Métodos de Runge - Kutta

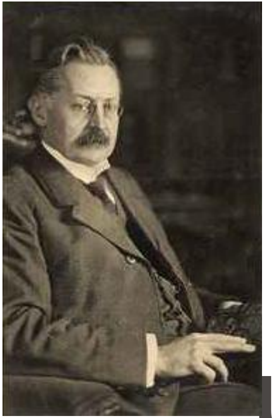
Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

16 de agosto de 2021

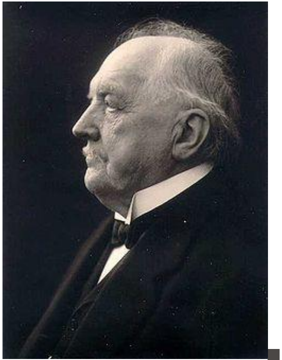
Carl David Tolmé Runge (1856-1927)

- Físico-matemático alemão, desenvolveu o seu método numérico para a resolução de equações diferenciais que surgem do estudo de espectros atômicos.
- Seu problema da oscilação do polinômio interpolador nos extremos de um intervalo foi descrito em 1901.
- Sempre atlético e festivo, na sua festa de aniversário de 70 anos divertiu seus netos e amigos “plantando bananeira”.
- Possui uma cratera na Lua com o seu nome.



Martin Wilhelm Kutta (1867-1944)

- Engenheiro alemão. Sua tese de doutorado de 1900 contém o desenvolvimento até a ordem 5ª do hoje denominados métodos de Runge-Kutta.
- Fez importantes contribuições na aeronáutica.
- Também tinha interesse em geleiras, fazendo medições baseadas em fotografias dos Alpes do Leste e trabalhou com outras pessoas para construir mapas de áreas cobertas por geleiras.



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Introdução

Os métodos de Runge-Kutta alcançam acurácia de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior. No entanto, podemos obter mesma conclusão recorrendo as regras de integração numérica.
Como feito no método de Euler, considere o seguinte p. v. i.:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

(2)

Introdução

Os métodos de Runge-Kutta alcançam acurácia de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior. No entanto, podemos obter mesma conclusão recorrendo as regras de integração numérica.
Como feito no método de Euler, considere o seguinte p. v. i.:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Integrando ambos os lados da equação diferencial acima de x_j à $x_j + h$, obtemos:

(2)

Introdução

Os métodos de Runge-Kutta alcançam acurácia de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior. No entanto, podemos obter mesma conclusão recorrendo as regras de integração numérica.
Como feito no método de Euler, considere o seguinte p. v. i.:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Integrando ambos os lados da equação diferencial acima de x_j à $x_j + h$, obtemos:

$$\int_{x_j}^{x_j+h} y'(\sigma)\, d\sigma = \int_{x_j}^{x_j+h} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma \tag{2}$$

Introdução

Os métodos de Runge-Kutta alcançam acurácia de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas de ordem superior. No entanto, podemos obter mesma conclusão recorrendo as regras de integração numérica.
Como feito no método de Euler, considere o seguinte p. v. i.:

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Integrando ambos os lados da equação diferencial acima de x_j à $x_j + h$, obtemos:

$$(2) \qquad y(x_j + h) - y(x_j) = \int_{x_j}^{x_j+h} y'(\sigma)\, d\sigma = \int_{x_j}^{x_j+h} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma$$

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Portanto, a solução do nosso p.v.i. (1) pode ser obtida resolvendo a equação integral (2). Para tanto, podemos empregar integração numérica, a saber,

Portanto, a solução do nosso p.v.i. (1) pode ser obtida resolvendo a equação integral (2). Para tanto, podemos empregar integração numérica, a saber,

Regra dos Trapézios

$$\int_a^b f(\sigma)\, d\sigma \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] .$$

Portanto, a solução do nosso p.v.i. (1) pode ser obtida resolvendo a equação integral (2). Para tanto, podemos empregar integração numérica, a saber,

Regra dos Trapézios

$$\int_a^b f(\sigma)\, d\sigma \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] .$$

