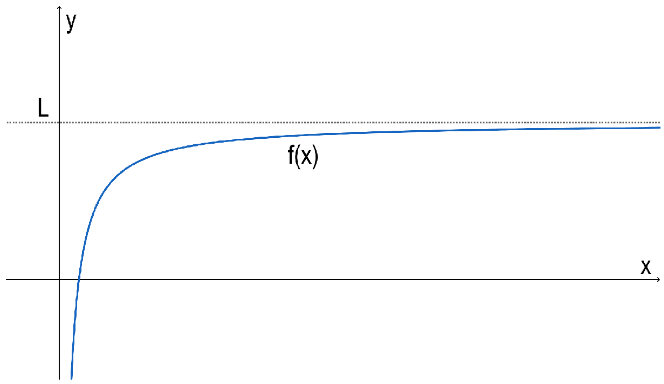
0.1 Limites no infinito e limites infinitos

Definição 1. *Seja uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo infinito. Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende para $+\infty$, se dado $\epsilon > 0$ existir um k tal que*

$$x > k \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

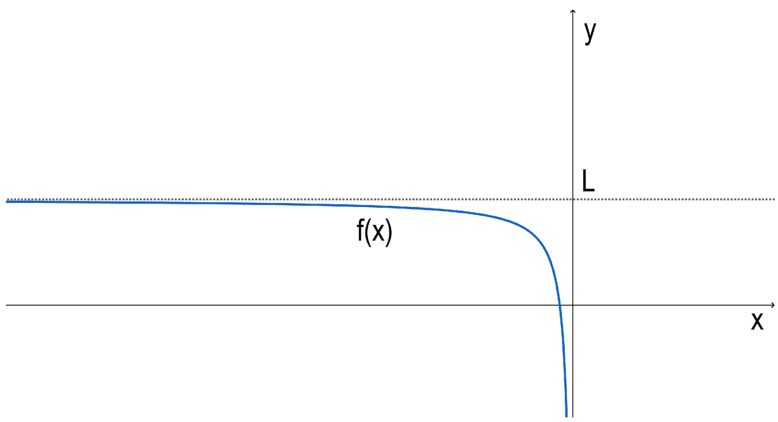
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$



Definição 2. *Seja uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo infinito. Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende para $-\infty$, se dado $\epsilon > 0$ existir um k tal que*

$$x < k \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$



Definição 3. *Sobre as duas definições anteriores, chamamos a reta $y = L$ de **assíntota horizontal** da função $f(x)$.*

Definição 4. *Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ e $f : I - \{a\} \to \mathbb{R}$.*

1. *Dizemos que o limite da função f é $+\infty$ quando x tende para a, se dado $M > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.*

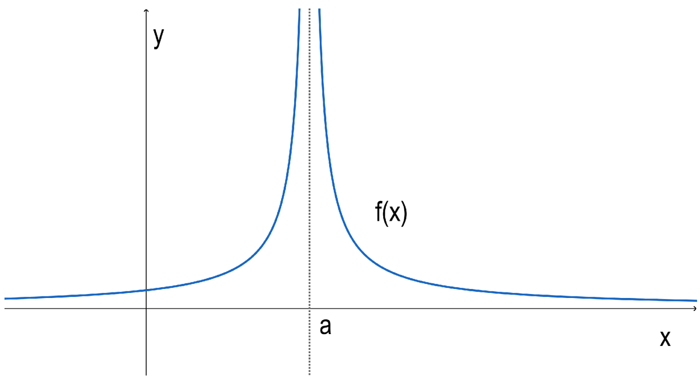
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

2. *Dizemos que o limite da função f é $+\infty$ quando x tende para a pela direita, se dado $M > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) > M$.*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty.$$

3. *Dizemos que o limite da função f é $+\infty$ quando x tende para a pela esquerda, se dado $M > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) > M$.*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty.$$



Definição 5. *Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ e $f : I - \{a\} \to \mathbb{R}$.*

