Cálculo Numérico

Sistemas Lineares: Método de Eliminação de Gauss

Wellington José Corrêa
@correa.well

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

5 de julho de 2021

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Estudando em sua cidade natal, certo dia quando o professor mandou que os alunos somassem os números de 1 a 100, imediatamente Gauss achou a resposta - 5050 - aparentemente sem cálculos. Supõe-se que já aí houvesse descoberto a fórmula de uma soma de uma progressão aritmética.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Estudando em sua cidade natal, certo dia quando o professor mandou que os alunos somassem os números de 1 a 100, imediatamente Gauss achou a resposta - 5050 - aparentemente sem cálculos. Supõe-se que já aí houvesse descoberto a fórmula de uma soma de uma progressão aritmética.
- Em 30 de março de 1796, quando se tornou o primeiro a construir um polígono regular de dezessete lados somente com o auxilio de régua e compasso.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Estudando em sua cidade natal, certo dia quando o professor mandou que os alunos somassem os números de 1 a 100, imediatamente Gauss achou a resposta - 5050 - aparentemente sem cálculos. Supõe-se que já aí houvesse descoberto a fórmula de uma soma de uma progressão aritmética.
- Em 30 de março de 1796, quando se tornou o primeiro a construir um polígono regular de dezessete lados somente com o auxilio de régua e compasso.
- Gauss doutorou-se em 1798, na Universidade de Helmstãdt e sua tese foi a demonstração do "Teorema fundamental da Álgebra", provando que toda equação polinomial $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz real ou imaginária e para isso baseou-se em considerações geométricas.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Deve-se a Gauss a representação gráfica dos números complexos pensando nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

- Deve-se a Gauss a representação gráfica dos números complexos pensando nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano.
- Seu livro "Disquisitiones Arithmeticaé' (Pesquisas Aritméticas) é o principal responsável pelo desenvolvimento e notações da Teoria dos Números, nele apresentando a notação $b = c(mod\, a)$, para relação de congruência, que é uma relação de equivalência.
- Ainda nesta obra Gauss apresenta a lei da reciprocidade quadrática classificada por ele como a "jóia da aritmética" e demonstrando o teorema segundo o qual todo inteiro positivo pode ser representado de uma só maneira como produto de primos descreveu uma vez a Matemática como sendo a rainha das Ciências e a Aritmética como a rainha da Matemática.

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

- Suas pesquisas matemáticas continuaram em teoria das funções e Geometria aplicada à teoria de Newton. Em Geodésia inventou o helítropo, aparelho que transmite sinais por meio de luz refletida e em Eletromagnetismo inventou o magnetômetro bifiliar e o telégrafo elétrico.
- Possui um Teorema chamado Teorema *egregium* de Gauss. Este é um resultado fundamental em geometria diferencial demonstrado por Carl Friedrich Gauss que trata da curvatura das superfícies.

Figura: Gauss foi conhecido como “príncipe da Matemática"

Introdução

O método de Eliminação de Gauss consiste transformar um sistema dado em um sistema triangular superior por meio de operações elementares.

Descrição do Algoritmo

Considere o sistema linear $AX = B$ caracterizado matricialmente pela matriz aumentada:

$$
(1) \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}
\end{array}\right)
$$

onde $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ e $b_i^{(1)} = b_i$. Por hipótese, admitamos que $a_{11}^{(1)} \neq 0$.

Descrição do Algoritmo

Passo 1:

Eliminamos a incógnita x_1 da segunda, terceira, n-ésima equações (isto é, zeramos os elementos da primeira coluna abaixo da diagonal).

Descrição do Algoritmo: $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\
a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}
\end{array}\right)$$

onde nós usamos o algoritmo

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{ij}^{(2)} & = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ \\ b_i^{(2)} & = b_i^{(1)} - b_1^{(1)} \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \end{cases}, i = 2, 3, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, n\,.$$

Descrição do Algoritmo: $k = 1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{a_{11}^{(1)} \neq 0} \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

onde nós usamos o algoritmo

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{ij}^{(2)} & = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(1)} \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \\ \\ b_i^{(2)} & = b_i^{(1)} - b_1^{(1)} \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \end{cases}, i = 2, 3, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Descrição do Algoritmo

Passo 2:

Supomos agora que $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Nosso intuito é eliminar a incógnita x_2 da terceira, quarta, n-ésima equações.

