UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profa. Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Matrizes - Parte 2

1.7 Determinante de uma Matriz Quadrada

No Ensino Médio você deve ter se deparado com o cálculo de determinante de matrizes de ordem 2×2 e 3×3, fazendo uso de algumas regras e fórmulas.

No entanto, nesta seção verificaremos que o 'determinante' é um certo tipo de função, que associa a cada matriz quadrada um número real, independente da ordem da matriz quadrada.

Definição 1. *Define-se o determinante de uma matriz* $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *como o produto das entradas na diagonal principal menos o produto das entradas na diagonal secundária, ou seja,*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Exemplo 1.7.1. *Calcule o determinante das seguintes matrizes:*

1. $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

<u>*Solução:*</u>

Definição 2. *Define-se o determinante de uma matriz* $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *pela*

fórmula

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.
\end{aligned}
$$

Observação 1.7.1. *Observando a definição acima, notamos que o determinante da matriz de ordem* 3×3 *pode ser desenvolvida em função de determinantes de submatrizes* 2×2 *como segue:*

$$
\begin{aligned}
detA &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.7.2. *Calcule o determinante da seguintes matrizes:*

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Solução:

Como calcular o determinante para matrizes de ordens maiores que 3?

1.7.1 A expansão em cofatores

Definição 3. *Seja* A *é uma matriz quadrada, o menor da entrada* a_{ij} *é denotado por* M_{ij} *e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos de* A *a* *i-ésima linha e a j-ésima coluna. O número* $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ *é denominado o cofator da entrada* a_{ij}*, ou seja,* C_{ij} *é o determinante afetado pelo sinal* $(-1)^{i+j}$ *da submatriz obtida de* A *retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna.*

Exemplo 1.7.3. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$*, calcule o menor da entrada* a_{11}*,* a_{23} *e* a_{32}*, e o cofator correspondente.*

Solução:

Definição 4. *O determinante de uma matriz* $A_{n\times n}$ *pode ser calculado multiplicando as entradas de uma linha (ou coluna) qualquer pelo seus cofatores e somando os produtos assim obtidos, ou seja, para cada* $1 \leq i \leq n$ *e* $1 \leq j \leq n$ *temos*

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(expansão em cofatores ao longo da j-ésima coluna), e

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(expansão em cofatores ao longo da i-ésima linha).

Exemplo 1.7.4. *Encontre o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ *usando a expansão em cofatores.*

Solução: Primeiro vamos calcular o determinante menor da entrada a_{ij}*.*

O menor de a_{11} *é* $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 24 = 16;$

O menor de a_{12} *é* $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 6 = 10;$

O menor de a_{13} *é* $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$*. Então*

$detA = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = 3(16) - 1(10) + (-4)3 = 26.$

Exemplo 1.7.5. *Encontre o determinante da matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$ *usando a expansão em cofatores.*

<u>*Solução:*</u>

Observação 1.7.2. *A expansão em cofatores é uma fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem* n*, a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem* $n-1$*. Em grande parte dos casos ele simplifica muito o cálculo de determinantes, principalmente se for utilizado em conjunto com outras propriedades dos determinantes.*

Exemplo 1.7.6. *Calcule* $det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ *usando a linha (e depois a coluna) mais apropriada.*

<u>*Solução:*</u>

1.7.2 Algumas propriedades de determinante de uma matriz

Seja A uma matriz de ordem $n \times n$.

1. O determinante de uma matriz A não se altera quando se trocam as linhas pelas colunas.

2. Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de A são nulos, então $detA = 0$.

3. O determinante de uma matriz que tem duas linhas (ou colunas) iguais ou proporcionais é zero.

4. O determinante de uma matriz diagonal A (ou triangular superior ou triangular inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal da matriz, ou seja,

$$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

5. Se B é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de A são permutadas, então $detB = -detA$.

6. Se B é a matriz que resulta quando multiplicarmos uma única linha ou coluna de A por uma constante k, então $det(B) = kdet(A)$.

7. Se B é a matriz que resulta quando uma linha de A é somada a um múltiplo de outra linha, então $detB = detA$.

8. $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$.

9. $det(A^n) = (det\, A)^n$.

Portanto, usando as propriedades de determinante acima, podemos calcular determinante de uma matriz quadrada qualquer reduzindo-a ao formato triangular superior (ou triangular inferior ou diagonal). Para tal redução usaremos as operações elementares sobre as linhas ou colunas de uma matriz.

Definição 5. *Denomina-se operações elementares sobre as linhas ou colunas de uma matriz as seguintes operações:*
I) permutação de duas linhas (ou de duas colunas);
II) multiplicação de todos os elementos de uma linha (ou coluna) por um número real diferente de zero;
III) substituição dos elementos de uma linha (ou coluna) pela soma deles com os elementos correspondentes de outra linha (coluna) previamente multiplicados por um número real diferente de zero.

