UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Profª Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Vetores - Parte 2

3.7 Produto Escalar

Nesta seção, estudaremos um novo tipo de multiplicação que será útil para encontrar ângulos entre vetores e assim, determinarmos se dois vetores são ou não perpendiculares. Além disso, estudaremos a projeção ortogonal utilizando produto escalar.

3.7.1 Definição de Produto Escalar

Definição 1. *Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ dois vetores não-nulos em $\mathbb{R}^2$. Define-se o produto interno euclidiano (ou o produto escalar) de u por w por:*

$$u \cdot w = u_1 w_1 + u_2 w_2.$$

Notação: $u \cdot w$ ou $< u, w >$

Exemplo 3.7.1. *Dados $u = (2, 3)$ e $w = (4, -1)$. Calcule:*
(a) $u \cdot w$
(b) $w \cdot u$
Solução: *Link da solução.*

De modo geral definimos o produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2. *Sejam $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ e $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ dois vetores não-nulos em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. O* **produto interno euclidiano** *ou o* **produto escalar** *de u por w é dado* *por:*

$$u \cdot w = u_1w_1 + u_2w_2 + ... + u_nw_n.$$

Notação: $u \cdot w$ ou $< u, w >$

Exemplo 3.7.2. *Calcule o produto escalar de $u = (-1, 3, 5, 7)$ e $w = (5, -4, 7, 0)$.*
Solução: *Link da solução.*

Exemplo 3.7.3. *A maioria dos livros publicados nos últimos 25 anos possui um indicativo numérico utilizado internacionalmente para a identificação de livros, que consiste de dez dígitos, denominado ISBN (International Standard Book Number). Os nove primeiros dígitos deste número estão divididos em três grupos: o primeiro grupo representa o país ou grupo de países no qual originou o livro, o segundo identifica a editora que o publicou e o terceiro identifica o título do próprio livro. O décimo e último dígito, denominado dígito de verificação, é calculado a partir dos nove primeiros e é utilizado para garantir que não há erro na digitação nos nove primeiros, por exemplo, numa transmissão eletrônica do ISBN, digamos, pela internet.*

Por exemplo, considere os nove primeiros dígitos do ISBN como um vetor w de $\mathbb{R}^9$ e seja u o vetor $u = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Então o dígito de verificação c é calculado pelo seguinte processo:

1. *Calcule o produto escalar $w \cdot u$.*

2. *Divida $w \cdot u$ por 11, produzindo um resto c que é um inteiro entre 0 e 10, inclusive. O dígito de verificação é tomado como sendo c, com a ressalva de trocar 10 por X para evitar mais um dígito.*

Observação 3.7.1. *Preste atenção na distinção entre multiplicação por escalar e o produto escalar.*

Propriedades do produto escalar: Se u, v, w são vetores em $\mathbb{R}^n$ e se k é um escalar, então:

1. $u \cdot v = v \cdot u$
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. $k(u \cdot v) = (ku) \cdot v = u \cdot (kv)$
4. $v \cdot v = ||v||^2$ ou $\sqrt{v \cdot v} = ||v||$
5. $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \overrightarrow{0}$
6. $\overrightarrow{0} \cdot v = v \cdot \overrightarrow{0} = 0$

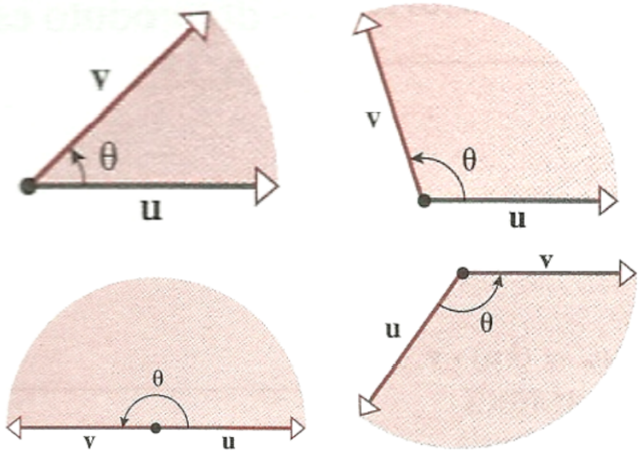
Exemplo 3.7.4. *Reescreva* $(u - 2w) \cdot (3u + 4w)$ *em termos do comprimento dos vetores* u *e* w.

