Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial: Fórmula de Newton - Grégory

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

26 de julho de 2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

James Grégory (1638-1675)

- Foi um matemático e astrônomo escocês.
- Em 1660 publicou a *Optica Promota* na qual descreveu o telescópio de reflexão, conhecido como telescópio gregoriano.
- Realizou a primeira demonstração do teorema fundamental do cálculo e pela descoberta das séries de Taylor (anos antes de Taylor).
- O nome da cratera Grégory na lua foi dado em sua homenagem.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Diferenças Finitas

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e $x_0, x_1, ..., x_n, (n+1)$ pontos distintos deste intervalo, tais que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, ..., n-1$, isto é, os pontos são equidistantes.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Diferenças Finitas

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo [a,b] e $x_0, x_1, ..., x_n, (n+1)$ pontos distintos deste intervalo, tais que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, ..., n-1$, isto é, os pontos são equidistantes.

Definição (Diferença finita de ordem zero)

A diferença finita de ordem zero de $f(x)$ definida nos pontos $x \in [a, b]$ é dada por:

$$\Delta^0 f(x) = f(x). \tag{1}$$

Diferenças Finitas

Definição (Diferença finita de ordem r)

A diferença finita de ordem r de uma função $f(x)$ definida nos pontos $x \in [a, b]$ é dada por:

$$\Delta^r f(x) = \Delta^{r-1} f(x+h) - \Delta^{r-1} f(x). \tag{2}$$

Diferenças Finitas

Definição (Diferença finita de ordem r)

A diferença finita de ordem r de uma função $f(x)$ definida nos pontos $x \in [a, b]$ é dada por:

$$\Delta^r f(x) = \Delta^{r-1} f(x+h) - \Delta^{r-1} f(x). \qquad (2)$$

Nesta definição para $r = 1$, o operador diferença finita progressivo Δ é dado por

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)\,. \qquad (3)$$

Diferenças Finitas

Aqui, Δf significa a variação de nos pontos x e $x + h$ e $\dfrac{\Delta f}{h}$ é uma aproximação para a derivada de f(x).

Assim, desenvolvendo-se os operadores aplicados à função f, podemos escrever:

(4)

(5)

Diferenças Finitas

Aqui, Δf significa a variação de nos pontos x e $x + h$ e $\dfrac{\Delta f}{h}$ é uma aproximação para a derivada de f(x).

Assim, desenvolvendo-se os operadores aplicados à função f, podemos escrever:

$$\Delta^0 f(x) = f(x) \tag{4}$$

(5)

Diferenças Finitas

Aqui, Δf significa a variação de nos pontos x e $x + h$ e $\dfrac{\Delta f}{h}$ é uma aproximação para a derivada de f(x).

Assim, desenvolvendo-se os operadores aplicados à função f, podemos escrever:

$$\Delta^0 f(x) = f(x) \tag{4}$$

$$\Delta^1 f(x) = f(x + h) - f(x) \tag{5}$$

Diferenças Finitas

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)]$$

(6)

(7)

Diferenças Finitas

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] \\ &= \Delta[f(x+h) - f(x)]\end{aligned} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Diferenças Finitas

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] \\ &= \Delta[f(x+h) - f(x)] \\ &= f(x+h+h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Diferenças Finitas

$$
\begin{aligned}
\Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] \\
&= \Delta[f(x+h) - f(x)] \\
&= f(x+h+h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \\
&= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\,.
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$\tag{7}$$

Diferenças Finitas

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] \\
&= \Delta[f(x+h) - f(x)] \\
&= f(x+h+h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \\
&= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta[\Delta^2 f(x)] \tag{7}$$

Diferenças Finitas

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] \\
&= \Delta[f(x+h) - f(x)] \\
&= f(x+h+h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \\
&= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^3 f(x) &= \Delta[\Delta^2 f(x)] \\
&= \Delta[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)]
\end{aligned} \tag{7}$$