Observação 1.7.3. *1. Utilizando as propriedades de determinante e o item (I) da definição acima obtemos que o determinante da matriz resultante é igual ao determinante da matriz inicial multiplicada por* (-1)*, ou seja,*

$$L_i \Leftrightarrow L_j,$$

$$det(A) = D \rightarrow det(B) = -det(A)$$

2. *Utilizando as propriedades de determinante e o item (II) da definição acima obtemos que o determinante da matriz resultante é igual ao determinante da matriz inicial multiplicada pelo número real diferente de zero, ou seja,*

$$L_i \rightarrow k \cdot L_i,$$

$$det(A) = D \rightarrow det(B) = k \cdot det(A), \ k \in \mathbb{R}^*$$

3. *Utilizando as propriedades de determinante e o item (III) da definição acima obtemos que o determinante da matriz resultante é igual ao determinante da matriz inicial, ou seja,*

$$L_i \rightarrow L_i + k \cdot L_j, \ k \in \mathbb{R}^*$$

$$det(A) = det(B)$$

Apliquemos este método de Redução por linha para o cálculo do determinante de matrizes.

Exemplo 1.7.7. *Utilizando o método de redução por linhas, calcule o determinante das seguintes matrizes:*

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

<u>*Solução:*</u>

1.8 Matrizes Inversas

Estamos em condições de obter uma fórmula e/ou método para determinar a inversa de uma matriz invertível.

Recordemos a definição de matriz inversa.

Definição 6. *Dados A e B matrizes tais que $AB = BA = I$, dizemos que a matriz A é inversível e B é sua inversa ($B = A^{-1}$).*

Toda matriz admite inversa?

Definição 7. *Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ cujo determinante é diferente de zero é uma matriz não-singular ou regular, e tal matriz sempre tem inversa.*

Agora, munidos da condição para uma matriz ter inversa, ou seja, $det(A) \neq 0$, veremos duas maneiras de calcular a matriz inversa.

1.8.1 Cálculo da Matriz Inversa usando Cofatores

Definição 8. *Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $n \times n$ e C_{ij} é o cofator de a_{ij}, então a matriz*

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

*é chamada **matriz de cofatores de A**. A transposta desta matriz é chamada **matriz adjunta da matriz A** e é denotada por $adj(A)$, ou seja,*

$$adj(A) = (Cof(A))^t.$$

Exemplo 1.8.1. *Dado a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ calcule a matriz adjunta de A, e verifique que $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I$.*

<u>Solução:</u>

Teorema 1.8.1. *Se A é uma matriz inversível, então*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

Exemplo 1.8.2. *Dada as matrizes abaixo, determine a inversa usando cofatores:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Solução:

1.8.2 Cálculo da Matriz Inversa usando Operações Elementares

Nesta subseção vamos desenvolver um algoritmo para encontrar a inversa de uma matriz invertível fazendo uso das operações elementares.

Recordemos a definição de operações elementares sobre uma matriz.

Definição 9. *Denominam-se operações elementares de uma matriz as seguintes operações:*

I) *permutação de duas linhas (ou de duas colunas)*

II) *multiplicação de todas os elementos de uma linha (ou coluna) por um número real diferente de zero.*

III) *substituição dos elementos de uma linha (ou coluna) pela soma deles com os elementos correspondentes de outra linha (ou coluna) previamente multiplicados por um número real diferente de zero.*

Definição 10. *Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada* ***matriz elementar****.*

Teorema 1.8.2 (Operações sobre Linhas por Multiplicação Matricial). *Se a matriz elementar E resulta de efetuar uma certa operação sobre linhas em I_m e se A é uma matriz $m \times n$, então o produto EA é a matriz que resulta quando esta mesma operação sobre linhas é efetuada sobre A.*

Observação 1.8.1. *Este teorema nos auxiliará nos cálculos, pois é preferível efetuar operações sobre linhas diretamente do que multiplicar à esquerda por uma matriz elementar.*

Teorema 1.8.3. *Qualquer matriz elementar é invertível e a inversa é, também, uma matriz elementar.*

Teorema 1.8.4. *Se A é uma matriz $n \times n$ então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *A é invertível.*

(b) *Usando operações elementares sobre as linhas de A obtemos a matriz I_n, ou seja,*

$$E_k...E_2.E_1.A = I_n.$$

(c) *A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, ou seja,*

$$A = (E_1)^{-1}.(E_2)^{-1}...(E_k)^{-1}.$$

Usando a equação $E_k...E_2.E_1.A = I_n$ apontada anteriormente podemos escrever:

$$A^{-1} = E_k...E_2.E_1.I_n.$$

Esta equação nos indica que A^{-1} pode ser obtida multiplicando I_n sucessivamente à esquerda pelas matrizes elementares.

