Lógica de predicados

Prof. Frank Helbert Borsato

Lógica de predicados

- Nas aulas anteriores examinamos uma parte da Lógica chamada Lógica Proposicional na qual aprendemos técnicas que nos permitiram verificar se um determinado tipo de argumento é válido ou inválido.
- Nos argumentos estudados, os enunciados simples eram combinados através dos conectivos, formando enunciados compostos, e a validade desses argumentos dependia, essencialmente, da forma pela qual os enunciados compostos se apresentavam.

Lógica de predicados

- Não é difícil, no entanto, encontrar argumentos de um tipo distinto; por exemplo, o argumento

Todos os humanos são mortais

Sócrates é um humano

Logo, Sócrates é mortal

é claramente válido, mas sua validade não depende da forma pela qual os enunciados simples se compõem, uma vez que, neste argumento, não há enunciados compostos.

Lógica de predicados

- Pode–se perceber que a validade depende, na verdade, da estrutura interna dos enunciados que constituem o argumento. A construção de métodos para analisar argumentos como esse vai, portanto, exigir a criação de técnicas para descrever e simbolizar a estrutura interna dos enunciados.

- Considere a premissa “Sócrates é humano”. Esse enunciado é uma declaração de que determinado indivíduo (Sócrates) possui uma propriedade específica (é humano).

Lógica de predicados

- O predicado, na verdade, explicita certas qualidades que o sujeito possui e que permite incluí-lo em uma categoria; por exemplo, quando dizemos "Sócrates é humano" queremos dizer que o objeto chamado "Sócrates" possui certas características que permitem incluí-lo no conceito que fazemos daquilo que chamamos "humano". (e isto vimos em Teoria dos Conjuntos)

… em lógica ...

H (Sócrates)

Lógica de predicados

- A linguagem natural permite ainda a construção de um outro tipo de sentença, como "ele foi presidente do Brasil" na qual o sujeito não é um substantivo, mas um pronome.

Em Lógica, representando o predicado "foi presidente do Brasil" por P, e levando em conta que x é o sujeito, teríamos a representação

P(x) ou Px

Em Lógica, portanto, um enunciado fica simbolizado pelo predicado, representado por uma única letra maiúscula, seguido pelo sujeito, uma constante entre parênteses ou uma variável.

Lógica de predicados

- Uma frase na qual o sujeito é uma constante, como "Sócrates é humano", pode ser verdadeira ou falsa; mas se o sujeito for uma variável, como em "ele foi presidente do Brasil", ela não é verdadeira nem falsa, dependendo do nome que assuma o lugar do pronome. Uma frase como essa não é, portanto, um enunciado.

- Os enunciados são chamados sentenças fechadas.

Lógica de predicados

- Frases como “x foi presidente do Brasil” , “y escreveu Os Lusíadas” e “z viajou para os Estados Unidos” são chamadas sentenças abertas, ou, simplesmente, abertos.

  - Os abertos não são verdadeiros nem falsos; podemos dizer apenas que são satisfeitos para certos valores das variáveis, e não satisfeitos para outros.

  - A substituição das variáveis de um aberto por constantes chama-se instanciação ou especificação; a instanciação transforma um aberto em um enunciado, que, este sim, pode ser verdadeiro ou falso.

Lógica de predicados

- Universo

- Chama-se Universo de uma variável o conjunto de valores que ela pode assumir. Na linguagem corrente, o Universo não é, muitas vezes, explicitado;

- Intuitivamente, incluímos os objetos que podem substituir o pronome e descartamos aqueles objetos que sabemos que não podem; por exemplo, na frase

isto está verde

sabemos que “isto” pode ser uma fruta, ou uma parede, ou o mar, mas que dificilmente será um ser humano.

Lógica de predicados

- Universo

  - o Universo do Discurso, quando não for explicitado, é definido pelo próprio contexto.

Muitas vezes, a definição do Universo pode afetar a satisfatoriedade do aberto; por exemplo, o aberto

x é feroz

pode ser satisfazível (tornar-se verdadeiro) se o universo for o conjunto de animais, e não satisfazível se o universo for o conjunto de disciplinas do curso BCC.

Lógica de predicados

- Conjunto–Verdade (V_P) de um aberto Px

  - É o conjunto de elementos do Universo que, quando instanciam a variável, satisfazem (tornam verdadeiro) o enunciado; ou seja

$$V_P = \{ a \in U \mid VL[P(a)] = V \} \quad \text{ou}$$

$$V_P = \{ a \in U \mid Pa \}$$

Por exemplo, seja U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } e a expressão "x é primo" representada por Px. Temos então $V_P = \{ 2, 3, 5, 7 \}$.

Lógica de predicados

- Predicados monádicos e relações

  - Os predicados podem ser monádicos (de um só termo), diádicos (de dois termos), triádicos (de três termos) ou poliádicos (de quatro ou mais termos).

Muitos autores no entanto, preferem chamar os predicados de dois ou mais termos de “relação”, reservando o nome predicado para os predicados monádicos.

Lógica de predicados

- Predicados monádicos e relações

Exemplos

x gosta de y	Gxy
João é casado com Maria	C (João, Maria)
x está entre y e z	Exyz

Nas relações, a ordem das variáveis é importante; no exemplo dado, Gxy significa “x gosta de y” mas não significa “y gosta de x”

Lógica de predicados

- Predicados monádicos e relações

Na instanciação, variáveis iguais devem ser substituídas por nomes iguais; variáveis distintas, no entanto, podem ser substituídas por nomes iguais ou distintos. Por exemplo, o aberto

x é maior ou igual a y

permite tanto a instanciação "7 é maior ou igual a 3" como a instanciação "7 é maior ou igual a 7".

Lógica de predicados

- Predicados monádicos e relações

- Em relações com duas variáveis, o Conjunto Universo é constituído pelo produto cartesiano dos Universos das variáveis.

- o Conjunto−Verdade é constituído pelos pares ordenados dos valores que satisfazem a relação.

Por exemplo, considere o aberto Mxy representando "x é metade de y", onde Ux = {1, 2, 3} e Uy = { 4, 5 , 6 }. Então $V_M = \{ (2, 4), (3, 6) \}$

Lógica de predicados

- Operações lógicas (E)

- Considere, por exemplo, os abertos “x é médico”, representado por Mx, e “x é professor”, representado por Px; podemos então representar “x é médico e professor” por $Mx \wedge Px$.

- Seja U o conjunto Universo de x; os valores de U que satisfazem $Mx \wedge Px$ devem satisfazer simultaneamente Mx e Px; consequentemente,

$$V_{M \wedge P} = V_M \cap V_P$$

Lógica de predicados

- Operações lógicas (OU)

- Considere, por exemplo, os abertos “x é médico”, representado por Mx, e “x é professor”, representado por Px; podemos então representar “x é médico ou professor” por $Mx \lor Px$.

- Este aberto é satisfeito por todos os elementos que são médicos e por todos que são professores,

$$V_{M \lor P} = V_M \cup V_P$$

Lógica de predicados

- Operações lógicas (NÃO / NOT)

- Na operação de negação, podemos representar "x não é médico" por $\neg Mx$, e seu Conjunto−Verdade será constituído por todos os elementos do Universo que não satisfazem Mx, isto é, o complemento de V_M:

$$V_{\neg M} = U - V_M$$

Uma notação de uso generalizado para o complemento de V_M é V'_M.

Lógica de predicados

- Operações lógicas (Condicional)

- Considere a expressão "se x trabalha, então x fica cansado"; representando "x trabalha" por Tx, e "x fica cansado" por Cx, temos que a expressão dada fica representada por $Tx \rightarrow Cx$.

