Regra dos Trapézios

Wellington José Corrêa

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

9 de agosto de 2021

Considere uma função $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$ e além disso, que os pontos $x_0, x_1, \ldots\ x_n$ sejam equidistantes, isto é, Considere uma função $f(x)$ definida em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$ e além disso, que os pontos $x_0, x_1, \ldots x_n$ sejam equidistantes, isto é,

$$x_{i+1} - x_i = h, \ldots\ i = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Graças a este hipótese sobre os pontos x_i's, empregamos a fórmula de Newton-Grégory:

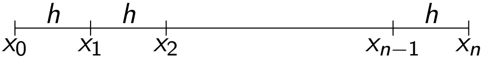
$$P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0)\,\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!\,h} + (x - x_0)\cdot(x - x_1)\,\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2} + \ldots + (x - x_0)\cdot(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}$$

Agora, usaremos a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + u\,h\,. \tag{1}$$

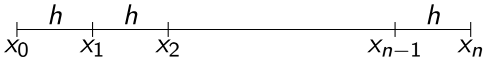
Agora, usaremos a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + u\,h\,. \tag{1}$$



Agora, usaremos a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + u\,h\,. \tag{1}$$

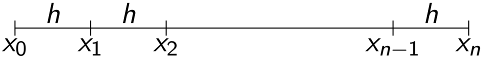


Veja que $x_r = x_0 + r\,h$ e assim,

$$\begin{aligned} x - x_r &= \cancel{x_0} + u\,h - \cancel{x_0} - r\,h \\ &= (u - r)\,h. \end{aligned}$$

Agora, usaremos a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{x - x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + u\,h\,. \tag{1}$$



Veja que $x_r = x_0 + r\,h$ e assim,

$$\begin{aligned} x - x_r &= \cancel{x_0} + u\,h - \cancel{x_0} - r\,h \\ &= (u - r)\,h. \end{aligned}$$

Esta mudança de variável nos dá

$$P(u) = \Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0) + u \cdot (u-1)\,\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + u \cdot (u-1)\,\ldots\,(u-(n-1))\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}$$

e o erro na interpolação é

$$E(u) = \frac{u \cdot (u-1)\,\ldots\,(u-(n-1)) \cdot (u-n)\,h^{n+1}\,f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},\ \xi \in [x_0, x_n]\,.$$

Regra do Trapézio

Considere $f(x)$ definida nos pontos x_0 e x_1 no intervalo $[a, b]$.

Regra do Trapézio

Considere $f(x)$ definida nos pontos x_0 e x_1 no intervalo $[a, b]$. Temos que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_1} P(x)\,dx = h\int_0^1 P(u)\,dx$$

onde $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ e $h = x_1 - x_0$.

Integrando $P(u)$ veja que

Integrando $P(u)$ veja que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_1} P(x)\,dx = h\int_0^1 P(u)\,du$$

$$h\int_0^1 \left[\Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0)\right]\,du.$$

Integrando $P(u)$ veja que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_1} P(x)\,dx = h\int_0^1 P(u)\,du$$
$$h\int_0^1 \left[\Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0)\right]\,du.$$

Uma vez que

$$\Delta^0 f(x_0) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \Delta^1 f(x_0) = f(x_1) - f(x_0),$$

resulta que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h \int_0^1 \left[\Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0)\right]\,du$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h \int_0^1 \left[\Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0)\right]\,du$$
$$= h\,f(x_0) \int_0^1 du + h\,[f(x_1) - f(x_0)] \int_0^1 u\,du$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx &\approx h\int_0^1 \left[\Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0)\right]\,du\\ &= h\,f(x_0)\int_0^1 du + h\,[f(x_1) - f(x_0)]\int_0^1 u\,du\\ &= h\,f(x_0) + \frac{h}{2}\,[f(x_1) - f(x_0)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx &\approx h \int_0^1 \left[\Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0)\right]\,du \\
&= h\,f(x_0) \int_0^1 du + h\,[f(x_1) - f(x_0)] \int_0^1 u\,du \\
&= h\,f(x_0) + \frac{h}{2}\,[f(x_1) - f(x_0)] \\
&= \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_1)]\,,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx &\approx h\int_0^1 \left[\Delta^0 f(x_0) + u\,\Delta^1 f(x_0)\right]\,du \\ &= h\,f(x_0)\int_0^1 du + h\,[f(x_1) - f(x_0)]\int_0^1 u\,du \\ &= h\,f(x_0) + \frac{h}{2}\,[f(x_1) - f(x_0)] \\ &= \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_1)]\,,\end{aligned}$$