Descrição do Algoritmo: $k = 2$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right)$$

empregando o algoritmo

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \\ \\ b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - b_2^{(2)} \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \end{cases}, i = 3, \dots, n;\ j = 2, 3, \dots, n\,.$$

Descrição do Algoritmo: $k = 2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{a_{22}^{(2)} \neq 0} \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{3n}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)} \end{array}\right) \dots$$

empregando o algoritmo

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{ij}^{(3)} & = a_{ij}^{(2)} - a_{2j}^{(2)} \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \\ b_i^{(3)} & = b_i^{(2)} - b_2^{(2)} \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \end{cases}, i = 3, \dots, n;\ j = 2, 3, \dots, n\,.$$

Descrição do Algoritmo

Passo $k-1$

Continuando o processo até eliminar a incógnita x_{n-1} da n-ésima equação.

Descrição do Algoritmo : $k = n - 1$

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
 & & a_{33}^{(3)} & \cdots & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\
 & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
 & 0 & & & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\
 & & & & a_{nn-1}^{(n-1)} & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)}
\end{array}\right)
$$

recorrendo ao algoritmo

$$
(4) \qquad \left\{\begin{array}{ll}
a_{nj}^{(n)} & = a_{nj}^{(n-1)} - a_{n-1j}^{(n-1)} \dfrac{a_{nn-1}^{(n-1)}}{a_{n-1\,n-1}^{(n-1)}} \\[2ex]
b_n^{(n)} & = b_n^{(n-1)} - b_{n-1}^{(n-1)} \dfrac{a_{nn-1}^{(n-1)}}{a_{n-1\,n-1}^{(n-1)}}
\end{array}\right. , \; j = n-1, n\,.
$$

Descrição do Algoritmo : $k = n - 1$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \cdots & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & 0 & & & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ & & & & a_{nn-1}^{(n-1)} & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{a_{\mathbf{n-1}\,\mathbf{n-1}}^{(n-\mathbf{1})} \neq 0} \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \cdots & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & 0 & & & a_{n-1n-1}^{(n-1)} & a_{n-1n}^{(n-1)} & b_{n-1}^{(n-1)} \\ & & & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{array}\right)$$

recorrendo ao algoritmo

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{ll} a_{nj}^{(n)} & = a_{nj}^{(n-1)} - a_{n-1j}^{(n-1)} \dfrac{a_{nn-1}^{(n-1)}}{a_{n-1\,n-1}^{(n-1)}} \\ b_n^{(n)} & = b_n^{(n-1)} - b_{n-1}^{(n-1)} \dfrac{a_{nn-1}^{(n-1)}}{a_{n-1\,n-1}^{(n-1)}} \end{array}\right. , \; j = n-1, n\,.$$

Descrição do Algoritmo

De modo geral, o k-ésimo passo do método da eliminação de Gauss é obtido por

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} & = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)}\,\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\ k = 1, 2, \ldots, n-1; \\ & \qquad\qquad\qquad\quad i = k+1, \ldots, n; \\ b_{i}^{(k+1)} & = b_{i}^{(k)} - b_{k}^{(k)}\,\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\ j = k, k+1, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Exemplo 2.1

Resolva o sistema:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

recorrendo ao método de eliminação de Gauss.

Solução: De antemão, escrevamos a matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 13 \end{array}\right) \tag{6}$$

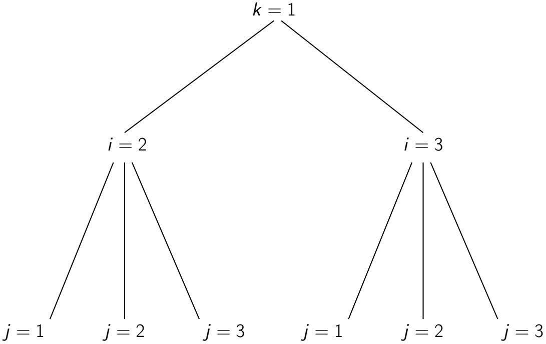
Solução: De antemão, escrevamos a matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 13 \end{array}\right) \tag{6}$$

Logo, sendo $n = 3$, pela fórmula (5), temos:

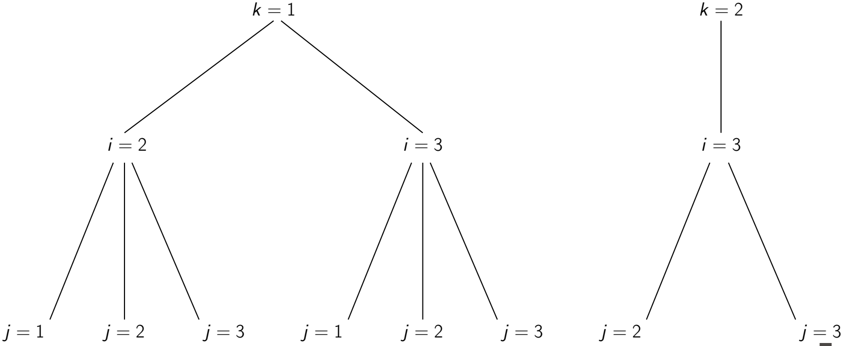
$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} & = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\ k = 1, 2; \\ & \qquad\qquad\qquad\quad i = k+1, 3; \\ b_i^{(k+1)} & = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\ j = k, k+1, \ldots, 3\,. \end{cases}$$

Com respeito ao índices k, i e j, temos as seguintes possibilidades:



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Com respeito ao índices k, i e j, temos as seguintes possibilidades:



Sendo assim, usando a fórmula $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, obtemos:

- $k = 1, i = 2, j = 1;$

Sendo assim, usando a fórmula $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, obtemos:

- $k = 1, i = 2, j = 1$;

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

Sendo assim, usando a fórmula $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, obtemos:

- $k = 1, i = 2, j = 1$;

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 2 - 6 \cdot \boxed{\frac{2}{6}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 2$;

Sendo assim, usando a fórmula $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, obtemos:

- $k = 1, i = 2, j = 1$;

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 2 - 6 \cdot \boxed{\dfrac{2}{6}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 2$;

$$a_{22}^{(2)}$$

Sendo assim, usando a fórmula $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, obtemos:

- $k = 1, i = 2, j = 1$;

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 2 - 6 \cdot \boxed{\dfrac{2}{6}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 2$;

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \boxed{\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

Sendo assim, usando a fórmula $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, obtemos:

- $k = 1, i = 2, j = 1$;

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 2 - 6 \cdot \boxed{\dfrac{2}{6}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 2$;

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \boxed{\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 4 - 2 \cdot \boxed{\dfrac{2}{6}} = \dfrac{10}{3}\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 3;$

- $k = 1, i = 2, j = 3;$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 2, j = 3;$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 1 - (-1) \cdot \boxed{\frac{2}{6}} = \frac{4}{3}\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 3;$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 1 - (-1) \cdot \boxed{\frac{2}{6}} = \frac{4}{3};$$

Como já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ com $k = 1$ e $i = 2$ fixados, vamos calcular agora o termo $b_2^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

De fato,

- $k = 1, i = 2$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - b_1^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 2, j = 3$;

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 1 - (-1) \cdot \boxed{\frac{2}{6}} = \frac{4}{3}\,;$$

Como já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ com $k = 1$ e $i = 2$ fixados, vamos calcular agora o termo $b_2^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\,.$$

De fato,

- $k = 1, i = 2$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - b_1^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 7 - 7 \cdot \boxed{\frac{2}{6}} = \frac{14}{3}\,;$$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1$;

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 6 \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = 0 ;$$

- $k = 1, i = 3, j = 2$;

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}:$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 6 \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(2)}$$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 6 \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 6 \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 2 - 2 \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = 1\,;$$

- $k = 1, i = 3, j = 3;$

- $k = 1, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 8 - (-1) \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = \frac{17}{2};$$

- $k = 1, i = 3, j = 3$;

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 8 - (-1) \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = \frac{17}{2};$$

Assim como aconteceu quando $i = 2$, note que já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ (com $k = 1$ e $i = 3$ fixados), vamos calcular agora o termo $b_3^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

Com efeito,

- $k = 1, i = 3$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_1^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 8 - (-1) \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = \frac{17}{2};$$

