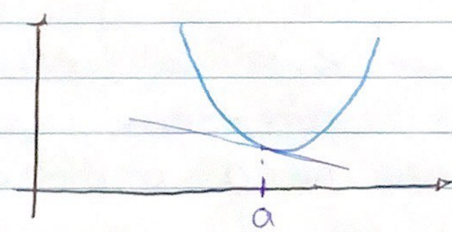
NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740

CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

DEFINIÇÃO: SUPONHAMOS QUE A FUNÇÃO SEJA DIFEREN-CIÁVEL EM UM PONTO a, E $T(a)$ É A RETA TANGENTE DO GRÁFICO DE $y = f(x)$ NO PONTO $(a, f(a))$. DIZEMOS QUE A FUNÇÃO f (OU SEU GRÁFICO):

① CONCAVA PARA CIMA EM a, SE EM ALGUM INTERVALO ABERTO QUE CONTEM a, O GRÁFICO DE f ESTIVER ACIMA DE $T(a)$



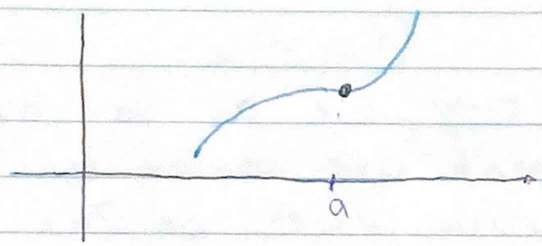
② CONCAVA PARA BAIXO EM a, SE EM ALGUM INTERVALO ABERTO CONTENDO a, O GRÁFICO DE DE f ESTIVER ABAIXO DE $T(a)$

TEOREMA: (TESTE DA CONCAVIDADE)
SEJA f DUAS VEZES DIFERENCIÁVEL EM UM INTER-VALO ABERTO I

① SE $f''(x) > 0$ EM I ENTÃO f É CONCAVA PARA CIMA

② SE $f''(x) < 0$ EM I, ENTÃO f É CÔNCAVA PARA BAIXO

DEFINIÇÃO: SE f É CONTÍNUA EM UM PONTO $x = a$, O PONTO a É CHAMADO DE PONTO DE INFLEXÃO SE f FOR CÔNCAVA PARA CIMA EM UM LADO DE a E CÔNCAVA PARA BAIXO EM OUTRO LADO DE a.



OBS: SE a É UM PONTO DE INFLEXÃO E f É DUAS VEZES DIFERENCIÁVEL ENTÃO $f''(x) > 0$ EM UM LADO DE a E $f''(x) < 0$ EM OUTRO LADO

OBS: - NÃO É OBRIGATÓRIO SE a É UM PONTO DE INFLEXÃO $f''(a)$ ESTÁ DEFINIDO

- SE $f''(a)$ ESTIVER DEFINIDO, $f''(a) = 0$

EXEMPLO: TRAÇAR O GRÁFICO DE $f(x) = 4x^{1/3} - x^{4/3}$ INDICANDO OS EXTREMOS LOCAIS, PONTOS DE INFLEXÃO E CONCAVIDADE DA FUNÇÃO

1º PASSO: ACHAR PONTOS CRÍTICOS

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{3} x^{1/3 - 1} + \frac{4}{3} x^{4/3 - 1}$$

$$= \frac{4}{3} x^{-2/3} + \frac{4}{3} x^{1/3}$$

$$= \frac{4}{3} \left(x^{-2/3} + x^{1/3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{x^{1/3}}{1} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \left(\frac{1 + x}{x^{2/3}} \right)$$

OS PONTOS CRÍTICOS SÃO OS PONTOS ONDE $f'(x) = 0$ OU $f'(x)$ NÃO EXISTE

TEMOS $x = -1$ E $x = 0$ SÃO PONTOS CRÍTICOS DE f.

