UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Campus Campo Mourão

Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Notas de Aula

Prof.ª Dra. Érika Patrícia Dantas de Oliveira Guazzi

Campo Mourão - PR

1º Período de 2021

Sumário

Cônicas e Quádricas - Parte 2

5.5 Superfícies Quádricas

Agora, estudaremos as superfícies que podem se representadas pelas equações do segundo grau nas variáveis x, y e z. Em outras palavras, são superfícies em $\mathbb{R}^3$ que podem ser consideradas a versão tridimensional das cônicas.

Definição 1. *A equação geral do segundo grau nas três variáveis x, y e z é dada pela equação*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \tag{5.1}$$

onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c, d, e e f é diferente de zero, representa uma superfície quádrica ou simplesmente uma quádrica.

Definição 2. *A intersecção de uma superfície com um plano é chamada **traço** da superfície no plano.*

Observação 5.5.1. *A intersecção de uma superfície quádrica com um dos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, é uma cônica.*

Através de mudanças de coordenadas (rotação e/ou translação) a equação (5.1) pode ser transformada em duas formas. Na primeira, obtemos a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D. \tag{5.2}$$

Neste caso, a temos uma **quádrica centrada**. No segundo caso, podemos obter uma das equações

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Rz &= 0 \\ Ax^2 + Ry + Cz^2 &= 0 \\ Rx + By^2 + Cz^2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

as quais são denominadas **quádrica não centrada**.

Observação 5.5.2. *Para um auxílio na visualização das superfícies quádricas acesse o link* `https://www.geogebra.org/m/xraxuttv` .

5.5.1 Superfícies Quádricas Centradas

Definição 3. *Se nenhum dos coeficientes A, B, C e D da equação $Ax^2+By^2+Cz^2 = D$ for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas:*

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5.4}$$

denominadas forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica centrada.

Observação 5.5.3. **(1)** *Existem apenas 3 tipos de superfícies, conforme sejam 3, 2 e 1 o número de coeficientes positivos dos termos do 1º membro da equação* (5.4).

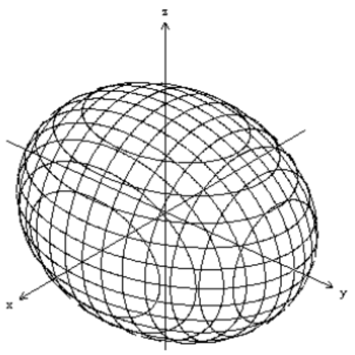
(2) *Se todos os coeficientes forem negativos, não existe lugar geométrico.*

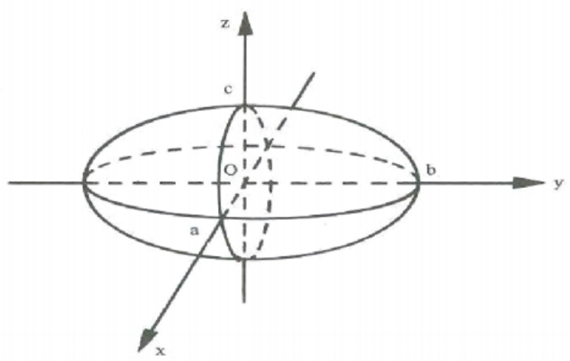
Elipsóide

Definição 4. *O elipsóide é a superfície representada pela equação*

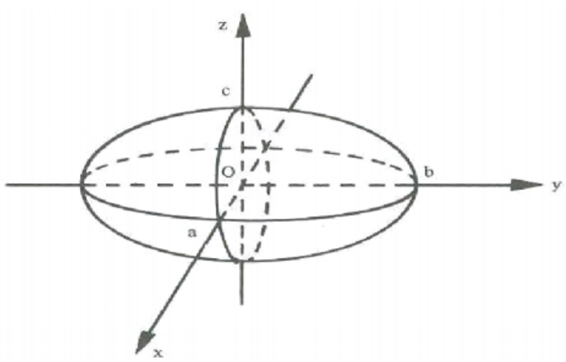
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semi-eixos do elipsóide.





Exemplo 5.5.1. *Considere o elipsoide dado na figura abaixo.*



Determine os possíveis traços do elipsóide nos planos xOy, xOz e yOz.

Solução: *Iniciemos visualizando os possíveis traços do elipsóide em relação aos planos coordenados, ou seja, acesse o [Link da solução.]*

Por fim, ao trabalharmos algebricamente com a equação do elipsóide e dos planos coordenados, podemos representar algebricamente os possíveis traços, como segue abaixo.

