NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740

INTEGRAL POR SUBSTITUIÇÃO

EXEMPLO: $\int 8(8x+5)^{10}\,dx$

$u = 8x+5$
$du = 8\,dx$

$$\int 8(8x+5)^{10}\,dx = \int \underbrace{(8x+5)}_{u}{}^{10}\,\underbrace{(8dx)}_{du}$$

$$= \int u^{10}\cdot du = \frac{u^{10+1}}{10+1} + C$$

$$= \frac{u^{11}}{11} + C = \frac{(8x+5)^{11}}{11} + C$$

METODO

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

$f(x) = x^{10}$ ∴ $g(x) = 8x+5$ ∴ $g'(x) = 8dx$

1º PASSO: $u = g(x)$, ONDE $g(x)$ É A FUNÇÃO QUE ESTÁ "DENTRO" DA COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

2º PASSO: CALCULE $du = g'(x)dx$

3º PASSO: SUBSTITUA $u = g(x)$ E $du = g'(x)dx$ CONVERTENDO A INTEGRAL NO VARIÁVEL u

4º PASSO: CALCULE A INTEGRAL NA VARIÁVEL u

5º PASSO: SUBSTITUA u POR $g(x)$ PARA OBTER A SOLUÇÃO FINAL DA INTEGRAL NA VARIÁVEL x.

EXEMPLO: $\int e^{ax+b}\,dx \quad a \neq 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u = ax+b \\ du = a\,dx \therefore dx = du/a \end{cases}$$

$$\int e^{u} \cdot \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int e^{u}\,du = \frac{1}{a}\left(e^{u} + C\right)$$

$$= \frac{e^{u}}{a} + \frac{C}{a} = \frac{e^{ax+b}}{a} + C_1 \quad //$$

EXEMPLO: $\int \frac{(\ln(x))^3}{5x}\,dx = \frac{1}{5} \int (\ln(x))^3 \frac{dx}{x}$

$$\begin{cases} u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{cases}$$

$$\frac{1}{5} \int u^3\,du = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{u^4}{4}\right) + C\right] \qquad C_1 = \frac{C}{5}$$

$$= \frac{u^4}{20} + C_1 = \frac{(\ln(x))^4}{20} + C_1$$

EXEMPLO: $\int e^{2x}(e^{2x}+1)^3 dx$

$$\begin{cases} u = e^{2x}+1 \\ du = 2e^{2x}dx \therefore du/2 = e^{2x}dx \end{cases}$$

$$\int \underbrace{(e^{2x}+1)^3}_{u} \underbrace{(e^{2x}dx)}_{du/2} = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^4}{4} + C\right) = \frac{u^4}{8} + C_1 \qquad C_1 = C/2$$

$$= \frac{(e^{2x}+1)^4}{8} + C_1$$

EXEMPLO: $\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int (2x+1)^{1/2} dx$

$$\begin{cases} u = 2x+1 \\ du = 2dx \therefore du/2 = dx \end{cases}$$

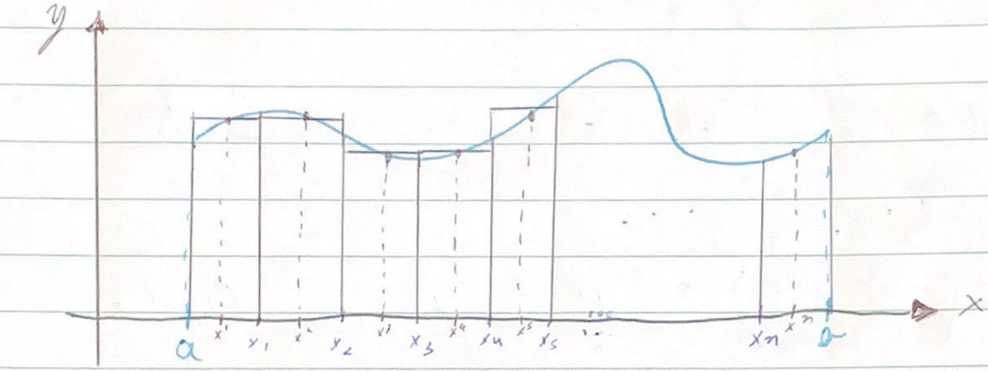
$$\int u^{1/2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{1/2} du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2} + C\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2} + C\right]$$

$$= \frac{u^{3/2}}{3} + C_1 \qquad C_1 = \frac{C}{2}$$

$$= \frac{(2x+1)^{3/2}}{3} + C_2$$

Integral definida



$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

$$A = f(x^1)\Delta x + f(x^2)\Delta x + \ldots + f(x^n)\Delta x$$

Definição: Seja f definida em $[a,b]$.

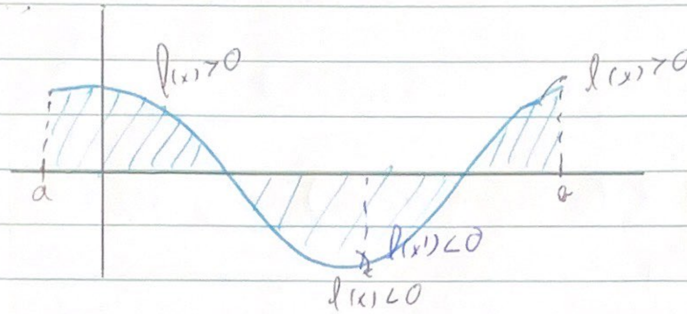
Se

$$\lim_{n \to \infty} \left[f(x^1)\Delta x + \ldots + f(x^n)\Delta x \right]$$

existir para todas as escolhas de pontos representativos $x^1, \ldots, x^n$ nos subintervalos de $[a,b]$ de igual comprimento $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ então esse limite é chamado integral definida de f em a até b e é denotado por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

OBS. a é chamado de extremo inferior
b é chamado de extremo superior



$f(x')\Delta x < 0$

Teorema: Se f é contínua em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$, ou seja, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe

Teorema Fundamental do Cálculo

Seja f contínua em $[a,b]$, então

$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$, onde F é uma antiderivada de f, ou seja $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

PROPRIEDADES

① $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

② $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$

③ $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = (c \cdot F(b) - cF(a)) = c\,(F(b) - F(a))$

$= c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

④ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = [(F(b) \pm G(b)) - (F(a) \pm G(a))]$

$= [(F(b) - F(a)) \pm (G(b) - G(a))] = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

⑤ $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(c)$

$= (F(b) - F(c)) - (F(c) - F(a))$

$= \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

EXEMPLO: $\int_0^2 x\, e^{2x^2}\,dx = \int_0^2 e^{2x^2} \cdot (x \cdot dx)$

$\begin{cases} u = 2x^2 \\ du = 4x\,dx \therefore du/4 = x\,dx \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \therefore u = 2 \cdot 0^2 = 0 \\ x = 2 \therefore u = 2 \cdot 2^2 = 8 \end{cases}$

$\int_0^8 e^u \cdot \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int_0^8 e^u\,du = \frac{1}{4} e^u \Big|_0^8$

$= \frac{1}{4}(e^8 - e^0) = \frac{e^8 - 1}{4}$

EXEMPLO: $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ se } x < 0 \\ \sqrt{x}, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -x^2\,dx + \int_{0}^{2} (x)^{1/2}\,dx$$

$$= \left(\frac{-x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \left(\frac{-(-1)^3}{3} - \left(\frac{-0^3}{3}\right)\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} - \frac{2}{3}\, 0^{3/2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{8} = \frac{1}{3}\left(1 + 2\sqrt{8}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + 4\sqrt{2}\right)$$