Cálculo Numérico

Método dos Mínimos Quadrados: Caso Discreto

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

2 de agosto de 2021

Introdução

Vimos que um modo de trabalhar com uma função definida é a interpolação. Contudo, a interpolação pode não ser aconselhável quando:

1. for preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo tabelado (extrapolação).

Introdução

Vimos que um modo de trabalhar com uma função definida é a interpolação. Contudo, a interpolação pode não ser aconselhável quando:

i) for preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo tabelado (extrapolação).

ii) Quando temos um experimento com muitos pontos tabelados.

Introdução

Vimos que um modo de trabalhar com uma função definida é a interpolação. Contudo, a interpolação pode não ser aconselhável quando:

i) for preciso obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo tabelado (extrapolação).

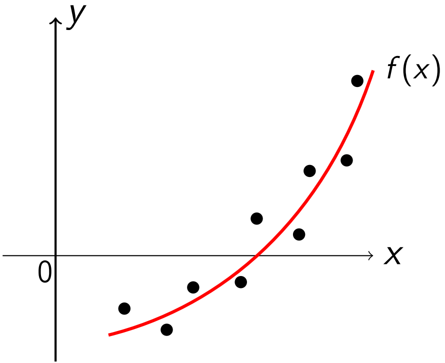
ii) Quando temos um experimento com muitos pontos tabelados.

Do exposto, surge a necessidade de obter uma "boa aproximação" de uma função que nos permita "extrapolar" com certa margem de segurança.

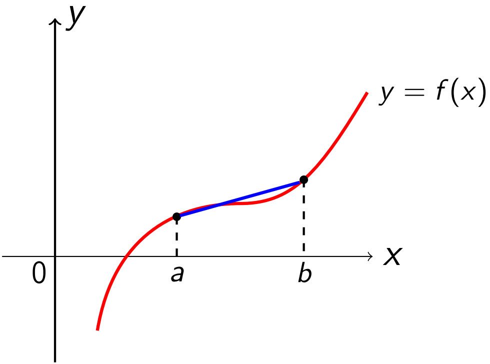
Temos duas situações:

Temos duas situações:

a) Domínio discreto: quando a função f é dada por uma tabela de valores.



(b) Domínio contínuo: quando a função f é dada na sua forma analítica.



Dada a tabela:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_m)$

com $x_1, x_2, \ldots, x_m \in [a, b]$ consiste em dadas n funções contínuas, obter n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que a função

$$g(x) = \alpha_1\, g_1(x) + \alpha_2\, g_2(x) + \ldots + \alpha_n\, g_n(x)$$

se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Dada a tabela:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_m)$

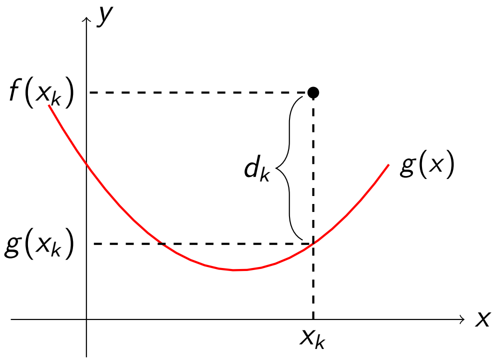
com $x_1, x_2, \ldots, x_m \in [a, b]$ consiste em dadas n funções contínuas, obter n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que a função

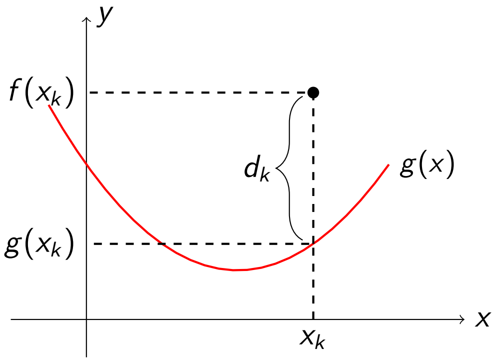
$$g(x) = \alpha_1 \, g_1(x) + \alpha_2 \, g_2(x) + \ldots + \alpha_n \, g_n(x)$$

se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Para escolher as funções contínuas $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$, denotamos o <u>desvio em</u> x_k por

$$d_k = f(x_k) - g(x_k) \, . \tag{1}$$


y
$f(x_k)$
d_k
$g(x)$
$g(x_k)$
x
x_k



O chamado método dos mínimos quadrados consiste em escolher coeficientes α_i's para $i = 1, 2, \ldots, n$ de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínimo, ou seja,

$$\sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \text{ seja mínimo.} \qquad (2)$$