Considerando $a = x_j$ e $b = x_j + h$, temos:

Portanto, a solução do nosso p.v.i. (1) pode ser obtida resolvendo a equação integral (2). Para tanto, podemos empregar integração numérica, a saber,

Regra dos Trapézios

$$\int_a^b f(\sigma)\, d\sigma \approx \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)]\ .$$

Considerando $a = x_j$ e $b = x_j + h$, temos:

$$\int_{x_j}^{x_j+h} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma \approx \frac{h}{2}\left[f(x_j, y(x_j)) + f(x_j+h, y(x_j+h))\right]\ . \tag{3}$$

Fazendo $y_j \approx y(x_j)$ e $x_j + h = x_{j+1}$, tendo em mente (2) e (3), resulta que a solução do p.v.i. (1) é

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_{j+1})\right] .$$

Fazendo $y_j \approx y(x_j)$ e $x_j + h = x_{j+1}$, tendo em mente (2) e (3), resulta que a solução do p.v.i. (1) é

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_{j+1})\right] .$$

Usando o método de Euler para substituir y_{j+1} do lado direito da equação acima, vem que

Fazendo $y_j \approx y(x_j)$ e $x_j + h = x_{j+1}$, tendo em mente (2) e (3), resulta que a solução do p.v.i. (1) é

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_{j+1})\right] .$$

Usando o método de Euler para substituir y_{j+1} do lado direito da equação acima, vem que

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left[f(x_j, y_j) + f(x_j + h, y_j + h\, f(x_j, y_j))\right] .$$

Método de Runge - Kutta de Segunda Ordem

$$(4) \qquad \begin{cases} y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 = f(x_j, y_j), \\ k_2 = f(x_j + h, y_j + h\,k_1) \end{cases}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 1

Usando o método de Método de Runge - Kutta de segunda ordem, calcule a solução aproximada do seguinte p. v. i.:

$$(5) \qquad \begin{cases} y' = f(x,y) = x - y + 2 \\ y(x_0) = y(0) = 2 \end{cases}$$

para $x \in [a,b] = [0,1]$ *e* $n = 5$ *subintervalos.*

Solução: Note que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2,$$

logo, o intervalo $[0,1]$ é discretizado por

Solução: Note que

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2,$$

logo, o intervalo $[0,1]$ é discretizado por

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1 \end{array}$$

- Cálculo de y_1 :

- Cálculo de y_1 :

Para $j = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

- Cálculo de y_1 :

Para $j = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\
k_2 &= f(x_0 + h, y_0 + h\,k_1) \\
&= x_0 + h - y_0 - h\,k_1 + 2
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_1 :

Para $j = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\
k_2 &= f(x_0 + h, y_0 + h\,k_1) \\
&= x_0 + h - y_0 - h\,k_1 + 2 \\
&= 0 + 0,2 - \cancel{2} + \cancel{2}
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_1 :

Para $j = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\ k_2 &= f(x_0 + h, y_0 + h\,k_1) \\ &= x_0 + h - y_0 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0 + 0,2 - \cancel{2} + \cancel{2} \\ &= 0,2\,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_1 :

Para $j = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 2$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$, e assim, a fórmula (5) o que nos dá:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\ k_2 &= f(x_0 + h, y_0 + h\,k_1) \\ &= x_0 + h - y_0 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0 + 0,2 - \cancel{2} + \cancel{2} \\ &= 0,2\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ &= 2 + \frac{0,2}{2}(0 + 0,2) = 2,0200\,. \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_2 :

- Cálculo de y_2 :

Para $j = 1$, temos que $x_1 = 0,2$ e $y_1 = 2,0200$, e assim, temos:

- Cálculo de y_2 :

Para $j = 1$, temos que $x_1 = 0,2$ e $y_1 = 2,0200$, e assim, temos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_1, y_1) = 0,2 - 2,0200 + 2 = 0,18 \\ k_2 &= f(x_1 + h, y_1 + h\,k_1) \\ &= x_1 + h - y_1 - h\,k_1 + 2 \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_2 :

