Cálculo Numérico

Raízes de Equações: Método *Regula Falsi*

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

28 de junho de 2021

Problemas no Método da Secante

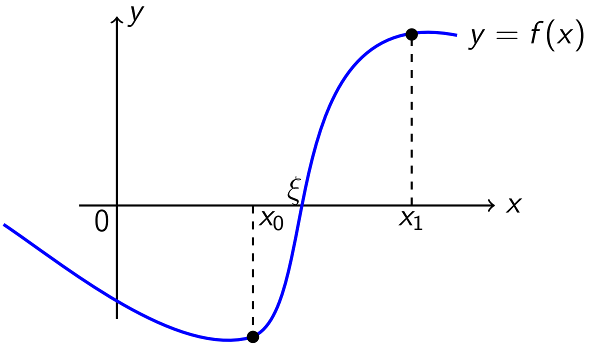


Figura: Se a função não for, aproximadamente linear no intervalo que contém a raiz, uma aproximação sucessiva pode sair do intervalo $[x_0, x_1]$.

Problemas no Método da Secante

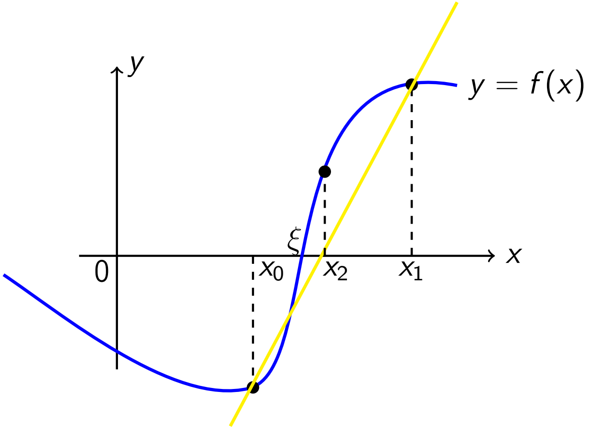


Figura: Se a função não for, aproximadamente linear no intervalo que contém a raiz, uma aproximação sucessiva pode sair do intervalo $[x_0, x_1]$.

Problemas no Método da Secante

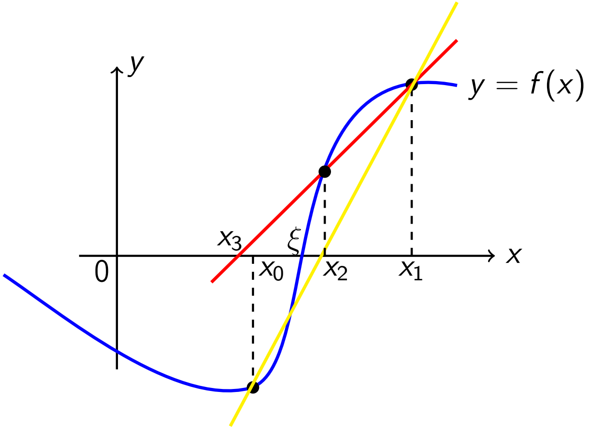


Figura: Se a função não for, aproximadamente linear no intervalo que contém a raiz, uma aproximação sucessiva pode sair do intervalo $[x_0, x_1]$.

Método *Regula Falsi*

Uma maneira de evitar tais problemas é garantir que a raiz esteja isolada no intervalo inicial e continue dentro de novos intervalos. O método *Regula Falsi* retém o ponto no qual o valor da função tem sinal oposto no ponto mais recente, assegurando desta forma, que a raiz continue isolada entre dois pontos.

A fórmula de recorrência é a mesma do método da secante:

Fórmula de recorrência

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{1}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Método *Regula Falsi*