portanto,

Regra do Trapézio

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_1)]\,. \tag{2}$$

Interpretação Geométrica

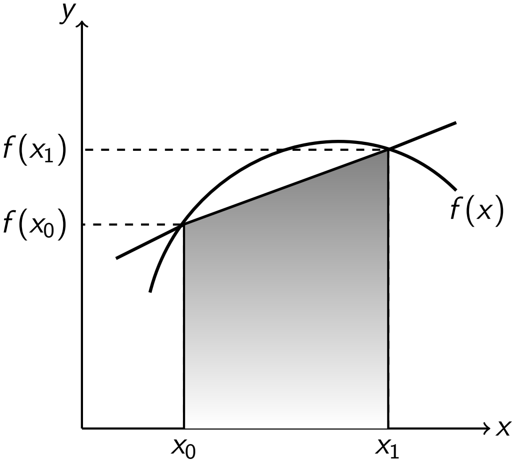


Figura: $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$

Erro na interpolação

Pela mudança de variável (1), levando em conta que $n = 1$, temos que

$$E = \int_{x_0}^{x_1} E(x)\, dx = h \int_0^1 E(u)\, du$$

Erro na interpolação

Pela mudança de variável (1), levando em conta que $n = 1$, temos que

$$E = \int_{x_0}^{x_1} E(x)\,dx = h \int_0^1 E(u)\,du$$
$$= h \cdot \frac{h^2}{2} f''(\xi) \int_0^1 u(u-1)\,du$$

Erro na interpolação

Pela mudança de variável (1), levando em conta que $n = 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{x_0}^{x_1} E(x)\, dx = h \int_0^1 E(u)\, du \\
&= h \cdot \frac{h^2}{2} f''(\xi) \int_0^1 u(u-1)\, du \\
&\Rightarrow E = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)\,.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^{1} [\ln x + x] \, dx$ e exiba um limitante superior para o erro usando a regra dos trapézios.

Exemplo

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^{1} [\ln x + x]\, dx$ e exiba um limitante superior para o erro usando a regra dos trapézios.

Solução: Inicialmente, tabelamos a função $f(x) = \ln x + x$ nos pontos $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1$, temos que

Exemplo

Calcule o valor aproximado de $\int_{0,5}^{1} [\ln\, x + x]\, dx$ e exiba um limitante superior para o erro usando a regra dos trapézios.

Solução: Inicialmente, tabelamos a função $f(x) = \ln\, x + x$ nos pontos $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1$, temos que

x	0,5	1
$f(x)$	-0,1931471806	1

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

$$\int_{0,5}^{1} [\ln\, x + x]\, dx \approx \frac{h}{2}\, [f(x_0) + f(x_1)]$$

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

$$\int_{0,5}^{1} [\ln\, x + x]\, dx \approx \frac{h}{2}\, [f(x_0) + f(x_1)]$$
$$= \frac{0,5}{2}\, [-0,1931471806 + 1]$$

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

$$\int_{0,5}^{1} [\ln\ x + x]\, dx \approx \frac{h}{2}\ [f(x_0) + f(x_1)]$$
$$= \frac{0,5}{2}\ [-0,1931471806 + 1]$$
$$= 0,20171320485\,.$$

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^{1} [\ln\, x + x]\, dx &\approx \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_1)] \\ &= \frac{0,5}{2}\,[-0,1931471806 + 1] \\ &= 0,20171320485\,.\end{aligned}$$

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donde,

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

$$\int_{0,5}^{1} [\ln\, x + x]\, dx \approx \frac{h}{2}\, [f(x_0) + f(x_1)]$$
$$= \frac{0,5}{2}\, [-0,1931471806 + 1]$$
$$= 0,20171320485\,.$$

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donde,

$$M = \max\left\{|f''(\xi)|;\, \xi\, \in\, [0,5\,,\, 1]\right\}$$

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^{1} [\ln\, x + x]\, dx &\approx \frac{h}{2}\, [f(x_0) + f(x_1)] \\ &= \frac{0,5}{2}\, [-0,1931471806 + 1] \\ &= 0,20171320485\,.\end{aligned}$$

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donde,

$$\begin{aligned}M &= \max\left\{|f''(\xi)|;\ \xi\ \in\ [0,5\,,\ 1]\right\} \\ &= \max\left\{\left|\frac{1}{\xi^2}\right|;\ \xi\ \in\ [0,5\,,\ 1]\right\}\end{aligned}$$

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

$$\int_{0,5}^{1} [\ln\, x + x]\, dx \approx \frac{h}{2}\,[f(x_0) + f(x_1)]$$
$$= \frac{0,5}{2}\,[-0,1931471806 + 1]$$
$$= 0,20171320485\,.$$

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donde,

$$M = \max\left\{|f''(\xi)|;\ \xi\ \in\ [0,5\,,\ 1]\right\}$$
$$= \max\left\{\left|\frac{1}{\xi^2}\right|;\ \xi\ \in\ [0,5\,,\ 1]\right\}$$
$$= \frac{1}{0,5^2} = 4.$$

Logo, como $h = 1 - 0,5$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{0,5}^{1} [\ln\, x + x]\, dx &\approx \frac{h}{2}\, [f(x_0) + f(x_1)] \\ &= \frac{0,5}{2}\, [-0,1931471806 + 1] \\ &= 0,20171320485\,.\end{aligned}$$

