FLUXO MÁXIMO

André Luiz Satoshi Kawamoto

Agenda

- Motivação
- Método de Ford-Fulkerson
- Outras aplicações

Motivação

- Em uma rede de comunicação, quero distribuir os pacotes de dados de forma a permitir que a maior parte de informação parta de uma fonte até um destino
- Em uma emprsa de água/energia, quero maximizar o atendimento de clientes a partir de uma distribuidoraFluxo de Carros em estradas
- Em um feriado, quero otimizar a locomoção de carros distribuídos em diversas estradas do Estado que vão da capital em direção ao interior (ou vice-versa)
- Em um evento, quero distribuir as pessoas entre os diversos meios de transporte (metrô, ônibus, transporte público em geral) para que o deslocamento seja o mais rápido possível

Abordagem usando grafos

- Essas situações podem ser interpretadas com o auxílio de grafos.
- Nesses casos são representados por um grafo com arestas valoradas
  - o peso de cada aresta representa a capacidade de cada um dos canais de comunicação/transporte
- Aplicamos então algum algoritmo para calcular o Fluxo Máximo, ou seja, descobrir qual a maior quantidade que pode ser enviada de um nó `s` (*source - origem*) para um nó `t` (*sink - sorvedouro*).

Formalmente

- Formalmente:
  - $f(u, v)$ é o fluxo na aresta (u, v)
  - $c(u, v)$ é a capacidade dessa aresta
- Considerando as seguintes restrições:
  - Capacidades: $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ para qualquer aresta (u, v)
  - (O fluxo não é negativo e tem de ser menor ou igual a capacidade)

Formalmente

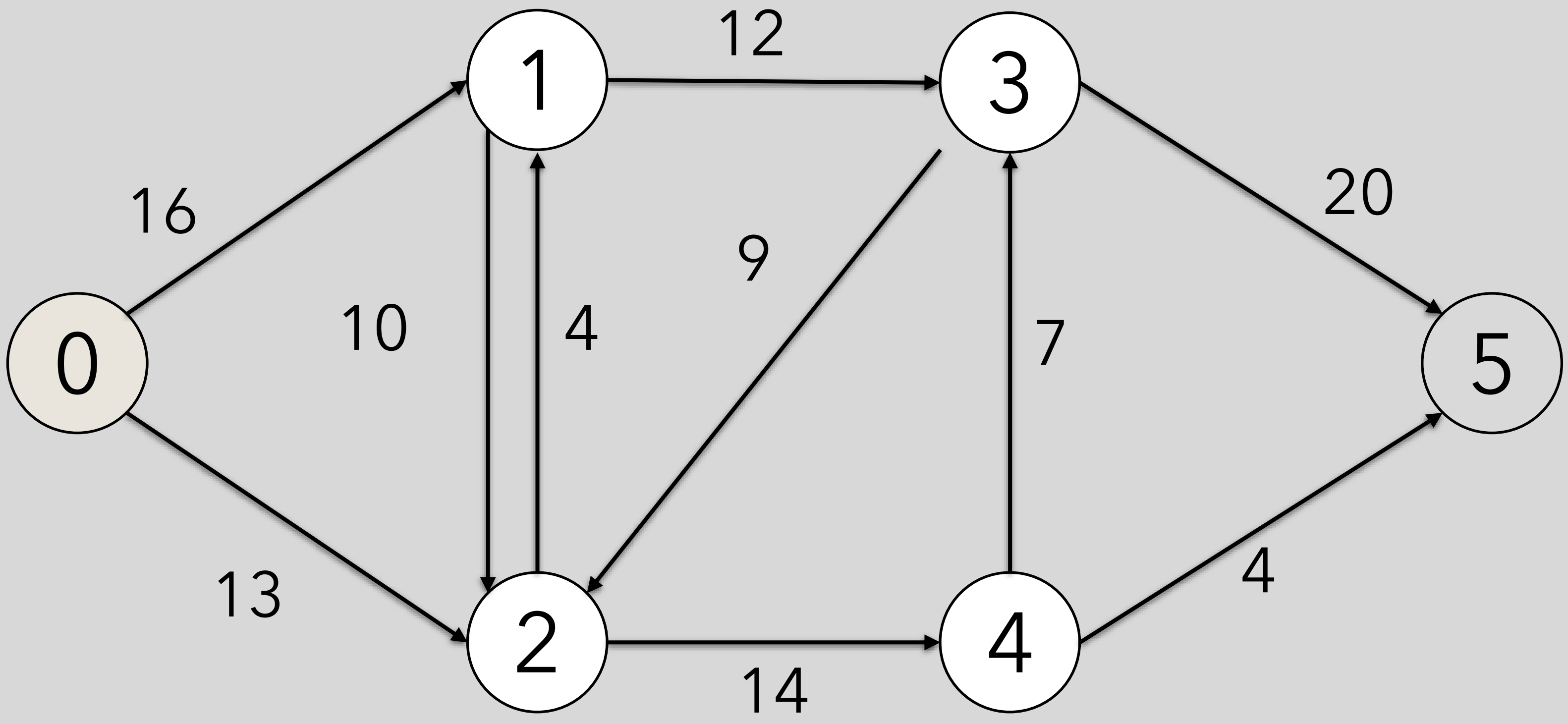
- Para efeito de cálculo
- Conservação de Fluxo:
  - Para cada $u \in V - \{s, t\}$,
  - $\sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v)$
  - (Em todo nó que não seja nem origem nem destino, a soma do fluxo que entra é igual à soma do fluxo que sai)
- Máximo Fluxo: Queremos maximizar $|f|$, onde
  - $|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s)$
  - (Fluxo total é o que sai da origem menos o que entra na origem)

Método de Ford-Fulkerson

- O Método de Ford-Fulkerson (Lester Randolph Ford, Jr e Delbert Ray Fulkerson), foi criado em 1956
- Abordagem Gulosa

1. Escolhe-se um caminho qualquer desde a origem (s) até ao destino (t) cujas arestas sejam de capacidade positiva (>0)
2. Procurar nesse caminho o arco orientado com menor capacidade *c* (gargalo)
3. Diminuir a capacidade de fluxo (c) em cada aresta que faça parte do caminho no **sentido direto** (s até t) e aumentar o fluxo nessas arestas
4. Voltar ao Passo 1. Se já não existir nenhum caminho em que todas as arestas tenham capacidade positiva, então o fluxo máximo já está determinado.

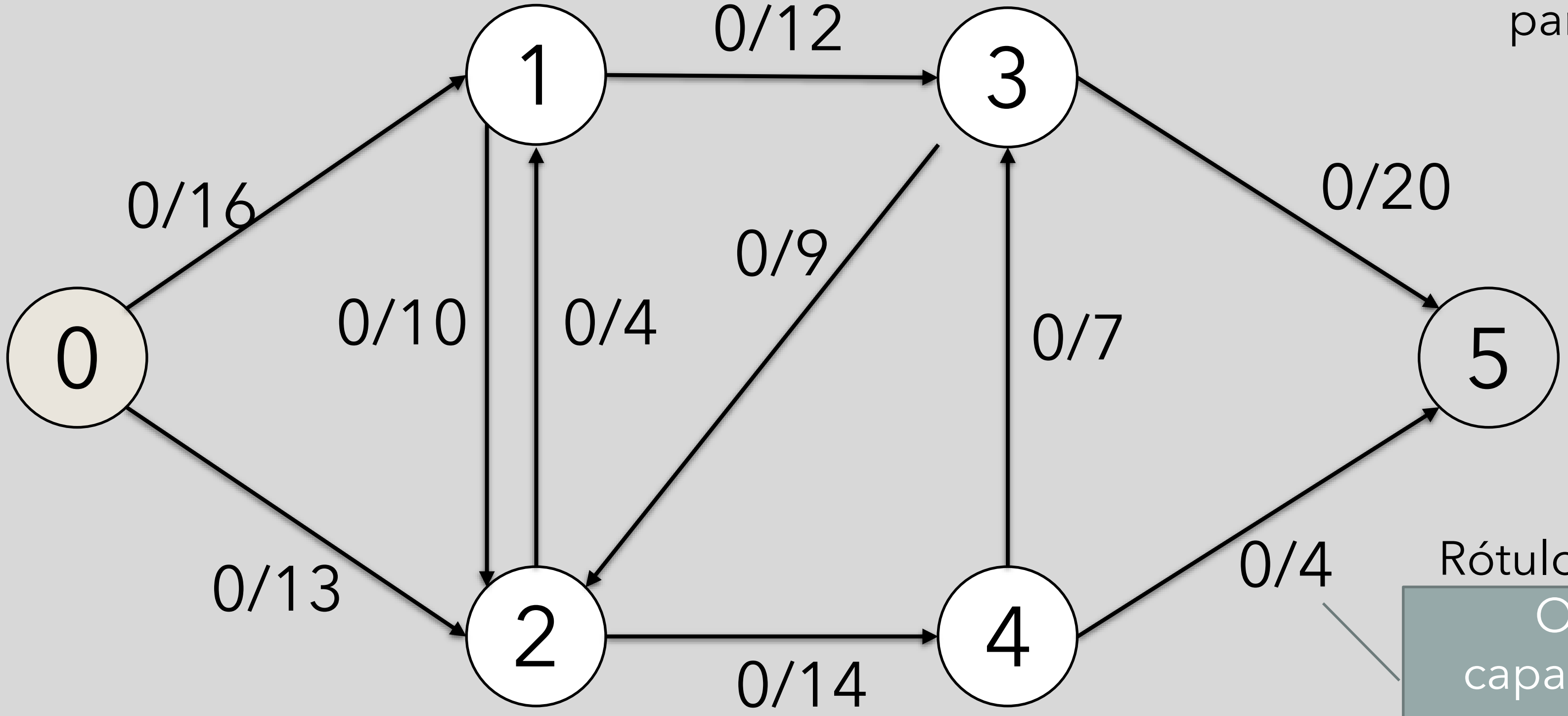
Exemplo de Ford-Fulkerson



Qual é a maior capacidade nessa rede de carga partindo do nó 0 (s) até o nó 5 (t)?