Pelo Cálculo Diferencial, sabemos que se a função

$$
\begin{aligned}
& F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\
& = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \\
& = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 \, g_1(x_k) - \alpha_2 \, g_2(x_k) - \ldots - \alpha_n \, g_n(x_k)]^2
\end{aligned} \tag{3}
$$

tem um ponto de mínimo, então,

Pelo Cálculo Diferencial, sabemos que se a função

$$
\begin{aligned}
& F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\
& = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \\
& = \sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \ldots - \alpha_n g_n(x_k)]^2
\end{aligned} \tag{3}
$$

tem um ponto de mínimo, então,

$$
\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4}
$$

Isto é,

$$2\sum_{k=1}^{m}[f(x_k)-\alpha_1\, g_1(x_k)-\alpha_2\, g_2(x_k)-\ldots-\alpha_n\, g_n(x_k)]\cdot[-g_j(x_k)]=0,$$

para $j=1,2,\ldots,n$.

Isto é,

$$2\sum_{k=1}^{m}\left[f(x_k)-\alpha_1\,g_1(x_k)-\alpha_2\,g_2(x_k)-\ldots-\alpha_n\,g_n(x_k)\right]\cdot\left[-g_j(x_k)\right]=0,$$

para $j=1,2,\ldots,n$.

Ou ainda, podemos reescrever a última equação pelo seguinte sistema de n equações com n incógnitas $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1\, g_1(x_k) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x_k)] \cdot g_1(x_k) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1\, g_1(x_k) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x_k)] \cdot g_2(x_k) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} [f(x_k) - \alpha_1\, g_1(x_k) - \ldots - \alpha_n\, g_n(x_k)] \cdot g_n(x_k) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

que é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)\, g_1(x_k)\right]\alpha_1 + \ldots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)\, g_n(x_k)\right]\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)\, f(x_k) \\
\left[\sum_{k=1}^{m} g_2(x_k)\, g_1(x_k)\right]\alpha_1 + \ldots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_2(x_k)\, g_n(x_k)\right]\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} g_2(x_k)\, f(x_k) \\
\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)\, g_1(x_k)\right]\alpha_1 + \ldots + \left[\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)\, g_n(x_k)\right]\alpha_n = \sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)\, f(x_k)
\end{array}\right. \tag{6}$$

Por amor à simplicidade, relembremos o seguinte conceito:

Definição

Dados $x, y \in \mathbb{R}^m$, o produto interno de x por y é

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot y_k \, . \tag{7}$$

Por amor à simplicidade, relembremos o seguinte conceito:

Definição

Dados $x, y \in \mathbb{R}^m$, *o produto interno de* x *por* y *é*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot y_k \,. \tag{7}$$

Assim, o conceito de produto interno nos permite reescrever na seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \cdots & \langle g_1, g_n\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \cdots & \langle g_2, g_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1\rangle & \langle g_n, g_2\rangle & \cdots & \langle g_n, g_n\rangle \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f\rangle \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \cdots & \langle g_1, g_n\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \cdots & \langle g_2, g_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n, g_1\rangle & \langle g_n, g_2\rangle & \cdots & \langle g_n, g_n\rangle \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f\rangle \end{pmatrix} \tag{8}$$

Se $\det(A) \neq 0$, então, a solução do sistema é <u>única</u>, ou seja, existe uma <u>única</u> função $g(x)$ que melhor se ajusta à função $f(x)$.

Adrien-Marie Legendre (1752s-1833), matemático francês. Uma de suas maiores contribuições à Matemática foi o desenvolvimento da teoria das integrais elípticas (também introduziu as funções beta e gama) em 1794, que forneceu uma prova da irracionalidade do número π. O método dos mínimos quadrados foi publicado em seu *Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes* de 1805, porém sem uma prova formal. As primeiras provas formais do método são devidas a Adrain (1808) e Gauss (1809).

- A cratera da lua chamada Legendre é nomeada em sua homenagem, bem como o Asteróide do cinturão principal 26950 Legendre leva o nome dele.
- Legendre é um dos 72 cientistas franceses proeminentes que foram comemorados em placas na primeira fase da Torre Eiffel quando abriu pela primeira vez.
- Provou o último teorema de Fermat com $n = 5$.

