Método da Substituição para Limitar Recorrências

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + \Theta(n) & ; n > 1 \\ \Theta(1) & ; n = 1 \end{cases}$$

2 Etapas

1- "chutar" um limite assintótico (superior ou inferior) p/ a recorrência.

2- Usar a indução matemática para encontrar constantes conforme as definições da notação assintótica para verificar se o limite assintótico proposto vale.

$T(n) = \Theta(n)$?

$T(n) = \Theta(n \lg n)$?

$T(n) = \Theta(n^2)$?

Exemplo 1 Use o método da substituição para provar que $T(n) = 2T(n/2) + n = \underbrace{O(n \lg n)}_{\text{"chute"}}$. Considere que $T(1) = \Theta(1)$.

Solução Devemos provar que $T(n) \leq cn \lg n$ p/ $c > 0$ e $n \geq n_0$.

Caso Base

$T(n) \leq cn \lg n$ (p/ $c > 0$)

$2T(n/2) + n \leq cn \lg n$

$\log_b b = 1$

$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg(a) - \lg(b)$

p/ $n = 2$ $\rightarrow$

$2T(2/2) + 2 \leq c\,2 \lg 2$

$2T(1) + 2 \leq c2(\lg 2)$, $\lg 2 \to 1$

$2(1) + 2 \leq 2c$

$2 + 2 \leq 2c$

$4 \leq 2c$

$2 \leq c \iff \boxed{c \geq 2}$

Como c é positivo e constante, o caso base é válido!

Hipótese indutiva $T(k) \leq ck \lg k$, p/ $k < n$

Quero mostrar que $\overset{a}{T(n)} \leq \overset{c}{cn \lg n}$

já consegui $\overset{a}{T(n)} \leq \overset{b}{2c\frac{n}{2}\lg(n/2) + n}$.

Se mostrarmos que $\overset{b}{2c\frac{n}{2}\lg(n/2) + n} \leq \overset{c}{cn \lg n}$, então, por transitividade, $\overset{a}{T(n)} \leq \overset{c}{cn \lg n}$.

$$T(n) = 2\underbrace{T(n/2)}_{k = n/2} + n$$

$\leq 2c\frac{n}{2}\lg(n/2) + n$ (por H.I.)

$\leq \cancel{2}c\frac{n}{\cancel{2}}\lg(n/2) + n \leq cn \lg n$

$\leq cn(\lg(n) - \lg(2)) + n \leq cn \lg n$, $\lg 2 \to 1$

$\leq cn(\lg(n) - 1) + n \leq cn \lg n$

$\leq \underbrace{cn \lg n}_{X} \underbrace{- cn + n}_{Y} \leq \underbrace{cn \lg n}_{X}$

$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Transitividade

$X + Y \leq X$

$Y \leq 0$

$cn \lg(n) - cn + n \leq cn \lg n$

Desde que

$-cn + n \leq 0$

$n \leq cn$

$1 \leq c$

$\boxed{c \geq 1}$

Portanto, $\overset{b}{cn \lg(n) - cn + n} \leq \overset{c}{cn \lg n}$ p/ $c \geq 1$. Assim, como $\overset{a}{T(n)} \leq \overset{b}{cn \lg(n) - cn + n}$ então, por transitividade, $\overset{a}{T(n)} \leq \overset{c}{cn \lg n}$. Além disso, considerando $c = 2$ e $n_0 = 2$, temos que as constantes satisfazem as condições necessárias da definição da notação O. Assim, pelo método da substituição, $T(n) = O(n \lg n)$.

Satisfaz caso base e caso indutivo

Caso base da recorrência

Exemplo 4 Use o método da substituição p/ provar que $T(n) = 4T(n/2) + n = O(n^3)$. Considere que $T(1)=1$.

Solução Devemos provar que $T(n) \le cn^3$ p/ $c>0$ e $n \ge n_0$,

Caso base

$T(n) \le cn^3$ p/ $c>0$

$4T(n/2)+n \le cn^3$

p/ $n=2$

$T(2) \le c2^3$

$4T(2/2)+2 \le c(2)^3$

$4T(1)+2 \le 8c$

$4+2 \le 8c$

$6 \le 8c$

$\boxed{c \ge 6/8}$

Como c é positivo e constante, o caso base é válido.

Hipótese indutiva $T(k) \le ck^3$, p/ $k<n$.

$$T(n) = 4\overset{k=n/2}{\underline{T(n/2)}} + n$$

$$\le 4c\left(\frac{n}{2}\right)^3 + n \le cn^3$$

$$\le \cancel{4}c\frac{n^3}{\cancel{8}} + n \le cn^3$$

$$\le \frac{cn^3}{2} + n \le cn^3$$

$$\le \underbrace{cn^3}_{x} \underbrace{- \frac{cn^3}{2} + n}_{y} \le \underbrace{cn^3}_{x}$$

$$cn^3 - \frac{cn^3}{2} = \frac{cn^3}{2}$$

$cn^3 - \frac{cn^3}{2} + n \le cn^3$ desde que $-\frac{cn^3}{2} + n \le 0$

$n \le \frac{cn^3}{2}$

$\frac{cn^3}{2} \ge n$

$cn^3 \ge 2n$

$\boxed{c \ge \frac{2}{n^2}}$

Como $\frac{2}{n^2}$ tende a 0 conforme n aumenta, $c \ge 0$ p/ n suficientemente grande. Portanto, $cn^3 - \frac{cn^2}{2} + n \le cn^3$ p/ $c>0$ e n suf. grande.

Como $T(n) \le cn^3 - \frac{cn^3}{2} + n$, então, por transitividade, $T(n) \le cn^3$. Além disso, $c=1$ (pois satisfaz $c>0$ e $c>6/8$) e $n_0=2$ são constantes e satisfazem as condições necessárias da definição da notação O. Portanto, pelo método da substituição,

$$T(n) = O(n^3).$$