Exemplo de Ford-Fulkerson

Passo 1: atribuir fluxo = 0 para todos os nós



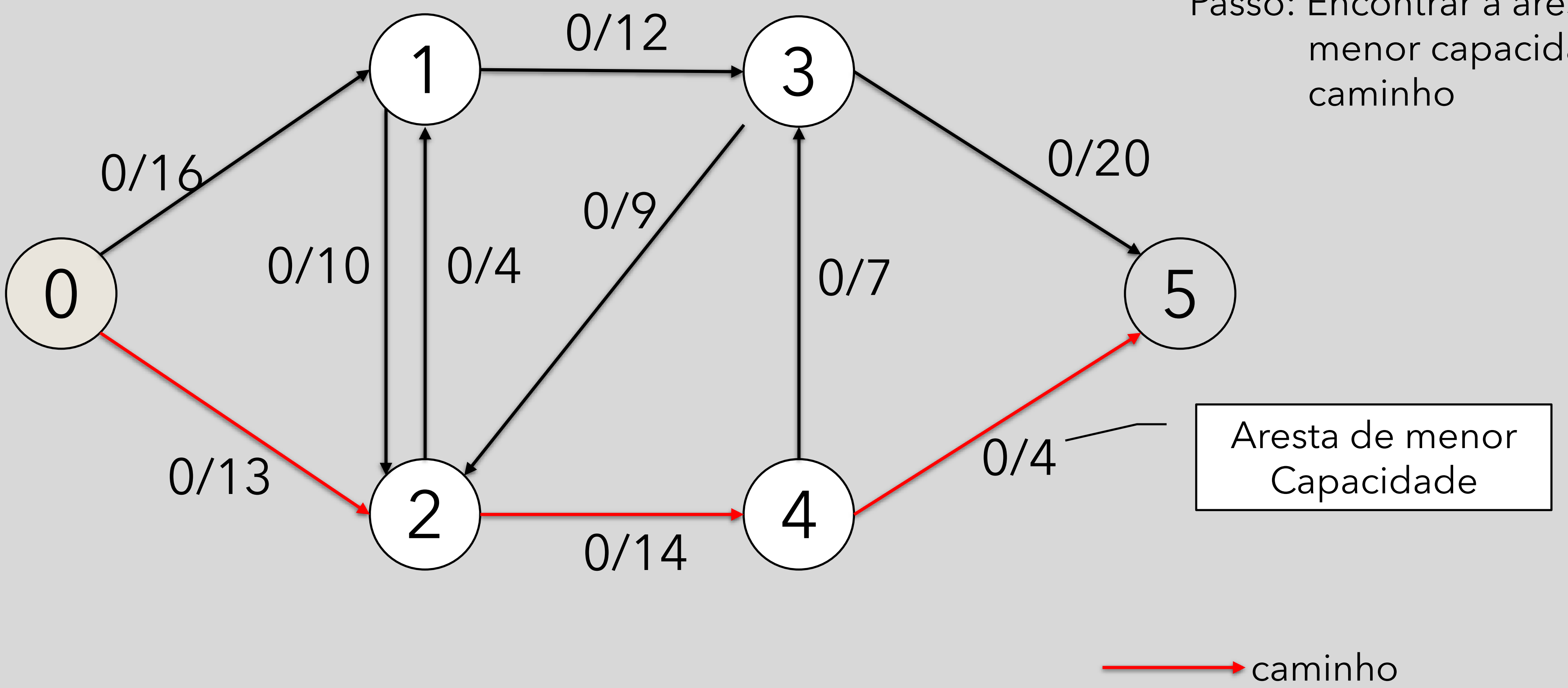
Rótulo usado: fluxo/capacidade

O fluxo é de 0 unidades/ capacidade dessa aresta é de 4 unidades

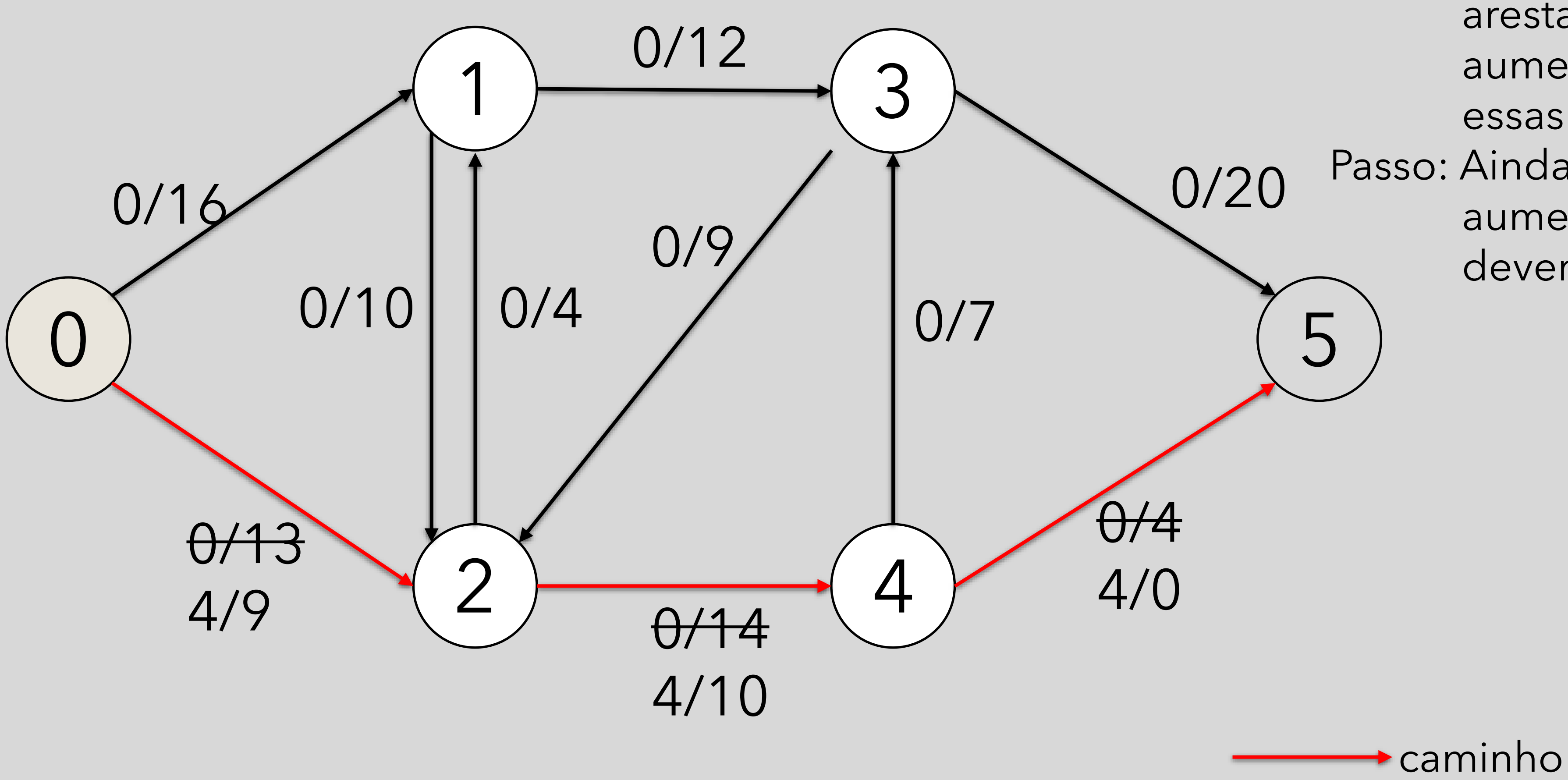
Exemplo de Ford Fulkerson

Passo: Encontrar um caminho entre 0 e 5

Passo: Encontrar a aresta com menor capacidade nesse caminho



Exemplo de Ford Fulkerson



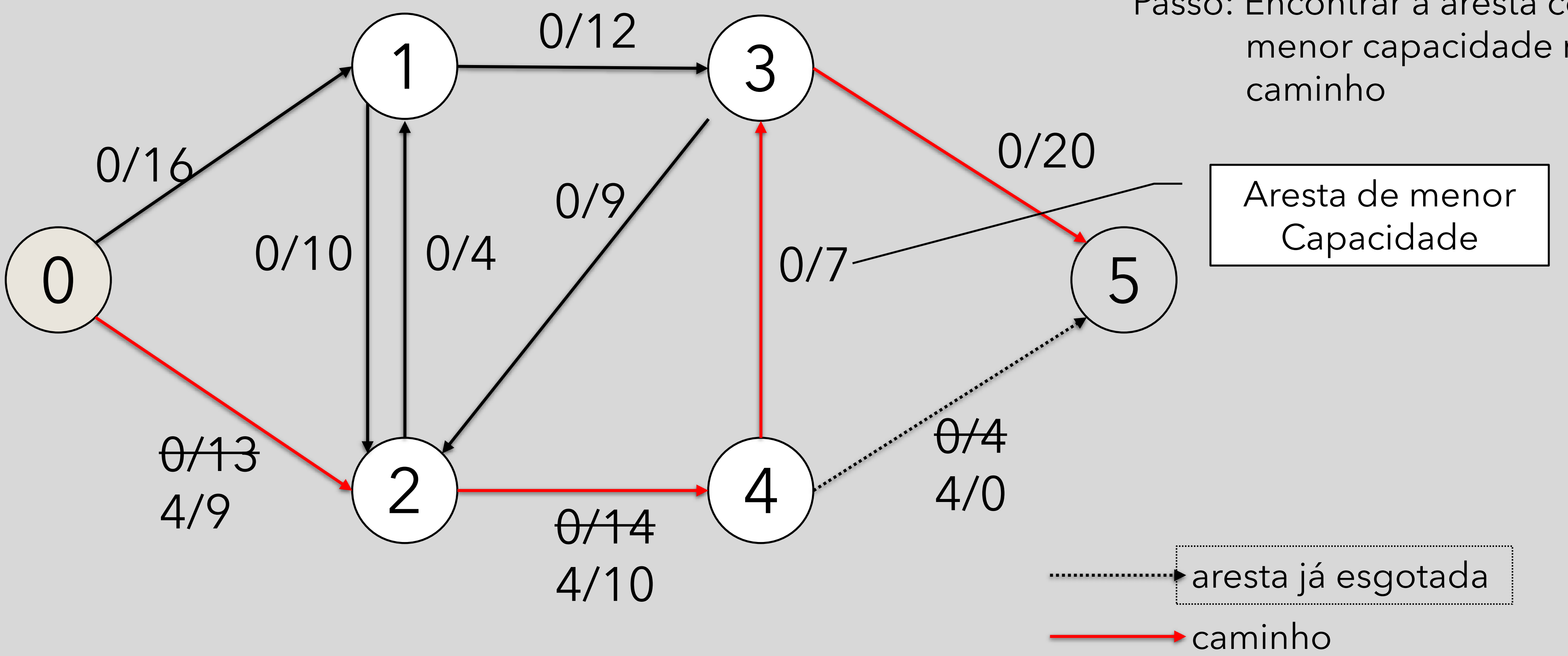
Passo: Diminuir de ‘c’ a capacidade de todas as arestas no caminho e aumentar o fluxo em todas essas arestas