Por outro lado, observe que estas mesmas operações aplicadas sobre A faz com que obtemos I_n.

Portanto, podemos enunciar o seguinte método:

Teorema 1.8.5 (Método para Calcular Inversa usando Operações Elementares)**.** *Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, nós devemos encontrar uma sequência de* *operações elementares sobre linhas que reduz A à identidade I. Estas mesmas operações efetuadas em I nos dará* $\mathbf{A^{-1}}$.

Simbolicamente temos:

$$[A|I] \approx [I|A^{-1}]$$

Exemplo 1.8.3. *Dadas as matrizes abaixo, determine a sua inversa usando as operações elementares:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Solução:

1.9 Exercícios sobre Matrizes - Parte 2

Exercício 1.9.1. *Dada as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -9 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ *calcular, pelo método de redução de linhas ou pela expansão em cofatores:*

a) $det(A)$

b) $det(B)$

c) $det(C)$

d) $det(2A - 3B + 4C)$

e) $det(AC^t)$

f) *Verificar se* $det(A + B) = det(A) + det(B)$

g) *Verificar se* $det(BC) = det(B) \cdot det(C)$

Exercício 1.9.2. *Resolver as equações:*

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3x & 0 & 1 \\ 7x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 100$

b) $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 & x+4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 9 & 10 & 7 \end{vmatrix} = -7$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & x & 2 \\ 2x & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Exercício 1.9.3. *Encontre todos os valores de* λ *para os quais* $det(A) = 0$.

a) $A = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

Exercício 1.9.4. *Resolva em x:* $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$

Exercício 1.9.5. *Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dado por:*

	Ferro	*Madeira*	*Vidro*	*Tinta*	*Tijolo*
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

a) *Represente as informações acima por meio de uma matriz* $C_{3\times 5}$ *e escreva de que ordem é essa matriz.*

b) *Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?(Sugestão: crie a matriz quantidade,* $Q_{1\times 3}$ *e calcule a matriz material* $M = Q_{1\times 3}.C_{3\times 5}$ *)*

c) *Suponha agora que os preços por unidades de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 reais. Com relação a esses materiais qual é o preço unitário de cada tipo de casa?(Sugestão: crie a matriz preço-material* $PM_{5\times 1}$ *e calcule a matriz preço-casa* $PC = C_{3\times 5}.PM_{5\times 1}$*)*

d) *Se ele vai construir 5,7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente.Considerando os mesmos preços, use produto de matrizes para obter o custo total de material empregado.*

Exercício 1.9.6. *Encontre todos os menores de A e todos os cofatores de A.*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Exercício 1.9.7. *Calcule o determinante da matriz* $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ *usando uma expansão em cofatores ao longo da*

a) *primeira linha*

b) *primeira coluna*

c) *segunda linha*

d) *segunda coluna*

e) *terceira linha*

f) *terceira coluna*

Exercício 1.9.8. *Calcule o determinante da matriz dada usando as propriedades de determinante e as operações elementares.*

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 4 & -9 & 9 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 1.9.9. *Sabendo que* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, *encontre*

$$a)\ \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} \qquad c)\ \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$d)\ \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix} \qquad e)\ \begin{vmatrix} 3d & 3e & 3f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Exercício 1.9.10. *Calcular a matriz inversa de cada uma das matrizes dadas utilizando expansão em cofatores ou operações elementares.*

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -10 \\ -2 & -4 & -4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 \\ -6 & -9 & -24 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Exercício 1.9.11. *Seja dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, *encontre sua inversa.*

Exercício 1.9.12. *Encontre a inversa da matriz dada usando operações elementares.*

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$

Exercício 1.9.13. *Encontre a inversa de cada uma das seguintes matrizes* 4×4, *onde* k, k_1, k_2, k_3, k_4 *e* k_5 *são todos não nulos.*

a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$

Exercício 1.9.14. *Use $det(A)$ para determinar quais das seguintes matrizes são invertíveis.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{7} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{7} & 0 \\ 5 & -9 & 0 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

Exercício 1.9.15. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Supondo que $det(A) = -7$, obtenha

a) $det(3A)$ *b)* $det(A^{-1})$ *c)* $det((2A)^{-1})$ *d)* $det(2A^{-1})$ *e)* $det \begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

Exercício 1.9.16. *Use $A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot adj(A)$ para o cálculo da inversa de A e estude o determinante de A por cofatores da linha ou coluna mais apropriada.*

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[3] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[4] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[5] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[7] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[8] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[9] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.