<u>*Solução:*</u>

$$\begin{aligned}
(u - 2w) \cdot (3u + 4w) &= u \cdot (3u + 4w) + (-2w) \cdot (3u + 4w) \\
&= u \cdot (3u) + u \cdot (4w) + (-2w) \cdot (3u) + (-2w) \cdot (4w) \\
&= 3(u \cdot u) + 4(u \cdot w) - 6(w \cdot u) - 8(w \cdot w) \\
&= 3||u||^2 - 2(u \cdot w) - 8||w||^2
\end{aligned}$$

3.7.2 Ângulo entre vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Definição 3. *Sejam* u *e* v *vetores não-nulos em* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$. *Definimos o ângulo entre* u *e* v *como o menor ângulo não negativo* θ *pelo qual um dos vetores pode ser girado no plano dos dois vetores até sua direção e sentido coincidir com o outro.* $(0 \leq \theta \leq \pi)$



Teorema 3.7.1. *Se u e v são vetores não-nulos em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ e se θ é o ângulo entre estes vetores, então*

$$cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{||u|| \ \ ||v||}$$

Observação 3.7.2. *Do Teorema acima segue que,*

$$cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{||u|| \ \ ||v||}$$

ou seja,

$$\theta = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\| u \| \ \ \| v \|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{\| u \| \ \ \| v \|}\right)$$

Exemplo 3.7.5. *Encontre o cosseno do ângulo e o ângulo entre os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (2, 4)$.*

Solução: Link da solução.

Exemplo 3.7.6. *Determine o ângulo entre os vetores $u = (1, 2, -3, 0)$ e $v = (5, 1, 2, -2)$.*

Solução: Link da solução.

Proposição 3.7.2. *Dois vetores não-nulos em* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$ *são perpendiculares se, e somente se, seu produto escalar é nulo.*

Exemplo 3.7.7. *Os vetores* $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ *e* $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ *são perpendiculares. Justifique.*
Solução: *Link da solução.*

Exemplo 3.7.8. *Encontre um vetor não-nulo em* $\mathbb{R}^2$ *que é perpendicular ao vetor não-nulo* $v = (-2, 1)$*.*
Solução: *Link da solução.*

Observação 3.7.3.

1. *Se* $u \cdot v > 0$*, do Teorema acima,* $\cos\theta$ *deve ser um número positivo, isto é,* $\cos\theta > 0$*, o que implica* $0 \leq \theta < 90$*. Nesse caso,* θ *é dito* ***ângulo agudo ou nulo****.*

2. *Se* $u \cdot v < 0$*, do Teorema acima,* $\cos\theta$ *deve ser um número negativo, isto é,* $\cos\theta < 0$*, o que implica* $90 < \theta \leq 180$*. Nesse caso,* θ *é dito* ***ângulo obtuso ou raso****.*

3. *Se* $u \cdot v = 0$*, do Teorema acima,* $\cos\theta$ *deve ser igual a zero, isto é,* $\cos\theta = 0$*, o que implica* $\theta = 90$*. Nesse caso,* θ *é* ***ângulo reto****.*

Com o objetivo de generalizar a noção de perpendicularidade para $\mathbb{R}^n$, introduzimos a seguinte definição:

Definição 4. *Dois vetores* u *e* v *em* $\mathbb{R}^n$ *são ditos ortogonais se* $u \cdot v = 0$*.*

Um conjunto não-vazio de vetores de $\mathbb{R}^n$ *é dito um conjunto ortogonal se cada par de vetores distintos do conjunto é ortogonal.*

Exemplo 3.7.9. *Mostre que os vetores* $v_1 = (1, 2, 2, 4)$, $v_2 = (-2, 1, -4, 2)$ *e* $v_3 = (-4, 2, 2, -1)$ *formam um conjunto ortogonal de* $\mathbb{R}^4$.

Solução: *Link da solução.*

Observação 3.7.4. *Se S é um conjunto não-vazio de vetores de $\mathbb{R}^n$ e se v é ortogonal a cada vetor de S, então dizemos que v é ortogonal ao conjunto S.*

Exemplo 3.7.10. *O vetor* $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *é ortogonal ao plano* xy. *Visualize geometricamente.*

Solução: *Link da solução.*

Os conjuntos ortogonais de vetores unitários têm uma importância especial.

