Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial: Fórmula Interpolatória de Newton

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

20 de julho de 2021

Diferenças Divididas

Considere uma função $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$.

Definição

A diferença dividida de ordem 0 de uma função $f(x)$ definida nos pontos $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ por

(1) $$f[x_i] = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots n\,.$$

Diferenças Divididas

Definição

A diferença dividida de ordem n de uma função $f(x)$ definida nos pontos $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ por

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \tag{2}$$

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	
			$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
x_1	$f[x_1]$		
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3] = \dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Temos o seguinte cálculo sistemático:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Diferenças Divididas

Exemplo

Para a seguinte função tabelada

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	29	30	31	62

construa a tabela de diferenças finitas.

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)}=31$			
			$\dfrac{1-31}{0-(-2)}=-15$		
-1	29				
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)}=1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)}=5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)}=0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)}=0$
		$\dfrac{31-30}{1-0}=1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)}=5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0}=15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1}=31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)}=31$			
-1	29		$\dfrac{1-31}{0-(-2)}=-15$		
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)}=1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)}=5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)}=0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)}=0$
		$\dfrac{31-30}{1-0}=1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)}=5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0}=15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1}=31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
-1	29		$\dfrac{1-31}{0-(-2)} = -15$		
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)} = 1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)} = 0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)} = 0$
		$\dfrac{31-30}{1-0} = 1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)} = 5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0} = 15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1} = 31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
-1	29		$\dfrac{1-31}{0-(-2)} = -15$		
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)} = 1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)} = 0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)} = 0$
		$\dfrac{31-30}{1-0} = 1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)} = 5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0} = 15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1} = 31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)}=31$			
-1	29		$\dfrac{1-31}{0-(-2)}=-15$		
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)}=1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)}=5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)}=0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)}=0$
		$\dfrac{31-30}{1-0}=1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)}=5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0}=15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1}=31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
-1	29		$\dfrac{1-31}{0-(-2)} = -15$		
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)} = 1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)} = 0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)} = 0$
		$\dfrac{31-30}{1-0} = 1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)} = 5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0} = 15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1} = 31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
-1	29		$\dfrac{1-31}{0-(-2)} = -15$		
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)} = 1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)} = 0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)} = 0$
		$\dfrac{31-30}{1-0} = 1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)} = 5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0} = 15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1} = 31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
-1	29		$\dfrac{1-31}{0-(-2)} = -15$		
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)} = 1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)} = 0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)} = 0$
		$\dfrac{31-30}{1-0} = 1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)} = 5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0} = 15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1} = 31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\dfrac{29-(-2)}{-1-(-2)}=31$			
-1	29		$\dfrac{1-31}{0-(-2)}=-15$		
		$\dfrac{30-29}{0-(-1)}=1$		$\dfrac{0-(-15)}{1-(-2)}=5$	
0	30		$\dfrac{1-1}{1-(-1)}=0$		$\dfrac{5-5}{2-(-2)}=0$
		$\dfrac{31-30}{1-0}=1$		$\dfrac{15-0}{2-(-1)}=5$	
1	31		$\dfrac{31-1}{2-0}=15$		
		$\dfrac{62-31}{2-1}=31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\frac{29-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
-1	29		$\frac{1-31}{0-(-2)} = -15$		
		$\frac{30-29}{0-(-1)} = 1$		$\frac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
0	30		$\frac{1-1}{1-(-1)} = 0$		$\frac{5-5}{2-(-2)} = 0$
		$\frac{31-30}{1-0} = 1$		$\frac{15-0}{2-(-1)} = 5$	
1	31		$\frac{31-1}{2-0} = 15$		
		$\frac{62-31}{2-1} = 31$			
2	62				

Solução:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-2	-2				
		$\frac{29-(-2)}{-1-(-2)} = 31$			
-1	29		$\frac{1-31}{0-(-2)} = -15$		
		$\frac{30-29}{0-(-1)} = 1$		$\frac{0-(-15)}{1-(-2)} = 5$	
0	30		$\frac{1-1}{1-(-1)} = 0$		$\frac{5-5}{2-(-2)} = 0$
		$\frac{31-30}{1-0} = 1$		$\frac{15-0}{2-(-1)} = 5$	
1	31		$\frac{31-1}{2-0} = 15$		
		$\frac{62-31}{2-1} = 31$			
2	62				

Diferenças Divididas

A seguir, temos o seguinte teorema:

Teorema

Seja $f(x)$ *uma função contínua* $(n+1)$ *vezes diferenciável definida no intervalo* $[a,b]$. *Sejam* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ *pontos distintos de* $[a,b]$. *Então,*

(3)
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f[x_k]}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)} = \frac{f[x_0]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$
$$+ \frac{f[x_1]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}$$
$$+ \ldots + \frac{f[x_n]}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

Diferenças Divididas

Este teorema fornece os seguintes corolários:

Corolário

Temos que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{j0}, x_{j1}, \ldots, x_{jn}]$$

onde $(j_0, j_1, \ldots, j_n)$ *é qualquer permutação dos inteiros positivos* $0, 1, \ldots, n$.