- Seu Conjunto−Verdade é constituído por duas classes de elementos: pelos que trabalham e ficam cansados e pelos que não trabalham (uma vez que quando o antecedente é falso, a condicional é verdadeira).

Lógica de predicados

- Operações lógicas (Condicional)

$$V_{T\rightarrow C} = (V_T \cap V_C) \cup V_{\neg T}$$

$$V_{T\rightarrow C} = (V_T \cup V_{\neg T}) \cap (V_{\neg T} \cup V_C)$$

$$V_{T\rightarrow C} = U \cap (V_{\neg T} \cup V_C)$$

$$V_{T\rightarrow C} = V_{\neg T} \cup V_C$$

ou, ainda,

$$V_{T\rightarrow C} = V'_T \cup V_C$$

Lógica de predicados

- Operações lógicas (Bi-Condicional)

- Considere a expressão "x trabalha se e somente se ganha dinheiro".

- representando "x trabalha" por Tx, e "x ganha dinheiro" por Gx, temos $Tx \leftrightarrow Gx$. O conjunto de elementos que satisfazem a essa expressão é constituído pela união entre os conjuntos daqueles que trabalham e ganham dinheiro e daqueles que não trabalham e não ganham dinheiro; assim,

$$V_{T\leftrightarrow G} = (V_T \cap V_G) \cup (V'_T \cap V'_G)$$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

- Gatos caçam ratos (Gx – x é um gato; Rx – x caça ratos)

Forma lógica: se x é um gato, x caça ratos

Forma simbólica: $Gx \rightarrow Rx$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

\- Chineses velhos são sábios (Cx – x é chinês; Vx – x é velho; Sx – x é sábio)

Forma lógica: se x é chinês e x é velho, então x é sábio

Forma simbólica: $Cx \wedge Vx \rightarrow Sx$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

- Abacates são deliciosos e nutritivos (Ax – x é um abacate; Dx – x é delicioso; Nx – x é nutritivo)

Forma lógica: se x é um abacate, então x é delicioso e x é nutritivo

Forma simbólica: $Ax \rightarrow Dx \wedge Nx$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

- Abacates e laranjas são deliciosos e nutritivos (Ax – x é um abacate; Lx – x é uma laranja; Dx – x é delicioso; Nx – x é nutritivo)

Forma lógica: se x é um abacate ou x é uma laranja, então x é delicioso e x é nutritivo

Forma simbólica: $Ax \lor Lx \rightarrow Dx \land Nx$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

- São raros os políticos que não mentem (Rx – x é raro; Px – x é político; Mx – x mente)

Forma lógica: se x é político e x não mente, então x é raro

Forma simbólica: $Px \land \neg Mx \rightarrow Rx$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

- Carros só se locomovem com gasolina (Cx – x é um carro; Lx – x se locomove; Gx – x tem gasolina)

Forma lógica: se x é um carro, então x se locomove se e somente se x tem gasolina

Forma simbólica: $Cx \rightarrow (Lx \leftrightarrow Gx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

- Estradas de terra são trafegáveis unicamente quando secas (Ex – x é uma estrada de terra; Tx – x é trafegável; Sx – x está seca)

Forma lógica: se x é uma estrada de terra, então x é trafegável se e somente se x está seca

Forma simbólica: $Ex \rightarrow (Tx \leftrightarrow Sx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

- Homens só se casam com mulheres (Hx – x é homem; Cxy – x é casado com y; My – y é mulher)

Forma lógica: se x é homem, e x é casado com y, então y é mulher

Forma simbólica: $Hx \land Cxy \rightarrow My$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

- Gatos pretos são melhores caçadores que outros gatos (Gx – x é um gato; Px – x é preto; Cxy – x é melhor caçador que y)

Forma lógica: se x é um gato e x é preto e y é um gato e y não é preto, então x é melhor caçador que y

Forma simbólica: $Gx \wedge Px \wedge Gy \wedge \neg Py \rightarrow Cxy$

Lógica de predicados

- Quantificadores

Dado um aberto Px em um universo U, pode ocorrer:

- todos os x em U satisfazem P; isto é, $V_P = U$
- alguns x em U satisfazem P, isto é, $V_P \neq \emptyset$
- nenhum x em U satisfaz P, isto é, $V_P = \emptyset$

Lógica de predicados

- Quantificadores

Exemplo, $U = \{ 2, 4, 6, 8 \}$.

- Se fizermos Px representar "x é par", temos o primeiro caso: todos os elementos satisfazem P, e $V_P = U$.

- Para Px representando "x é múltiplo de 3", temos apenas um elemento que satisfaz P, e $V_P = \{ 6 \}$.

- Finalmente, se Px representar "x é maior que 10", nenhum elemento de U satisfaz P, e, portanto, $V_P = \varnothing$.

Lógica de predicados

- Quantificador universal

No primeiro caso, dizemos que “para todo x em U, Px é verdadeiro”, ou, simbolicamente,

$$(\forall x \in U)\ (Px)$$

Às vezes, simplifica–se a notação, omitindo–se o domínio e/ou os parênteses:

$$(\forall x\ )\ (Px) \qquad \text{ou} \qquad \forall x\ Px$$

Px é um aberto, mas $\forall x$ Px é um enunciado, e pode ser verdadeiro ou falso.

Lógica de predicados

- Quantificador universal

A expressão $\forall x\ Px$ afirma que Px é verdadeiro para cada $x \in U$; então, se $U = \{u1, u2, ..., un\}$, temos que a conjunção $Pu1 \wedge Pu2 \wedge ... \wedge Pun$ é verdadeira.

Lógica de predicados

- Quantificador existencial

Consideremos agora um aberto Px sobre U, para o qual $V_P \neq \varnothing$. Então existe pelo menos um x para o qual Px é verdadeiro. Representamos tal fato por "existe um x em U tal que Px é verdadeiro", ou, simbolicamente,

$$(\exists x \in U)\ (Px)$$

Simplificando a notação, omitindo o domínio e/ou os parênteses, temos

$$(\exists x\ )\ (Px\ ) \qquad \text{ou} \qquad \exists x\ Px$$

Lógica de predicados

- Quantificador existencial

$\exists x\ Px$ é um enunciado, e pode assumir os valores verdadeiro ou falso.

A expressão $\exists x\ Px$ afirma que Px é verdadeiro para pelo menos um $x \in U$; então, se $U = \{u1, u2, ..., un\}$, temos que a disjunção $Pu1 \lor Pu2 \lor ... \lor Pun$ é verdadeira.

Lógica de predicados

- Negação de expressões quantificadas

Se representarmos “x é um aluno” por Ax, temos que “todos são alunos” pode ser escrito

$$\forall x\ Ax$$

A negação de “todos são alunos” é “nem todos são alunos”

$$\neg \forall x\ Ax$$

É o mesmo que dizer que “existe alguém que não é aluno”

$$\exists x\ \neg Ax$$

Lógica de predicados

- Negação de expressões quantificadas

Esses fatos são decorrência imediata das leis de De Morgan:

$$\neg \forall x\, Ax \Leftrightarrow \neg (Au1 \wedge Au2 \wedge \ldots \wedge Aun) \Leftrightarrow$$
$$\neg Au1 \vee \neg Au2 \vee \ldots \vee \neg Aun \Leftrightarrow \exists x \neg Ax$$

$$\neg \exists x\, Ax \Leftrightarrow \neg (Au1 \vee Au2 \vee \ldots \vee Aun) \Leftrightarrow$$
$$\neg Au1 \wedge \neg Au2 \wedge \ldots \wedge \neg Aun \Leftrightarrow \forall x \neg Ax$$

Lógica de predicados

- Negação de expressões quantificadas

Por exemplo, se não existem marcianos, então a expressão "Todos os marcianos têm olhos verdes"

é verdadeira, pois, para que fosse falsa, seria necessário exibir um marciano que não tivesse olhos verdes.