Definição 5. *Dois vetores u e v em $\mathbb{R}^n$ são ditos ortonormais se são ortogonais e têm comprimento 1.*

Um conjunto de vetores é denominado um conjunto ortonormal se cada vetor do conjunto tem comprimento 1 e se cada par de vetores distintos do conjunto é ortogonal.

Exemplo 3.7.11. *Os vetores* $v_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $v_2 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ *e* $v_3 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ *formam um conjunto ortonormal em* $\mathbb{R}^4$*?*

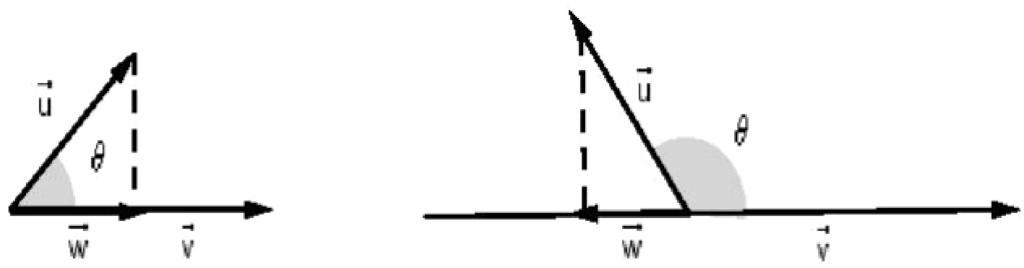
Solução: *Link da solução.*

Exercício 3.7.1. *Os vetores unitários canônicos do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ formam conjuntos ortonormais. Justifique.*

Exemplo 3.7.12. *Os vetores unitários canônicos do $\mathbb{R}^n$ formam um conjunto ortonormal.*

3.7.3 Estudo da Projeção Ortogonal usando Produto Escalar

Sejam os vetores não-nulos u e v e, θ o ângulo por eles formado. Pretendemos calcular o vetor w que representa a **projeção ortogonal de** u **sobre** v ou **componente vetorial de** u **ao longo de** v. Para tanto, utilizaremos a figura abaixo, que ilustra as duas situações possíveis podendo ser θ um ângulo agudo ou obtuso.



Do triângulo retângulo, segue que:

$$\| w \| = \| u \| \cdot |\cos\theta| = \| u \| \frac{|u \cdot v|}{\| u \| \| v \|} = \frac{|u \cdot v|}{\| v \|}$$

Como w e v têm a mesma direção, segue-se que:

$$w = kv, k \in \mathbb{R}$$

Então:

$$\| w \| = |k| \; \| v \|$$

ou seja,

$$k = \frac{u \cdot v}{\| v \|^2}$$

Logo,

$$w = \left(\frac{u \cdot v}{\| v \|^2} \right) v$$

Obtemos assim:

$$\mathbf{proj_v u} = \left(\frac{u \cdot v}{v \cdot v} \right) v$$

que definimos por **componente vetorial de u ao longo de v** ou projeção ortogonal de u sobre v.

E,

$$\mathbf{u} - \mathbf{proj_v u} = u - \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$$

que definimos por **componente vetorial de u ortogonal a v**.

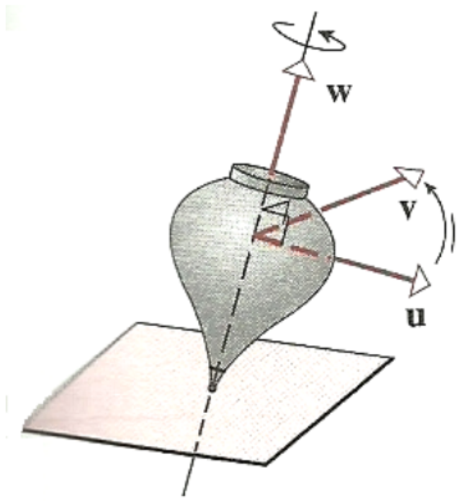
Veja o conteúdo complementar.

Exemplo 3.7.13. *Determine o vetor projeção (componente vetorial) de $u = (2, 3, 4)$ ao longo de $v = (1, -1, 0)$ e a componente vetorial de u ortogonal a v.*
Solução: *Link da solução.*

3.8 Produto Vetorial

Um problema básico no estudo do movimento rotacional no espaço tridimensional é o de encontrar o eixo de rotação de um objeto que está girando e identificar se a rotação é horária ou anti-horária a partir de um ponto de vista especificado no eixo de rotação.