Para $j = 1$, temos que $x_1 = 0,2$ e $y_1 = 2,0200$, e assim, temos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_1, y_1) = 0,2 - 2,0200 + 2 = 0,18 \\ k_2 &= f(x_1 + h, y_1 + h\,k_1) \\ &= x_1 + h - y_1 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,2 + 0,2 - 2,02 - 0,2, \cdot 0,18 + 2 \end{aligned}$$

- Cálculo de y_2 :

Para $j = 1$, temos que $x_1 = 0,2$ e $y_1 = 2,0200$, e assim, temos:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_1, y_1) = 0,2 - 2,0200 + 2 = 0,18 \\
k_2 &= f(x_1 + h, y_1 + h\,k_1) \\
&= x_1 + h - y_1 - h\,k_1 + 2 \\
&= 0,2 + 0,2 - 2,02 - 0,2, \cdot 0,18 + 2 \\
&= 0,344\,.
\end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_2 :

Para $j = 1$, temos que $x_1 = 0,2$ e $y_1 = 2,0200$, e assim, temos:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_1, y_1) = 0,2 - 2,0200 + 2 = 0,18 \\
k_2 &= f(x_1 + h, y_1 + h\,k_1) \\
&= x_1 + h - y_1 - h\,k_1 + 2 \\
&= 0,2 + 0,2 - 2,02 - 0,2, \cdot 0,18 + 2 \\
&= 0,344\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\
&= 2,0200 + \frac{0,2}{2}(0,18 + 0,344) = 2,0724\,.
\end{aligned}$$

- Cálculo de y_3 :

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_2, y_2) = 0,4 - 2,0724 + 2 = 0,3276 \\
k_2 &= f(x_2 + h, y_2 + h\,k_1) \\
&= x_2 + h - y_2 - h\,k_1 + 2
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_2, y_2) = 0,4 - 2,0724 + 2 = 0,3276 \\
k_2 &= f(x_2 + h, y_2 + h\,k_1) \\
&= x_2 + h - y_2 - h\,k_1 + 2 \\
&= 0,4 + 0,2 - 2,0724 - 0,2, \cdot 0,3276 + 2
\end{aligned}$$

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_2, y_2) = 0,4 - 2,0724 + 2 = 0,3276 \\
k_2 &= f(x_2 + h, y_2 + h\,k_1) \\
&= x_2 + h - y_2 - h\,k_1 + 2 \\
&= 0,4 + 0,2 - 2,0724 - 0,2, \cdot 0,3276 + 2 \\
&= 0,4621\,.
\end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_3 :

Para $n = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_2, y_2) = 0,4 - 2,0724 + 2 = 0,3276 \\ k_2 &= f(x_2 + h, y_2 + h\,k_1) \\ &= x_2 + h - y_2 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,4 + 0,2 - 2,0724 - 0,2, \cdot 0,3276 + 2 \\ &= 0,4621\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ &= 2,0724 + \frac{0,2}{2}(0,3276 + 0,4621) = 2,1514\,. \end{aligned}$$

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_4 :

- Cálculo de y_4 :

Para $j = 3$, obtemos:

- Cálculo de y_4 :

Para $j = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_3, y_3) = 0,6 - 2,1514 + 2 = 0,4486 \\ k_2 &= f(x_3 + h, y_3 + h\,k_1) \\ &= x_3 + h - y_3 - h\,k_1 + 2 \end{aligned}$$

- Cálculo de y_4 :

Para $j = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_3, y_3) = 0,6 - 2,1514 + 2 = 0,4486 \\ k_2 &= f(x_3 + h, y_3 + h\,k_1) \\ &= x_3 + h - y_3 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,6 + 0,2 - 2,1514 - 0,2, \cdot 0,4486 + 2 \end{aligned}$$

- Cálculo de y_4 :