Lógica de predicados

Considere os conjuntos

U_x = { Carlos, Pedro, Mário } e U_y = { Claudia, Lilian }

e o predicado Ixy = “x é irmão de y”. Suponha que Carlos e Pedro sejam irmãos de Claudia, e que Mário seja irmão de Lilian. Examine a validade:

a) $(\forall x \in U_x)\ (\exists y \in U_y)\ (Ixy)$ V

b) $(\exists x \in U_x)\ (\forall y \in U_y)\ (Ixy)$ F

c) $(\forall x \in U_x)\ (\forall y \in U_y)\ (Ixy)$ F

d) $(\exists x \in U_x)\ (\exists y \in U_y)\ (Ixy)$ V

Lógica de predicados

Considere os conjuntos

U_x = { Carlos, Pedro, Mário } e U_y = { Claudia, Lilian }

e o predicado Ixy = "x é irmão de y". Suponha que Carlos e Pedro sejam irmãos de Claudia, e que Mário seja irmão de Lilian. Examine a validade:

e) $(\exists y \in U_y)\ (\forall x \in U_x)\ (Ixy)$ F

f) $(\forall y \in U_y)\ (\exists x \in U_x)\ (Ixy)$ V

g) $(\forall y \in U_y)\ (\forall x \in U_x)\ (Ixy)$ F

h) $(\exists y \in U_y)\ (\exists x \in U_x)\ (Ixy)$ V

Lógica de predicados

- Negação de expressões quantificadas

$\neg \forall x \, \forall y \, Pxy \Leftrightarrow \exists x \, \neg \forall y \, Pxy \Leftrightarrow \exists x \, \exists y \, \neg Pxy$

$\neg \exists x \, \exists y \, Pxy \Leftrightarrow \forall x \, \neg \exists y \, Pxy \Leftrightarrow \forall x \, \forall y \, \neg Pxy$

$\neg \forall x \, \exists y \, Pxy \Leftrightarrow \exists x \, \neg \exists y \, Pxy \Leftrightarrow \exists x \, \forall y \, \neg Pxy$

$\neg \exists x \, \forall y \, Pxy \Leftrightarrow \forall x \, \neg \forall y \, Pxy \Leftrightarrow \forall x \, \exists y \, \neg Pxy$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Existem sábios (Sx – x é sábio)

existe um x tal que x é sábio

$\exists x\ Sx$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Todos são sábios (Sx – x é sábio)

para todo x, x é sábio

$\forall x\ Sx$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Não existem marcianos (Mx – x é marciano)

não existe x tal que x seja um marciano ou para todo x, x não é um marciano

$\neg \exists x\, Mx$ $\forall x\, (\neg Mx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Nem todos são sábios (Sx – x é sábio)

para nem todo x, x é sábio ou existe um x tal que x não é sábio

$\neg \forall x\, Sx$ $\exists x\, (\neg Sx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Algumas senhoras estão presentes (Sx – x é uma senhora; Px – x está presente)

existe um x tal que x é uma senhora e x está presente

$\exists x\ (Sx \wedge Px)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Os morcegos são mamíferos (Cx – x é morcego; Mx – x é um mamífero)

para todo x, se x é um morcego, x é um mamífero

$\forall x\ (Cx \rightarrow Mx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Existe um mamífero que voa (Mx – x é mamífero; Vx – x voa)

existe um x tal que x é mamífero e x voa

$\exists x\ (Mx \wedge Vx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Todo livro deve ser lido (Lx – x é um livro; Dx – x deve ser lido)

para todo x, se x é um livro, x deve ser lido

$\forall x\ (Lx \rightarrow Dx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Os cavalheiros não são sempre ricos (Cx – x é um cavalheiro; Rx – x é rico)

para nem todo x, se x é um cavalheiro então x é rico $\neg \forall x\,(Cx \rightarrow Rx)$

existe um x tal que x é um cavalheiro e x não é rico $\exists x\,(Cx \wedge \neg Rx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

Somente os médicos podem cobrar por tratamento clínico (Mx – x é médico; Cx – x pode cobrar por tratamento clínico)

para todo x, se x pode cobrar por tratamento clínico, então x é médico

$\forall x\,(Cx \rightarrow Mx)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

B. Expressões com mais de um quantificador e predicados monádicos

Se existem marcianos, existem não terráqueos (Mx – x é marciano; Tx – x é terráqueo)

se existe x tal que x seja marciano , então existe y tal que y não é terráqueo

$\exists x\ Mx \rightarrow \exists y\ (\neg Ty)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

B. Expressões com mais de um quantificador e predicados monádicos

Alguns são espertos, outros não (Ex – x é esperto)

existe x tal que x é esperto, e existe y tal que y não é esperto

$\exists x\, Ex \wedge \exists y\, (\neg Ey)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

B. Expressões com mais de um quantificador e predicados monádicos

Existem políticos honestos e desonestos (Px – x é político; Hx – x é honesto)

existe x tal que x é político e x é honesto, e existe y tal que y é político e y não é honesto

$\exists x\ (Px \wedge Hx) \wedge \exists y\ (Py \wedge \neg\ Hy)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

C. Expressões com relações

João é casado com alguém (Cxy – x é casado com y)

existe x tal que João é casado com x

$\exists x\ C\ (\text{João}, x)$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

C. Expressões com relações

Todos têm pai (Fxy – x é pai de y)

para todo x existe y tal que y é pai de x

$\forall x \, \exists y \, Fyx$

Lógica de predicados

- Forma lógica e forma simbólica

C. Expressões com relações

Todas as pessoas têm pai (Px – x é uma pessoa; Fxy – x é pai de y)

para todo y, se y é uma pessoa, existe x tal que x é pai de y

$\forall y\ (Py \rightarrow \exists x\ Fxy)$

Lógica de predicados

- Silogismos categóricos

 - Classe de argumentos no Cálculo de Predicados, na qual as provas de validade e invalidade são simples.

- Chamamos de proposições categóricas afirmações sobre conjuntos (ou classes) de elementos, afirmando ou negando que uma classe esteja contida na outra, no todo ou em parte.

Lógica de predicados

- Proposições categóricas típicas

Há quatro formas típicas de proposições categóricas, exemplificadas abaixo:

Todo gato é um felino

Nenhum político é desonesto

Alguns felinos são ferozes

Alguns políticos não são desonestos

Essas formas recebem os nomes, em Lógica, de A, E, I, e O, respectivamente.