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donde,

$$\begin{aligned}M &= \max\left\{|f''(\xi)|;\, \xi\, \in\, [0,5\,,\, 1]\right\} \\ &= \max\left\{\left|\frac{1}{\xi^2}\right|;\, \xi\, \in\, [0,5\,,\, 1]\right\} \\ &= \frac{1}{0,5^2} = 4.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|E| \leq \frac{0,5^3}{12} \cdot\, 4 = 0,0416666667\,.$$

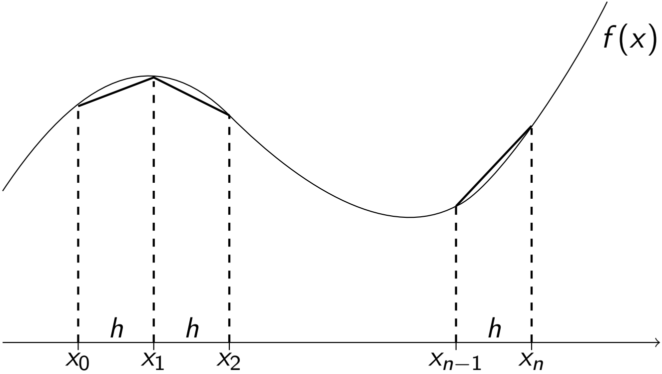
Regra dos Trapézios Generalizadas

Consiste na subdivisão do intervalo de integração com n subintervalos iguais, cada qual de amplitude

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}, \; x_0 = a, x_n = b$$

e em aplicarmos a regra do trapézio em cada subintervalo.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ


$f(x)$
h
h
h
x_0
x_1
x_2
x_{n-1}
x_n

Regra dos Trapézios Generalizada

Deste modo, temos que

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Regra dos Trapézios Generalizada

Deste modo, temos que

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$$

Regra dos Trapézios Generalizada

Deste modo, temos que

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right] + \ldots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Regra dos Trapézios Generalizada

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]\\ &\quad+\ldots+\frac{h}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\\ &=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right].\end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Regra dos Trapézios Generalizada

Deste modo, temos que

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+\frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right] + \ldots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right] = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right].$$

Pode-se mostrar que uma estimativa para o erro é dada por

$$|E| \leq \frac{h^2}{12} M \cdot (x_n - x_0),$$

onde

$$M = \max\left\{|f''(\xi)|;\ \xi \in [x_0\,,x_n]\right\}.$$

Em resumo:

Regra dos Trapézios Generalizada

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Em resumo:

Regra dos Trapézios Generalizada

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] .$$

Erro

$$|E| \leq \frac{h^2}{12} M \cdot (x_n - x_0),$$

onde

$$M = \max\left\{|f''(\xi)|;\ \xi \in [x_0\,, x_n]\right\} .$$

Exemplo

Calcule o valor aproximado da integral $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$ usando a regra dos trapézios generalizada para 6 subintervalos e exiba um limitante para o erro.

Exemplo

Calcule o valor aproximado da integral $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$ usando a regra dos trapézios generalizada para 6 subintervalos e exiba um limitante para o erro.

Solução: Para $n = 6$ subintervalos, temos que

$$h = \frac{x_6 - x_0}{6} = \frac{4-1}{6} = 0,5.$$

Tabelando a função $f(x) = \sqrt{x}$ para $h = 0,5$, resulta que

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	1	1,224744871	1,414213562	1,581138830	1,732050806	1,870828693	2

Tabelando a função $f(x) = \sqrt{x}$ para $h = 0,5$, resulta que

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	1	1,224744871	1,414213562	1,581138830	1,732050806	1,870828693	2

Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{x}\, dx &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)\right] \\ &= 4,661488382\,.\end{aligned}$$

Tabelando a função $f(x) = \sqrt{x}$ para $h = 0,5$, resulta que

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	1	1,224744871	1,414213562	1,581138830	1,732050806	1,870828693	2

Assim,

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)\right]$$
$$= 4,661488382\,.$$

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$, e com isto,

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$, e com isto,

$$M = \max\left\{|f''(\xi)|;\, \xi \,\in\, [1\,,\, 4]\right\}$$

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$, e com isto,

$$\begin{aligned} M &= \max\left\{|f''(\xi)|;\, \xi \in [1\,,\,4]\right\} \\ &= \max\left\{\left|\frac{1}{4\,\xi^{3/2}}\right|;\, \xi \in [1\,,\,4]\right\} \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$, e com isto,

$$\begin{aligned} M &= \max\left\{|f''(\xi)|;\, \xi \in [1\,,\,4]\right\} \\ &= \max\left\{\left|\frac{1}{4\,\xi^{3/2}}\right|;\, \xi \in [1\,,\,4]\right\} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Estimativa do erro: Note que $f''(x) = -\dfrac{1}{4x^{3/2}}$, e com isto,

$$\begin{aligned} M &= \max\left\{|f''(\xi)|;\ \xi\ \in\ [1\,,\,4]\right\} \\ &= \max\left\{\left|\frac{1}{4\,\xi^{3/2}}\right|;\ \xi\ \in\ [1\,,\,4]\right\} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|E| \leq \frac{1,5^2}{12}\cdot\,(4-1)\,\cdot\,0,25 = 0,0156250\,.$$

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