Para $j = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_3, y_3) = 0,6 - 2,1514 + 2 = 0,4486 \\ k_2 &= f(x_3 + h, y_3 + h\,k_1) \\ &= x_3 + h - y_3 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,6 + 0,2 - 2,1514 - 0,2, \cdot 0,4486 + 2 \\ &= 0,5589\,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_4 :

Para $j = 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_3, y_3) = 0,6 - 2,1514 + 2 = 0,4486 \\ k_2 &= f(x_3 + h, y_3 + h\,k_1) \\ &= x_3 + h - y_3 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,6 + 0,2 - 2,1514 - 0,2, \cdot 0,4486 + 2 \\ &= 0,5589\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ &= 2,1514 + \frac{0,2}{2}(0,4486 + 0,5589) = 2,2521\,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_5 :

- Cálculo de y_5 :

Para $j = 4$, obtemos:

- Cálculo de y_5 :

Para $j = 4$, obtemos:

$$k_1 = f(x_4, y_4) = 0,8 - 2,2521 + 2 = 0,5479$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_4 + h, y_4 + h\,k_1) \\ &= x_4 + h - y_4 - h\,k_1 + 2 \end{aligned}$$

- Cálculo de y_5 :

Para $j = 4$, obtemos:

$$k_1 = f(x_4, y_4) = 0,8 - 2,2521 + 2 = 0,5479$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_4 + h, y_4 + h\,k_1) \\ &= x_4 + h - y_4 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,8 + 0,2 - 2,2521 - 0,2, \cdot 0,5479 + 2 \end{aligned}$$

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_5 :

Para $j = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_4, y_4) = 0,8 - 2,2521 + 2 = 0,5479 \\ k_2 &= f(x_4 + h, y_4 + h\,k_1) \\ &= x_4 + h - y_4 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,8 + 0,2 - 2,2521 - 0,2, \cdot 0,5479 + 2 \\ &= 0,6383\,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_5 :

Para $j = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_4, y_4) = 0,8 - 2,2521 + 2 = 0,5479 \\ k_2 &= f(x_4 + h, y_4 + h\,k_1) \\ &= x_4 + h - y_4 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,8 + 0,2 - 2,2521 - 0,2, \cdot 0,5479 + 2 \\ &= 0,6383\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_5 &= y_4 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ &= 2,2521 + \frac{0,2}{2}(0,5479 + 0,6383) = 2,3707\,. \end{aligned}$$

- Cálculo de y_5 :

Para $j = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_4, y_4) = 0,8 - 2,2521 + 2 = 0,5479 \\ k_2 &= f(x_4 + h, y_4 + h\,k_1) \\ &= x_4 + h - y_4 - h\,k_1 + 2 \\ &= 0,8 + 0,2 - 2,2521 - 0,2, \cdot 0,5479 + 2 \\ &= 0,6383\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_5 &= y_4 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ &= 2,2521 + \frac{0,2}{2}(0,5479 + 0,6383) = 2,3707\,. \end{aligned}$$

"WxMaxima"

Runge–Kutta de Ordem 4

Dado o p.v.i. (1), a ideia agora é usar a Regra 1/3 de Simpson:

(6)

$$\int_{x_j}^{x_j+h} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma \approx \frac{\frac{h}{2}}{3}\left[f(x_j, y(x_j)) + 4\, f(x_j + h/2, y(x_j + h/2)) + f(x_j + h, y(x_j + h))\right]$$

$$= \frac{h}{6}\Big[f(x_j, y(x_j)) + 2\, f(x_j + h/2, y(x_j + h/2))$$

$$+ 2\, f(x_j + h/2, y(x_j + h/2)) + f(x_j + h, y(x_j + h))\Big].$$

Runge–Kutta de Ordem 4

- Recordando o método de Euler, temos que a inclinação no ponto (x_j, y_j) é dada por $k_1 = f(x_j, y_j)$.