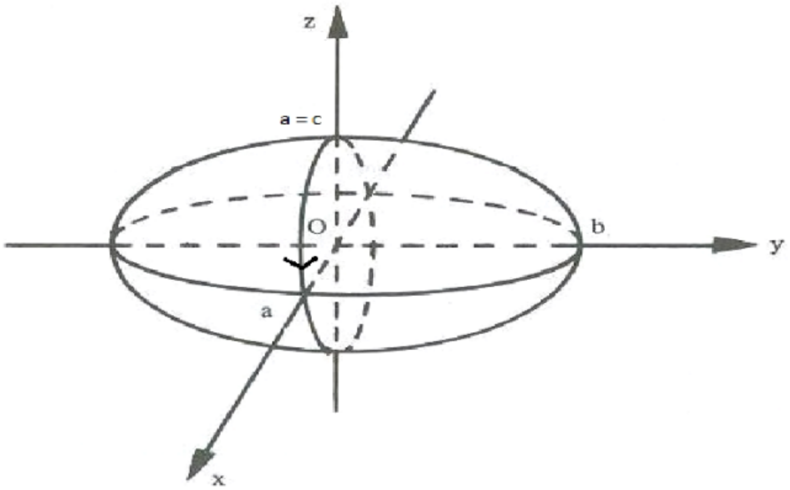
xOy: *Note que $z = 0$, segue que o traço é dado pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que é uma elipse.*

xOz: *Note que $y = 0$, segue que o traço é dado pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ que é uma elipse.*

yOz: *Note que $x = 0$, segue que o traço é dado pela equação $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ que é uma elipse.*

Observação 5.5.4. *Se pelo menos dois dos valores a, b e c são iguais, o elipsóide é de revolução.*

Exemplo 5.5.2. *Se $a = c$, o elipsóide é obtido girando a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, do plano xOy em torno do eixo dos y.*



Observação 5.5.5.

1. *No caso $a = b = c$, obtemos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e representa uma superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio a.*

2. *Se o centro do elipsóide é o ponto (h, k, l) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados a sua equação é:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

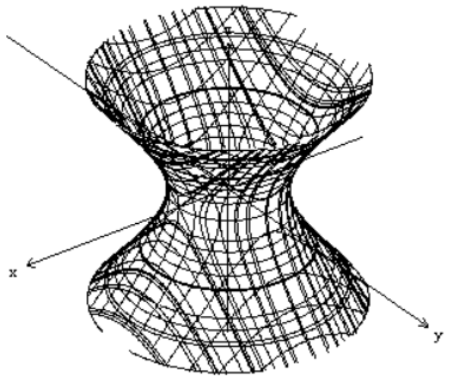
obtida através de uma translação de eixos.

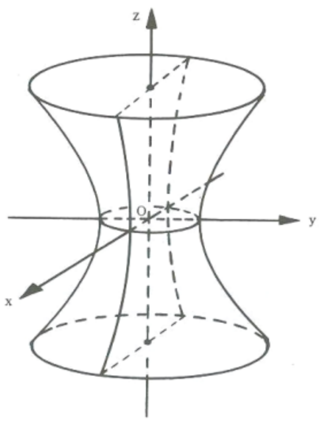
Hiperbolóide de Uma Folha

Definição 5. *O hiperbolóide de uma folha é a superfície representada pela equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que é a forma canônica da equação do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos z.

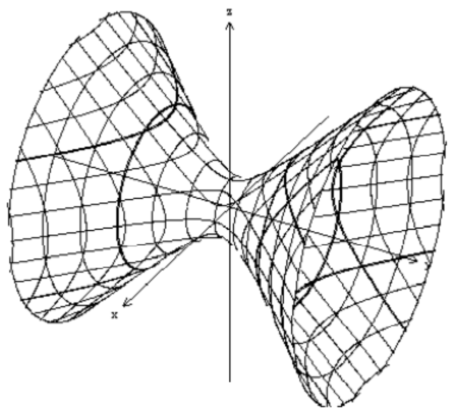




Observação 5.5.6. *As outras duas formas canônicas são:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