Lógica de predicados

- Proposições categóricas típicas

A primeira proposição categórica típica é chamada Proposição Universal Afirmativa. Tem a forma geral

Todo S é P

e indica que todos os elementos da classe S estão contidos na classe P. Sua forma simbólica é

$$\forall x\,(Sx \rightarrow Px)$$

Lógica de predicados

- Proposições categóricas típicas

A segunda é chamada Proposição Universal Negativa; tem a forma geral

Nenhum S é P

e indica que as classes S e P não possuem elementos comuns. Sua forma simbólica é

$$\forall x\ (Sx \rightarrow \neg Px)$$

Lógica de predicados

- Proposições categóricas típicas

A terceira proposição é chamada Proposição Particular Afirmativa; tem a forma geral

Algum S é P

e indica que alguns membros da classe S pertencem também à classe P. Observe que a proposição nada informa sobre a totalidade dos membros de S: tanto pode ocorrer que todos os elementos de S pertençam a P, como pode ocorrer que algum elemento de S não está em P. Sua forma simbólica é

$$\exists x\,(Sx \land Px)$$

Lógica de predicados

- Proposições categóricas típicas

A quarta é chamada Proposição Particular Negativa e tem a forma geral

Algum S não é P

e indica que existem elementos de S que não estão contidos em P. Da mesma forma que a anterior, esta proposição nada fala sobre a totalidade dos elementos de S. Tanto pode ocorrer que todos os elementos de S não estejam em P, como ocorrer que alguns estejam em P. Sua forma simbólica é

$$\exists x\, (Sx \land \neg Px)$$

Lógica de predicados

- Silogismos categóricos

 - Um silogismo é um argumento em que uma conclusão é inferida de suas premissas. Um silogismo categórico é um argumento que consiste em três proposições categóricas, que contêm exatamente três predicados, cada um dos quais ocorre exatamente em duas das proposições constituintes.

 - Um silogismo categórico é da forma típica quando suas premissas e a conclusão são todas proposições categóricas de forma típica.

Lógica de predicados

- Exemplos de Silogismos categóricos

Todos os artistas são vaidosos
Alguns artistas são pobres
Logo, todos os pobres são vaidosos

Todos os gregos são humanos
Todos os atenienses são gregos
Logo, todos os atenienses são humanos

Lógica de predicados

- Exemplos de Silogismos categóricos

Todos os coelhos são velozes
Alguns cavalos não são velozes
Logo, alguns cavalos não são coelhos

Alguns políticos são honestos
Nenhum estudante é político
Logo, nenhum estudante é honesto

Lógica de predicados

- Proposições categóricas de forma típica

Nem todas a proposições são de forma típica → muitas vezes é possível reescrever a proposição!

Não há como saber se uma proposição pode ou não ser escrita na forma típica, mas podemos tentar reduzir as proposições à forma típica em algumas situações:

Proposições singulares → forma Universal

"Sócrates é humano" → "Todas as coisas que são Sócrates, são humanas"

Lógica de predicados

- Proposições categóricas de forma típica

"Rex é feroz" → "Todas as coisas que são Rex, são ferozes"

As proposições que envolvem os termos "somente", "apenas", ou "ninguém senão" costumam ser designadas como "exclusivas" porque o predicado se aplica exclusivamente ao sujeito nomeado.

"Somente os cidadãos podem votar" → "Todos os que podem votar são cidadãos"

"Ninguém, senão os corajosos, merece medalha" → "Todos os que merecem medalha são os corajosos"

Lógica de predicados

- Proposições categóricas de forma típica

Algumas proposições não contem nenhuma palavra que indique o quantificador; nesse caso, devemos examinar o contexto, embora, normalmente, a quantificação seja universal.

"os cães são carnívoros" → "todos os cães são carnívoros"

"as crianças estão presentes" → "todas as crianças estão presentes"

Lógica de predicados

- Proposições categóricas de forma típica

Algumas proposições são ditas “exceptivas”, pois explicitam algum tipo de exceção. Quase sempre essas proposições fazem duas assertivas, e não podem ser colocadas na forma típica; essas proposições são indicadas pelos termos “quase todos”, “todos, exceto”

“Quase todos os estudantes estavam no baile” → “Alguns estudantes estavam no baile e alguns estudantes não estavam no baile”

Não pode ser somente “Alguns estudantes não estavam no baile”, porque isto permite Que nenhum estivesse no baile, o que claramente não é o afirmado originalmente.

Lógica de predicados

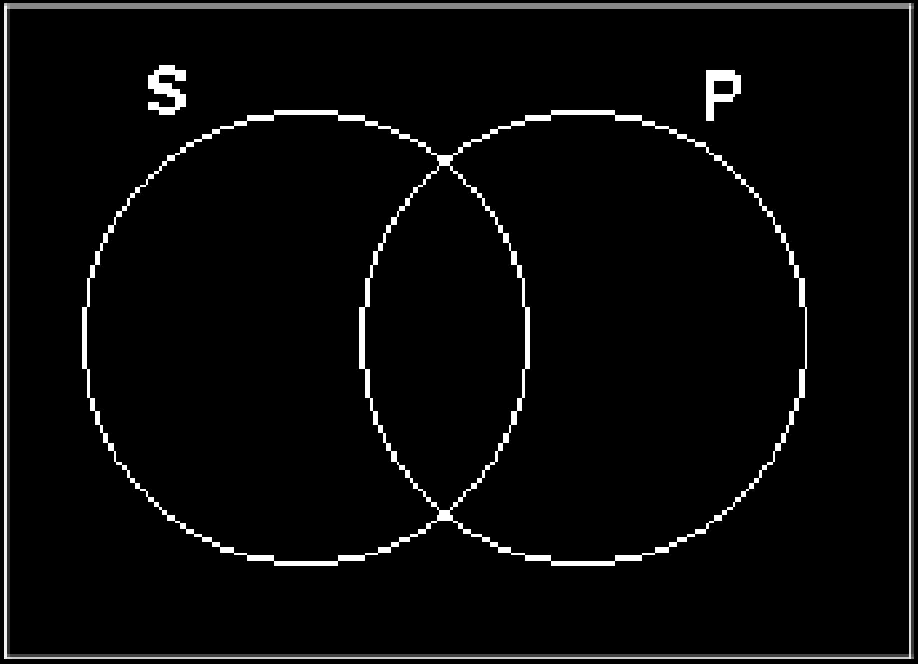
- Proposições categóricas em diagramas de Venn

Para diagramar uma proposição categórica, necessitamos de dois círculos, pois uma proposição categórica faz referência a duas classes.

Para representar uma proposição que referencia dois predicados, chamados S e P, desenhamos dois círculos que se interceptam, chamados S e P.