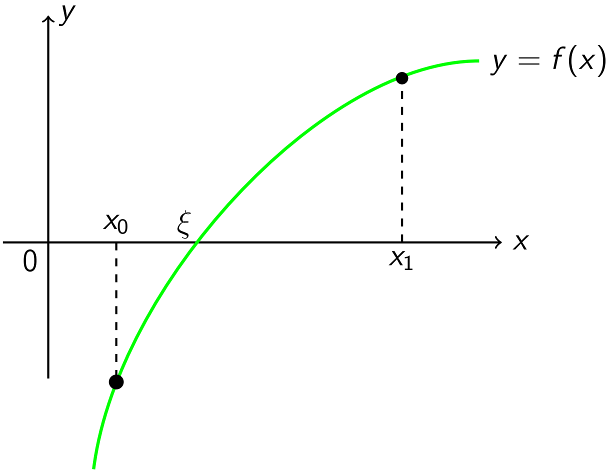
Uma maneira de evitar tais problemas é garantir que a raiz esteja isolada no intervalo inicial e continue dentro de novos intervalos. O método *Regula Falsi* retém o ponto no qual o valor da função tem sinal oposto no ponto mais recente, assegurando desta forma, que a raiz continue isolada entre dois pontos.
A fórmula de recorrência é a mesma do método da secante:

Fórmula de recorrência

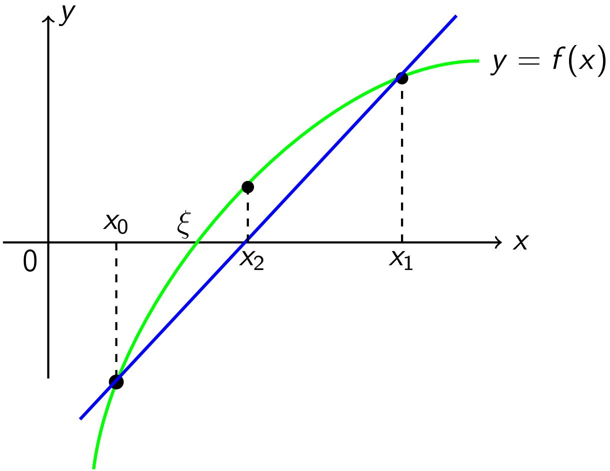
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{1}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

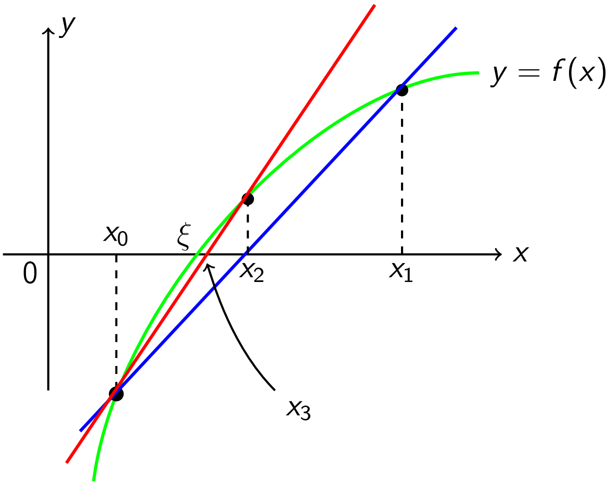
Interpretação Geométrica



Interpretação Geométrica



Interpretação Geométrica



Método *Regula Falsi*

Exemplo 3.1

Use o método Regula Falsi para obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos x - x = 0$ com $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

Solução: Usaremos o mesmo exemplo dos métodos de Newton-Raphson e da secante para compararmos os métodos. Para tanto, vamos usar os mesmos valores de a e b, a saber, $a = 0,5$ e $b = 1$.

Assim, resulta que $x_0 = a = 0,5$ e $x_1 = b = 1$.

Método *Regula Falsi*

Exemplo 3.1

Use o método Regula Falsi para obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos x - x = 0$ *com* $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

Solução: Usaremos o mesmo exemplo dos métodos de Newton-Raphson e da secante para compararmos os métodos. Para tanto, vamos usar os mesmos valores de a e b, a saber, $a = 0,5$ e $b = 1$.

Assim, resulta que $x_0 = a = 0,5$ e $x_1 = b = 1$.

Método *Regula Falsi*

Exemplo 3.1

Use o método Regula Falsi para obter uma aproximação de uma solução de $f(x) = \cos x - x = 0$ *com* $\varepsilon \leq 10^{-5}$.

Solução: Usaremos o mesmo exemplo dos métodos de Newton-Raphson e da secante para compararmos os métodos. Para tanto, vamos usar os mesmos valores de a e b, a saber, $a = 0,5$ e $b = 1$.