Por exemplo, ao girar um pião.



Definição 6. *Se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores em $\mathbb{R}^3$, então o produto vetorial de u por w é o vetor de $\mathbb{R}^3$ definido por*

$$u \times w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 3.8.1. *Dado os vetores $u = (1, 2, -2)$ e $w = (3, 0, 1)$. Calcule:*

(a) $u \times w$

(b) $w \times u$

Solução: Link da solução.

Propriedades: Se u, v e w são vetores em $\mathbb{R}^3$ e k um escalar, então:

(a) $u \times v = -(v \times u)$

(b) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$

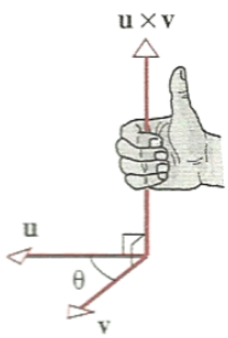
(c) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$

(d) $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$

(e) $u \times \vec{0} = \vec{0} \times u = \vec{0}$

(f) $u \times u = \vec{0}$

Observação 3.8.1. *Um dos objetivos ao definir produto vetorial foi o de criar um vetor que é ortogonal ao plano de u e v.*



Teorema 3.8.1. *Se u e v são vetores em $\mathbb{R}^3$, então:*

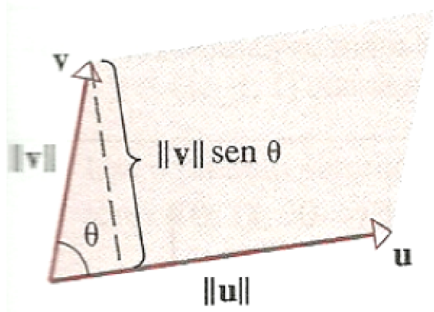
(a) $u \cdot (u \times v) = 0$

(b) $v \cdot (u \times v) = 0$

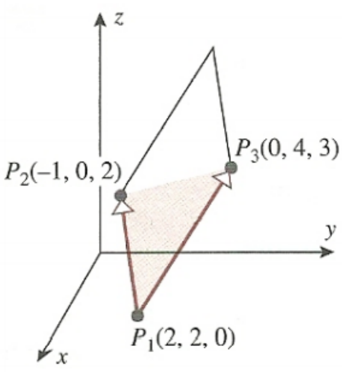
Teorema 3.8.2. *Sejam u e v vetores não-nulos em $\mathbb{R}^3$ e θ o ângulo entre esses vetores. Então:*

(a) $\|u \times v\| = \|u\| \ \|v\| \ sen(\theta)$

(b) *A área A do paralelogramo de lados adjacentes u e v é $A = \|u \times v\|$*



Exemplo 3.8.2. *Calcule a área do triângulo de vértices $P_1(2,2,0)$, $P_2(-1,0,2)$ e $P_3(0,4,3)$.*



Solução: *Link da solução.*

Exercício 3.8.1. *Calcule a área do triângulo de vértices $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,4)$ e $C(-1,-3,3)$.*

3.9 Produto Misto

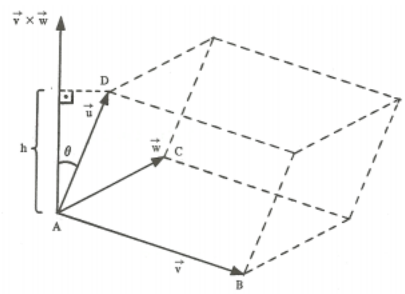
Definição 7. *Se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores em $\mathbb{R}^3$, então o produto misto dos vetores u, v e w é um número real definido por*

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo 3.9.1. *Dado $u = (2, 3, 5)$, $v = (-1, 3, 3)$ e $w = (4, -3, 2)$. Calcule $u \cdot (v \times w)$.*
Solução: *Link da solução.*

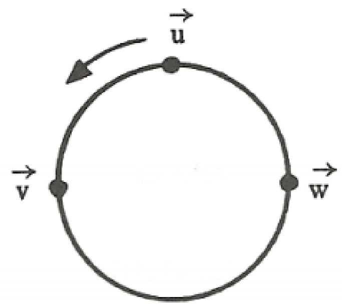
Geometricamente: O produto misto $u \cdot (v \times w)$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores u, v e w.

$$Volume_{paral} = |u \cdot (v \times w)|$$



Propriedades: Se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ são vetores em $\mathbb{R}^3$ e k um número real, então:

(a) $u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v)$, isto é, independe da ordem circular dos vetores.



