

$$v = (v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1) = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j}$$

e cada vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ em $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso em termos de vetores unitários canônicos como

$$v = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}$$

2. *De forma análoga, cada vetor* $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$ *pode ser expresso em termos de vetores unitários canônicos como*

$$v = (v_1, v_2, ..., v_n) = v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_ne_n$$

Exemplo 3.5.3. *Expresse os vetores abaixo em termos dos vetores unitários canônicos.*

(a) $v = (3, 1)$

(b) $v = (0, 5)$

(c) $v = (2, -3, 4)$

(d) $v = (4, 2, -4, 2, -1)$

Solução: Link da solução.

Teorema 3.5.1. *Se* v *é um vetor não-nulo em* $\mathbb{R}^n$*, então um vetor unitário* u *que tem a mesma direção e sentido do que* v *é dado por*

$$u = \frac{1}{||v||}\ v = \frac{v}{||v||}$$

Exemplo 3.5.4. *Encontre um vetor unitário* u *que tem a mesma direção e sentido de* $w = (2, 2, -1)$.

Solução: Link da solução.

3.6 Exercícios sobre Vetores - Parte 1

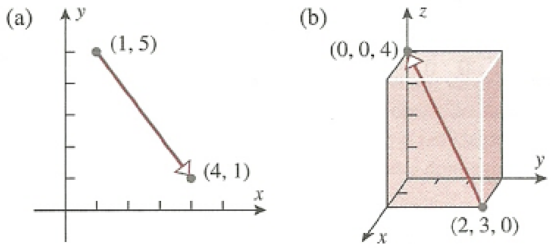
Exercício 3.6.1. *Esboce os vetores com seus pontos iniciais na origem.*

(a) $v = (3, 6)$ *(b)* $v = (-4, -8)$ *(c)* $v = (3, 3, 0)$ *(d)* $v = (0, 0, -3)$

Exercício 3.6.2. *Esboce os vetores com seus pontos iniciais na origem, sabendo que* $u = (1, 1)$ *e que* $v = (-1, 1)$.

(a) $2u$ *(b)* $u + v$ *(c)* $-u + v$ *(d)* *2u-3v* *(e)* $u + 2v$

Exercício 3.6.3. *Encontre os componentes do vetor e esboce um vetor equivalente com ponto inicial na origem.*



Exercício 3.6.4. *Encontre os componentes do vetor* $\overrightarrow{P_1P_2}$.

(a) $P_1(3,5)$, $P_2(2,8)$ *(b)* $P_1(5,-2,1)$ *e* $P_2(2,4,2)$

Exercício 3.6.5. *(a) Encontre o ponto final do vetor equivalente a* $u = (1,2)$ *que tem ponto inicial em* $A(1,1)$.

(b) Encontre o ponto inicial do vetor equivalente a $u = (1,1,3)$ *que tem ponto final em* $B(-1,-1,2)$.

Exercício 3.6.6. *Sejam* $u = (1,2,-3,5,0)$, $v = (0,4,-1,1,2)$ *e* $w = (7,1,-4,-2,3)$. *Encontre os componentes de:*

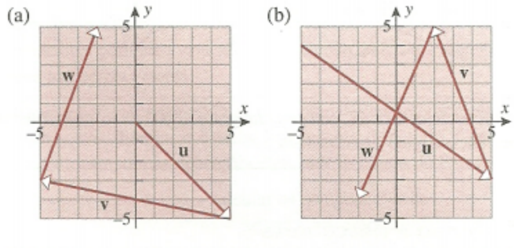
(a) $v + w$ *(b)* $3(2u - v)$ *(c)* $(3u - v) - (2u + 4w)$

Exercício 3.6.7. *Sejam* u, v *e* w *os três vetores do exercício acima. Encontre os componentes do vetor* x *que satisfaz a equação* $3u + v - 2w = 3x + 2w$.

Exercício 3.6.8. *Qual dos seguintes vetores de* $\mathbb{R}^6$ *é paralelo a* $u = (-2,1,0,3,5,1)$*?*

(a) $(4,2,0,6,10,2)$ *(b)* $(4,-2,0,-6,-10,-2)$ *(c)* $(0,0,0,0,0,0)$

Exercício 3.6.9. *Em cada parte, esboce o vetor $u + v + w$ e expresse-o em forma de componentes.*



Exercício 3.6.10. *Sejam $u = (2, 1, 0, 1, -1)$ e $v = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Encontre escalares a e b tais que $au + bv = (-8, 8, 3, -1, 7)$*

Exercício 3.6.11. *Esboce dois paralelogramos que têm vértices nos pontos $A(0, 0)$, $B(-1, 3)$ e $C(1, 2)$.*

Exercício 3.6.12. *Encontre a norma de v, um vetor unitário de mesma direção e sentido do que v e um vetor unitário de sentido oposto ao de v.*
(a) $v = (-5, 12)$ *(b)* $v = (1, -1, 2)$ *(c)* $v = (-2, 3, 3, -1)$

Exercício 3.6.13. *Dados $u = (2, -2, 3)$, $v = (1, -3, 4)$ e $w = (3, 6, -4)$, calcule a expressão dada:*
(a) $\|u + v\|$ *(b)* $\|u\| + \|v\|$ *(c)* $\|3u - 5v + w\|$

Exercício 3.6.14. *Seja $v = (1, 1, 2, -3, 1)$. Encontre todos os escalares reais k tais que $\|kv\| = 4$.*

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[3] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[4] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[5] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[7] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[8] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[9] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.