Assim, resulta que $x_0 = a = 0,5$ e $x_1 = b = 1$.

Recorrendo à fórmula de recorrência (1), temos que

$$k = 1:$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\
&= 1 - \frac{f(1)\cdot(1-0,5)}{f(1)-f(0,5)} \\
&= 1 - \frac{(\cos(1)-1)\cdot 0,5}{\cos(1)-1-(\cos(0,5)-0,5)} \\
&= 1 - \left(\frac{-0,229848847}{-0,837280256}\right) \\
&= 0,725481587063930
\end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$|x_2 - x_1| = |0,725481587 - 1| = 0,27451841293607 > 10^{-5}.$$

Recorrendo à fórmula de recorrência (1), temos que

$$k = 1:$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \\ &= 1 - \frac{f(1)\cdot(1-0,5)}{f(1)-f(0,5)} \\ &= 1 - \frac{(\cos(1)-1)\cdot 0,5}{\cos(1)-1-(\cos(0,5)-0,5)} \\ &= 1 - \left(\frac{-0,229848847}{-0,837280256}\right) \\ &= 0,725481587063930 \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$|x_2 - x_1| = |0,725481587 - 1| = 0,27451841293607 > 10^{-5}.$$

Recorrendo à fórmula de recorrência (1), temos que

$$k = 1:$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}\\
&= 1 - \frac{f(1)\cdot(1-0,5)}{f(1)-f(0,5)}\\
&= 1 - \frac{(\cos(1)-1)\cdot 0,5}{\cos(1)-1-(\cos(0,5)-0,5)}\\
&= 1 - \left(\frac{-0,229848847}{-0,837280256}\right)\\
&= 0,725481587063930
\end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$|x_2 - x_1| = |0,725481587 - 1| = 0,27451841293607 > 10^{-5}.$$

Antes de prosseguir com a fórmula recursiva, precisamos qual dos valores entre $f(0,5)$ e $f(1)$ tem sinal contrário ao valor de $f(x_2)$.

De fato,

$$f(x_0) = f(0,5) = 0,377582561890373 > 0$$
$$f(x_1) = f(1) = -0,4596976941318 6 < 0$$
$$f(x_2) = 0,022698390665485 > 0,$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração.

Antes de prosseguir com a fórmula recursiva, precisamos qual dos valores entre $f(0,5)$ e $f(1)$ tem sinal contrário ao valor de $f(x_2)$.
De fato,

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0,5) = 0,377582561890373 > 0 \\
f(x_1) &= f(1) = -0,45969769413186 < 0 \\
f(x_2) &= 0,022698390665485 > 0,
\end{aligned}
$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração.

Antes de prosseguir com a fórmula recursiva, precisamos qual dos valores entre $f(0,5)$ e $f(1)$ tem sinal contrário ao valor de $f(x_2)$.
De fato,

$$f(x_0) = f(0,5) = 0,377582561890373 > 0$$
$$f(x_1) = f(1) = -0,45969769413186 < 0$$
$$f(x_2) = 0,022698390665485 > 0,$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração.

$k = 2:$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \\ &= 0,725481587063930 - \frac{f(0,725481587063930)\cdot(0,725481587063930 - 1)}{f(0,725481587063930) - f(1)} \\ &= 1 - \frac{(\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930)\cdot(0,725481587063930 - 1)}{\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930 - (\cos(1) - 1)} \\ &= 0,738398620137094 \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$\begin{aligned} |x_3 - x_2| &= |0,738398620137094 - 0,725481587063930| \\ &= 0,012917033073164 > 10^{-5}. \end{aligned}$$

$k = 2:$

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \\
&= 0,725481587063930 - \frac{f(0,725481587063930)\cdot(0,725481587063930 - 1)}{f(0,725481587063930) - f(1)} \\
&= 1 - \frac{(\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930)\cdot(0,725481587063930 - 1)}{\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930 - (\cos(1) - 1)} \\
&= 0,738398620137094
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_3 - x_2| &= |0,738398620137094 - 0,725481587063930| \\
&= 0,012917033073164 > 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

$k = 2$:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)\cdot(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \\
&= 0,725481587063930 - \frac{f(0,725481587063930)\ \cdot\ (0,725481587063930 - 1)}{f(0,725481587063930) - f(1)} \\
&= 1 - \frac{(\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930)\ \cdot\ (0,725481587063930 - 1)}{\cos(0,725481587063930) - 0,725481587063930 - (\cos(1) - 1)} \\
&= 0,738398620137094
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_3 - x_2| &= |0,738398620137094 - 0,725481587063930| \\
&= 0,012917033073164 > 10^{-5}\,.
\end{aligned}
$$

Assim como foi feito para $k = 1$, devemos verificar qual dos valores entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ tem sinal contrário ao valor de $f(x_3)$.