Runge–Kutta de Ordem 4

- Recordando o método de Euler, temos que a inclinação no ponto (x_j, y_j) é dada por $k_1 = f(x_j, y_j)$.
- Usando o método de Euler para estimar $y(x_j + h/2)$, temos:

Runge–Kutta de Ordem 4

- Recordando o método de Euler, temos que a inclinação no ponto (x_j, y_j) é dada por $k_1 = f(x_j, y_j)$.
- Usando o método de Euler para estimar $y(x_j + h/2)$, temos:

$$y(x_j + h/2) \approx y_{j+h/2} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) = y_j + \frac{h}{2} k_1.$$

Runge–Kutta de Ordem 4

- Recordando o método de Euler, temos que a inclinação no ponto (x_j, y_j) é dada por $k_1 = f(x_j, y_j)$.
- Usando o método de Euler para estimar $y(x_j + h/2)$, temos:

$$y(x_j + h/2) \approx y_{j+h/2} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) = y_j + \frac{h}{2} k_1 .$$

Assim, denotamos a nova inclinação:

$$k_2 = f(x_j + h/2, y(x_j + h/2)) = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_1\right) .$$

Runge–Kutta de Ordem 4

- Usando esta recente inclinação k_2 com o método de Euler, obtemos:

Runge–Kutta de Ordem 4

- Usando esta recente inclinação k_2 com o método de Euler, obtemos:

$$y(x_j + h/2) \approx y_{j+h/2} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) = y_j + \frac{h}{2} k_2.$$

Runge–Kutta de Ordem 4

- Usando esta recente inclinação k_2 com o método de Euler, obtemos:

$$y(x_j + h/2) \approx y_{j+h/2} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) = y_j + \frac{h}{2} k_2.$$

Assim, denotamos outra inclinação por

$$k_3 = f(x_j + h/2, y(x_j + h/2)) = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_2\right).$$

Runge–Kutta de Ordem 4

- Usando esta recente inclinação k_2 com o método de Euler, obtemos:

$$y(x_j + h/2) \approx y_{j+h/2} = y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j) = y_j + \frac{h}{2} k_2.$$

Assim, denotamos outra inclinação por

$$k_3 = f(x_j + h/2, y(x_j + h/2)) = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} k_2\right) .$$

- Finalmente, nós usamos esta última inclinação para estimar

$$y(x_j + h) = y_{x_j+h} = y_j + h\, k_3,$$

donde denotamos:

$$k_4 = f(x_j + h, y(x_j + h)) = f\left(x_j + h, y_j + h\, k_3\right) .$$

Runge–Kutta de Ordem 4

Neste caso, temos as seguintes fórmulas:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right), \\ k_1 = f(x_j, y_j) \\ k_2 = f\left(x_j + \dfrac{h}{2}, y_j + \dfrac{h}{2}\,k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_j + \dfrac{h}{2}, y_j + \dfrac{h}{2}\,k_2\right) \\ k_4 = f\left(x_j + h, y_j + h\,k_3\right) \end{array} \right. \qquad , \; j = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Runge–Kutta de Ordem 4

Remark 2.1

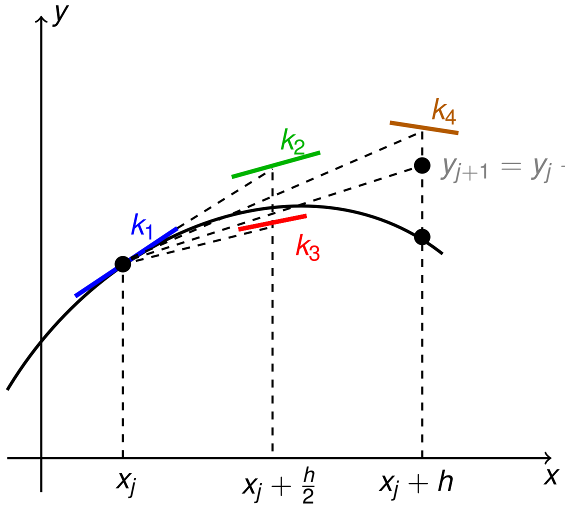
- *Observe que k_1 é o valor exato de f no intervalo $[x_j, x_j + h]$, k_2 e k_3 são estimativas para f no meio do intervalo $x_j + h/2$ e k_4 para f no fim do intervalo.*

