Método Mestre

$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + n & ; n > 1 \\ 1 & ; n = 1 \end{cases}$

$T(n) = 2T(n/2) + n$

$T(n) = 4T(n/3) + n^2$ ✓

$T(n) = T(\frac{7n}{10}) + n$

$T(n) = 2T(n-1) + n$ ✗

$T(n) = T(2n) + 1$

Teorema 1. *Teorema Mestre*

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função assintoticamente positiva e $T(n)$ definida para inteiros não-negativos a recorrência

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

interpretando $\frac{n}{b}$ como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Então $T(n)$ é limitada assintoticamente por:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

$\underbrace{\log_b a}_{x} \iff b^x = a$

Exemplo 1

Resolva a recorrência $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$ utilizando o método mestre.

$a = 9$; $b = 3$; $f(n) = n^1$

$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$

$n^1 = O(n^{2-\varepsilon})$ é verdadeiro p/ $\varepsilon = 0,1$.

Portanto, temos o caso 1 do T.M. Assim, $T(n) = \Theta(n^2)$.

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

Exemplo 2

Resolva a recorrência $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$ utilizando o método mestre.

$\frac{n}{b} = \frac{2n}{3} = \frac{1}{b} = \frac{2}{3} \iff \boxed{b = 3/2}$

① $a = 1$, $b = 3/2$, $f(n) = 1 = n^0$.

② $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0$

③ $n^0 = \Theta(n^0)$

④ Como $\overset{n^0}{f(n)} = \Theta(\overset{n^0}{n^{\log_b a}})$ então pelo caso 2 do T.M. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n)$

$= \Theta(n^0 \cdot \lg n) = \Theta(\lg n)$.

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Exemplo 5

Resolva a recorrência $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$ utilizando o método mestre.

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

interpretando $\frac{n}{b}$ como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Então $T(n)$ é limitada assintoticamente por:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

① $a=2$, $b=2$, $f(n)=n$ ② $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$.

③ $n^1 = \Theta(n^1)$. ④ Como $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ então pelo caso 2 do T.M.

$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \lg n) = \Theta(n \lg n)$.

Exemplo 3

Resolva a recorrência $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\lg n$ utilizando o método mestre.

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

interpretando $\frac{n}{b}$ como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Então $T(n)$ é limitada assintoticamente por:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

① $a=3$, $b=4$, $f(n) = n\lg n$ ② $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} \approx n^{0{,}792}$

③ $n\lg n = \Omega(n^{0{,}792+\varepsilon})$, verdadeiro p/ $\varepsilon = 0{,}1$. $n\lg n = \Omega(n^1)$

④ Parece o caso 3 do T.M. Temos $n\lg n = O(n^{1+\varepsilon})$ $\varepsilon > 0$.

que verificar se $af(n/b) \leq cf(n)$ p/ $c<1$ e c constante e n suficientemente grande.

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ $\quad 3\left(\frac{n}{4}\lg\left(\frac{n}{4}\right)\right) \leq c\, n\lg n$

$3\left(\frac{n}{4}\lg(n) - \frac{n}{4}\lg(4)\right) \leq c\, n\lg n$ $\qquad \frac{3n}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6n}{4} = \frac{3n}{2}$

$\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3n}{4} \cdot 2 \leq c\, n\lg n$

$\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3}{2}n \leq c\, n\lg n$

$\frac{3}{4}n\lg n - n\lg n\left(\frac{3}{2\lg n}\right)$ $\quad \cancel{n\lg n}\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2\lg n}\right) \leq c\, \cancel{n\lg n}$

$\frac{3}{4}n\lg n - \frac{3}{2}n$ $\quad c \geq \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2\lg n}\right)$, p/ n grande, $\frac{3}{2\lg n} \to 0$,

logo $c \geq 3/4$.

⑤ Como $c < 1$ e constante em $af(n/b) \leq cf(n)$ e $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ temos o caso 3 do T.M. Portanto, $T(n) = \Theta(n\lg n)$.