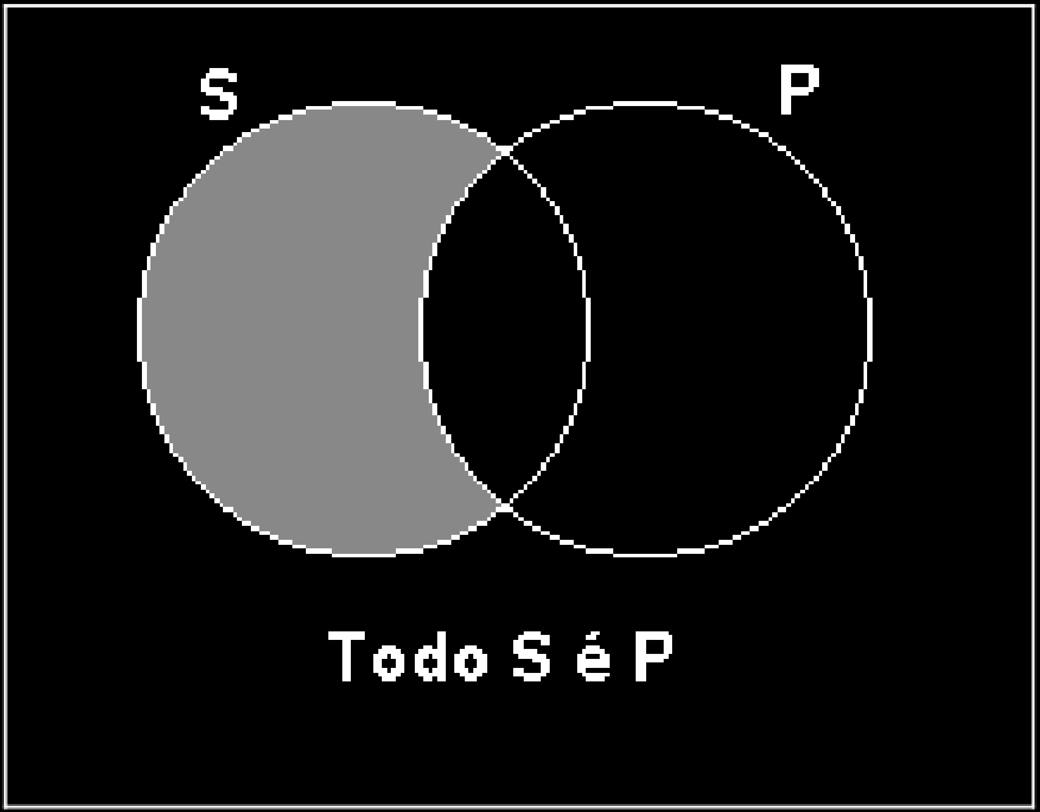
Lógica de predicados

- Proposições categóricas em diagramas de Venn



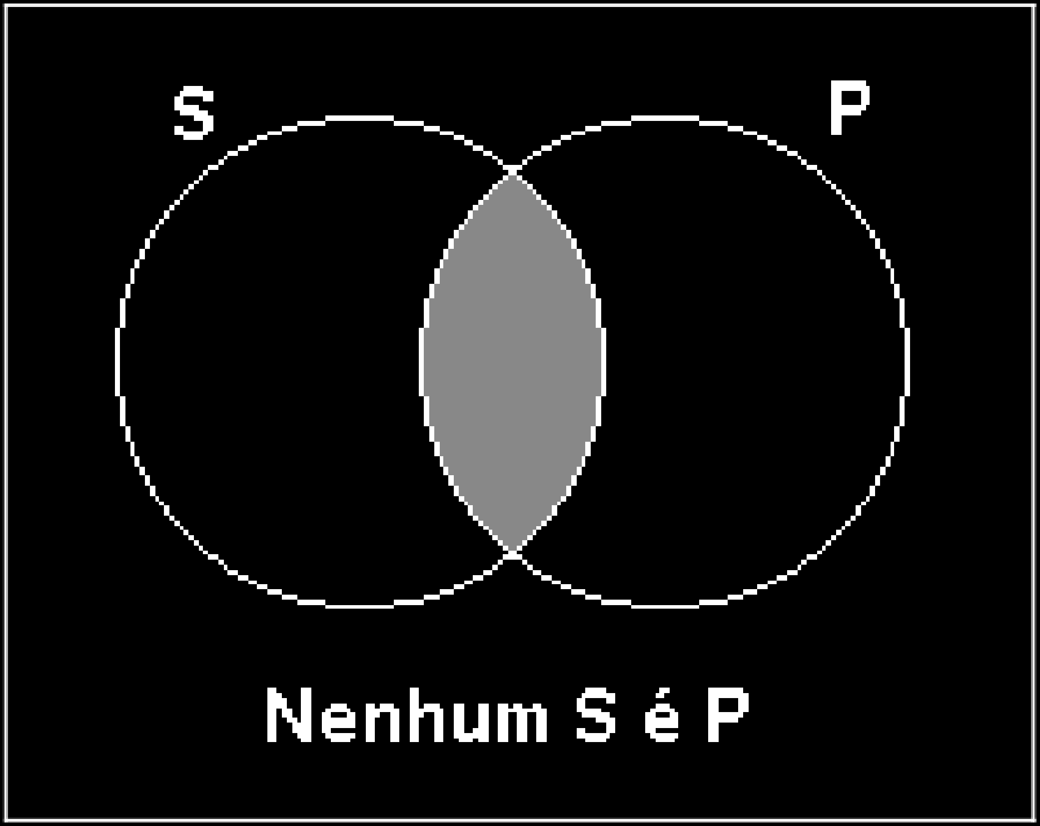
Lógica de predicados

- Proposições categóricas em diagramas de Venn
  - Proposição Universal Afirmativa