Figura: Legendre

Exemplo

Ajustar os dados da tabela abaixo por um polinômio de grau 2:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	1	-3	1	9

Solução: Como deseja-se um polinômio de grau 2, o mesmo é caracterizado do seguinte modo:

Solução: Como deseja-se um polinômio de grau 2, o mesmo é caracterizado do seguinte modo:

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2, \tag{9}$$

Solução: Como deseja-se um polinômio de grau 2, o mesmo é caracterizado do seguinte modo:

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2, \tag{9}$$

logo,

$$g_1(x) = 1,\; g_2(x) = x \;\text{ e }\; g_3(x) = x^2\,.$$

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \langle g_1, g_3 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \langle g_2, g_3 \rangle \\ \langle g_3, g_1 \rangle & \langle g_3, g_2 \rangle & \langle g_3, g_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \\ \langle g_3, f \rangle \end{pmatrix} \quad (10)$$

.

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \langle g_1, g_3\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \langle g_2, g_3\rangle \\ \langle g_3, g_1\rangle & \langle g_3, g_2\rangle & \langle g_3, g_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \langle g_3, f\rangle \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por outro lado, veja que

$$g_1 = (g_1(-2), g_1(-1), g_1(1), g_1(2))$$

.

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \langle g_1, g_3 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \langle g_2, g_3 \rangle \\ \langle g_3, g_1 \rangle & \langle g_3, g_2 \rangle & \langle g_3, g_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \\ \langle g_3, f \rangle \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por outro lado, veja que

$$g_1 = (g_1(-2), g_1(-1), g_1(1), g_1(2)) = (1, 1, 1, 1)$$

.

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \langle g_1, g_3 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \langle g_2, g_3 \rangle \\ \langle g_3, g_1 \rangle & \langle g_3, g_2 \rangle & \langle g_3, g_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \\ \langle g_3, f \rangle \end{pmatrix} \tag{10}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} g_1 &= (g_1(-2), g_1(-1), g_1(1), g_1(2)) = (1, 1, 1, 1) \\ g_2 &= (g_2(-2), g_2(-1), g_2(1), g_2(2)) \end{aligned}$$

.

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \langle g_1, g_3\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \langle g_2, g_3\rangle \\ \langle g_3, g_1\rangle & \langle g_3, g_2\rangle & \langle g_3, g_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \langle g_3, f\rangle \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por outro lado, veja que

$$g_1 = (g_1(-2), g_1(-1), g_1(1), g_1(2)) = (1, 1, 1, 1)$$
$$g_2 = (g_2(-2), g_2(-1), g_2(1), g_2(2)) = (-2, -1, 1, 2)$$

.

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \langle g_1, g_3\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \langle g_2, g_3\rangle \\ \langle g_3, g_1\rangle & \langle g_3, g_2\rangle & \langle g_3, g_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \langle g_3, f\rangle \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} g_1 &= (g_1(-2), g_1(-1), g_1(1), g_1(2)) = (1,1,1,1) \\ g_2 &= (g_2(-2), g_2(-1), g_2(1), g_2(2)) = (-2,-1,1,2) \\ g_3 &= (g_3(-2), g_3(-1), g_3(1), g_3(2)) \end{aligned}$$

.

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \langle g_1, g_3\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \langle g_2, g_3\rangle \\ \langle g_3, g_1\rangle & \langle g_3, g_2\rangle & \langle g_3, g_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \langle g_3, f\rangle \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} g_1 &= (g_1(-2), g_1(-1), g_1(1), g_1(2)) = (1, 1, 1, 1) \\ g_2 &= (g_2(-2), g_2(-1), g_2(1), g_2(2)) = (-2, -1, 1, 2) \\ g_3 &= (g_3(-2), g_3(-1), g_3(1), g_3(2)) = (4, 1, 1, 4) \end{aligned}$$

.