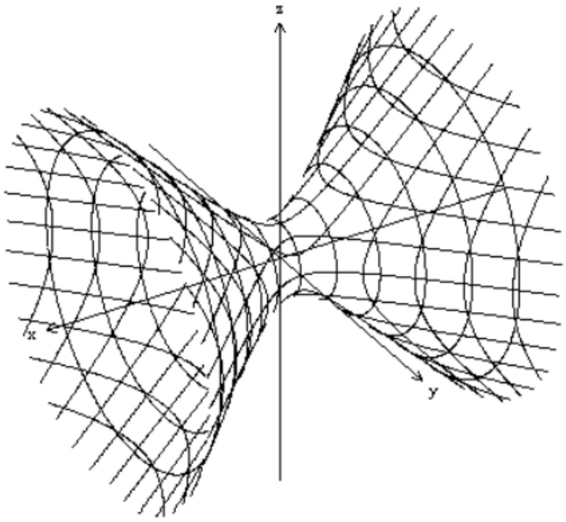
ao longo do eixo Oy



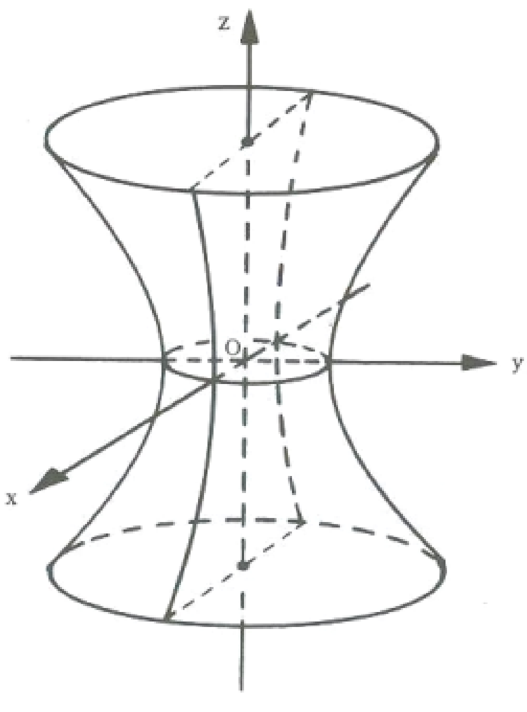
e

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ao longo do eixo Ox.



Exemplo 5.5.3. *Considere o hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo z dado na figura abaixo.*



Determine os possíveis traços do hiperbolóide de uma folha nos planos xOy, xOz e yOz.

<u>*Solução:*</u> *Iniciemos visualizando os possíveis traços do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo z em relação aos planos coordenados, ou seja, acesse o [Link da solução.]*

Por fim, ao trabalharmos algebricamente com a equação do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo z e dos planos coordenados, podemos representar algebricamente os possíveis traços, como segue abaixo.

xOy: *Note que $z = 0$, segue que o traço é dado pela equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é uma elipse.

xOz: *Note que $y = 0$, segue que o traço é dado pela equação*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que é uma hipérbole.

yOz: *Note que $x = 0$, segue que o traço é dado pela equação*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que é uma hipérbole.

Exercício 5.5.1. *Considere o hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo x. Determine os possíveis traços do hiperbolóide de uma folha nos planos xOy, xOz e yOz.*

Exercício 5.5.2. *Considere o hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo y. Determine os possíveis traços do hiperbolóide de uma folha nos planos xOy, xOz e yOz.*

Observação 5.5.7.

1. *Se $a = b$, o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo imaginário, no caso o eixo Oz.*

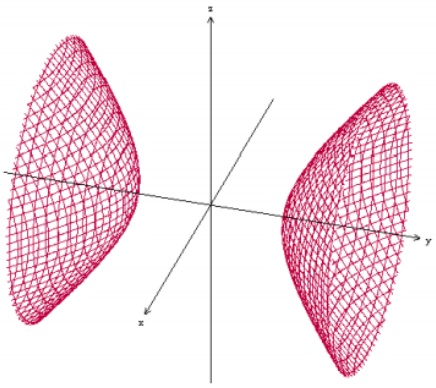
2. *O traço no plano xOy é a circunferência $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $z = 0$.*

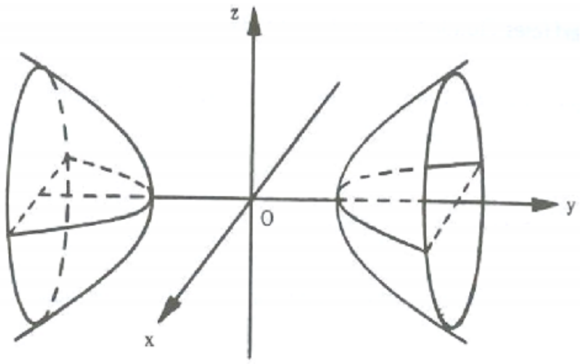
Hiperbolóide de Duas Folhas

Definição 6. *O hiperbolóide de duas folhas é a superfície representada pela equação*

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

que é a forma canônica ao longo do eixo dos y.

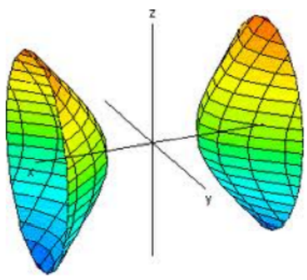




Observação 5.5.8. *As outras duas formas canônicas são:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

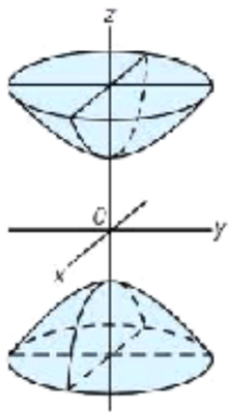
ao longo do eixo dos x



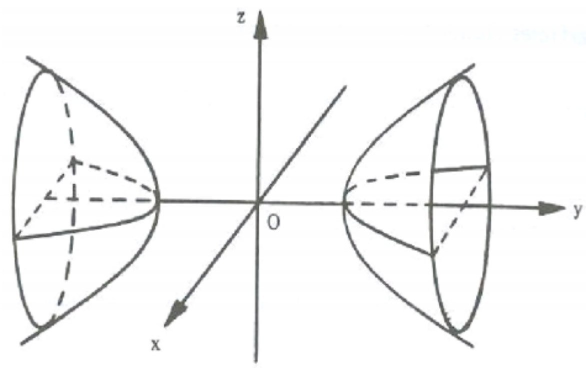
e

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ao longo do eixo dos z.