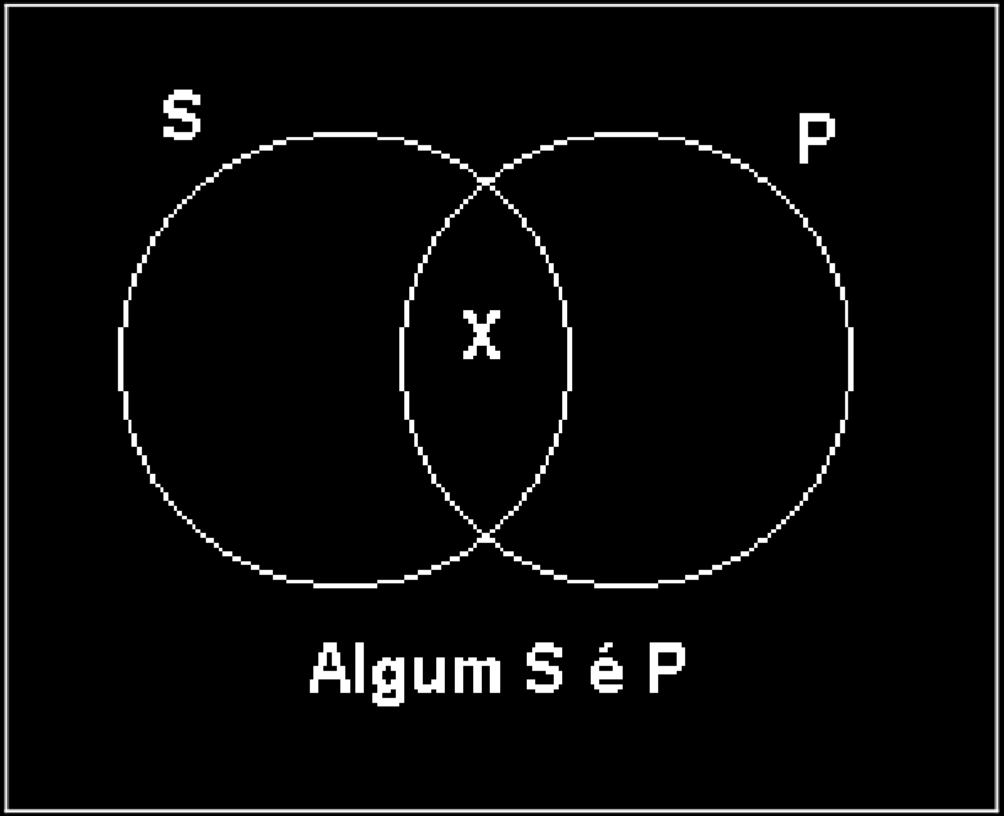
Lógica de predicados

- Proposições categóricas em diagramas de Venn
  - Proposição Universal Negativa



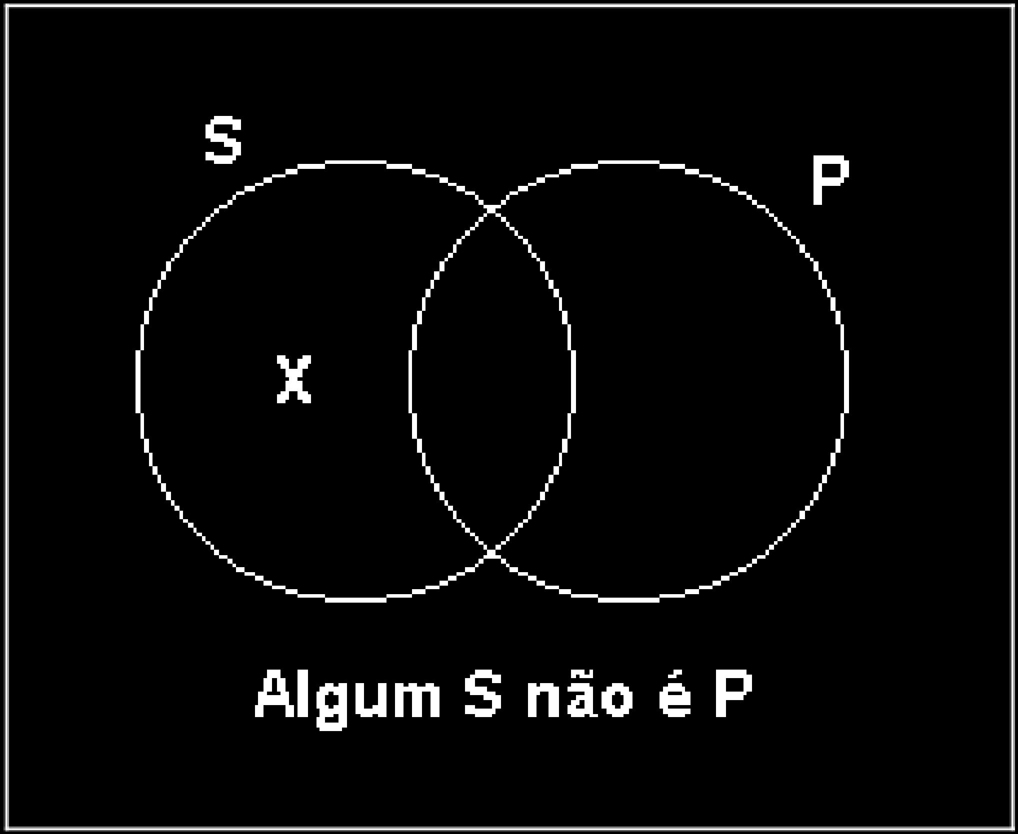
Lógica de predicados

- Proposições categóricas em diagramas de Venn
  - Proposição Particular Afirmativa



Lógica de predicados

- Proposições categóricas em diagramas de Venn
  - Proposição Particular Negativa



Lógica de predicados

- Silogismos categóricos em diagramas de Venn

Para provar a validade ou a invalidade de um silogismo categórico, utilizando os diagramas de Venn, devemos representar ambas as premissas em um único diagrama; nesse caso são requeridos três círculos que se interceptam, pois as duas premissas do silogismo incluem três predicados, ou três classes. O silogismo será válido se, e unicamente se, as duas premissas afirmarem em conjunto, o que é dito pela conclusão.

Lógica de predicados

- Silogismos categóricos em diagramas de Venn

Para diversão:

Tigres são animais ferozes

Alguns tigres vivem na Índia

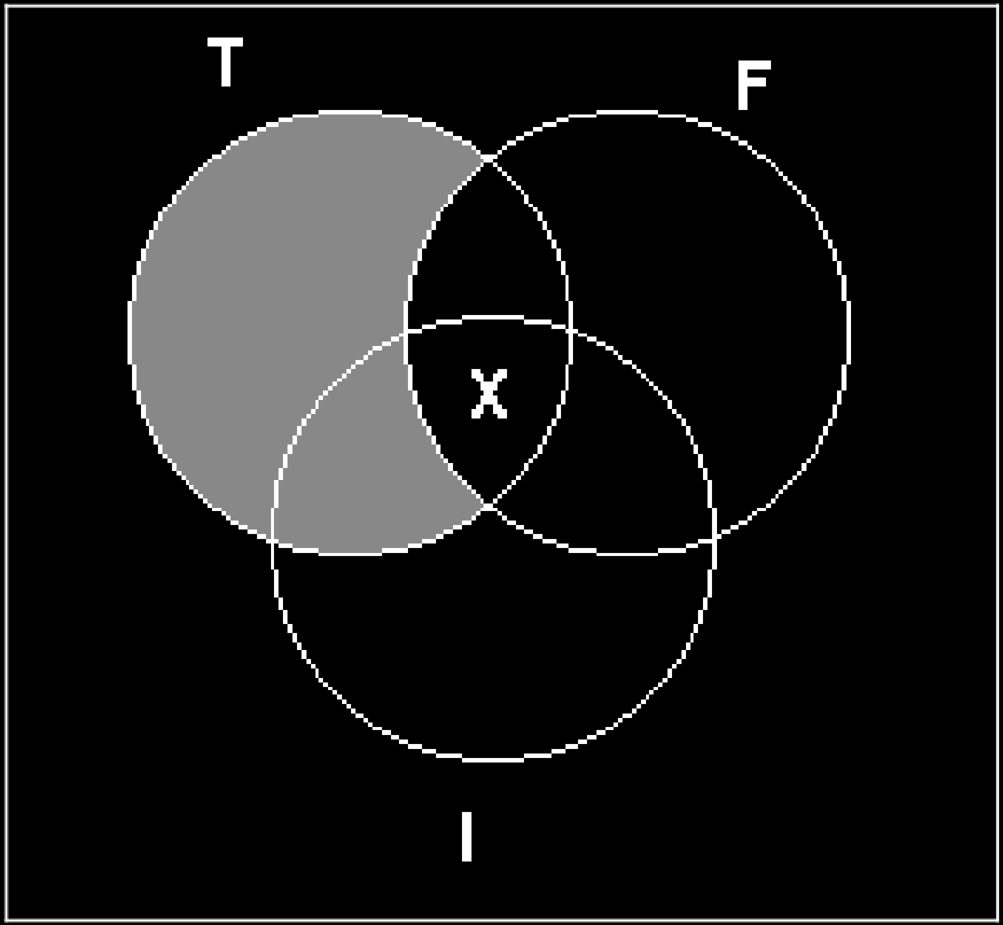
Logo, alguns animais ferozes vivem na Índia

É válido?

Lógica de predicados

- Silogismos categóricos em diagramas de Venn

Resposta:



Lógica de predicados

- Silogismos categóricos em diagramas de Venn

Para diversão:

Todos os humanos são mortais

Sócrates é humano

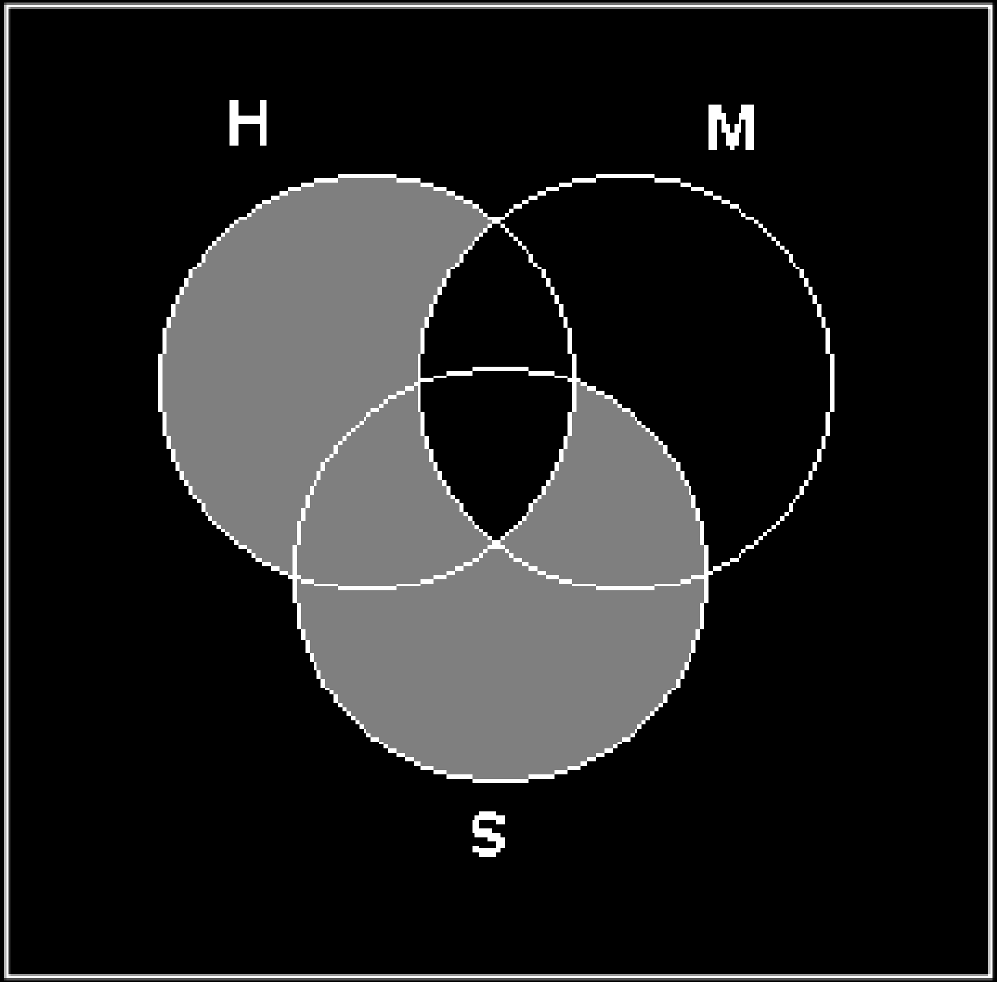
Logo, Sócrates é mortal

É válido?

Lógica de predicados

- Silogismos categóricos em diagramas de Venn

Resposta:



Lógica de predicados

- Silogismos categóricos em diagramas de Venn

Para diversão:

Todos os cães são ferozes

Alguns gatos são ferozes

Logo, alguns gatos são cães

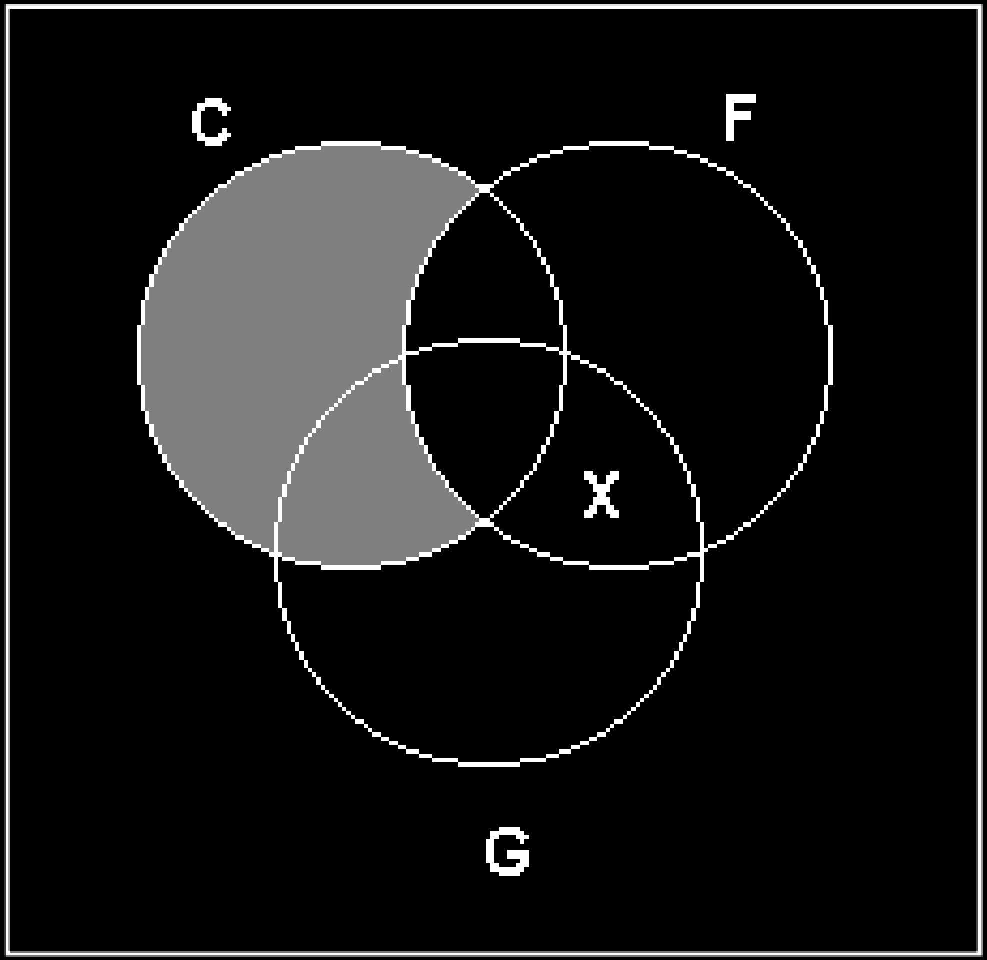
É válido?

Lógica de predicados

- Silogismos categóricos em diagramas de Venn

Resposta:

Inválido.



Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
    - Eliminação e Inserção de Quantificadores

- Não dá pra usar tabela verdade;

- A. Church mostrou, em 1936, que quando são envolvidas nas premissas expressões como “Pxy”, “Qxyz”, etc., não existe nenhum processo sistemático para estabelecer a validade dos argumentos;

- A presença de quantificadores, variáveis e predicados nos enunciados complica o processo de dedução;

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados

    - Eliminação e Inserção de Quantificadores

- Uma das formas de se contornar esse problema é definir regras adicionais de inferência, que permitam inserir e/ou eliminar os quantificadores das premissas.

- Método geral:

1. Elimine os quantificadores das premissas.
2. Deduza a conclusão com as eqüivalências e inferências do Cálculo Proposicional.
3. Insira (se for o caso) os quantificadores na conclusão.

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
    - Instanciação Universal (IU)

- “Se todos os objetos de um dado universo possuem uma dada propriedade, então um objeto particular desse universo também possui essa propriedade.”

Se $\forall x\ Fx$ então Fx

Se $\forall x\ Fx$ então Fy

Se $\forall x\ Fx$ então Fa

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Instanciação Universal (IU)

Se $\forall y\,(Fy \lor Gb)$	então $Fx \lor Gb$
Se $\forall y\,(Fy \lor Gb)$	então $Fa \lor Gb$
Se $\forall z\,(Fz \lor Gb)$	então $Fb \lor Gb$
Se $\forall x\, Gx$	então Gy
Se $\forall x\,(Gx \to Hx)$	então $Gz \to Hz$
Se $\forall x\,(Fx \land Gx)$	então $Fy \land Gy$
Se $\forall x\,(Fx \land Gx)$	então $Fx \land Gx$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Instanciação Universal (IU)

Todos os homens são mortais

Sócrates é um homem

Logo, Sócrates é mortal

Representando simbolicamente:

$\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$

H(Sócrates)

|-- M(Sócrates)

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Instanciação Universal (IU)

Com a dedução:

1	Premissa 1	$\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$
2	Premissa 2	H (Sócrates)
3	1, IU	H (Sócrates) $\rightarrow$ M (Sócrates)
4	2, 3, MP	M (Sócrates)

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
    - Generalização Universal (GU)

- "Se um objeto, arbitrariamente escolhido dentre um universo, tiver uma certa propriedade, todos os objetos desse universo terão essa propriedade."