(b) $u \cdot (v \times w) = -v \cdot (u \times w)$

(c) $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w$

(d) $u \cdot (v \times w) = 0$ se $u = \overrightarrow{0}$ ou $v = \overrightarrow{0}$ ou $w = \overrightarrow{0}$ ou se dois vetores são colineares ou se três vetores são coplanares.

3.10 Alguns Teoremas

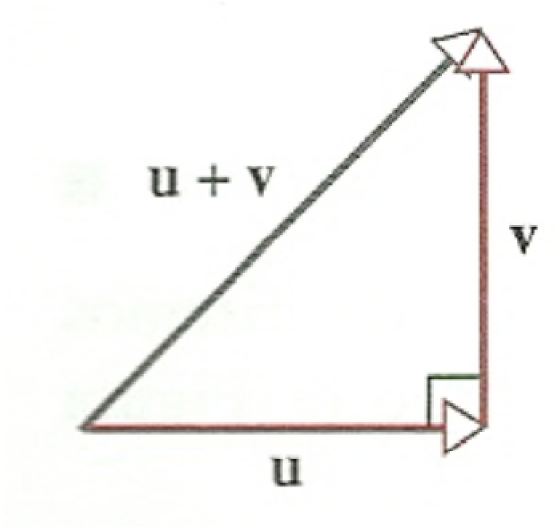
Seguem alguns teoremas da Geometria Euclidiana:

1. Teorema de Pitágoras: Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos dois catetos.

2. A soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado.

3. A menor distância entre dois pontos é medida ao longo de uma linha reta.

E para estendê-los ao $\mathbb{R}^n$, precisamos expressá-los em formato vetorial. Por exemplo, um triângulo retângulo em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ pode ser construído colocando dois vetores ortogonais u e v um com a origem na extremidade do outro e usando o vetor $u+v$ como a hipotenusa.



Teorema 3.10.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *Se u e v são vetores ortogonais em $\mathbb{R}^n$, então*

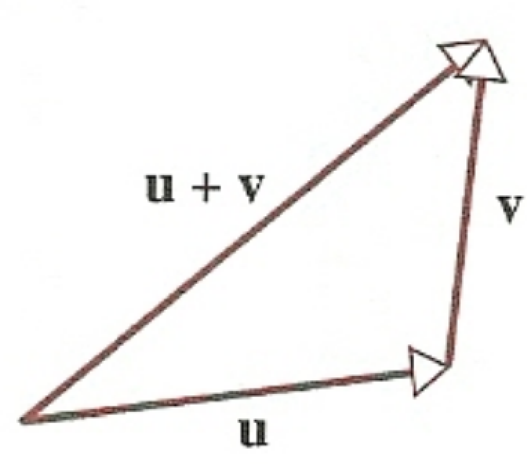
$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Teorema 3.10.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^n$)**.** *Se u e v são vetores em $\mathbb{R}^n$ então*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \quad \|v\|.$$

Teorema 3.10.3 (Desigualdade Triangular para Vetores)**.** *Se u, v e w são vetores em $\mathbb{R}^n$, então*

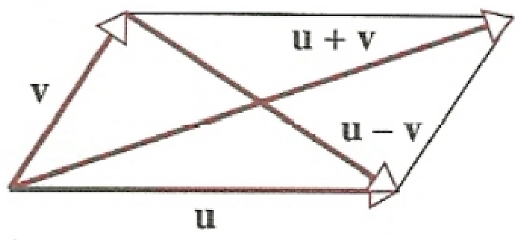
$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$



Existe um teorema na geometria do plano que afirma que a soma dos quadrados dos comprimentos das duas diagonais de qualquer paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos quatro lados. No $\mathbb{R}^n$ obtemos:

Teorema 3.10.4 (Lei do Paralelogramo para Vetores)**.** *Se u e v são vetores em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$



Exercício 3.10.1. *Use vetores para mostrar que $A(3,2)$, $B(4,3)$ e $C(8,-1)$ são os vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?*

Exercício 3.10.2. *Use vetores para mostrar que $A(4,0,3)$, $B(8,1,-1)$ e $C(3,0,2)$ são os vértices de um triângulo retângulo. Em qual vértice está o ângulo reto?*