Exemplo 5.5.4. *Considere o hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo y dado na figura abaixo.*



Determine os possíveis traços do hiperbolóide de duas folhas nos planos xOy, xOz e yOz.

Solução: *Iniciemos visualizando os possíveis traços do hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo y em relação aos planos coordenados, ou seja, acesse o Link da solução.*

Por fim, ao trabalharmos algebricamente com a equação do hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo y e dos planos coordenados, podemos representar algebricamente os possíveis traços, como segue abaixo.

xOy: *Note que $z = 0$, segue que o traço é dado pela equação*

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é uma hipérbole.

xOz: *Não intercepta a superfície.*

yOz: *Note que* $x = 0$, *segue que o traço é dado pela equação*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que é uma hipérbole.

Observação 5.5.9. *1. Qualquer plano* $y = k$ *não intercepta a superfície se* $| k | < b$.

2. Se $a = c$, *o hiperbolóide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo real.*

Exercício 5.5.3. *Considere o hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo* x. *Determine os possíveis traços do hiperbolóide de duas folhas nos planos* xOy, xOz *e* yOz.

Exercício 5.5.4. *Considere o hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo* z. *Determine os possíveis traços do hiperbolóide de duas folhas nos planos* xOy, xOz *e* yOz.

5.5.2 Superfícies Quádricas Não Centradas

Definição 7. *Se nenhum dos coeficientes dos termos do 1° membro das equações*

$$Ax^2 + By^2 + Rz = 0$$

$$Ax^2 + Ry + Cz^2 = 0$$

$$Rx + By^2 + Cz^2 = 0$$

for nulo, elas podem ser escrita sob uma das formas:

$$\begin{aligned} \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} &= cz \\ \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} &= by \\ \pm\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} &= ax \end{aligned} \tag{5.5}$$

denominadas, qualquer delas, ***forma canônica*** *ou padrão* ***de uma superfície quádrica não centrada****.*

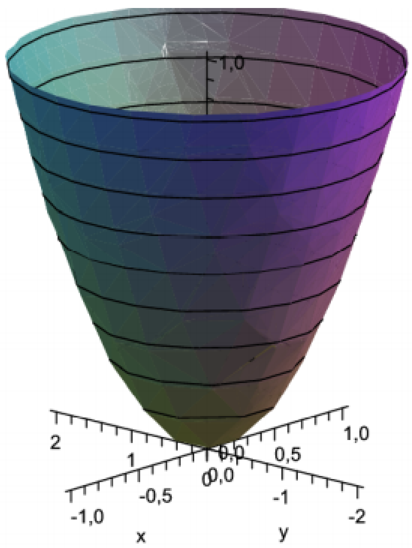
Observação 5.5.10. *Existem apenas 2 tipos de superfícies, conforme os coeficientes dos termos de segundo grau tenham o mesmo sinal ou sinais contrários.*

Parabolóide Elíptico

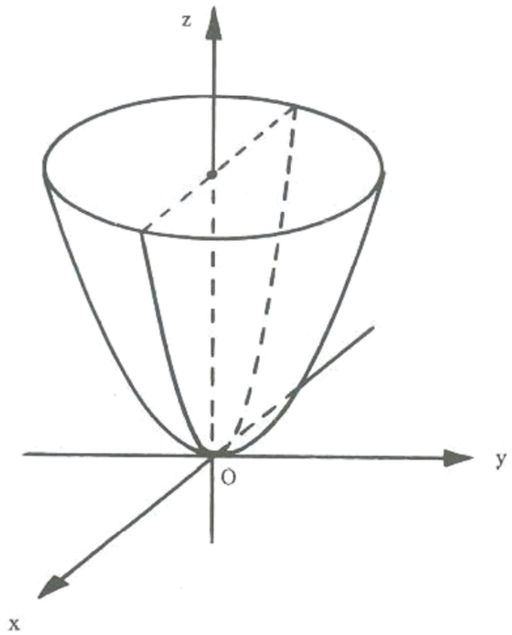
Definição 8. *Se nas equações (5.5) os coeficientes dos termos do segundo grau tiverem sinais iguais, a equação representa um* ***Parabolóide Elíptico****. A equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \tag{5.6}$$

é uma forma canônica da equação do Parabolóide Elíptico ao longo do eixo dos z.