Passo: Ainda existem caminhos aumentantes, então devemos voltar ao Passo 1

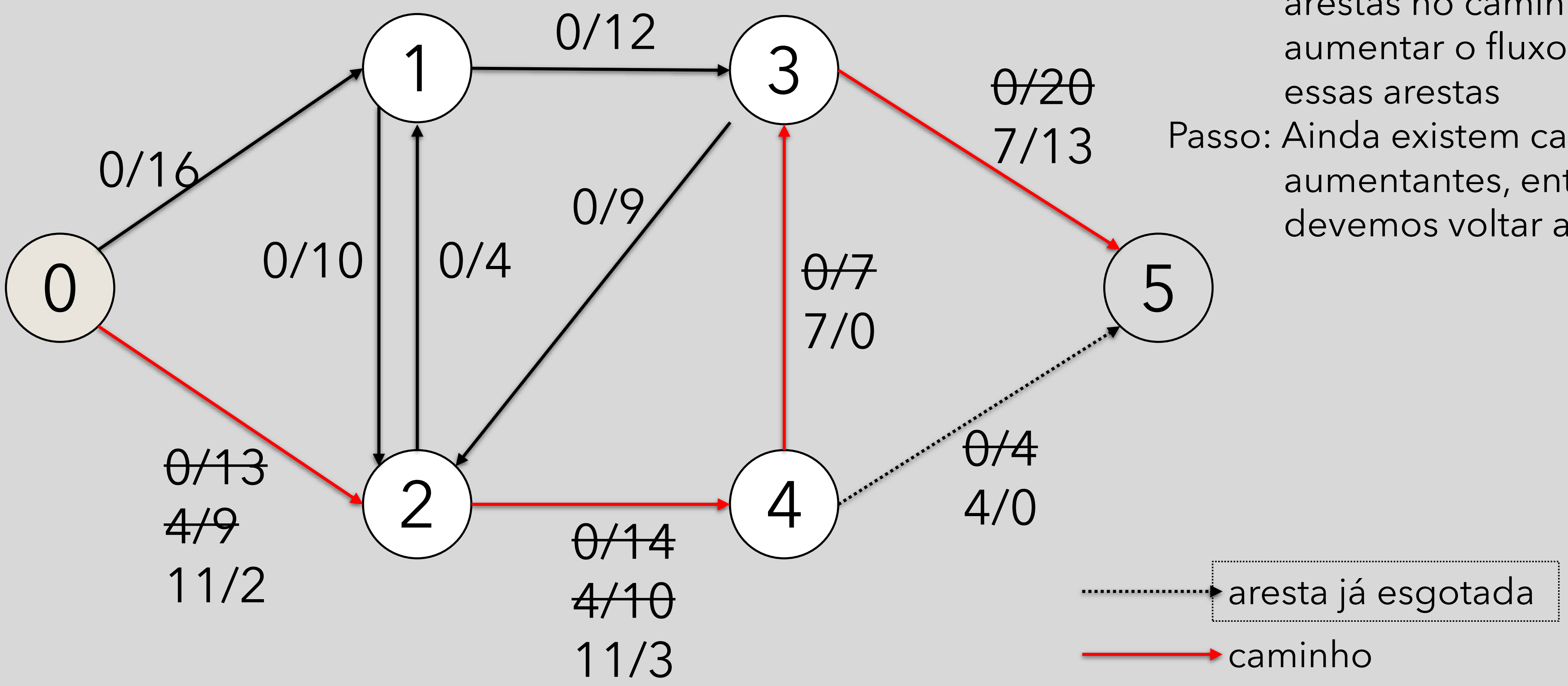
Exemplo de Ford Fulkerson

Passo: Encontrar um caminho entre 0 e 5

Passo: Encontrar a aresta com menor capacidade nesse caminho



Exemplo de Ford Fulkerson



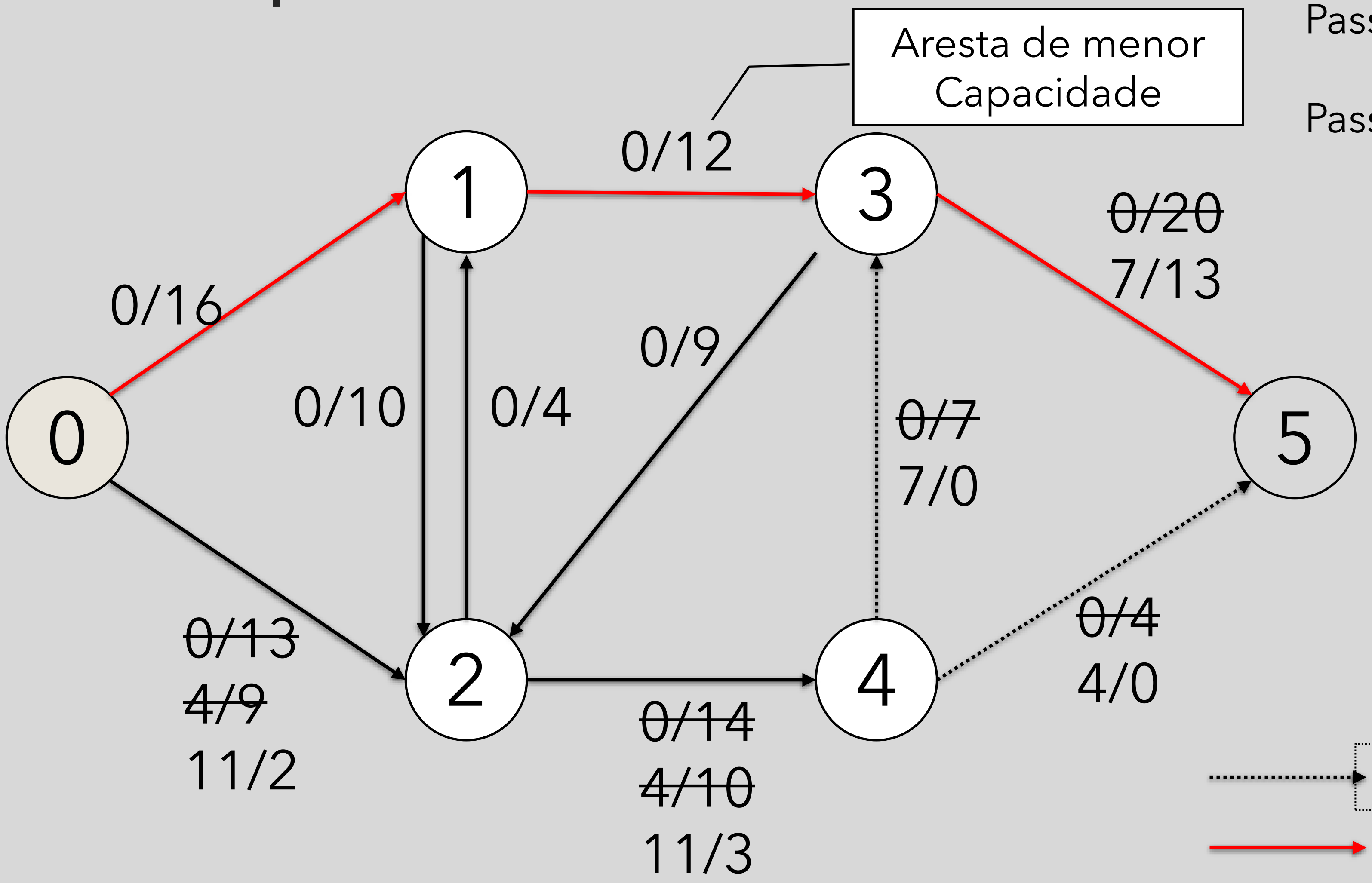
Passo: Diminuir de 'c' a capacidade de todas as arestas no caminho e aumentar o fluxo em todas essas arestas

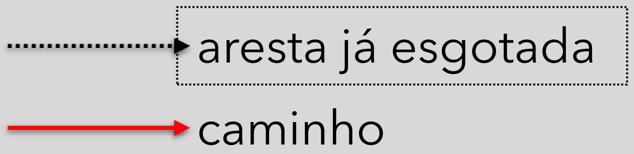
Passo: Ainda existem caminhos aumentantes, então devemos voltar ao Passo 1