Diferenças Finitas

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] \\ &= \Delta[f(x+h) - f(x)] \\ &= f(x+h+h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 f(x) &= \Delta[\Delta^2 f(x)] \\ &= \Delta[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] \\ &= f(x+3h) - f(x+2h) - 2f(x+2h) \\ &+ 2f(x+h) + f(x+h) - f(x) \end{aligned} \tag{7}$$

Diferenças Finitas

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta[\Delta f(x)] \\ &= \Delta[f(x+h) - f(x)] \\ &= f(x+h+h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x)) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\,.\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(x) &= \Delta[\Delta^2 f(x)] \\ &= \Delta[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] \\ &= f(x+3h) - f(x+2h) - 2f(x+2h) \\ &+ 2f(x+h) + f(x+h) - f(x) \\ &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Diferenças Finitas

De um modo geral, temos:

$$\Delta^r f(x) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} f(x + r \cdot h) - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f(x + (r-1) \cdot h) \quad (8)$$

$$+ \ldots + (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \cdot f(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \cdot \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} \cdot f(x + (r-i) \cdot h),$$

onde

Diferenças Finitas

De um modo geral, temos:

$$\Delta^r f(x) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} f(x + r \cdot h) - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f(x + (r-1) \cdot h) \quad (8)$$

$$+ \ldots + (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \cdot f(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \cdot \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} \cdot f(x + (r-i) \cdot h),$$

onde

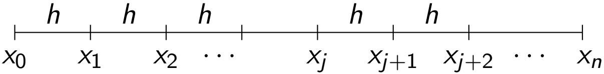
$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m!}{(m-n)!\, n!}.$$

Diferenças Finitas

Considerando $x = x_j$ e lembrando que

$$x_{j+1} = x_j + h,\ x_{j+2} = x_j + 2h,\ \ldots,\ x_{j+(r-i)} = x_j + (r-i)\cdot h,$$

ou seja,



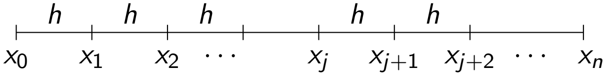
temos:

Diferenças Finitas

Considerando $x = x_j$ e lembrando que

$$x_{j+1} = x_j + h,\, x_{j+2} = x_j + 2h,\, \ldots\, , x_{j+(r-i)} = x_j + (r-i)\cdot h,$$

ou seja,



temos:

$$\Delta^r f(x_j) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \cdot \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} \cdot f(x_{j+r-i}). \tag{9}$$

Diferenças Finitas

Podemos organizar o cálculo das diferenças finitas conforme a tabela a seguir:

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	$\Delta^0 f(x_0)$			
		$\Delta^1 f(x_0)$		
x_1	$\Delta^0 f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$	
		$\Delta^1 f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$
x_2	$\Delta^0 f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$	
		$\Delta^1 f(x_2)$		
x_3	$\Delta^0 f(x_3)$			

Diferenças Finitas

de modo que,

$$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0)$$

Diferenças Finitas

de modo que,

$$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0)$$
$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0)$$

Diferenças Finitas

de modo que,

$$\Delta^1 f(x_0) = \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0)$$
$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0)$$
$$\Delta^3 f(x_0) = \Delta^2 f(x_1) - \Delta^2 f(x_0)$$

Diferenças Finitas

de modo que,

$$\begin{aligned}
\Delta^1 f(x_0) &= \Delta^0 f(x_1) - \Delta^0 f(x_0) \\
\Delta^2 f(x_0) &= \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0) \\
\Delta^3 f(x_0) &= \Delta^2 f(x_1) - \Delta^2 f(x_0)
\end{aligned}$$

Exemplo

Construa a tabela de diferenças finitas de $f(x)$ nos pontos tabelados como segue:

x_i	0.5	0.7	0.9	1.1
$f(x_i)$	5.8	7.9	10.1	12.3

Diferenças Finitas

Solução: Temos que

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$0,5$	$5,8$			
$0,7$	$7,9$			
$0,9$	10,1			
$0,11$	12,3			

Diferenças Finitas

Solução: Temos que

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$0,5$	$5,8$			
		2,10		
$0,7$	$7,9$			
$0,9$	10,1			
$0,11$	12,3			