Exemplo 5.5.5. *Considere o parabolóide elíptico ao longo do eixo z dado na figura abaixo.*



Determine os possíveis traços do parabolóide elíptico nos planos xOy, xOz e yOz.

Solução: Iniciemos visualizando os possíveis traços do parabolóide elíptico ao longo do eixo z em relação aos planos coordenados, ou seja, acesse o Link da solução.

Por fim, ao trabalharmos algebricamente com a equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo z e dos planos coordenados, podemos representar algebricamente os possíveis traços, como segue abaixo.

xOy: *Note que $z = 0$, segue que o traço é a origem $(0, 0, 0)$.*

xOz: *Note que $y = 0$, segue que o traço é dado pela equação $\frac{x^2}{a^2} = cz$ que é uma parábola.*

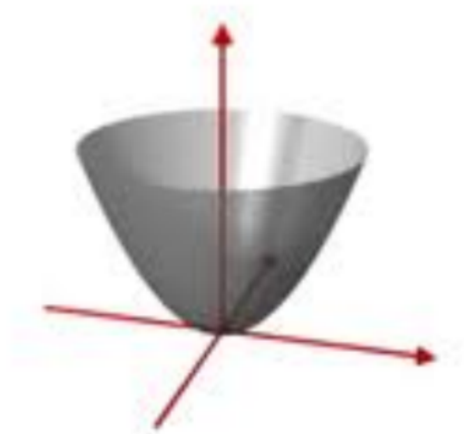
yOz: *Note que $x = 0$, segue que o traço é dado pela equação $\frac{y^2}{b^2} = cz$ que é uma parábola.*

Observação 5.5.11. 1. *Se $a = b$ na equação (5.6), o parabolóide é de revolução e pode ser gerado pela rotação da parábola*

$$\frac{y^2}{b^2} = cz, x = 0$$

em torno do eixo dos z.

2. *Se $c > 0$, a superfície situa-se acima do plano xOy e, para $c < 0$, a superfície situa-se abaixo do plano xOy. E mais, o sinal de z coincide com o sinal de c.*



Exercício 5.5.5. *Considere o parabolóide elíptico ao longo do eixo x. Determine os possíveis traços do parabolóide elíptico nos planos xOy, xOz e yOz.*

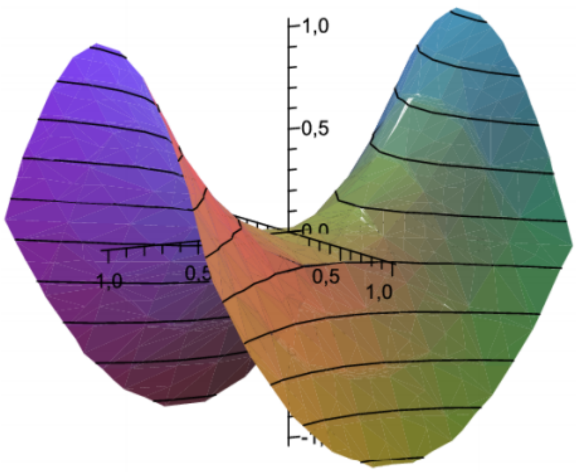
Exercício 5.5.6. *Considere o parabolóide elíptico ao longo do eixo y. Determine os possíveis traços do parabolóide elíptico nos planos xOy, xOz e yOz.*

Parabolóide Hiperbólico

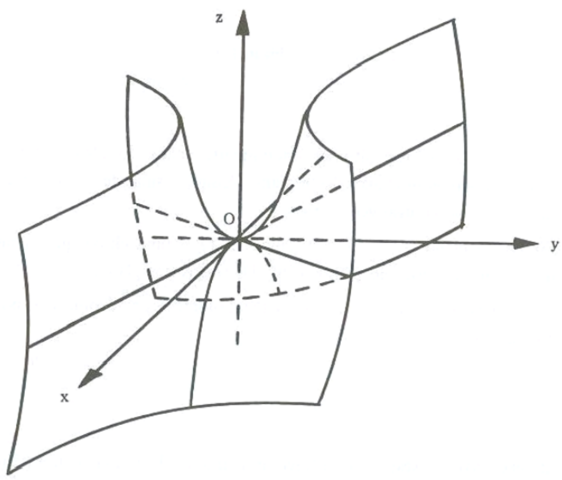
Definição 9. *Se nas equações* (5.5) *os coeficientes dos termos do segundo grau tiverem sinais contrários, a equação representa um* ***parabolóide hiperbólico****. A equação*

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \tag{5.7}$$

é uma forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos z.



Exemplo 5.5.6. *Considere o parabolóide hiperbólico ao longo do eixo z dado na figura abaixo.*



Determine os possíveis traços do parabolóide hiperbólico nos planos xOy, xOz e yOz.