Assim como aconteceu quando $i = 2$, note que já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ (com $k = 1$ e $i = 3$ fixados), vamos calcular agora o termo $b_3^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

Com efeito,

- $k = 1, i = 3$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_1^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 13 - 7 \cdot \boxed{\frac{1}{2}} = \frac{19}{2};$$

Após tal labor, obtemos a matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & \dfrac{10}{3} & \dfrac{4}{3} & \dfrac{14}{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{17}{2} & \dfrac{19}{2} \end{array}\right) \tag{7}$$

Neste momento, de acordo com nossa diagramação para $k = 2, i = 3, j = 2, 3$, usaremos uma vez mais a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 2, i = 3, j = 2;$

Neste momento, de acordo com nossa diagramação para $k = 2, i = 3, j = 2, 3$, usaremos uma vez mais a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}:$$

- $k = 2, i = 3, j = 2$;

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}}$$

Neste momento, de acordo com nossa diagramação para $k = 2, i = 3, j = 2, 3$, usaremos uma vez mais a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 2, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = 1 - \frac{10}{3} \cdot \boxed{\frac{3}{10}} = 0\,;$$

Neste momento, de acordo com nossa diagramação para $k = 2, i = 3, j = 2, 3$, usaremos uma vez mais a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}:$$

- $k = 2, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = 1 - \frac{10}{3} \cdot \boxed{\frac{3}{10}} = 0\,;$$

- $k = 2, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - a_{23}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}}$$

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Neste momento, de acordo com nossa diagramação para $k = 2, i = 3, j = 2, 3$, usaremos uma vez mais a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 2, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = 1 - \frac{10}{3} \cdot \boxed{\frac{3}{10}} = 0\,;$$

- $k = 2, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - a_{23}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = \frac{17}{2} - \frac{4}{3} \cdot \boxed{\frac{3}{10}} = \frac{81}{10}\,;$$

Finalmente, resta-nos calcular $b_3^{(3)}$ pela fórmula:

$$b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - b_{k}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

- $k = 2, i = 3$

Finalmente, resta-nos calcular $b_3^{(3)}$ pela fórmula:

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

- $k = 2$, $i = 3$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}}$$

Finalmente, resta-nos calcular $b_3^{(3)}$ pela fórmula:

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

- $k = 2, i = 3$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = \frac{19}{2} - \frac{14}{3} \cdot \boxed{\frac{3}{10}} = \frac{81}{10};$$

Finalmente, resta-nos calcular $b_3^{(3)}$ pela fórmula:

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

- $k = 2, i = 3$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = \frac{19}{2} - \frac{14}{3} \cdot \boxed{\frac{3}{10}} = \frac{81}{10};$$

Logo, temos a matriz ampliada:

$$(8) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{81}{10} & \frac{81}{10} \end{array}\right)$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{81}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{14}{3} \\ \frac{81}{10} \end{pmatrix}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{81}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{14}{3} \\ \frac{81}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{81}{10}\, x_3 = \frac{81}{10} \\ \frac{10}{3}\, x_2 + \frac{4}{3}\, x_3 = \frac{14}{3} \\ 6\, x_1 + 2\, x_2 - \, x_3 = 7 \end{cases}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & \dfrac{10}{3} & \dfrac{4}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{81}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \dfrac{14}{3} \\ \dfrac{81}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{81}{10}\, x_3 = \dfrac{81}{10} \Rightarrow x_3 = 1 \\ \dfrac{10}{3}\, x_2 + \dfrac{4}{3}\, x_3 = \dfrac{14}{3} \\ 6\, x_1 + 2\, x_2 - \; x_3 = 7 \end{cases}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & \dfrac{10}{3} & \dfrac{4}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{81}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \dfrac{14}{3} \\ \dfrac{81}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{81}{10}\, x_3 = \dfrac{81}{10} \Rightarrow x_3 = 1 \\ \dfrac{10}{3}\, x_2 + \dfrac{4}{3}\, x_3 = \dfrac{14}{3} \Rightarrow x_2 = 1, \\ 6\, x_1 + 2\, x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{81}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{14}{3} \\ \frac{81}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{81}{10}\, x_3 = \frac{81}{10} \Rightarrow x_3 = 1 \\ \frac{10}{3}\, x_2 + \frac{4}{3}\, x_3 = \frac{14}{3} \Rightarrow \; x_2 = 1, \\ 6\, x_1 + 2\, x_2 - \; x_3 = 7 \Rightarrow \; x_1 = 1 \end{cases}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & \dfrac{10}{3} & \dfrac{4}{3} \\ 0 & 0 & \dfrac{81}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ \dfrac{14}{3} \\ \dfrac{81}{10} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{81}{10}\,x_3 = \dfrac{81}{10} \Rightarrow x_3 = 1 \\ \dfrac{10}{3}\,x_2 + \dfrac{4}{3}\,x_3 = \dfrac{14}{3} \Rightarrow\ x_2 = 1, \\ 6\,x_1 + 2\,x_2 -\ x_3 = 7 \Rightarrow\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Doravante, a solução do sistema $A \cdot X = B$ é $X = (1\ 1\ 1)^t$.

