Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função assintoticamente positiva e $T(n)$ definida para inteiros não-negativos a recorrência

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

interpretando $\frac{n}{b}$ como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Então $T(n)$ é limitada assintoticamente por:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Exemplo 6

$T(n) = 8T(n/2) + n^2$

① $a = 8$, $b = 2$, $f(n) = n^2$

② $n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3$

③ $n^2 = O(n^{3-\varepsilon})$

p/ $\varepsilon = 0{,}1$, $n^2 = O(n^{3-\varepsilon})$.

④ Temos o caso 1 do TM. Portanto, $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$.

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função assintoticamente positiva e $T(n)$ definida para inteiros não-negativos a recorrência

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

interpretando $\frac{n}{b}$ como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Então $T(n)$ é limitada assintoticamente por:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Exemplo 4

$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

$n \lg n = \Omega(n)$

① $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n \lg n$

② $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1$

③ $n \lg n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$

$\lg(n) \neq n^{\epsilon}, \forall \varepsilon > 0$.

$n^{1+\varepsilon} = n^1 \cdot n^{\varepsilon}$

④ Como $\lg(n) \neq n^{\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > 0$, então não existe $\varepsilon > 0$ tal que $n \lg n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$, Portanto não é possível resolver a recorrência $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$ pelo método mestre!

$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$

$\frac{2\cancel{n}}{3} = \frac{\cancel{n}}{b} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow b = 3/2$.

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função assintoticamente positiva e $T(n)$ definida para inteiros não-negativos a recorrência

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

interpretando $\frac{n}{b}$ como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Então $T(n)$ é limitada assintoticamente por:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

$n^{\log_2 7} = 2{,}80735\ldots$

7. Resolva a recorrência $T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$

1. $a = 7$
   $b = 2$
   $f(n) = n^2$

2. $n^{\log_b a} = n^{\log_2 7}$

   $2^0 = 1$
   $2^1 = 2$
   $2^2 = 4$
   $2^3 = 8$

   $2 < \log_2 7 < 3$

   $\log_b a \Rightarrow b^x = a$

3. $n^2 = O(n^{\log_2 7 - \varepsilon})$

   p/ $\varepsilon = 0{,}1$, $n^2 = O(n^{\log_2 7 - \varepsilon})$,

4. Temos o caso 1 do TM. Portanto, $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
   $= \Theta(n^{\log_2 7})$.

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função assintoticamente positiva e $T(n)$ definida para inteiros não-negativos a recorrência

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{b}) + f(n)$$

interpretando $\frac{n}{b}$ como $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Então $T(n)$ é limitada assintoticamente por:

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ para $\epsilon > 0$ constante, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$; ou*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, para $\epsilon > 0$ constante, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para $c < 1$ constante, e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.*

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

1. $a = 4$
   $b = 2$
   $f(n) = n^3$

2. $n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$

3. $n^3 = \Omega(n^{2+\varepsilon})$

   p/ $\varepsilon = 0{,}1$, $n^3 = \Omega(n^{2+\varepsilon})$.

4. $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, p/ $c < 1$ e cte?

   $4\left(\frac{n}{2}\right)^3 \leq cn^3$

   $4\,\frac{n^3}{8} \leq cn^3$

   $\frac{4}{8} \cdot \cancel{n^3} \leq c\cancel{n^3}$

   $\frac{4}{8} \leq c$

   $c \geq 4/8$

   $\boxed{c \geq 1/2}$

5. Como $n^3 = \Omega(n^{2+\varepsilon})$ p/ $\varepsilon = 0{,}1$ e $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ p/ $c < 1$ e constante, temos o caso 3 do TM. Portanto,
   $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$.