Exemplo de Ford Fulkerson

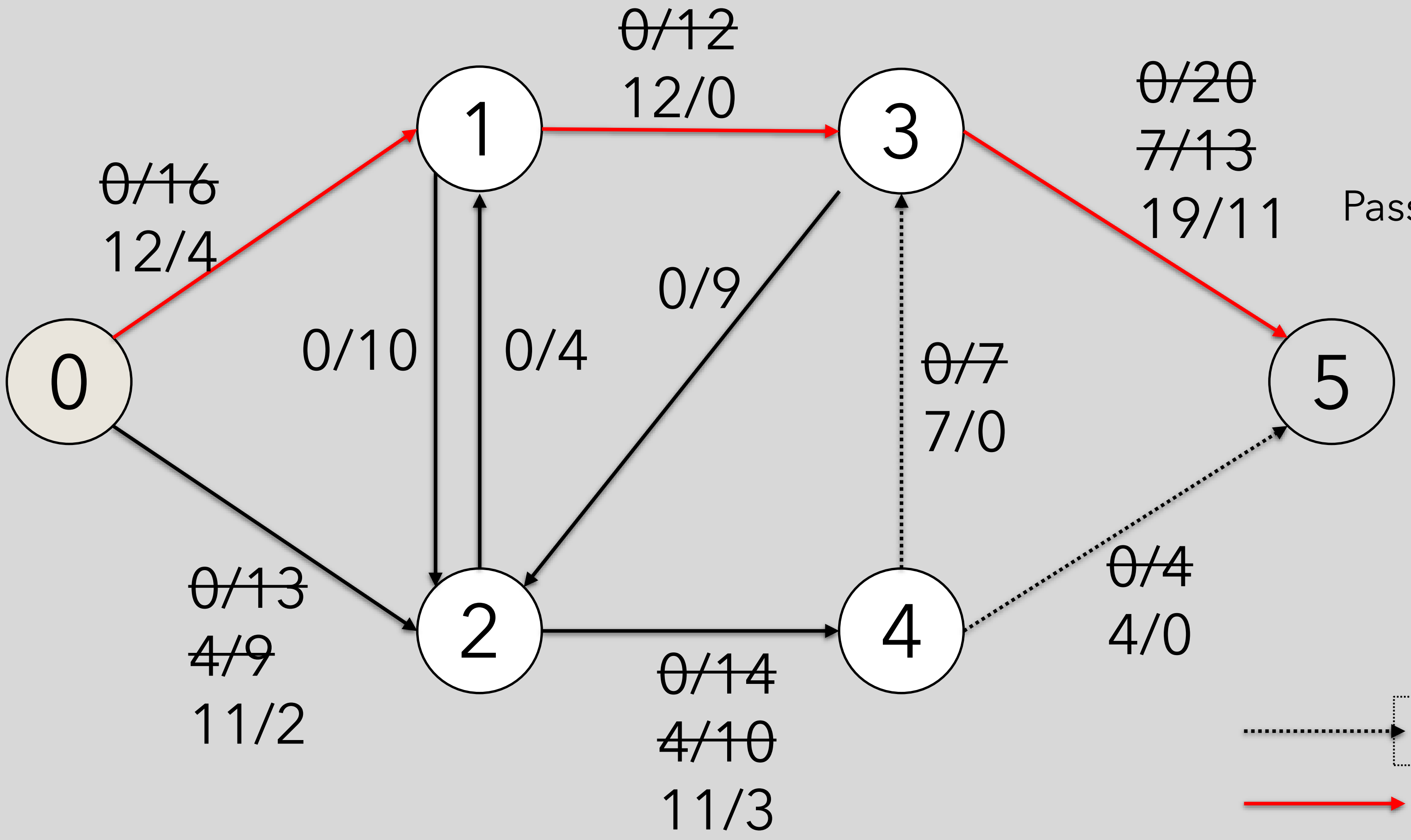
Passo: Encontrar um caminho entre 0 e 5

Passo: Encontrar a aresta com menor capacidade nesse caminho





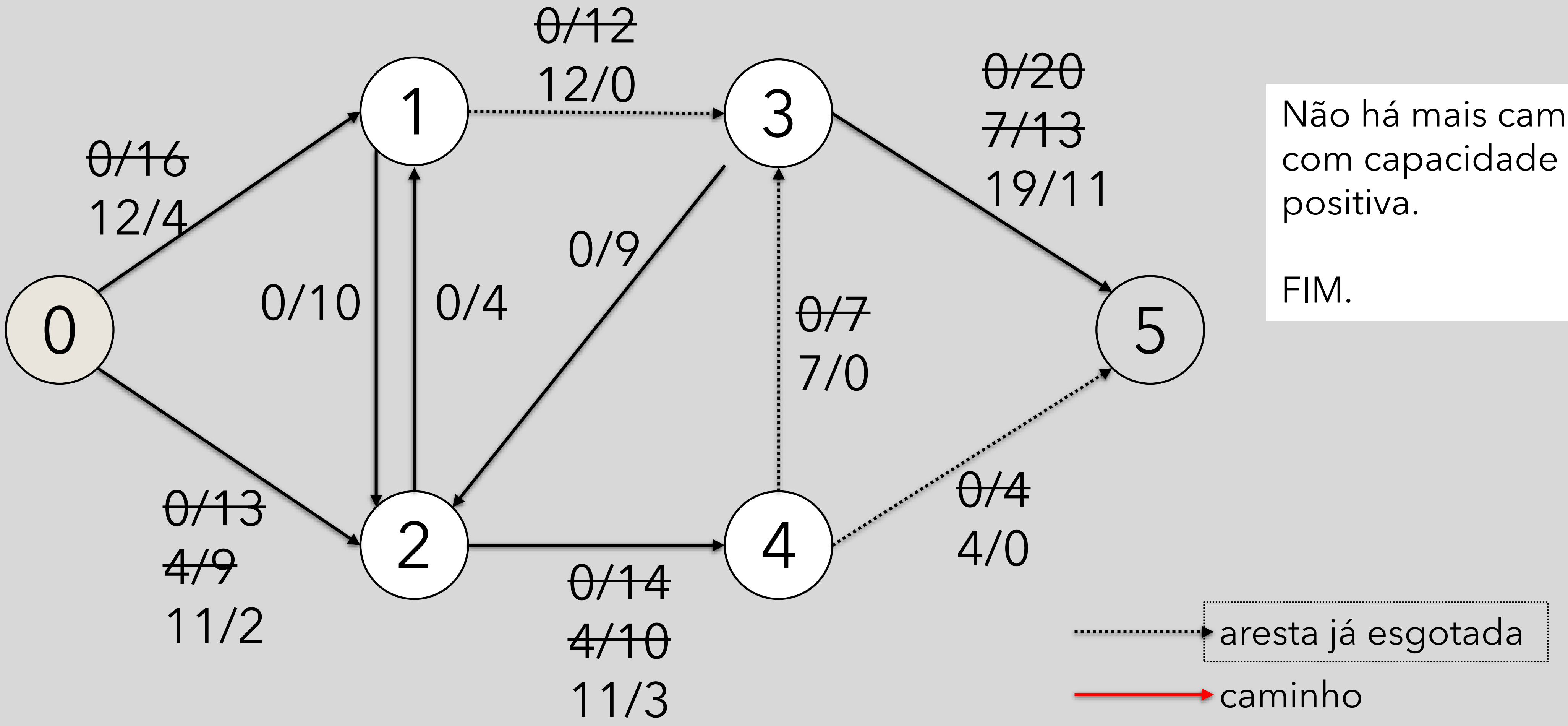
Exemplo de Ford Fulkerson



Passo: Diminuir de 'c' a capacidade de todas as arestas no caminho e aumentar o fluxo em todas essas arestas

Passo: Verificar se ainda existem caminhos aumentantes, então devemos voltar ao Passo 1

Exemplo de Ford Fulkerson



Não há mais caminhos com capacidade positiva.

FIM.

Exemplo de Ford Fulkerson

- O Fluxo Máximo nessa rede é de 23 Unidades
  - 12 saindo do vértice 0 em direção ao 1
  - 11 saindo do vértice 0 em direção ao 2

- Note que essa mesma quantidade entra no vértice 5
  - 19 a partir do vértice 3
  - 4 a partir do vértice 4

Link para Simulador Online

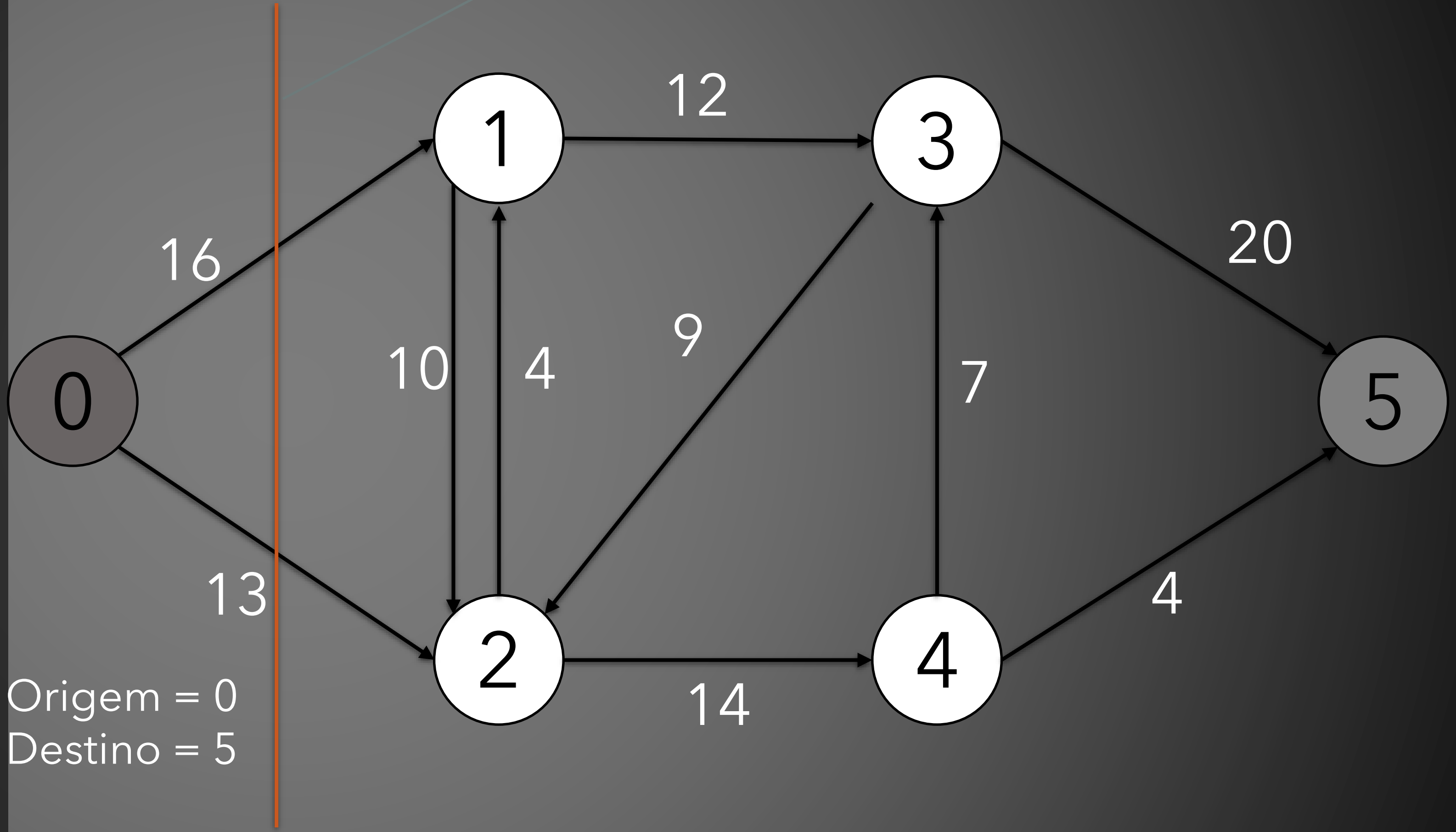
- https://www-m9.ma.tum.de/graph-algorithms/flow-ford-fulkerson/index_en.html

Conceitos Adicionais

- **Corte s/t**
  - Em um grafo orientado, um corte s-t é uma divisão dos vértices em 2 conjuntos disjuntos, de forma que os vértices s e t fiquem separados.
- **Capacidade do Corte**
  - A capacidade de um corte consiste na soma das capacidades de todas as arestas diretas do corte (arestas que conectam vértices nos dois conjuntos disjuntos)
- **Fluxo Máximo x Corte Mínimo**
  - Em qualquer grafo capacitado com vértice inicial e vértice final, o valor do fluxo máximo (dentre os que respeitam as capacidades) é igual à capacidade de um corte mínimo.