Método de Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial

Este método consiste em transformar o sistema dado por meio de operações elementares sobre as linhas em um sistema triangular superior, tomando em cada passo, como **pivô**, o elemento de **maior** valor absoluto abaixo da diagonal (inclusive) e fazer uma permutação nas equações do sistema, de modo que este elemento venha a ocupar a posição de pivô.

Exemplos

Exemplo 3.1

Usando o método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial, resolva o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Como de praxe, construamos a matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \tag{9}$$

Como de praxe, construamos a matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{array}{c}1\\3\\0\end{array}} & \begin{array}{c}2\\1\\3\end{array} & \begin{array}{c}3\\0\\4\end{array} & \begin{array}{c}3\\4\\3\end{array} \end{array}\right) \tag{9}$$

Note que o maior elemento em valor absoluto da primeira coluna abaixo da diagonal é 3, que está na segunda linha. Logo, permutamos a segunda linha com a primeira:

$$(10) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \tag{10}$$

Sendo assim, usando a fórmula $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$, obtemos:

- $k = 1, i = 2, j = 1;$

- $k = 1, i = 2, j = 1;$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 2, j = 1;$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 1 - 3 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 1;$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 1 - 3 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 2;$

$$a_{22}^{(2)}$$

- $k = 1, i = 2, j = 1;$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 1 - 3 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 2;$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 2, j = 1;$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 1 - 3 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 2;$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 2 - 1 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}\,;$$

- $k = 1, i = 2, j = 3;$

- $k = 1, i = 2, j = 3;$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 2, j = 3$;

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 0 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = 3\,;$$

Como já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ com $k = 1$ e $i = 2$ fixados, vamos calcular agora o termo $b_2^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\,.$$

- $k = 1, i = 2, j = 3;$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 0 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = 3\,;$$

Como já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ com $k = 1$ e $i = 2$ fixados, vamos calcular agora o termo $b_2^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\,.$$

De fato,

- $k = 1, i = 2$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - b_1^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 2, j = 3;$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 0 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = 3\,;$$

Como já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ com $k = 1$ e $i = 2$ fixados, vamos calcular agora o termo $b_2^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\,.$$

De fato,

- $k = 1, i = 2$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - b_1^{(1)} \boxed{\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 4 \cdot \boxed{\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}\,;$$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

Agora, para $k=1, i=3, j=1,2,3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}:$$

- $k=1, i=3, j=1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 0 - 3 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 0\,;$$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 0 - 3 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(2)}$$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 0 - 3 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

Agora, para $k = 1, i = 3, j = 1, 2, 3$ usaremos novamente a fórmula

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :$$

- $k = 1, i = 3, j = 1;$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 0 - 3 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 0\,;$$

- $k = 1, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 1 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 3\,;$$

- $k = 1, i = 3, j = 3;$

- $k = 1, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 3, j = 3$;

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 4 - 0 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 4\,;$$

Assim como aconteceu quando $i = 2$, note que já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ (com $k = 1$ e $i = 3$ fixados), vamos calcular agora o termo $b_3^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\,.$$

- $k = 1, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 4 - 0 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 4\,;$$

Assim como aconteceu quando $i = 2$, note que já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ (com $k = 1$ e $i = 3$ fixados), vamos calcular agora o termo $b_3^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\,.$$

De fato,

- $k = 1, i = 3$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_1^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}}$$

- $k = 1, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 4 - 0 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 4\,;$$