Solução: *Iniciemos visualizando os possíveis traços do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo z em relação aos planos coordenados, ou seja, acesse o Link da solução.*

Por fim, ao trabalharmos algebricamente com a equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo z e dos planos coordenados, podemos representar algebricamente os possíveis traços, como segue abaixo.

xOy: *Note que $z = 0$, segue que o traço é dado pelas equações $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0$ e $\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0$ que é um par de retas.*

xOz: *Note que $y = 0$, segue que o traço é dado pela equação $-\frac{x^2}{a^2} = cz$ que é uma parábola que têm o eixo dos z como eixo de simetria e concavidade para baixo.*

yOz: *Note que $x = 0$, segue que o traço é dado pela equação $\frac{y^2}{b^2} = cz$ que é uma parábola que têm o eixo dos z como eixo de simetria e concavidade para cima.*

Exercício 5.5.7. *Considere o parabolóide hiperbólico ao longo do eixo x. Determine os possíveis traços do parabolóide hiperbólico nos planos xOy, xOz e yOz.*

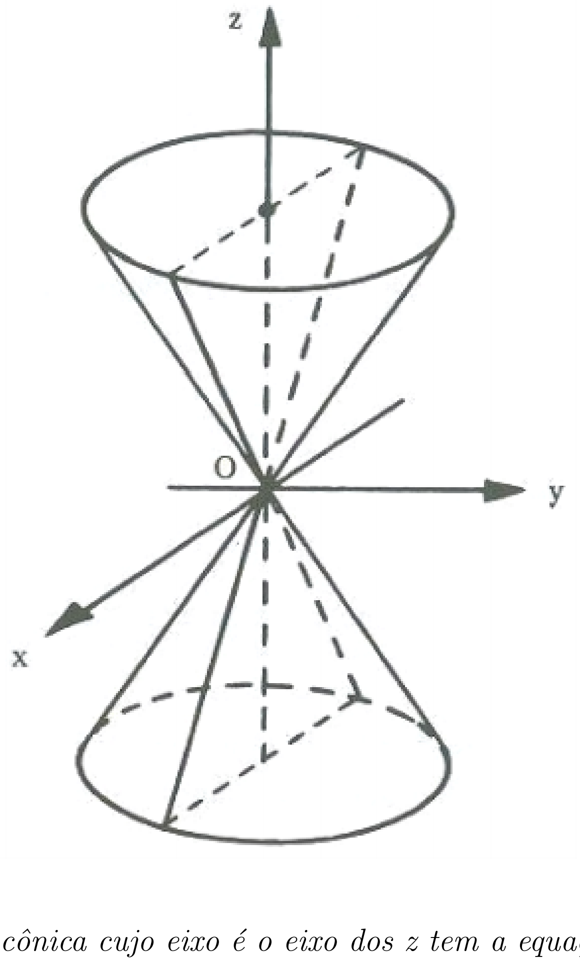
Exercício 5.5.8. *Considere o parabolóide hiperbólico ao longo do eixo y. Determine os possíveis traços do parabolóide hiperbólico nos planos xOy, xOz e yOz.*

5.6 Superfície Cônica

Definição 10. *Superfície Cônica é uma superfície gerada por uma reta que se move apoiada numa curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva.*

A reta é denominada geratriz, a curva plana é a diretriz e o ponto fixo dado é o vértice da superfície cônica.

Exemplo 5.6.1. *Seja a superfície cônica cuja diretriz é uma elipse (ou circunferência) com o vértice na origem do sistema e com seu eixo sendo um dos eixos coordenados.*



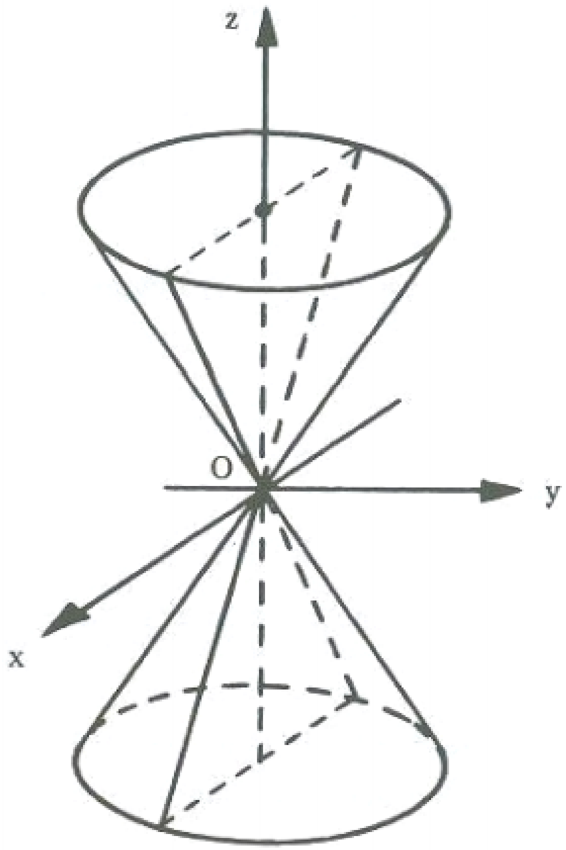
Assim, a superfície cônica cujo eixo é o eixo dos z tem a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Observação 5.6.1. *As equações das superfícies cônicas cujos eixos são os eixos dos x e dos y, respectivamente, são*

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

Exemplo 5.6.2. *Considere a superfície cônica cujo eixo é o eixo dos z dado na figura abaixo.*



Determine os possíveis traços da superfície cônica nos planos xOy, xOz e yOz.