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \langle g_1, g_3\rangle \\ \langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \langle g_2, g_3\rangle \\ \langle g_3, g_1\rangle & \langle g_3, g_2\rangle & \langle g_3, g_3\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \langle g_3, f\rangle \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} g_1 &= (g_1(-2), g_1(-1), g_1(1), g_1(2)) = (1, 1, 1, 1) \\ g_2 &= (g_2(-2), g_2(-1), g_2(1), g_2(2)) = (-2, -1, 1, 2) \\ g_3 &= (g_3(-2), g_3(-1), g_3(1), g_3(2)) = (4, 1, 1, 4) \\ f &= (f(-2), f(-1), f(1), f(2)) \qquad . \end{aligned}$$

Do exposto, o sistema linear apresentado na teoria é da forma

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle & \langle g_1, g_3 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle & \langle g_2, g_3 \rangle \\ \langle g_3, g_1 \rangle & \langle g_3, g_2 \rangle & \langle g_3, g_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \\ \langle g_3, f \rangle \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} g_1 &= (g_1(-2), g_1(-1), g_1(1), g_1(2)) = (1, 1, 1, 1) \\ g_2 &= (g_2(-2), g_2(-1), g_2(1), g_2(2)) = (-2, -1, 1, 2) \\ g_3 &= (g_3(-2), g_3(-1), g_3(1), g_3(2)) = (4, 1, 1, 4) \\ f &= (f(-2), f(-1), f(1), f(2)) = (1, -3, 1, 9)\,. \end{aligned}$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1),(-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle = 0;$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (-2,-1,1,2) \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1\rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1)\rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1\rangle = \langle g_1, g_2\rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2)\rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1\rangle = \langle g_1, g_3\rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2\rangle = \langle g_2, g_3\rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4)\rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2\rangle = \langle (-2,-1,1,2), (-2,-1,1,2)\rangle = 10;$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (-2,-1,1,2) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3 \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (-2,-1,1,2) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3 \rangle = \langle (4,1,1,4), (4,1,1,4) \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (-2,-1,1,2) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3 \rangle = \langle (4,1,1,4), (4,1,1,4) \rangle = 34;$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1\rangle = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1\rangle = \langle g_1, g_2\rangle = \langle (1,1,1,1),(-2,1,1,2)\rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1\rangle = \langle g_1, g_3\rangle = \langle (1,1,1,1),(4,1,1,4)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2\rangle = \langle g_2, g_3\rangle = \langle (-2,-1,1,2),(4,1,1,4)\rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2\rangle = \langle (-2,-1,1,2),(-2,-1,1,2)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3\rangle = \langle (4,1,1,4),(4,1,1,4)\rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f\rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1),(-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1),(4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2),(4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \langle (-2,-1,1,2),(-2,-1,1,2) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3 \rangle = \langle (4,1,1,4),(4,1,1,4) \rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f \rangle = \langle (1,1,1,1),(1,-3,1,9) \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1\rangle = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1\rangle = \langle g_1, g_2\rangle = \langle (1,1,1,1),(-2,1,1,2)\rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1\rangle = \langle g_1, g_3\rangle = \langle (1,1,1,1),(4,1,1,4)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2\rangle = \langle g_2, g_3\rangle = \langle (-2,-1,1,2),(4,1,1,4)\rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2\rangle = \langle (-2,-1,1,2),(-2,-1,1,2)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3\rangle = \langle (4,1,1,4),(4,1,1,4)\rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f\rangle = \langle (1,1,1,1),(1,-3,1,9)\rangle = 8;$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1\rangle = \langle(1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1\rangle = \langle g_1, g_2\rangle = \langle(1,1,1,1),(-2,1,1,2)\rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1\rangle = \langle g_1, g_3\rangle = \langle(1,1,1,1),(4,1,1,4)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2\rangle = \langle g_2, g_3\rangle = \langle(-2,-1,1,2),(4,1,1,4)\rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2\rangle = \langle(-2,-1,1,2),(-2,-1,1,2)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3\rangle = \langle(4,1,1,4),(4,1,1,4)\rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f\rangle = \langle(1,1,1,1),(1,-3,1,9)\rangle = 8;$$

$$\langle g_2, f\rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1\rangle = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1\rangle = \langle g_1, g_2\rangle = \langle (1,1,1,1),(-2,1,1,2)\rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1\rangle = \langle g_1, g_3\rangle = \langle (1,1,1,1),(4,1,1,4)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2\rangle = \langle g_2, g_3\rangle = \langle (-2,-1,1,2),(4,1,1,4)\rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2\rangle = \langle (-2,-1,1,2),(-2,-1,1,2)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3\rangle = \langle (4,1,1,4),(4,1,1,4)\rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f\rangle = \langle (1,1,1,1),(1,-3,1,9)\rangle = 8;$$

