NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740
CURSO: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

QUESTÃO 1

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$$
$$4x^2 - 8x - 9y^2 - 36y + 4 = 0$$
$$4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) - 9(y^2 + 4y + 2^2 - 2^2) + 4 = 0$$
$$4(x^2 - 2x + 1) - \cancel{4} - 9(y^2 + 4y + 4) - 36 + \cancel{4} = 0$$
$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 4y + 4) = -36$$
$$4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 = -1 \quad \div -36$$
$$-\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

* A CÔNICA EM QUESTÃO É UMA HIPÉRBOLE, UMA VEZ QUE SUA EQUAÇÃO É DA FORMA $-\frac{(x-x_c)^2}{b^2} + \frac{(y-y_c)^2}{a^2} = 1$, NO QUAL O CENTRO SE ENCONTRA NO PONTO (x_c, y_c), OS VÉRTICES EM $A_1 = (x_c, y_c - b)$, $A_2 = (x_c, y_c + b)$ E OS FOCOS EM $F_1 = (x_c, y_c - a)$ E $F_2 = (x_c, y_c + a)$

* PODEMOS AFIRMAR QUE O CENTRO DA HIPÉRBOLE SE ENCONTRA, PORTANTO, NO PONTO $C = (x_c, y_c) = (1, -2)$ //

* SABENDO QUE $a^2 = 4 \therefore a = 2$ E $b^2 = 9 \therefore b = 3$, PODEMOS AFIRMAR QUE OS VÉRTICES ESTÃO NOS PONTOS $A_1 = (1, -4)$ E $A_2 = (1, 0)$

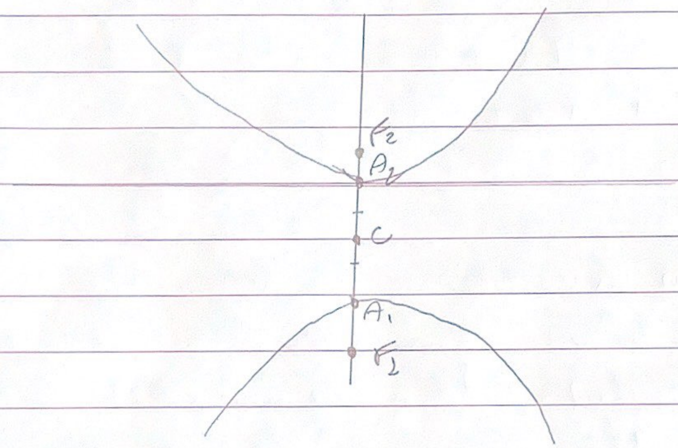
NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES

RA: 2252740

CURSO: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

* SABENDO QUE $a^2 = b^2 + c$ ∴ $9 = 4 + c^2$ ∴ $c^2 = 5$ ∴ $c = \sqrt{5}$, PODEMOS AFIRMAR QUE OS FOCOS DA ELIPSE ESTÃO NOS PONTOS $F_1 = (2, -4)$ E $F_2 = (2, -0)$

* ESBOÇO DO GRÁFICO



QUESTÃO 2

a) $U = \{(x, y, z, t) \mid y - x = x \text{ e } -3x + y + z = 0\}$

$v = (x, y, z, t) \in U$

$$\begin{cases} y - x = x \therefore y = 2x \\ -3x + y + z = 0 \therefore -3x + 2x + z = 0 \therefore z = x \end{cases}$$

$v = (x, 2x, x, t) \in U$

NOME: FELIPE ANCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740
CURSO: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

$v = (x, 2x, x, 0) + (0, 0, 0, t)$

$v = x\underbrace{(1, 2, 1, 0)}_{v_1} + t\underbrace{(0, 0, 0, 1)}_{v_2}$

LOGO, $U = [v_1, v_2]$

NOTE QUE $B_2 = \{v_1, v_2\}$ É LI, POIS PODE-SE REPRESENTAR POR UMA MATRIZ ESCALONADA

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ENTÃO B_2 É UMA BASE DE U DE DIMENSÃO $Dim(U) = 3$ //

b)

i) $\langle (1,2,1,0), (0,0,0,1) \rangle = 4 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

COMO $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, ENTÃO A BASE $B_2 = [(1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$ É ORTOGONAL AO SUBESPAÇO U.

ii) PARA VERIFICARMOS A BASE ORTONORMAL AO SUBESPAÇO U, PRECISAMOS NORMALIZAR A BASE B_2

NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740
CURSO: BCC

$\langle v_1, v_1 \rangle = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 0^2$
$= 4 + 12 + 1 + 0$
$= 17$

$\langle v_2, v_2 \rangle = 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^2 + 1 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2$
$= 1$

$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} = \frac{v_1}{\sqrt{17}} = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, 0\right)$

$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}} = \frac{v_2}{\sqrt{1}} = v_2 = (0,0,0,1)$

Portanto, $B_1' = [(1/\sqrt{17}, \frac{2}{\sqrt{17}}, 1/\sqrt{17}, 0), (0,0,0,1)]$
é base ortonormal do subespaço U.

QUESTÃO 3

a) $v = x(1,1) + y(0,-1)$
$T(v) = x(0,-2) + y(1,3)$
$T(v) = (0,-2x) + (y, 3y)$
$T(v) = (y, -2x+3y)$
$T(x,y) = (y, -2x+3y)$

NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740
CURSO: BCC

a) $T(1,1) = (0,-2) = 0\vec{i} - 2\vec{j}$
$T(0,-1) = (1,3) = 1\vec{i} + 3\vec{j}$

LOGO, $[T]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

RECORDANDO QUE $p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I)$

NOTE QUE $T - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

SEGUE QUE $p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I)$

$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - (-2)$

$-3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2$
$= 9 - 8 = 1$

$\lambda = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ → $\lambda_1 = 2$ // → $\lambda_2 = 1$ //

ENTÃO, $\lambda_1 = 2$ E $\lambda_2 = 1$ SÃO OS AUTOVALORES DO OPERADOR T.

NOME: Felipe Archanjo da Cunha Mendes
RA: 2252740
CURSO: BCC

c) v é autovetor de $T \Leftrightarrow v \in Ker(T-\lambda I)$
$\Leftrightarrow (T-\lambda I)(v) = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -2 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{eq1}$$

i) $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2x + y = 0 \\ -2x + y = 0\end{cases} \quad \therefore \ 2x = y$$

Logo, $v_1 = (x, y) = (x, 2x) \therefore v_1 = x(1, 2)$
é autovetor associado a $\lambda_1 = 2$, com $x \neq 0$

ii) $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-x + y = 0 \\ -2x + 2y = 0\end{cases} \quad \rightarrow \ x = y$$

Logo, $v_2 = (x, y) = (x, x) \rightarrow v_2 = x(1, 1)$
é autovetor associado a $\lambda_2 = 1$

NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740
CURSO: BCC

PORTANTO, $v_1 = (1,2)$ E $v_2 = (1,1)$ SÃO AUTOVETORES ASSOCIADOS A λ_1 E λ_2, RESPECTIVAMENTE.