Se Fx então $\forall x\ Fx$

Se Fx então $\forall y\ Fy$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Generalização Universal (GU)

Todos os humanos são mortais

Todos os gregos são humanos

Logo, todos os gregos são mortais

Em termos simbólicos:

$\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$

$\forall x\ (Gx \rightarrow Hx)$

$\vdash \forall x\ (Gx \rightarrow Mx)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Generalização Universal (GU)

Com a dedução:

1	Premissa 1	$\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$
2	Premissa 2	$\forall x\ (Gx \rightarrow Hx)$
3	1, IU	$Hk \rightarrow Mk$
4	2, IU	$Gk \rightarrow Hk$
5	2, 3, SH	$Gk \rightarrow Mk$
6	5, GU	$\forall x\ (Gx \rightarrow Mx)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Generalização Existencial (GE)

- "O que é verdadeiro para um dado objeto, é verdadeiro para algum objeto."

Se Fx	então $\exists y\ Fy$
Se Fa	então $\exists x\ Fx$
Se Fa	então $\exists y\ Fy$
Se $Fa \lor Gb$	então $\exists x\ (Fx \lor Gb)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
    - Generalização Existencial (GE)

Todos os tigres são animais ferozes

Sheeta é um tigre

Logo, existem animais ferozes

Na forma simbólica

$\forall x\ (Tx \rightarrow Fx)$

$T\ (Sheeta)$

$\vdash \exists x\ Fx$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Generalização Existencial (GE)

Com a dedução:

1	Premissa 1	$\forall x\ (Tx \rightarrow Fx)$
2	Premissa 2	$T\ (Sheeta)$
3	1, IU	$T\ (Sheeta) \rightarrow F\ (Sheeta)$
4	2, 3, MP	$F\ (Sheeta)$
5	4, GE	$\exists x\ Fx$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados

    - Instanciação Existencial (IE)

- "O que é verdadeiro para algum objeto, é verdadeiro para um dado objeto, desde que esse objeto não tenha sido utilizado anteriormente na dedução."

Se $\exists x\, Fx$ então Fx

Se $\exists x\, Fx$ então Fy

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Instanciação Existencial (IE)

Todos os tigres são ferozes

Alguns animais são tigres

Logo, alguns animais são ferozes

Na forma simbólica:

$\forall x\ (Tx \rightarrow Fx)$

$\exists x\ (Ax \wedge Tx)$

$\vdash \exists x\ (Ax \wedge Fx)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Instanciação Existencial (IE)

1	Premissa 1	$\forall x\,(Tx \rightarrow Fx)$
2	Premissa 2	$\exists x\,(Ax \land Tx)$
3	2, IE	$Ak \land Tk$
4	1, IU	$Tk \rightarrow Fk$
5	3, SIMP	Ak
6	3, SIMP	Tk
7	4, 6, MP	Fk
8	5, 7, CONJ	$Ak \land Fk$
9	8, GE	$\exists x\,(Ax \land Fx)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Cuidados!

- "Ao aplicar a Instanciação Existencial, certifique-se que o termo a ser utilizado não tenha sido utilizado anteriormente na dedução."

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Instanciação Existencial (IE) - Cuidados!

Alguns cães são ferozes

Alguns gatos são ferozes

Logo, alguns cães são gatos

Com a seguinte representação simbólica:

$\exists x\ (Cx \land Fx)$

$\exists x\ (Gx \land Fx)$

$\vdash \exists x\ (Cx \land Gx)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados
  - Instanciação Existencial (IE) - Cuidados!

1	Premissa 1	$\exists x\,(Cx \land Fx)$
2	Premissa 2	$\exists x\,(Gx \land Fx)$
3	1, IE	$Ck \land Fk$
4	2, IE	$Gk \land Fk$ (errado!)
5	3, SIMP	Ck
6	4, SIMP	Gk
7	3, 4, CONJ	$Ck \land Gk$
8	7, GE	$\exists x\,(Cx \land Gx)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados

 - Exemplos

Nenhum atleta é apegado aos livros. Carlos é apegado aos livros. Portanto, Carlos não é um atleta.

$\forall x\ (Ax \rightarrow \neg\ Lx)$

$L\ (Carlos)$

$\vdash \neg\ A\ (Carlos)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados

  - Exemplos

$\forall x\ (Ax \rightarrow \neg\ Lx)$

$L\ (Carlos)$

$\vdash \neg\ A\ (Carlos)$

1	Premissa 1	$\forall x\ (Ax \rightarrow \neg\ Lx)$
2	Premissa 2	$L\ (Carlos)$
3	1, IU	$A\ (Carlos) \rightarrow \neg\ L(Carlos)$
4	2, 3, MT	$\neg\ A\ (Carlos)$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados

 - Exemplos

Ácidos e bases são químicos. O vinagre é um ácido. Logo, o vinagre é um químico.

$\forall x\ (Ax \lor Bx \rightarrow Qx)$

A (vinagre)

|-- Q (vinagre)

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados

$\forall x\ (Ax \vee Bx \rightarrow Qx)$

A (vinagre)

|-- Q (vinagre)

1	Premissa 1	$\forall x\ (Ax \vee Bx \rightarrow Qx)$
2	Premissa 2	A (vinagre)
3	1, IU	A (vinagre) $\vee$ B (vinagre) $\rightarrow$ Q (vinagre)
4	2, AD	A (vinagre) $\vee$ B (vinagre)
5	3, 4, MP	Q (vinagre)

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados

 - Exemplos

Todos os cidadãos que não são traidores estão presentes. Todos os oficiais são cidadãos. Alguns oficiais não estão presentes. Logo, há traidores.

$\forall x\ (Cx \land \neg\ Tx \rightarrow Px)$

$\forall x\ (Ox \rightarrow Cx)$

$\exists x\ (Ox \land \neg\ Px)$

$\vdash \exists x\ Tx$

Lógica de predicados

- Dedução no cálculo de predicados

 - Exemplos

Todos os cidadãos que não são traidores estão presentes. Todos os oficiais são cidadãos. Alguns oficiais não estão presentes. Logo, há traidores.

$\forall x\,(Cx \wedge \neg Tx \rightarrow Px)$

$\forall x\,(Ox \rightarrow Cx)$

$\exists x\,(Ox \wedge \neg Px)$

$\vdash \exists x\,Tx$

1	Premissa 1	$\forall x\,(Cx \wedge \neg Tx \rightarrow Px)$
2	Premissa 2	$\forall x\,(Ox \rightarrow Cx)$
3	Premissa 3	$\exists x\,(Ox \wedge \neg Px)$
4	3, IE	$Ok \wedge \neg Pk$
5	4, SIMP	Ok
6	4, SIMP	$\neg Pk$
7	2, IU	$Ok \rightarrow Ck$
8	5,7, MP	Ck
9	6, 8, CONJ	$Ck \wedge \neg Pk$
10	1, IU	$Ck \wedge \neg Tk \rightarrow Pk$
11	10, COND	$\neg (Ck \wedge \neg Tk) \vee Pk$
12	11, DM	$\neg Ck \vee Tk \vee Pk$
13	12, COM	$\neg Ck \vee Pk \vee Tk$
14	13, DM	$\neg (Ck \wedge \neg Pk) \vee Tk$
15	14, COND	$Ck \wedge \neg Pk \rightarrow Tk$
16	9, 15, MP	Tk
17	16, GE	$\exists x\, Tx$