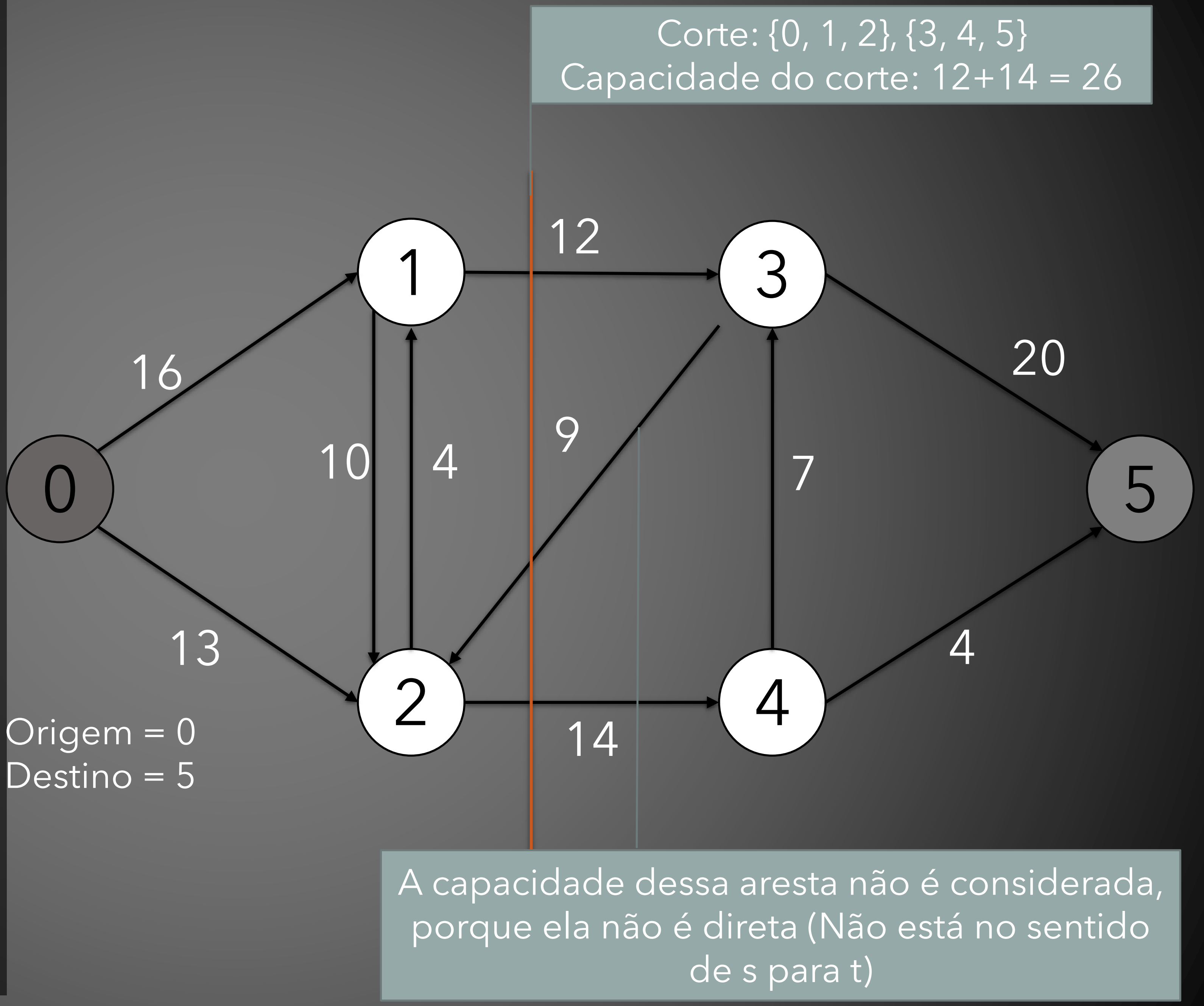
Fluxo Máximo x Corte Mínimo

Corte: {0}, {1, 2, 3, 4, 5}
Capacidade do corte: 16+13 = 29



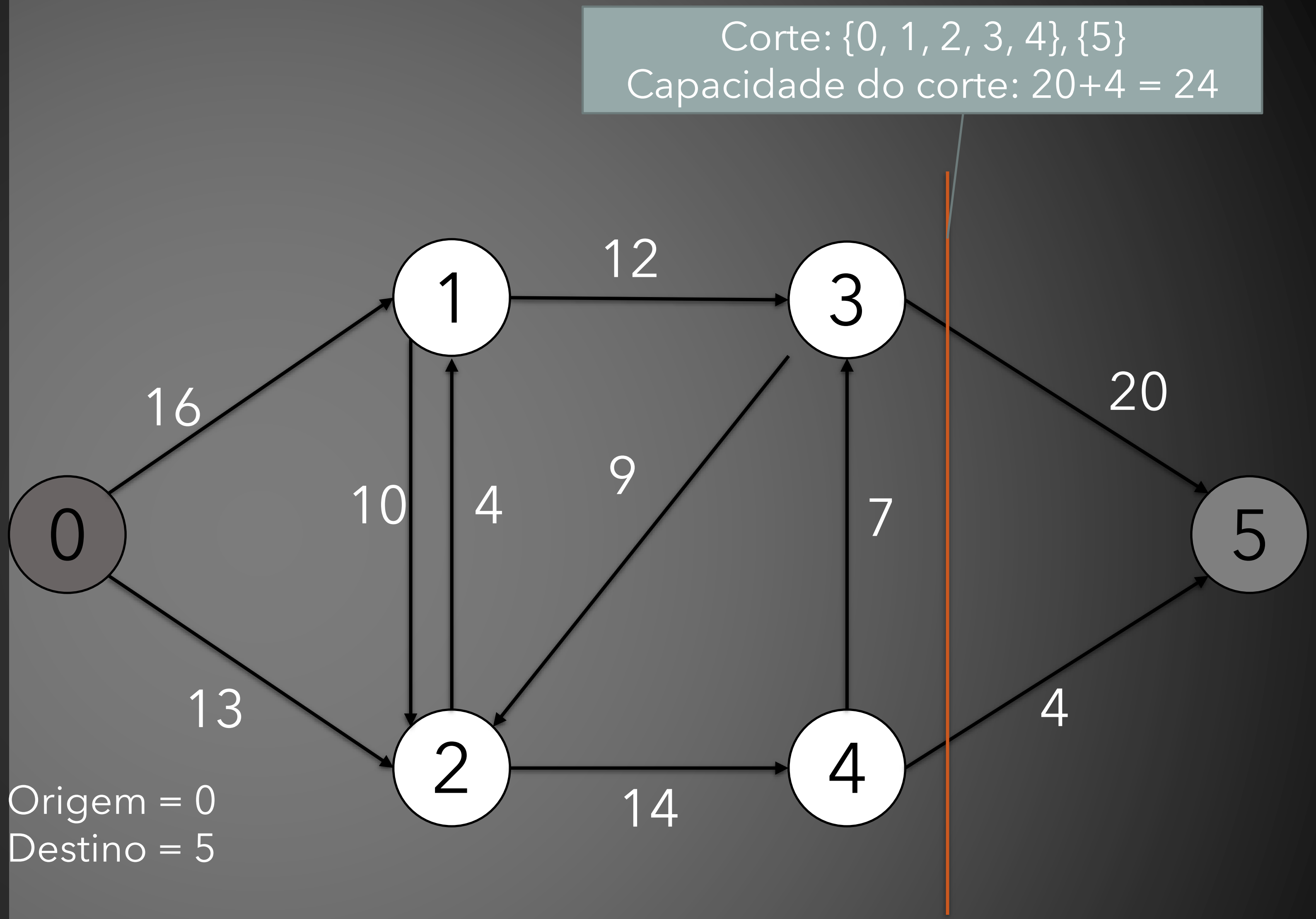
Origem = 0
Destino = 5

Fluxo Máximo x Corte Mínimo



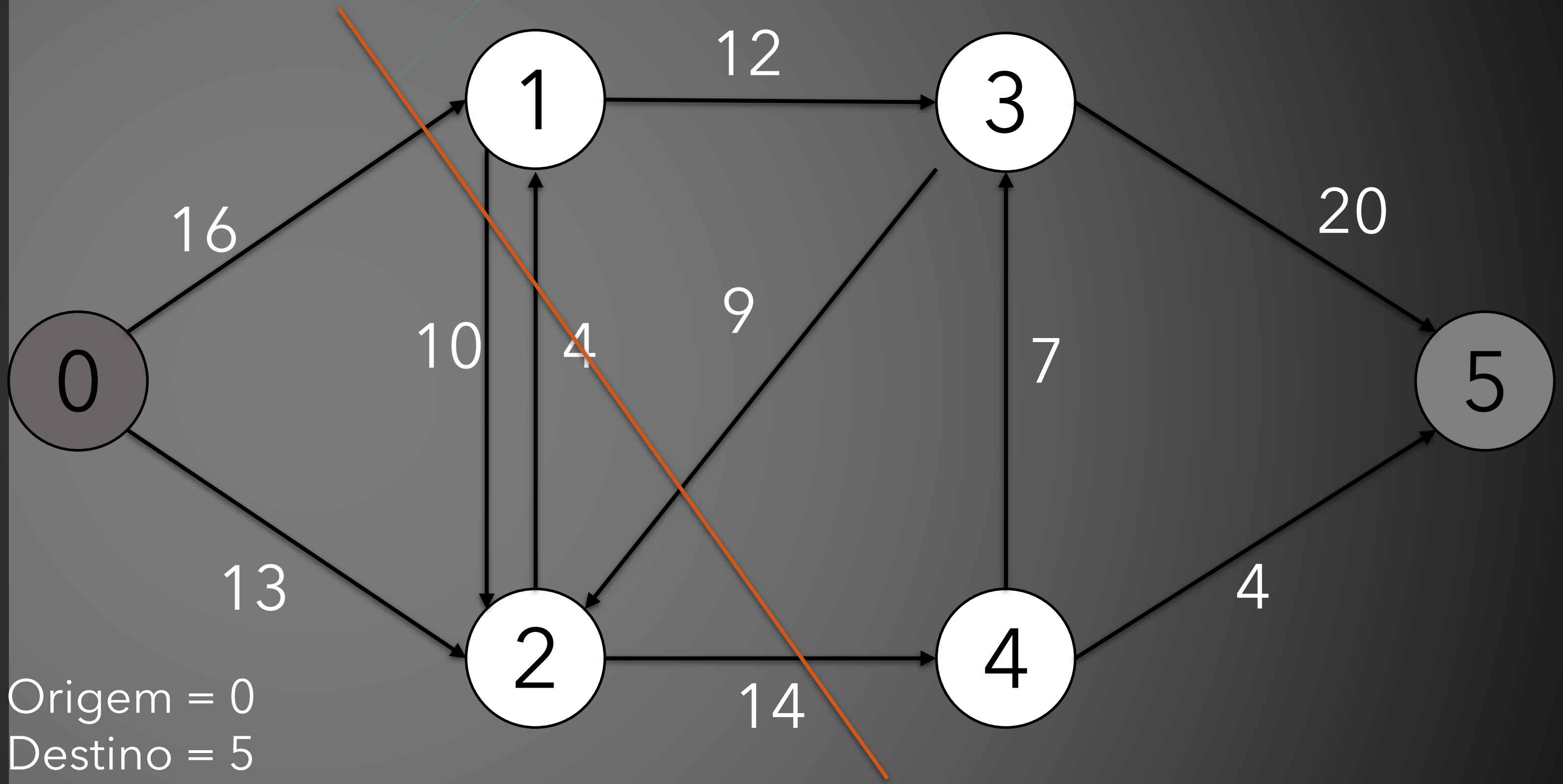
Origem = 0
Destino = 5