Runge–Kutta de Ordem 4

Remark 2.1

- *Observe que* k_1 *é o valor exato de* f *no intervalo* $[x_j, x_j + h]$, k_2 *e* k_3 *são estimativas para* f *no meio do intervalo* $x_j + h/2$ *e* k_4 *para* f *no fim do intervalo.*
- *O Método de Runge-Kutta mais simples, a saber, quando* $n = 1$, *coincide com o método de Euler.*

Runge–Kutta de Ordem 4



$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}\,(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4)$$

Exemplo 2

Usando o método de Método de Runge - Kutta de quarta ordem, calcule a solução aproximada do seguinte p. v. i.:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = x - y + 2 \\ y(x_0) = y(0) = 2 \end{cases} \tag{8}$$

para $x \in [a, b] = [0, 1]$ *e* $h = 0, 2.$

Solução: Note que

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0,2} = 5,$$

logo, o intervalo $[0, 1]$ é discretizado por

Solução: Note que

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0,2} = 5,$$

logo, o intervalo $[0, 1]$ é discretizado por

$$\begin{array}{cccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,8 & 1 \end{array}$$

- Cálculo de y_1 :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0$$

- Cálculo de y_1 :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_1 :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}k_1 + 2 = 0,1\,.$$

- Cálculo de y_1 :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) \\ &= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}k_1 + 2 = 0,1 \,. \end{aligned}$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

- Cálculo de y_1 :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}k_1 + 2 = 0,1\,.$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

- Cálculo de y_1 :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_1\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2} k_1 + 2 = 0,1\,. \\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_2\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2} k_2 + 2 = 0,0900\,.
\end{aligned}
$$

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Cálculo de y_1 :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,k_1\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}\,k_1 + 2 = 0,1\,. \\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,k_2\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}\,k_2 + 2 = 0,0900\,. \\
k_4 &= f\left(x_0 + h, y_0 + h\,k_3\right)
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_1 :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,k_1\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}\,k_1 + 2 = 0,1\,. \\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,k_2\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}\,k_2 + 2 = 0,0900\,. \\
k_4 &= f\left(x_0 + h, y_0 + h\,k_3\right)
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_1 :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,k_1\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}\,k_1 + 2 = 0,1\,. \\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}\,k_2\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2}\,k_2 + 2 = 0,0900\,. \\
k_4 &= f\left(x_0 + h, y_0 + h\,k_3\right) \\
&= x_0 + h - y_0 - h\,k_3 + 2 = 0,1820\,.
\end{aligned}
$$

- Cálculo de y_1 :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = x_0 - y_0 + 2 = 0 - \cancel{2} + \cancel{2} = 0 \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_1\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2} k_1 + 2 = 0,1 \,. \\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_2\right) \\
&= x_0 + \frac{h}{2} - y_0 - \frac{h}{2} k_2 + 2 = 0,0900 \,. \\
k_4 &= f\left(x_0 + h, y_0 + h\, k_3\right) \\
&= x_0 + h - y_0 - h\, k_3 + 2 = 0,1820 \,.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right) = 2,0187 \,.
$$

- Cálculo de y_2 :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right) = 2,0703\,.$$

- Cálculo de y_2 :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,0703\,.$$

- Cálculo de y_3 :

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,1488\,.$$

- Cálculo de y_2 :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right) = 2,0703\,.$$

- Cálculo de y_3 :

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right) = 2,1488\,.$$

- Cálculo de y_4 :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right) = 2,2493\,.$$

- Cálculo de y_2 :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,0703\,.$$

- Cálculo de y_3 :

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,1488\,.$$

- Cálculo de y_4 :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,2493\,.$$

- Cálculo de y_5 :

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,3679\,.$$

- Cálculo de y_2 :

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,0703\,.$$

- Cálculo de y_3 :

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,1488\,.$$

- Cálculo de y_4 :

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,2493\,.$$

- Cálculo de y_5 :

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4) = 2,3679\,.$$

“WxMaxima”