3.11 Exercícios sobre Vetores - Parte 2

Exercício 3.11.1. *Dados $u=(1,1,4,6)$ e $v=(2,-2,3,-2)$, calcule $u \cdot v$, $u \cdot u$ e $v \cdot v$.*

Exercício 3.11.2. *Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores u e v e depois decida se o ângulo é agudo, obtuso ou reto.*

(a) $u=(3,3,3)$, $v=(1,0,4)$ *(b)* $u=(0,-2,-1,1)$, $v=(-3,2,4,4)$

Exercício 3.11.3. *Um vetor* a *do plano* xy *tem comprimento de 9 unidades e aponta na direção e sentido que está a 120° anti-horários a partir do eixo* x *positivo e um vetor* b *naquele plano tem um comprimento de 5 unidades e aponta da direção* y *positiva. Calcule* $a \cdot b$.

Exercício 3.11.4. *Dados* $v = (1, 2, -4, 0)$ *e* $w = (-3, 5, 1, 1)$, *resolva as equações em* x:
(a) $5x - 2v = 2(w - 5x)$ *(b)* $5x - \|v\|v = \|w\|(w - 5x)$

Exercício 3.11.5. *Os vetores* $v_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $v_2 = (0, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *e* $v_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *formam um conjunto ortonormal?*

Exercício 3.11.6. *Use vetores para encontrar os cossenos dos ângulos interiores do triângulo de vértices* $A(0, -1)$, $B(1, -2)$ *e* $C(4, 1)$.

Exercício 3.11.7. *Dados os vetores* $u = (1, a, -2a-1)$, $v = (a, a-1, 1)$ *e* $w = (a, -1, 1)$, *determine* a *de modo que* $u \cdot v = (u + v) \cdot w$.

Exercício 3.11.8. *Dados os pontos* $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ *e* $C(0, 1, 3)$, *determinar o vetor* x *tal que* $2x - \overrightarrow{AB} = x + (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC}$.

Exercício 3.11.9. *Determinar o valor de* n *para que o vetor* $v = (n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ *seja unitário.*

Exercício 3.11.10. *Determinar um vetor unitário ortogonal ao vetor* $v = (2, -1, 1)$.

Exercício 3.11.11. *Dados os pontos* $A(1, 0, -1)$, $B(4, 2, 1)$ *e* $C(1, 2, 0)$, *determinar o valor de* m *para que* $\|v\| = 7$, *sendo* $v = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

Exercício 3.11.12. *Seja o triângulo de vértices* $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ *e* $C(3,-2,1)$, *determinar o ângulo interno ao vértice* B.

Exercício 3.11.13. *Os lados de um triângulo retângulo ABC (reto em A) medem 5,12 e 13. Calcular* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Exercício 3.11.14. *Dados os vetores* $\overrightarrow{a}=(2,1,\alpha)$, $\overrightarrow{b}=(\alpha+2,-5,2)$ *e* $\overrightarrow{c}=(2\alpha,8,\alpha)$, *determinar o valor de* α *para que o vetor* $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ *seja ortogonal ao vetor* $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}$.

Exercício 3.11.15. *Qual o valor de* α *para que os vetores* $\overrightarrow{a}=(\alpha,5,-4)$ *e* $\overrightarrow{b}=(\alpha+1,2,4)$ *sejam ortogonais?*

Exercício 3.11.16. *O vetor* v *é ortogonal aos vetores* $u=(2,-1,3)$ *e* $w=(1,0,-2)$ *e forma ângulo agudo com o vetor* $\overrightarrow{j}$. *Calcular* v, *sabendo que* $\|v\|=3\sqrt{6}$.

Exercício 3.11.17. *Determinar o vetor projeção do vetor* $u=(1,2,-3)$ *na direção de* $v=(2,1,-2)$.

Exercício 3.11.18. *Dados os vetores* $u=(2,-1,1)$, $v=(1,-1,0)$ *e* $w=(-1,2,2)$, *calcular:*

(a) $w\times v$ *(b)* $v\times(v-u)$ *(c)* $(u+v)\times(u-v)$ *(d)*$(u\times v)\cdot(u\times v)$
(e) $(u+v)\cdot(u\times w)$.