Assim como aconteceu quando $i = 2$, note que já atingimos a ordem da matriz com $j = n = 3$ (com $k = 1$ e $i = 3$ fixados), vamos calcular agora o termo $b_3^{(2)}$ pela fórmula

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\,.$$

De fato,

- $k = 1, i = 3$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_1^{(1)} \boxed{\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}} = 3 - 4 \cdot \boxed{\frac{0}{3}} = 3\,;$$

Após nossos laboriosos cálculos, temos a seguinte matriz ampliada:

$$(11) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{\frac{5}{3}} & 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & \boxed{3} & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Após nossos laboriosos cálculos, temos a seguinte matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{\begin{array}{c} \frac{5}{3} \\ 3 \end{array}} & 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & & 4 & 3 \end{array}\right) \tag{11}$$

Agora, observando que o maior elemento em valor absoluto da segunda coluna abaixo da diagonal é 3, que está na terceira linha. Logo, permutamos a terceira linha com a segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & 3 & \frac{5}{3} \end{array}\right) \tag{12}$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
3 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 3 & 4 & 3 \\
0 & \frac{5}{3} & 3 & \frac{5}{3}
\end{array}\right) \tag{12}
$$

Neste momento, para $k = 2, i = 3, j = 2, 3$, usaremos uma vez mais a fórmula

$$
a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} :
$$

- $k = 2, i = 3, j = 2;$

- $k = 2, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}}$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - a_{23}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}}$$

- $k = 2, i = 3, j = 2;$

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = \frac{5}{3} - 3 \cdot \boxed{\frac{\frac{5}{3}}{3}} = 0\,;$$

- $k = 2, i = 3, j = 3;$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - a_{23}^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = 3 - 4 \cdot \boxed{\frac{\frac{5}{3}}{3}} = \frac{7}{9}\,;$$

Finalmente, resta-nos calcular $b_3^{(3)}$ pela fórmula:

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} .$$

- $k = 2, i = 3$

Finalmente, resta-nos calcular $b_3^{(3)}$ pela fórmula:

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

- $k = 2, i = 3$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}}$$

Finalmente, resta-nos calcular $b_3^{(3)}$ pela fórmula:

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} .$$

- $k = 2, i = 3$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = \frac{5}{3} - 3 \cdot \boxed{\frac{\frac{5}{3}}{3}} = 0 ;$$

Finalmente, resta-nos calcular $b_3^{(3)}$ pela fórmula:

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} .$$

- $k = 2, i = 3$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} \boxed{\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}} = \frac{5}{3} - 3 \cdot \boxed{\frac{\frac{5}{3}}{3}} = 0 ;$$

Logo, temos a matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} & 0 \end{array}\right) \quad (13)$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{9}\, x_3 = 0 \\ 3\, x_2 + 4\, x_3 = 3 \\ 3\, x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{9}\, x_3 = 0 \Rightarrow\ x_3 = 0 \\ 3\, x_2 + 4\, x_3 = 3 \\ 3\, x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \dfrac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{9}\,x_3 = 0 \Rightarrow \; x_3 = 0 \\ 3\,x_2 + 4\,x_3 = 3 \Rightarrow \; x_2 = 1, \\ 3\,x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{9}\,x_3 = 0 \Rightarrow \; x_3 = 0 \\ 3\,x_2 + 4\,x_3 = 3 \Rightarrow \; x_2 = 1, \\ 3\,x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow \; x_1 = 1 \end{cases}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{9}\,x_3 = 0 \Rightarrow \; x_3 = 0 \\ 3\,x_2 + 4\,x_3 = 3 \Rightarrow \; x_2 = 1, \\ 3\,x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow \; x_1 = 1 \end{cases}$$

Do exposto, de (8) resulta o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{9}\, x_3 = 0 \Rightarrow \; x_3 = 0 \\ 3\, x_2 + 4\, x_3 = 3 \Rightarrow \; x_2 = 1, \\ 3\, x_1 + x_2 = 4 \Rightarrow \; x_1 = 1 \end{cases}$$

Doravante, a solução do sistema $A \cdot X = B$ é $X = (1\ 1\ 0)^t$.

Exemplo

Exemplo 3.2

Usando o método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial, resolva o sistema abaixo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$