$$\langle g_2, f\rangle = \langle (-2,1,1,2),(1,-3,1,9)\rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1\rangle = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1)\rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1\rangle = \langle g_1, g_2\rangle = \langle (1,1,1,1),(-2,1,1,2)\rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1\rangle = \langle g_1, g_3\rangle = \langle (1,1,1,1),(4,1,1,4)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2\rangle = \langle g_2, g_3\rangle = \langle (-2,-1,1,2),(4,1,1,4)\rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2\rangle = \langle (-2,-1,1,2),(-2,-1,1,2)\rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3\rangle = \langle (4,1,1,4),(4,1,1,4)\rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f\rangle = \langle (1,1,1,1),(1,-3,1,9)\rangle = 8;$$

$$\langle g_2, f\rangle = \langle (-2,1,1,2),(1,-3,1,9)\rangle = 20;$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1),(-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1),(4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2),(4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \langle (-2,-1,1,2),(-2,-1,1,2) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3 \rangle = \langle (4,1,1,4),(4,1,1,4) \rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f \rangle = \langle (1,1,1,1),(1,-3,1,9) \rangle = 8;$$

$$\langle g_2, f \rangle = \langle (-2,1,1,2),(1,-3,1,9) \rangle = 20;$$

$$\langle g_3, f \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (-2,-1,1,2) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3 \rangle = \langle (4,1,1,4), (4,1,1,4) \rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,-3,1,9) \rangle = 8;$$

$$\langle g_2, f \rangle = \langle (-2,1,1,2), (1,-3,1,9) \rangle = 20;$$

$$\langle g_3, f \rangle = \langle (4,1,1,4), (1,-3,1,9) \rangle$$

Temos os seguintes produtos internos:

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle = 4;$$

$$\langle g_2, g_1 \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,1,1,1), (-2,1,1,2) \rangle = 0;$$

$$\langle g_3, g_1 \rangle = \langle g_1, g_3 \rangle = \langle (1,1,1,1), (4,1,1,4) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_2 \rangle = \langle g_2, g_3 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (4,1,1,4) \rangle = 0;$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \langle (-2,-1,1,2), (-2,-1,1,2) \rangle = 10;$$

$$\langle g_3, g_3 \rangle = \langle (4,1,1,4), (4,1,1,4) \rangle = 34;$$

$$\langle g_1, f \rangle = \langle (1,1,1,1), (1,-3,1,9) \rangle = 8;$$

$$\langle g_2, f \rangle = \langle (-2,1,1,2), (1,-3,1,9) \rangle = 20;$$

$$\langle g_3, f \rangle = \langle (4,1,1,4), (1,-3,1,9) \rangle = 38;$$

Assim, o sistema linear dado em (10) torna-se:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 38 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Assim, o sistema linear dado em (10) torna-se:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 38 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Apelando para algum método numérico (LU, Cholesky ou eliminação de Gauss com pivotamento parcial) obteremos a solução:

Assim, o sistema linear dado em (10) torna-se:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 38 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Apelando para algum método numérico (LU, Cholesky ou eliminação de Gauss com pivotamento parcial) obteremos a solução:

$$\alpha_1 = -3,\ \alpha_2 = 2 \ \text{ e } \ \alpha_3 = 2$$

Assim, o sistema linear dado em (10) torna-se:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 38 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Apelando para algum método numérico (LU, Cholesky ou eliminação de Gauss com pivotamento parcial) obteremos a solução:

$$\alpha_1 = -3,\ \alpha_2 = 2 \ \text{ e } \ \alpha_3 = 2$$

e, doravante,

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2 = -3 + 2\, x + 2\, x^2\,. \tag{12}$$

Exemplo

Após serem efetuadas medições num gerador de corrente contínua, foram obtidos os seguintes valores indicados por um voltímetro e um amperímetro.

$I(Carga(A))$	1,58	2,15	4,8	4,9	3,12	3,01
$V(v)$	210	180	150	120	60	30

a) *Usando o método dos mínimos quadrados, ajuste os dados da tabela por um polinômio de grau 4.*

b) *Estime o valor a ser obtido no voltímetro quando o amperímetro estiver marcando 3,05 A.*