Exercício 3.11.19. *Dados os pontos* $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$ *e* $C(3,2,1)$, *determinar o vetor* $\overrightarrow{CB}\times(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})$.

Exercício 3.11.20. *Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores* $v_1 = (1, 1, 0)$ *e* $v_2 = (2, -1, 3)$. *Nas mesmas condições determinar um vetor de módulo 5.*

Exercício 3.11.21. *Sabendo que* $\|u\| = 3$, $\|v\| = \sqrt{2}$ *e 45° é o ângulo entre* u *e* v, *calcular* $\|u \times v\|$.

Exercício 3.11.22. *Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores* $u = (3, 1, 2)$ *e* $v = (4, -1, 0)$.

Exercício 3.11.23. *Calcular a área do paralelogramo cujos lados são determinados pelos vetores* $2u$ *e* $-v$, *sendo* $u = (2, -1, 0)$ *e* $v = (1, -3, 2)$.

Exercício 3.11.24. *Calcular a área do triângulo de vértices:*
(a) $A(-1, 0, 2)$, $B(-4, 1, 1)$ *e* $C(0, 1, 3)$ *(b)* $A(2, 3, -1)$, $B(3, 1, -2)$ *e* $C(-1, 0, 2)$.

Exercício 3.11.25. *Calcular* x, *sabendo que* $A(x, 1, 1)$, $B(1, -1, 0)$ *e* $C(2, 1, -1)$ *são vértices de um triângulo de área* $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Exercício 3.11.26. *Verificar se são coplanares os seguintes vetores:*
(a) $u = (3, -1, 2)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (-2, 3, 4)$ *(b)* $u = (2, -1, 0)$, $v = (3, 1, 2)$, $w = (7, -1, 2)$.

Exercício 3.11.27. *Determinar o valor de* k *para que os seguintes vetores sejam coplanares:*
(a) $u = (2, -1, k)$, $v = (1, 0, 2)$ *e* $w = (k, 3, k)$
(b) $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, 1, -3)$ *e* $w = (k, 1, -k)$.

Exercício 3.11.28. *Sejam os vetores* $u = (1, 1, 0)$*,* $v = (2, 0, 1)$*,* $w_1 = 3u-2v$*,* $w_2 = u+3v$ *e* $w_3 = (1, 1, -2)$*. Determinar o volume do paralelepípedo definido por* w_1*,* w_2 *e* w_3*.*

Exercício 3.11.29. *Os vetore* $u = (2, -1, -3)$*,* $v = (-1, 1, -4)$ *e* $w = (m + 1, m, -1)$ *determina um paralelepípedo de volume 42. Calcular* m*.*

Exercício 3.11.30. *Calcule o produto misto dos seguintes vetores:*
(a) $u = (2, -1, 1)$*,* $v = (1, -1, 1)$ *e* $w = (1, 2, -1)$*;*
(b) $u = (2, 0, 0)$*,* $v = (0, 1, 0)$ *e* $w = (0, 0, 4)$*.*

Exercício 3.11.31. *Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto* $A(2, 1, 6)$ *e os três vértices adjacentes nos pontos* $B(4, 1, 3)$*,* $C(1, 3, 2)$ *e* $D(1, 2, 1)$*.*

Exercício 3.11.32. *Dado os vetores* $u = (2, 1, -2)$*,* $v = (2, -1, 3)$ *e* $w = (1, 2, -1)$*, calcule os produtos:*
(a) $u \cdot v$ *(b)* $v \cdot w$ *(c)* $u \times v$ *(d)* $u \times w$ *(e)* $u \cdot (v \times w)$*.*

Exercício 3.11.33. *Seja* $u = (1, 2, -1)$*,* $v = (-1, 0, 3)$*. Calcule:*
(a) $u \cdot v$ *(b)* $v \times w$ *(c)* $\frac{u}{\|u\|}$ *(d)* $\|u \times v\|$*.*

Exercício 3.11.34. *Determine se o número dado é um ISBN válido conferindo seu dígito de verificação.*
(a) $0 - 471 - 06368 - 1$ *(b)* $0 - 13 - 947752 - 3$

Exercício 3.11.35. *Verifique que vale a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.*
(a) $u = (3, 2)$*,* $v = (4, -1)$ *(b)* $u = (0, 2, 2, 1)$*,* $v = (1, 1, 1, 1)$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[3] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[4] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[5] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[7] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[8] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[9] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.