2º PASSO: ANALISAR SE A FUNÇÃO É CRESCENTE OU DECRESCENTE NOS INTERVALOS $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ E $(0, +\infty)$

INTERVALOS	$1+x$	$x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}$	$f'(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{(1+x)}{x^{2/3}}$	f
$(-\infty,-1)$	$-$	$+$	$-$	DECRESCENTE
$(-1,0)$	$+$	$+$	$+$	CRESCENTE
$(0,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	CRESCENTE

$$f'(x)=\frac{4}{3}\,\frac{(1+x)}{x^{2/3}}$$

$$f''(x)=\frac{4}{3}\left[\frac{(1+x)'\cdot x^{2/3}-(1+x)\left(x^{2/3}\right)'}{\left(x^{2/3}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{x^{2/3}-(1+x)\left(\frac{2}{3}\right)\left(x^{-1/3}\right)}{x^{4/3}}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{\frac{1}{3}x^{2/3}-\frac{2}{3}x^{-1/3}}{x^{4/3}}\right]\ \ldots$$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$$

OS PONTOS DE INFLEXÃO SÃO ONDE $f''(x)=0$ OU $f''(x)=\nexists$ $\therefore$ $x=2$ E $x=0$ SÃO PONTOS DE INFLEXÃO

OS INTERVALOS PARA ANALISAR A CONCAVIDADE SÃO $(-\infty,0)$, $(0,2)$ E $(2,+\infty)$

INTERVALOS	$x-2$	$\sqrt[3]{x^5}$	$f''(x)=\frac{4}{9}\left(\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$	CONC. DE f
$(-\infty,0)$	$-$	$-$	$+$	CIMA
$(0,2)$	$-$	$+$	$-$	BAIXO
$(2,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	CIMA

REVISANDO:

→ -1 e 0 são pontos críticos

→ $(-\infty,-1)$ a função é decrescente, $(-1,+\infty)$ a função é crescente. Podemos concluir que -1 é um mínimo local

→ 2 e 0 são pontos de inflexão

→ $(-\infty,0)$ conc. p/ cima, $(0,2)$ é conc para baixo, $(2,+\infty)$ é conc. p/ cima.

3º passo: calcular a função nos pontos críticos, nos pontos de inflexão, achar as raízes da função, para depois esboçar o gráfico

$$* f(x) = 4x^{1/3} + x^{4/3}$$
$$= x^{1/3}(4+x)$$

* as raízes de f são: $x=0$ e $x=-4$

$$f(0)=0, \quad f(-4)=0$$

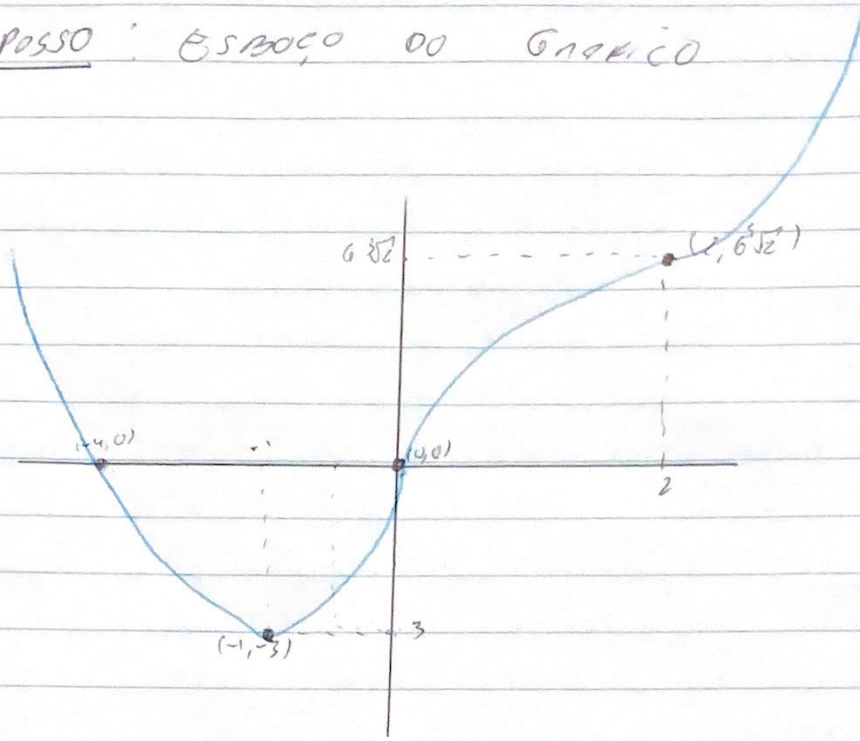
$$* f(-1) = \sqrt[3]{-1}\,(4-1) = -3$$
$$f(2) = \sqrt[3]{2}\,(4+2) = 6\sqrt[3]{2}$$

4º passo: calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x}\,(4+x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x}\,(4+x) = +\infty$$

5º PASSO: ESBOÇO DO GRÁFICO



-1 é um mínimo global //