Solução: Iniciemos visualizando os possíveis traços da superfície cônica cujo eixo é o eixo dos z em relação aos planos coordenados, ou seja, acesse o Link da solução.

Por fim, ao trabalharmos algebricamente com a equação da superfície cônica e dos planos coordenados, podemos representar algebricamente os possíveis traços, como segue abaixo.

no plano xOy *Note que* $z = 0$, *segue que* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. *Consequentemente,* $x = 0$ *e* $y = 0$. *Logo, o traço é o ponto* $(0, 0, 0)$.

no plano xOz *Note que* $y = 0$, *segue que* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, *ou seja,* $\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0$. *Consequentemente,* $x = \frac{a}{c}z$ *ou* $x = -\frac{a}{c}z$. *Logo, o traço é um par de retas.*

no plano yOz *Note que* $x = 0$, *segue que* $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, *ou seja,* $\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$. *Consequentemente,* $y = \frac{b}{c}z$ *ou* $y = -\frac{b}{c}z$. *Logo, o traço é um par de retas.*

Exercício 5.6.1. *Considere a superfície cônica cujo eixo é o eixo dos* x. *Determine os possíveis traços do parabolóide hiperbólico nos planos* xOy, xOz *e* yOz.

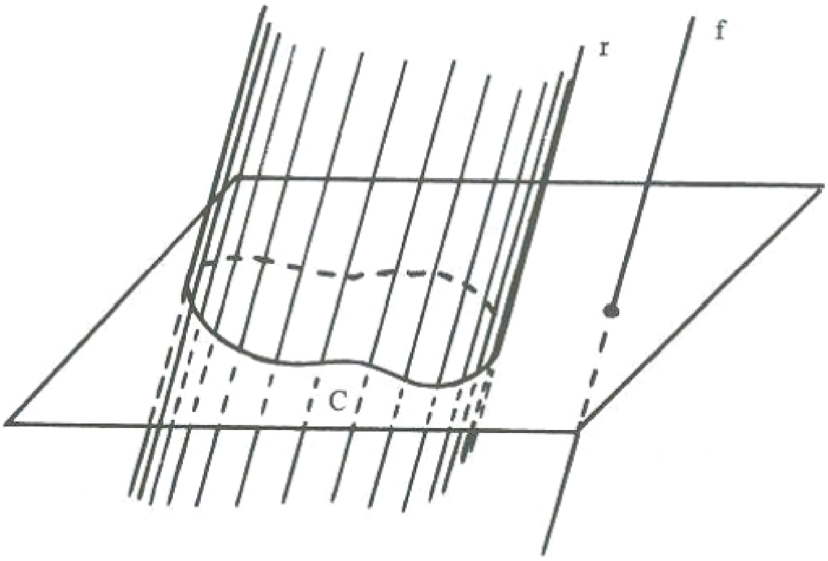
Exercício 5.6.2. *Considere a superfície cônica cujo eixo é o eixo dos* y. *Determine os possíveis traços do parabolóide hiperbólico nos planos* xOy, xOz *e* yOz.

5.7 Superfície Cilíndrica

Definição 11. *Seja* C *uma curva plana e* f *uma reta fixa não contida nesse plano.*

Superfície Cilíndrica é a superfície gerada por uma reta r *que se move paralelamente à reta fixa* f *em contato permanente com a curva plana* C.

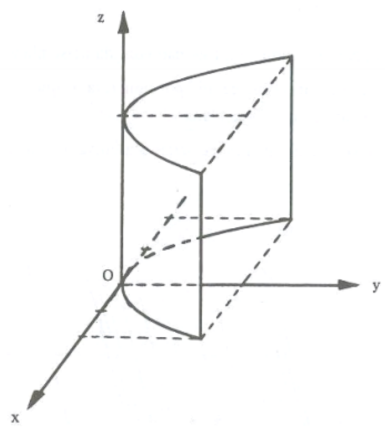
A reta r *que se move é denominada geratriz e a curva* C *é a diretriz da superfície cilíndrica.*



