VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

PARTE II

INTRODUÇÃO

Em muitas situações, podemos estar interessados em observar duas características simultaneamente, o que nos leva a tratar cada característica como uma variável aleatória, e, portanto, as duas variáveis aleatórias conjuntamente como uma variável aleatória bidimensional.

DEFINIÇÃO

Sejam ϵ um experimento aleatório e Ω o espaço amostral associado a ϵ.

Sejam $X = X(w)$ e $Y = Y(w)$ duas funções matemáticas, cada uma associando um número real e cada resultado $w \in \Omega$.

Denominamos (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Os valores da variável aleatória bidimensional (X, Y) são representados pelos pares ordenados (x, y).

Se tanto a variável aleatória X quanto a variável aleatória Y assumirem um número finito ou infinito enumerável de valores, então dizemos que a variável aleatória bidimensional (X, Y) é uma variável aleatória bidimensional discreta.

Caso a variável aleatória X e a variável aleatória Y assumirem, cada uma, um número infinito não enumerável de valores, então a variável aleatória bidimensional (X, Y) é dita uma variável aleatória bidimensional contínua.

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE CONJUNTA

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta. A cada valor possível de (X, Y), isto é, a cada (x, y) associaremos um número real, denotado por $f(x, y)$, representando a probabilidade de a variável aleatória X assumir o valor x, ao mesmo tempo em que a variável aleatória Y assume o valor y, isto é,

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

O conjunto de todas as probabilidades $f(x, y)$, para todos os valores válidos para as variáveis aleatórias X e Y, é definido como **função de probabilidade conjunta** da variável bidimensional discreta (X, Y).

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE CONJUNTA

A função de probabilidade conjunta discreta $f(x,y)$, como representa probabilidades, deve satisfazer às seguintes condições:

- $0 \leq f(x,y) \leq 1, \forall (x,y);$
- $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1.$

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE MARGINAL

Podemos estar interessados na função de probabilidade da variável aleatória X ou na função de probabilidade da variável aleatória Y, denominadas, respectivamente, função de probabilidade marginal de X e função de probabilidade marginal de Y.

A função

$$p(x) = P(X = x) = \sum_y f(x, y), \forall x$$

representa a **função de probabilidade marginal da variável aleatória X**.

Analogamente, definimos a função

$$q(y) = P(Y = y) = \sum_x f(x, y), \forall y$$

representa a **função de probabilidade marginal da variável aleatória Y**.

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE MARGINAL

Observação

É importante verificar que, como $p(x)$ e $q(y)$ são funções de probabilidade, então devem ser satisfeitas as seguintes condições:

- $0 \leq p(x) \leq 1$;
- $\sum_x p(x) = 1$;
- $0 \leq q(y) \leq 1$;
- $\sum_y q(y) = 1$.

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE CONDICIONAL

O conceito de probabilidade condicional pode agora ser introduzido, e é análogo ao conceito de eventos condicionados. A função de probabilidade condicional de X dado que $Y = y$, denotada por $p(x|y)$, é definida por

$$p(x|y) = \frac{f(x,y)}{q(y)}, \forall x \; e \; q(y) \neq 0.$$

Analogamente, a função de probabilidade condicional de Y dado que $X = x$, denotada por $q(y|x)$, é definida por

$$q(y|x) = \frac{f(x,y)}{p(x)}, \forall y \; e \; p(x) \neq 0.$$

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE CONDICIONAL

Observação

É importante verificar que, como $p(x|y)$ e $q(y|x)$ são funções de probabilidade, então devem ser satisfeitas as seguintes condições:

- $0 \leq p(x|y) \leq 1;$
- $\sum_x p(x|y) = 1 \,, \;\; \forall \, y;$
- $0 \leq q(y|x) \leq 1;$
- $\sum_y q(y|x) = 1 \,, \;\; \forall \, x.$

INDEPENDÊNCIA

Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias discretas independentes quando o resultado de X, por exemplo, de modo algum influenciar o resultado de Y, e vice-versa, ou seja, se $p(x|y) = p(x)$ para todo x e y, ou, equivalentemente, se $q(y|x) = q(y)$ para todo x e y.

Então, seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta. Dizemos que X e Y são variáveis aleatórias discretas independentes se, e somente se,

$$f(x, y) = p(x).q(y), \forall(x, y).$$

FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional discreta. Seja W = H(X, Y) uma função da variável aleatória bidimensional discreta (X, Y). Então, W será uma variável aleatória unidimensional discreta, e estamos interessados em obter a sua função de probabilidade.

O problema de obtenção de probabilidade da variável aleatória discreta W é facilmente resolvido. Precisamos verificar os valores de w que a variável aleatória discreta pode tomar, de acordo com a função H(X, Y) e os valores que a variável aleatória X e a variável aleatória Y assumem, e calcular suas respectivas probabilidades, isto é, precisamos obter

$$r(w) = P(W = w), \forall w.$$

Para tal, basta verificar os valores w correspondentes aos pares ordenados (x, y), do mesmo modo como fizemos no caso unidimensional.

EXEMPLO

Numa urna têm-se cinco bolas marcadas com os seguintes números: $-1, 0, 0, 0, 1$. Retiram-se três bolas, simultaneamente: X indica a soma dos números extraídos e Y o maior valor da trinca. Calcule a função de probabilidade de (X, Y).