Fluxo Máximo x Corte Mínimo



Fluxo Máximo x Corte Mínimo

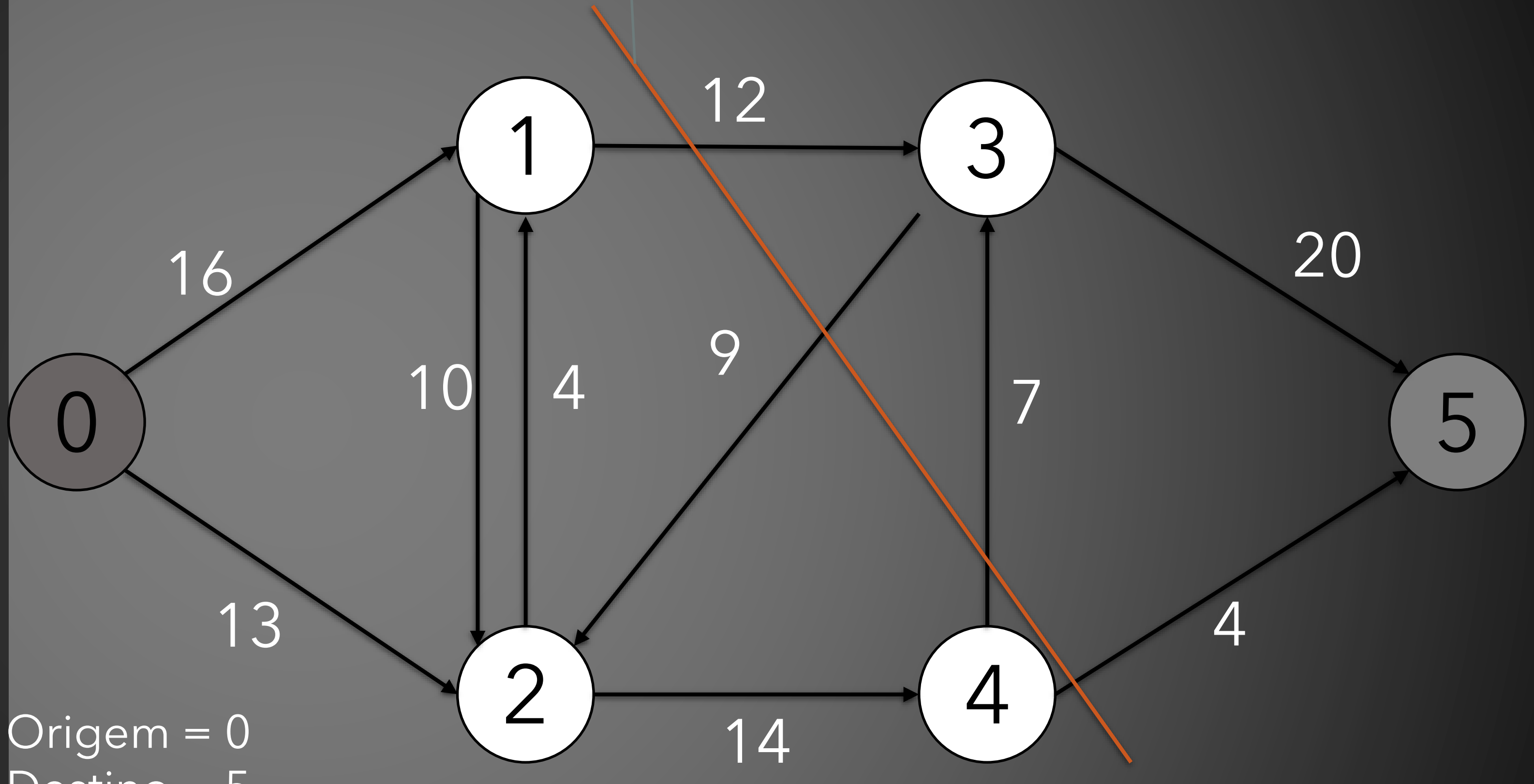
Corte: {0, 2}, {1, 3, 4, 5}
Capacidade do corte: 16+4+14 = 34



Origem = 0
Destino = 5

Fluxo Máximo x Corte Mínimo

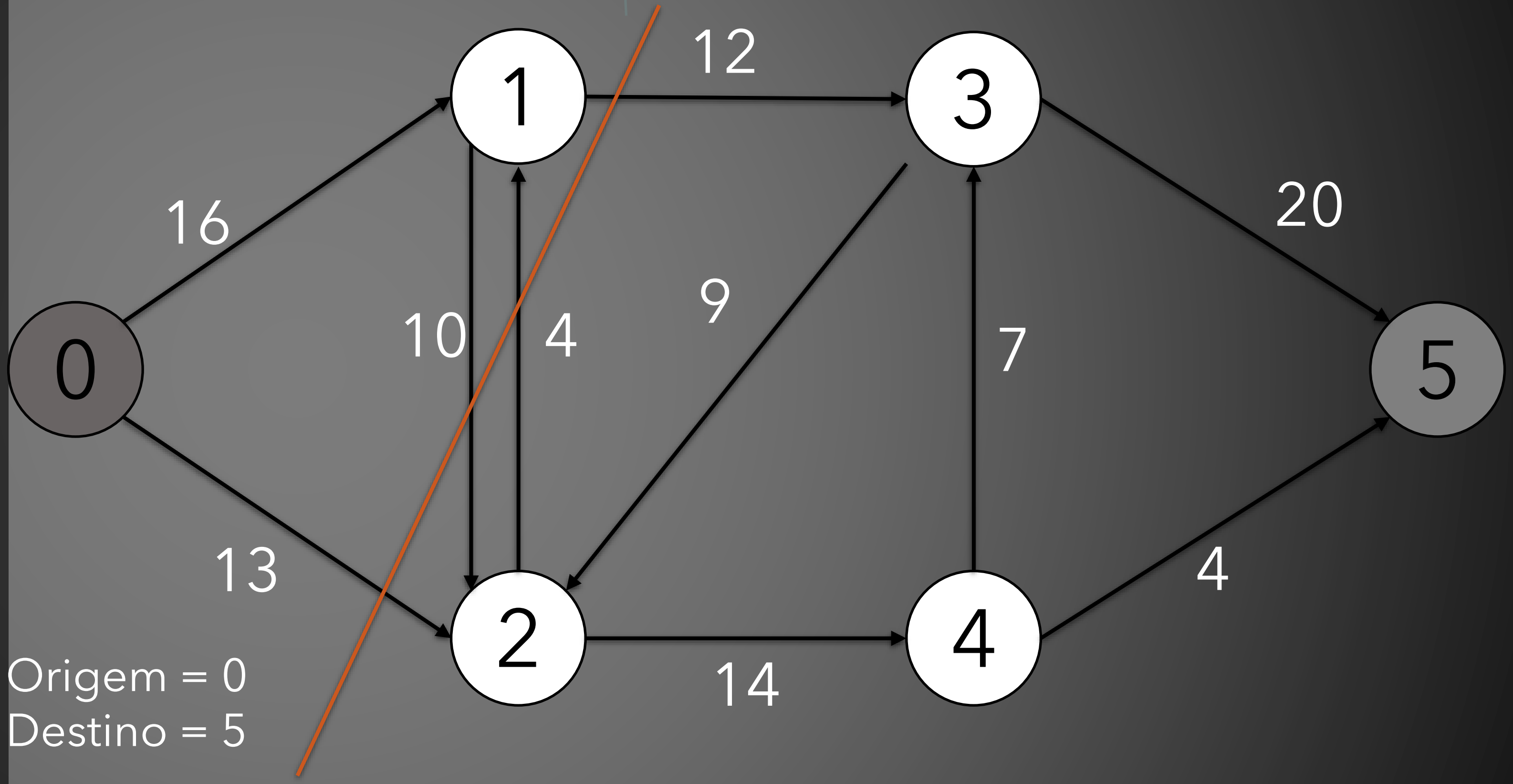
Corte: {0, 1, 2, 4}, {3, 5}
Capacidade do corte: 12+4+7 = 23