Diferenças Finitas

Solução: Temos que

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$0,5$	$5,8$			
		2,10		
$0,7$	$7,9$			
		2,20		
$0,9$	10,1			
$0,11$	12,3			

Diferenças Finitas

Solução: Temos que

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$0,5$	$5,8$			
		2,10		
$0,7$	$7,9$			
		2,20		
$0,9$	10,1			
		2,20		
$0,11$	12,3			

Diferenças Finitas

Solução: Temos que

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$0,5$	$5,8$			
		2,10		
$0,7$	$7,9$		$0,10$	
		2,20		
$0,9$	10,1		0	
		2,20		
$0,11$	12,3			

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Diferenças Finitas

Solução: Temos que

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
$0,5$	$5,8$			
		2,10		
$0,7$	$7,9$		$0,10$	
		2,20		-0,10
$0,9$	10,1		0	
		2,20		
$0,11$	12,3			

Diferenças Finitas

A seguir, podemos relacionar as diferenças divididas, dadas no polinômio interpolador de Newton, com as diferenças finitas descritas anteriormente.

Diferenças Finitas

A seguir, podemos relacionar as diferenças divididas, dadas no polinômio interpolador de Newton, com as diferenças finitas descritas anteriormente.

Teorema

Seja $f(x)$ uma função contínua $(n+1)$ vezes diferenciável definida no intervalo $[a,b]$. Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos e <u>equidistantes</u> deste intervalo. Então,

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n\, n!}\,. \tag{10}$$

Newton - Grégory

Substituindo (10) na fórmula interpolatória de Newton, temos uma nova expressão para o polinômio interpolador, conhecido como fórmula interpolatória de Newton Gregory, dada por:

Newton - Grégory

Substituindo (10) na fórmula interpolatória de Newton, temos uma nova expressão para o polinômio interpolador, conhecido como fórmula interpolatória de Newton Gregory, dada por:

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1! h^1} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2} + \ldots + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \cdot \frac{\Delta^n f(x_0)}{n! h^n}\,. \tag{11}$$

Fórmula de Newton - Grégory

Como o polinômio interpolador é único, independente do método empregado, a expressão do erro interpolador em termos das diferenças finitas é a mesma obtida nas fórmulas interpolatórias anteriores:

$$
\begin{aligned}
E(x) &= (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)\, f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] \\
&= (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n) \cdot \frac{\Delta^{n+1} f(x)}{h^{n+1}(n+1)!} \\
&= \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi), \; \xi \in [a, b]
\end{aligned}
$$

Fórmula de Newton - Grégory

Como o polinômio interpolador é único, independente do método empregado, a expressão do erro interpolador em termos das diferenças finitas é a mesma obtida nas fórmulas interpolatórias anteriores:

$$
\begin{aligned}
E(x) &= (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n)\, f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n] \\
&= (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n)\cdot\frac{\Delta^{n+1}f(x)}{h^{n+1}(n+1)!} \\
&= \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\,\cdots\,(x-x_n)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),\ \ \xi\in[a,b]
\end{aligned}
$$

e assim, uma estimativa para o erro é

$$
|E(x)| \leq \frac{|(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n)|}{(n+1)!}\cdot M, \qquad (12)
$$

onde $M = \max\{|f^{(n+1)}(\xi)|, \xi\in[x_0,x_n]\}$.

Exemplos

Exemplo

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$ *tabelada como segue:*

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	1/2	1/3

Determine o polinômio interpolador pela fórmula de Newton-Grégory, avalie $f(1.3)$ *e um limitante superior para o erro.*

Exemplo

Solução: Como $n = 2$, temos que o polinômio interpolador é da forma:

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1! h^1} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2}.$$

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$
0	1		
1	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{1}{3}$		

Exemplo

Solução: Como $n = 2$, temos que o polinômio interpolador é da forma:

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1! h^1} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! h^2} .$$

A tabela de diferenças finitas é

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$
0	1		
1	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{1}{3}$		