Com efeito,

$$f(x_1) = f(1) = -0,45969769413186 < 0$$
$$f(x_2) = 0,022698390665485 > 0$$
$$f(x_3) = 0,001148782343838 > 0$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração, o que muda a fórmula de recorrência.

Assim como foi feito para $k = 1$, devemos verificar qual dos valores entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ tem sinal contrário ao valor de $f(x_3)$.
Com efeito,

$$f(x_1) = f(1) = -0,45969769413186 < 0$$
$$f(x_2) = 0,022698390665485 > 0$$
$$f(x_3) = 0,001148782343838 > 0$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração, o que muda a fórmula de recorrência.

Assim como foi feito para $k = 1$, devemos verificar qual dos valores entre $f(x_1)$ e $f(x_2)$ tem sinal contrário ao valor de $f(x_3)$.
Com efeito,

$$f(x_1) = f(1) = -0,45969769413186 < 0$$
$$f(x_2) = 0,022698390665485 > 0$$
$$f(x_3) = 0,001148782343838 > 0$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração, o que muda a fórmula de recorrência.

$k = 3:$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_3 - x_1)}{f(x_3) - f(x_1)} \\
&= 0,738398620137094 - \frac{f(0,738398620137094)\cdot(0,738398620137094 - 1)}{f(0,738398620137094) - f(1)} \\
&= 0,739050731114720
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_4 - x_3| &= |0,739050731114720 - 0,738398620137094| \\
&= 0.000652110977626630 > 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

$k = 3:$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3) \cdot (x_3 - x_1)}{f(x_3) - f(x_1)} \\
&= 0,738398620137094 - \frac{f(0,738398620137094) \cdot (0,738398620137094 - 1)}{f(0,738398620137094) - f(1)} \\
&= 0,739050731114720
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_4 - x_3| &= |0,739050731114720 - 0,738398620137094| \\
&= 0.000652110977626630 > 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

$k = 3:$

$$
\begin{aligned}
x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)\cdot(x_3 - x_1)}{f(x_3) - f(x_1)} \\
&= 0,738398620137094 - \frac{f(0,738398620137094)\cdot(0,738398620137094 - 1)}{f(0,738398620137094) - f(1)} \\
&= 0,739050731114720
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_4 - x_3| &= |0,739050731114720 - 0,738398620137094| \\
&= 0.000652110977626630 > 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Em verdade,

$$f(x_1) = f(1) = -0,45969769413186 < 0$$
$$f(x_3) = 0,001148782343838 > 0$$
$$f(x_4) = 0,000057575331767 > 0$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_4) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração.

Em verdade,

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= f(1) = -0,45969769413186 < 0 \\
f(x_3) &= 0,001148782343838 > 0 \\
f(x_4) &= 0,000057575331767 > 0
\end{aligned}
$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_4) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração.

$k = 4:$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_4 - x_1)}{f(x_4) - f(x_1)}$$
$$= 0,739087210820866 - \frac{f(0,739087210820866)\cdot(0,739087210820866 - 1)}{f(0,739087210820866) - f(1)}$$
$$= 0,739083409893471$$

Pelo critério da parada,

$$|x_5 - x_4| = |0,739083409893471 - 0,739087210820866|$$
$$= 3,2678787506833 \times 10^{-5} > 10^{-5}.$$

$$k = 4:$$

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_4 - x_1)}{f(x_4) - f(x_1)} \\ &= 0,739087210820866 - \frac{f(0,739087210820866)\cdot(0,739087210820866 - 1)}{f(0,739087210820866) - f(1)} \\ &= 0,739083409893471 \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$\begin{aligned} |x_5 - x_4| &= |0,739083409893471 - 0,739087210820866| \\ &= 3,2678787506833 \times 10^{-5} > 10^{-5}. \end{aligned}$$