Origem = 0
Destino = 5

Fluxo Máximo x Corte Mínimo

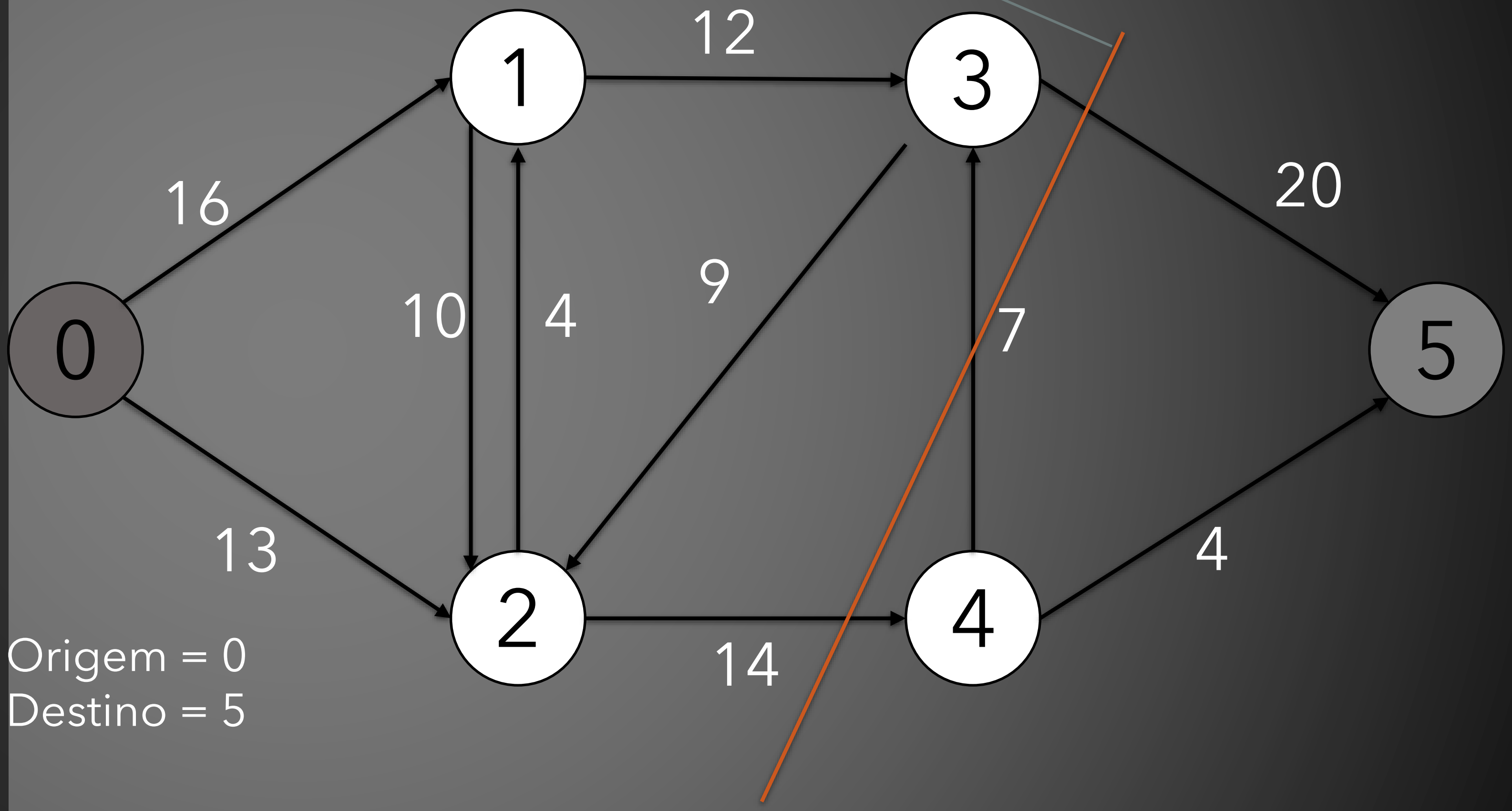
Corte: {0, 1}, {2, 3, 4, 5}
Capacidade do corte: 12+10+13 = 35



Origem = 0
Destino = 5

Fluxo Máximo x Corte Mínimo

Corte: {0, 1, 2, 3}, {4, 5}
Capacidade do corte: 20+14 = 34



Origem = 0
Destino = 5

Fluxo Máximo x Corte Mínimo

- Fluxo Máximo = Mínimo (Capacidade de Corte em G)
- Fluxo Máximo = Mínimo (29, 26, 24, 34, 23, 35, 34)
- Fluxo Máximo = 23

Para pensar....

- Esse algoritmo resolve o problema para 1 única fonte e 1 único destino.

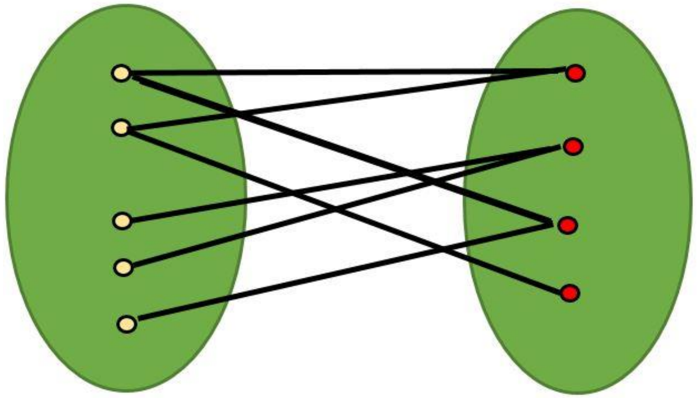
- E se estivermos em uma situação com mais de uma fonte?
- E se estivermos em uma situação com mais de um destino?

Uma Solução Elegante (Simples)

- Se há múltiplas fontes,
  - Inserir um Vértice Fonte artificial – com arestas dirigidas para todos os nós fonte reais. O peso dessas arestas é infinito
- Se há múltiplos destinos
  - Inserir um Vértice destino artificial, com arestas dirigidas de todos os nós destino reais para esse nó artificial. O peso dessas arestas é infinito
- Se há múltiplas fontes e múltiplos destinos
  - Inserir Fonte e Destino artificiais, com arestas de peso infinito
- Calcular o fluxo como se fosse 1 única fonte e 1 único destino

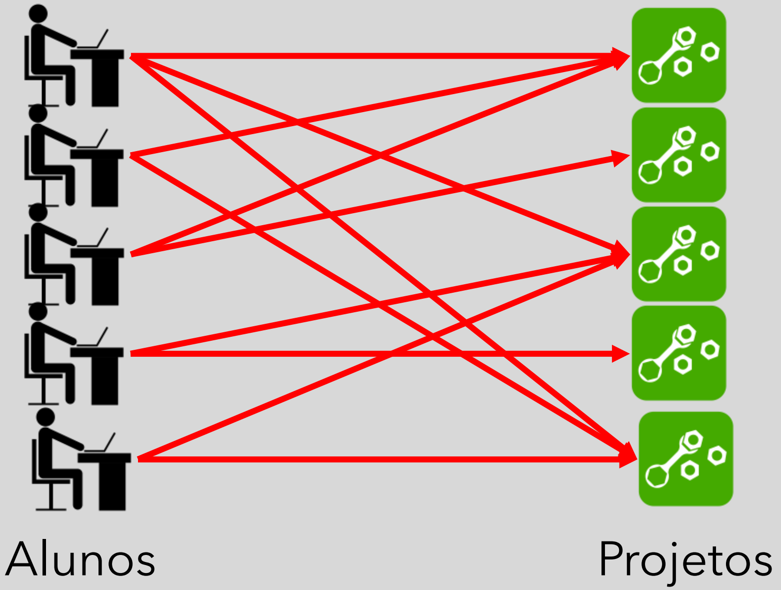
Fluxo Máximo Aplicado em outros Problemas

- Pareamento Máximo em Grafos Bipartidos
- Um tipo especial de aplicação pode ser encontrado em grafos bipartidos
- Um grafo bipartido é aquele em que é possível dividir os vértices em dois conjuntos, U e V, de forma que toda aresta conecta um vértice do conjunto U até o um outro vértice do conjunto V, ou vice-versa. Em outras palavras, não há aresta conectando vértices do mesmo conjunto.



Exemplos de Problemas

- Exemplo 1: Um conjunto de X alunos tem interesse em participar dos projetos (com bolsa) de uma universidade. Cada projeto pode acomodar um aluno. Como assegurar que a maioria dos alunos consiga uma bolsa?

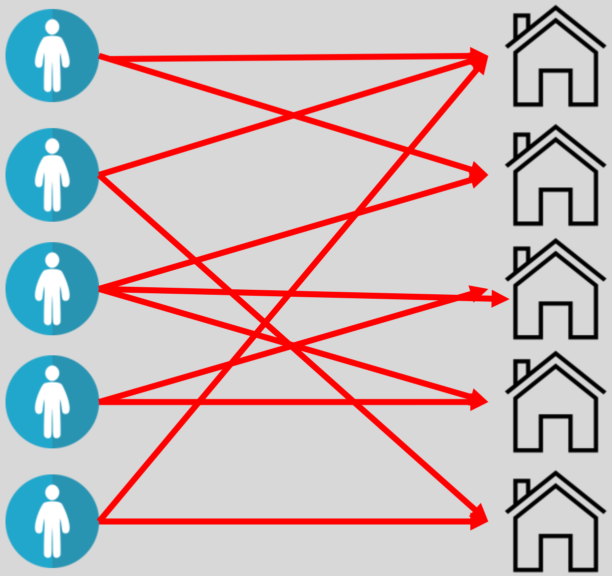


Abordagem para solução:
- De um lado, alunos
- Do outro lado, projetos
- As arestas entre aluno e projeto representam o interesse do aluno em participar no projeto

Calcular o Fluxo Máximo

Exemplos de Problemas

- Um grupo de X atletas precisa ser acomodado em Y dormitórios durante uma competição. Por motivos pessoais, cada atleta manifesta preferência por algum(ns) dormitórios. Como assegurar que a maioria das preferências seja satisfeita? (EX2)