Exemplo

Solução: Como $n = 2$, temos que o polinômio interpolador é da forma:

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}.$$

A tabela de diferenças finitas é

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$
0	1		
		$-\frac{1}{2}$	
1	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{1}{3}$		

Exemplo

Solução: Como $n = 2$, temos que o polinômio interpolador é da forma:

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}.$$

A tabela de diferenças finitas é

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$
0	1		
		$-\frac{1}{2}$	
1	$\frac{1}{2}$		
		$-\frac{1}{6}$	
2	$\frac{1}{3}$		

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo

Solução: Como $n = 2$, temos que o polinômio interpolador é da forma:

$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}\,.$$

A tabela de diferenças finitas é

	$\Delta^0 f$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$
0	1		
		$-\frac{1}{2}$	
1	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$
		$-\frac{1}{6}$	
2	$\frac{1}{3}$		

Exemplo

Deste modo, tendo em mente que $h = 1$, o polinômio interpolador é :

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} \\
&= 1 + (x - 0) \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1!\,1^1} + (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot \frac{\frac{1}{3}}{2!1^2} \\
&= \frac{1}{3} x^6 - \frac{2}{3} x + 1\,.
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo

Deste modo, tendo em mente que $h = 1$, o polinômio interpolador é :

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} \\
&= 1 + (x - 0) \cdot \frac{-\frac{1}{2}}{1!\,1^1} + (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot \frac{\frac{1}{3}}{2!1^2} \\
&= \frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{3}x + 1\,.
\end{aligned}
$$

Assim, uma aproximação para $f(1,3)$ é

$$f(1,3) \approx P(1,3) = 0,415\,.$$

Exemplo

Agora, vamos obter um limitante para o erro. De fato, sendo $n = 2$, resulta que

$$|E(x)| \leq \frac{|(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)| \, M}{3!}, \qquad (13)$$

onde

$$M = \text{máx}\{|f'''(\theta)|;\, \theta \in [0, 2]\}.$$

Exemplo

Desde que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, então, $f'''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^4}$, donde, $|f'''(x)| = \dfrac{1}{(x+1)^4}$, para $x \in [0,2]$.

Exemplo

Desde que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, então, $f'''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^4}$, donde, $|f'''(x)| = \dfrac{1}{(x+1)^4}$, para $x \in [0, 2]$.

Observe que $|f'''(x)|$ é decrescente, então o valor máximo desta função é atingido em $x = 0$, logo,

Exemplo

Desde que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, então, $f'''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^4}$, donde, $|f'''(x)| = \dfrac{1}{(x+1)^4}$, para $x \in [0,2]$.

Observe que $|f'''(x)|$ é decrescente, então o valor máximo desta função é atingido em $x = 0$, logo,

$$M = \max_{\theta \in [0,2]} |f'''(\theta)| = |f'''(0)| = 6$$

Exemplo

Desde que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, então, $f'''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^4}$, donde, $|f'''(x)| = \dfrac{1}{(x+1)^4}$, para $x \in [0,2]$.

Observe que $|f'''(x)|$ é decrescente, então o valor máximo desta função é atingido em $x = 0$, logo,

$$M = \max_{\theta \in [0,2]} |f'''(\theta)| = |f'''(0)| = 6$$

e portanto,

$$|E(1,3)| \leq \frac{|(1,3-0)\cdot(1,3-1)\cdot(1,3-2)|\,\cancel{6}}{\cancel{6}} = 0,2730\,.$$

Exemplo

Exemplo

Um veículo de fabricação nacional, após vários testes, apresentou os resultados a seguir, quando analisou-se o consumo de combustível de acordo com a velocidade média imposta ao veículo. Os testes foram realizados em rodovia em operação normal de tráfego, numa distância de 72 km, conforme tabela a seguir:

Velocidade (km/h)	55	70	85	100	115	130
Consumo (km/l)	14,08	13,56	13,28	12,27	11,30	10,40

Verifique o consumo apropriado para o caso de ser desenvolvida a velocidade de 105 km/h pela fórmula de Newton - Gregory de grau 3.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