$k = 4:$

$$
\begin{aligned}
x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)\cdot(x_4 - x_1)}{f(x_4) - f(x_1)} \\
&= 0,739087210820866 - \frac{f(0,739087210820866)\cdot(0,739087210820866 - 1)}{f(0,739087210820866) - f(1)} \\
&= 0,739083409893471
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_5 - x_4| &= |0,739083409893471 - 0,739087210820866| \\
&= 3,26787787506833 \times 10^{-5} > 10^{-5}.
\end{aligned}
$$

Veja que

$$f(x_1) = f(1) = -0,45969769413186 < 0$$
$$f(x_4) = 0,000057575331767 > 0$$
$$f(x_5) = 0,000002884170812 > 0,$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_5) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração.

Veja que

$$f(x_1) = f(1) = -0,45969769413186 < 0$$
$$f(x_4) = 0,000057575331767 > 0$$
$$f(x_5) = 0,000002884170812 > 0,$$

logo, $f(x_1) \cdot f(x_5) < 0$ e assim, usaremos estes dois valores na próxima iteração.

$k = 5:$

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)\cdot(x_4 - x_1)}{f(x_5) - f(x_1)}$$

$$= 0,739083409893471 - \frac{f(0,739083409893471)\cdot(0,739083409893471 - 1)}{f(0,739083409893471) - f(1)}$$

$$= 0,739085046889484$$

Pelo critério da parada,

$$|x_6 - x_5| = |0,739085046889484 - 0,739083409893471|$$
$$= 1.63699601274381 \times 10^{-6} < 10^{-5},$$

doravante, a raiz é

$$\xi \approx x_6 = 0,739085046889484\,.$$

$k = 5:$

$$\begin{aligned} x_6 &= x_5 - \frac{f(x_5)\cdot(x_4 - x_1)}{f(x_5) - f(x_1)} \\ &= 0,739083409893471 - \frac{f(0,739083409893471)\cdot(0,739083409893471 - 1)}{f(0,739083409893471) - f(1)} \\ &= 0,739085046889484 \end{aligned}$$

Pelo critério da parada,

$$\begin{aligned} |x_6 - x_5| &= |0,739085046889484 - 0,739083409893471| \\ &= 1.63699601274381 \times 10^{-6} < 10^{-5}, \end{aligned}$$

doravante, a raiz é

$$\xi \approx x_6 = 0,739085046889484\,.$$

$k = 5:$

$$
\begin{aligned}
x_6 &= x_5 - \frac{f(x_5)\cdot(x_4 - x_1)}{f(x_5) - f(x_1)} \\
&= 0,739083409893471 - \frac{f(0,739083409893471)\cdot(0,739083409893471 - 1)}{f(0,739083409893471) - f(1)} \\
&= 0,739085046889484
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_6 - x_5| &= |0,739085046889484 - 0,739083409893471| \\
&= 1.63699601274381 \times 10^{-6} < 10^{-5},
\end{aligned}
$$

doravante, a raiz é

$$\xi \approx x_6 = 0,739085046889484\,.$$

$k = 5:$

$$
\begin{aligned}
x_6 &= x_5 - \frac{f(x_5)\cdot(x_4 - x_1)}{f(x_5) - f(x_1)} \\
&= 0,739083409893471 - \frac{f(0,739083409893471)\cdot(0,739083409893471 - 1)}{f(0,739083409893471) - f(1)} \\
&= 0,739085046889484
\end{aligned}
$$

Pelo critério da parada,

$$
\begin{aligned}
|x_6 - x_5| &= |0,739085046889484 - 0,739083409893471| \\
&= 1.63699601274381 \times 10^{-6} < 10^{-5},
\end{aligned}
$$

doravante, a raiz é

$$\xi \approx x_6 = 0,739085046889484\,.$$

Exemplo 3.2

Determine pelo menos uma raiz positiva de cada equação $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 20 = 0$ *com* $\varepsilon \leqslant 10^{-4}$ *pelo método Regula Falsi.*