Corolário

Observação

Este corolário nos diz que a diferença dividida de $f(x)$ independe da ordem dos pontos $x_0, x_1, \dots x_n$.

Desta forma, podemos escrever as diferenças divididas em qualquer ordem como segue:

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = \dots$$

Diferenças Divididas

Corolário

Temos que

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]}{x_k - x_j}$$

onde $k \neq j$.

Este resultado nos afirma que podemos retirar quaisquer dois pontos para construir a diferença dividida, não somente x_0 e x_n.

Diferenças Divididas

Corolário

Temos que

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]}{x_k - x_j}$$

onde $k \neq j$.

Este resultado nos afirma que podemos retirar quaisquer dois pontos para construir a diferença dividida, não somente x_0 e x_n.

Fórmula de Newton

Munidos destes resultados, podemos determinar a chamada fórmula de Newton.

De fato, considere uma função contínua $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$.

Para os pontos x_0 e x, temos

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0}, \; x \neq x_0$$

ou

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x]. \tag{4}$$

Fórmula de Newton

Munidos destes resultados, podemos determinar a chamada fórmula de Newton.

De fato, considere uma função contínua $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$.
Para os pontos x_0 e x, temos

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0}, \; x \neq x_0$$

ou

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x]. \tag{4}$$

Fórmula de Newton

Da mesma forma, considerando os pontos x_0, x_1 e x, tendo em mente o corolário 1.2, vem que

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}, \; x \neq x_1,$$

ou ainda,

(5) $$f[x_0, x_1, x](x - x_1) = f[x_0, x] - f[x_0, x_1].$$

Fórmula de Newton

Da mesma forma, considerando os pontos x_0, x_1 e x, tendo em mente o corolário 1.2, vem que

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}, \; x \neq x_1,$$

ou ainda,

$$f[x_0, x_1, x](x - x_1) = f[x_0, x] - f[x_0, x_1]. \tag{5}$$

Fórmula de Newton

Da mesma forma, considerando os pontos x_0, x_1 e x, tendo em mente o corolário 1.2, vem que

$$f[x_0, x_1, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}, \; x \neq x_1,$$

ou ainda,

$$f[x_0, x_1, x](x - x_1) = f[x_0, x] - f[x_0, x_1]\,. \tag{5}$$

Fórmula de Newton

Multiplicando (5) por $(x - x_0)$, vem que

(6) $$(x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x] = (x - x_0) f[x_0, x] - (x - x_0) f[x_0, x_1] \, .$$

Em seguida, substituindo (4) em (6), obtemos:

(7) $$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x] \, .$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Fórmula de Newton

Multiplicando (5) por $(x - x_0)$, vem que

(6) $$(x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x] = (x - x_0) f[x_0, x] - (x - x_0) f[x_0, x_1] \, .$$

Em seguida, substituindo (4) em (6), obtemos:

(7) $$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x] \, .$$

Fórmula de Newton

Agora, tendo em mente novamente o corolário (1.2) para

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x] = \frac{f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x]-f[x_0,x_1,\ldots,x_n]}{x-x_n},\ x \neq x_n$$

e

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + (x-x_0)\,f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\,f[x_0,x_1,x_2] \\ + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n] \end{aligned}\right\} = P_n(x)$$
$$+ \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]}_{:=R_n(x)}$$

Observe que $R_n(x) = f(x) - P(x)$ é uma nova expressão para o erro $E(x)$ (Você verá no conteúdo "Erro na Interpolação" a devida análise sobre o erro $E(x)$).

Fórmula de Newton

Agora, tendo em mente novamente o corolário (1.2) para

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x] = \frac{f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x]-f[x_0,x_1,\ldots,x_n]}{x-x_n},\ x \neq x_n$$

e

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + (x-x_0)\,f[x_0,x_1] + (x-x_0)\,(x-x_1)\,f[x_0,x_1,x_2] \\ + \ldots + (x-x_0)\,(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_{n-1})\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n] \end{aligned}\right\} = P_n(x)$$

$$+ \underbrace{(x-x_0)\,(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_n)\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]}_{:=R_n(x)}$$

Observe que $R_n(x) = f(x) - P(x)$ é uma nova expressão para o erro $E(x)$ (Você verá no conteúdo "Erro na Interpolação" a devida análise sobre o erro $E(x)$).

Fórmula de Newton

Agora, tendo em mente novamente o corolário (1.2) para

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x] = \frac{f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x]-f[x_0,x_1,\ldots,x_n]}{x-x_n},\ x \neq x_n$$

e

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned}\right\} = P_n(x)$$

$$+ \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]}_{:=R_n(x)}$$

Observe que $R_n(x) = f(x) - P(x)$ é uma nova expressão para o erro $E(x)$ (Você verá no conteúdo "Erro na Interpolação" a devida análise sobre o erro $E(x)$).