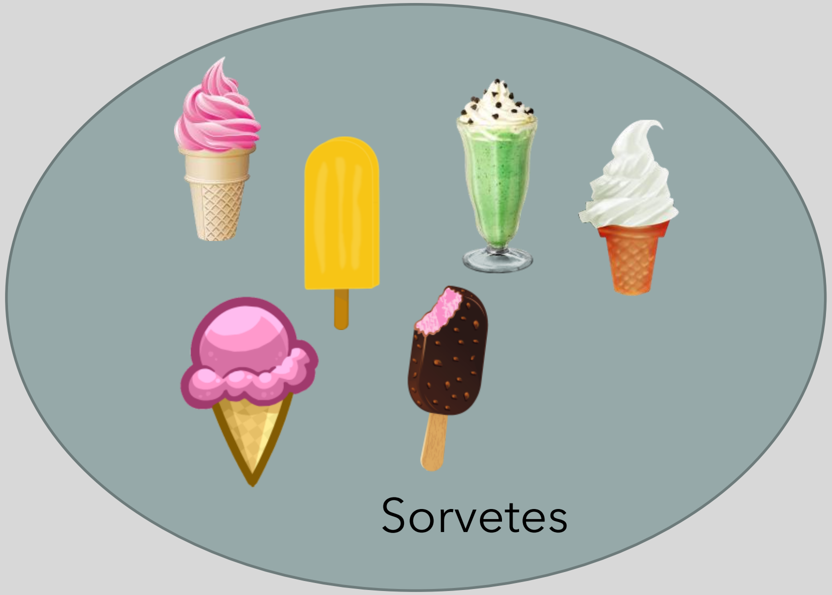


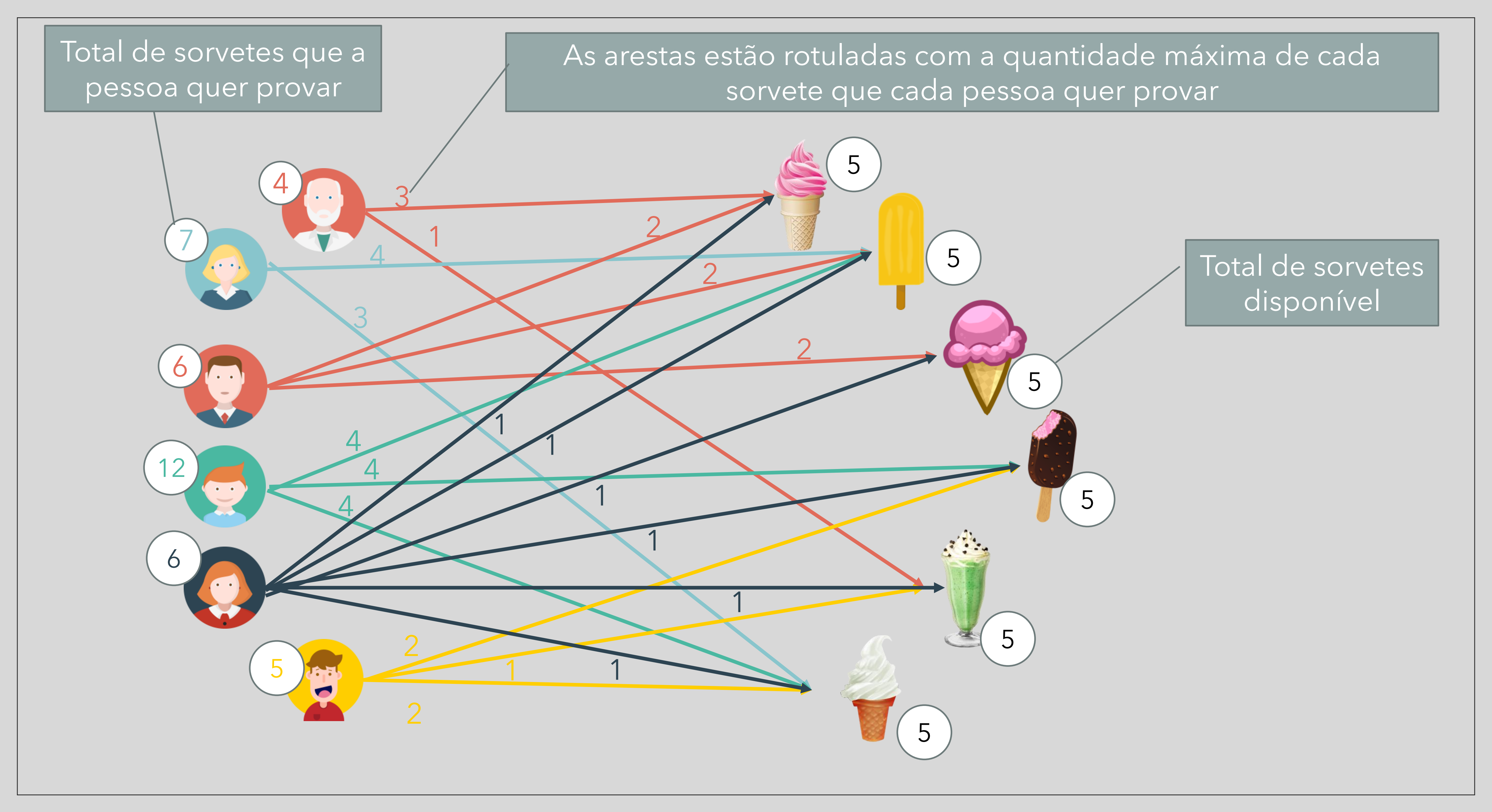
Abordagem para solução:
- De um lado, atletas
- Do outro lado, dormitórios
- As arestas entre atleta e dormitório representam o interesse do aluno em utilizar aquele dormitório

Calcular o Fluxo Máximo

Exemplos de Problemas

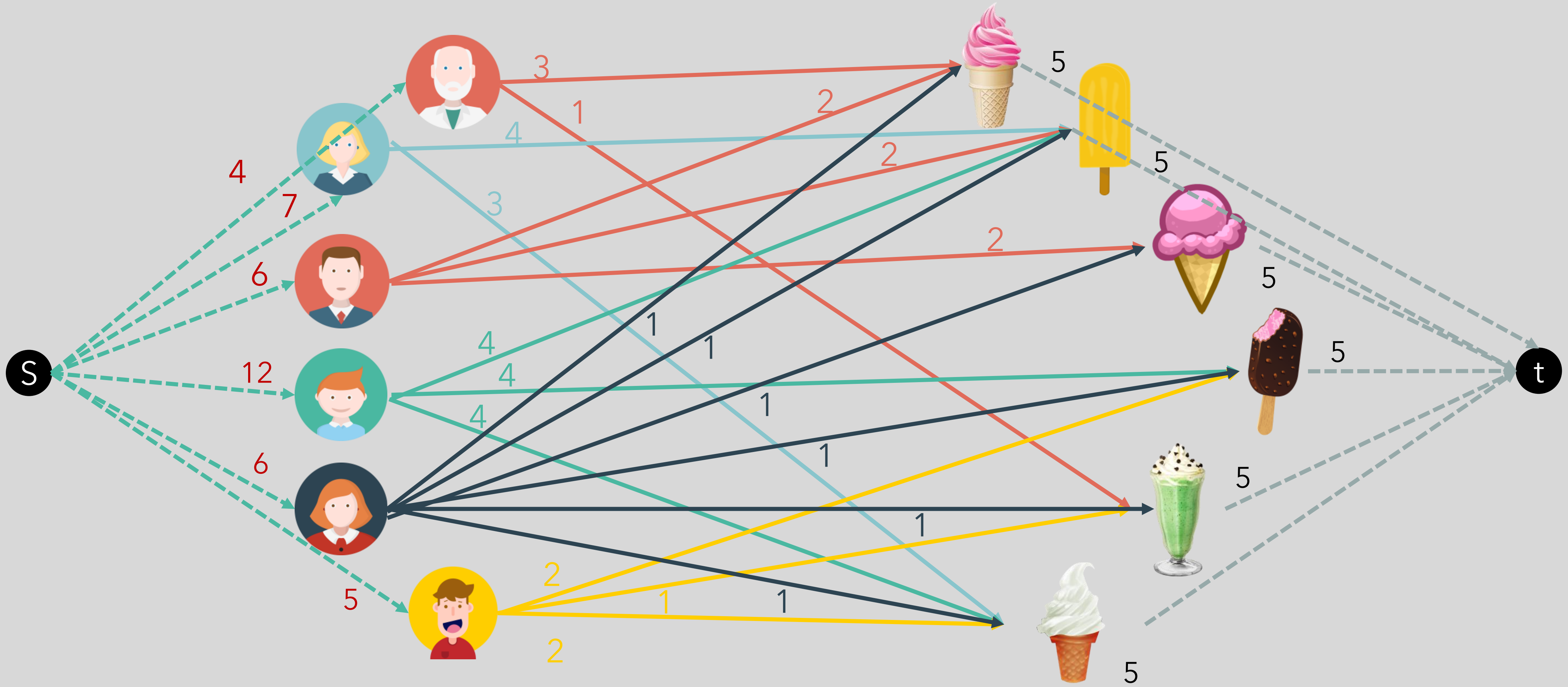
- Em um festival de degustação de sorvetes, cada pessoa manifesta seu interesse em provar alguns sabores. Cada pessoa quer provar N sabores, e há estoque de Y unidades para cada sabor. Queremos satisfazer a maior quantidade de pessoas possível.





Total de sorvetes que a pessoa quer provar
As arestas estão rotuladas com a quantidade máxima de cada sorvete que cada pessoa quer provar
Total de sorvetes disponível
4
7
6
12
6
5
5
5
5
5
5
5

Note que os nós artificiais s e t têm arestas com os pesos diferentes de infinito



Agora basta calcular o Fluxo Máximo nesse grafo

Outros Algoritmos para Fluxo Máximo

- Edmonds-Karps
- Dinic

Referências usadas nesse material

- FEOFILOFF, P. O problema do fluxo máximo. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/flow.html>. Acesso em: 13 jul. 2020.
- Maximum Bipartite Matching - GeeksforGeeks. Disponível em: <https://www.geeksforgeeks.org/maximum-bipartite-matching/>. Acesso em: 13 jul. 2020.
- CS 161: Design and Analysis of Algorithms,Maximum Flow and Ford Fulkerson. Spring 2017. Disponível em: <http://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs161/cs161.1176/>. Acesso em: 13 jul. 2020.