1. *Dizemos que $f(x)$ tem limite $-\infty$ quando x tende para a, se dado $M > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.*

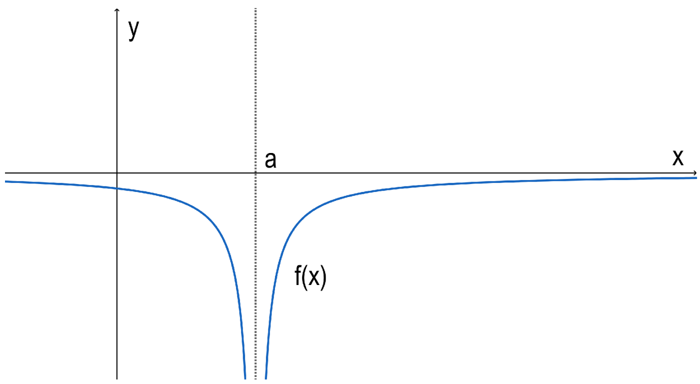
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

2. *Dizemos que $f(x)$ tem limite $-\infty$ quando x tende para a pela direita, se dado $M > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -M$.*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

3. *Dizemos que $f(x)$ tem limite $-\infty$ quando x tende para a pela esquerda, se dado $M > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < -M$.*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$



Definição 6. *A reta $x = a$ é chamada de **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos umas das seguintes condições estiver satisfeita:*

1. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$;
2. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$;
3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$;
4. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$;
5. $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$;
6. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Definição 7. *Seja uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo infinito.*

1. *Se dado $M > 0$, existir k tal que $x > k \Rightarrow f(x) > M$, dizemos que o limite da função f tende à mais infinito, quando x tende à mais infinito.*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. *Se dado $M > 0$, existir k tal que $x > k \Rightarrow f(x) < -M$, dizemos que o limite da função f tende à menos infinito, quando x tende para mais infinito.*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Definição 8. *Seja uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde I é um intervalo infinito.*

1. *Se dado $M > 0$ existir k tal que $x < k \Rightarrow f(x) > M$, dizemos que o limite da função f tende à mais infinito quando x tende para menos infinito.*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

2. *Se dado $M > 0$, existir k tal que $x < k \Rightarrow f(x) < -M$, dizemos que o limite da função f tende à menos infinito quando x tende para menos infinito.*
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Sempre que dissermos que uma função tem limite $+\infty$ ou $-\infty$, temos um caso onde o limite não existe. Podemos ainda escrever,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

para indicar que
$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty.$$

Teorema 1. *Se $n \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{R}^*$, então*

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^n} = 0,$

2. $\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^n} = 0.$

Teorema 2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:*

1. $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty;$

2. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & n \ \textit{par} \\ -\infty, & n \ \textit{ímpar} \end{cases}$

Proposição 1. *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo x próximo de a mas $x \neq a$ e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = +\infty.$$

Proposição 2. *Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L$, então*

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Com o mesmo raciocínio é fácil provar, se o $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L$, então
$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

Proposição 3. *Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L$, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty, & \textit{se} \quad L > 0 \\ -\infty, & \textit{se} \quad L < 0 \end{cases}$$

Se $L = 0$, temos a indeterminação $\infty \cdot 0$.

Proposição 4. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = L$*, então*

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} -\infty, & \textit{se} \quad L > 0 \\ +\infty, & \textit{se} \quad L < 0 \end{cases}$$

Se $L = 0$*, temos a indeterminação* $\infty \cdot 0$

Proposição 5. *Se* $f(x) > 0$ *para* x *próximo de* a *e* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Proposição 6. *Se* $f(x) < 0$*, para* x *próximo de* a *e* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Teorema 3.

1. *Se* $g(x) > 0$ *para* x *próximo de* a*,* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = L$*, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty, & \textit{se} \quad L > 0 \\ -\infty, & \textit{se} \quad L < 0 \end{cases}$$

2. *Se,* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$*, então* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$