Fórmula de Newton

Agora, tendo em mente novamente o corolário (1.2) para

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x] = \frac{f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x]-f[x_0,x_1,\ldots,x_n]}{x-x_n},\ x \neq x_n$$

e

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + (x-x_0)\,f[x_0,x_1] + (x-x_0)\,(x-x_1)\,f[x_0,x_1,x_2] \\ + \ldots + (x-x_0)\,(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_{n-1})\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n] \end{aligned}\right\} = P_n(x)$$

$$+ \underbrace{(x-x_0)\,(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_n)\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]}_{:=R_n(x)}$$

Observe que $R_n(x) = f(x) - P(x)$ é uma nova expressão para o erro $E(x)$ (Você verá no conteúdo "Erro na Interpolação" a devida análise sobre o erro $E(x)$).

Fórmula de Newton

Agora, tendo em mente novamente o corolário (1.2) para

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x] = \frac{f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x] - f[x_0,x_1,\ldots,x_n]}{x - x_n}, \; x \neq x_n$$

e

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] \\ + \ldots + (x - x_0)\,(x - x_1)\, \ldots\, (x - x_{n-1})\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned}\right\} = P_n(x)$$
$$+ \underbrace{(x - x_0)\,(x - x_1)\, \ldots\, (x - x_n)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]}_{:= R_n(x)}$$

Observe que $R_n(x) = f(x) - P(x)$ é uma nova expressão para o erro $E(x)$ (Você verá no conteúdo "Erro na Interpolação" a devida análise sobre o erro $E(x)$).

Fórmula de Newton

Agora, tendo em mente novamente o corolário (1.2) para

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x] = \frac{f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x]-f[x_0,x_1,\ldots,x_n]}{x-x_n}, \; x \neq x_n$$

e

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + (x-x_0)\,f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)\,f[x_0,x_1,x_2] \\ + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n] \end{aligned}\right\} = P_n(x)$$
$$+ \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\,f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]}_{:=R_n(x)}$$

Observe que $R_n(x) = f(x) - P(x)$ é uma nova expressão para o erro $E(x)$ (Você verá no conteúdo "Erro na Interpolação" a devida análise sobre o erro $E(x)$).

Fórmula de Newton

Teorema

Seja $f(x)$ *uma função contínua definida em* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ *pontos distintos de um intervalo* $[a, b]$. *O polinômio de grau* $\leq n$ *baseado nas diferenças divididas é dado por*

$$\begin{aligned} P(x) = {} & f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ & + \ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \end{aligned} \tag{8}$$

interpola $f(x)$ *nos pontos* $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo

Exemplo

A função Gama foi definida por Euler por meio da integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

Com respeito a função Gama, temos a tabela:

x	1	1,02	1,04
$\Gamma(x)$	1,0000	0,9888	0,9784

Usando a fórmula de Newton, calcule $\Gamma(1,01)$ *e* $\Gamma(1,03)$.

Solução: Note que $n = 2$ e o polinômio interpolador é dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2]\,.$$

Temos a seguinte tabela de diferenças finitas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	**1**		
		-0,56	
1,02	0,9888		**1**
		-0,52	
1,04	0,9784		

Logo, o polinômio interpolador é

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 + (x-1)\cdot(-0,56) + (x-1)\cdot(x-1,02)\cdot 1 \\ &= x^2 - 2,58\,x + 2,58 \end{aligned}$$

donde, $f(1,01) \approx P_2(1,01) = 0,9943$ e, $f(1,03) \approx P_2(1,03) = 0,9835\,.$

Solução: Note que $n = 2$ e o polinômio interpolador é dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2]\,.$$

Temos a seguinte tabela de diferenças finitas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	**1**		
		-0,56	
1,02	0,9888		**1**
		-0,52	
1,04	0,9784		

Logo, o polinômio interpolador é

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 + (x-1)\cdot(-0,56) + (x-1)\cdot(x-1,02)\cdot 1 \\ &= x^2 - 2,58\,x + 2,58 \end{aligned}$$

donde, $f(1,01) \approx P_2(1,01) = 0,9943$ e, $f(1,03) \approx P_2(1,03) = 0,9835\,.$

Solução: Note que $n = 2$ e o polinômio interpolador é dado por:

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2]\,.$$

Temos a seguinte tabela de diferenças finitas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	**1**		
		-0,56	
1,02	0,9888		**1**
		-0,52	
1,04	0,9784		

Logo, o polinômio interpolador é

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 1 + (x-1) \cdot (-0,56) + (x-1) \cdot (x-1,02) \cdot 1 \\ &= x^2 - 2,58\,x + 2,58 \end{aligned}$$

donde, $f(1,01) \approx P_2(1,01) = 0,9943$ e, $f(1,03) \approx P_2(1,03) = 0,9835\,.$