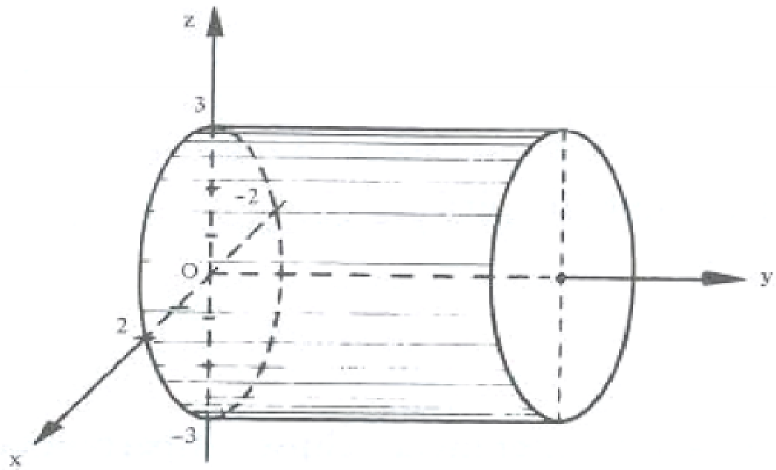
Observação 5.7.1. *Consideraremos apenas superfícies cilíndricas cuja diretriz seja uma circunferência (é dita superfície cilíndrica circular), parábola (é dita superfície cilíndrica parabólica), elipse (é dita superfície cilíndrica elíptica) ou hipérbole (é dita superfície cilíndrica hiperbólica). Visualize cada uma dessas superfícies cilíndricas, bem como os possíveis traços em relação aos planos coordenados, por meio do link* `https://www.geogebra.org/m/xraxuttv`.

Exemplo 5.7.1. *Se a diretriz for a parábola $x^2 = 2y$ a equação da superfície cilíndrica também será:*

$$x^2 = 2y.$$



Exemplo 5.7.2. *A equação* $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ *representa uma superfície cilíndrica com geratrizes paralelas ao eixo dos y, sendo a diretriz uma elipse no plano* xOz.



5.8 Exercícios sobre Cônicas e Quádricas - Parte 2

Exercício 5.8.1. *Dadas as equações abaixo, identifique as quádricas representadas e, determine os possíveis traços em relação aos planos coordenados:*

(a) $x^2+y^2+z^2=25$ (b) $2x^2+4y^2+z^2-16=0$

(c) $x^2-4y^2+2z^2=8$ (d) $-4x^2-4y^2+z^2=4$

(e) $4y^2+z^2-4x=0$ (f) $4x^2-y^2=z$

(g) $z^2=x^2+y^2$ (h) $y^2=4z$

(i) $x^2-4y^2=16$

Exercício 5.8.2. *Reduza as equações abaixo à forma canônica e identifique-as:*

(a) $9x^2+4y^2+36z^2=36$ (b) $36x^2+9y^2-4z^2=36$

(c) $36x^2-9y^2-4z^2=36$ (d) $x^2+y^2+z^2=36$

(e) $x^2+y^2-9z=0$ (f) $x^2-8y+4z^2=0$

(g) $4x^2-9y^2-36z=0$ (h) $x^2+4y^2-z^2=0$

Exercício 5.8.3. *Dados o centro* $C(2,-3,1)$ *e raio 4, determine a equação da superfície esférica.*

Exercício 5.8.4. *Dadas as equações abaixo, identifique as quádricas representadas e, determine os possíveis traços em relação aos planos* $\Pi_1 : \ z = 2$, $\Pi_2 : \ z = -3$, $\Pi_3 : \ y = 3$, $\Pi_4 : \ y = -1$, $\Pi_5 : \ x = 2$ *e* $\Pi_6 : \ x = -2$.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

(b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

(c) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

(d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$

(e) $4y^2 + z^2 - 4x = 0$

(f) $4x^2 - y^2 = z$

(g) $z^2 = x^2 + y^2$

(h) $y^2 = 4z$

(i) $x^2 - 4y^2 = 16$

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra linear contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] BIANCHINI, Waldecir. *Planos.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/VXMuWTtE

[3] BOBKO, Nara. *Seções Cônicas.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/g3y7bq68

[4] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[5] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3ª edição rev e ampl. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[6] CASSOL, Henrique L. G. *Equações Paramétricas da reta.* Disponível em: https://www.geogebra.org/m/RqkquH6P

[7] LEMKE, Raiane. *Retas no* $\mathbb{R}^3$*: Parametrização e gráfico de retas no* $\mathbb{R}^3$. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4

[8] LEON, Steven J. *Álgebra Linear com Aplicações* . Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[9] LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[10] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[11] MARCONDES, C. A.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática, Série Novo Ensino Médio.* volume único. São Paulo: Editora Ática.

[12] RODRIGUES, Aroldo, E. A. *Atividade sobre Quádricas*. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xraxuttv

[13] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra linear*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[14] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

Neste arquivo contém as referências para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Ressalto ainda a disponibilidade online de diversas outras referências via Bibliotec-UTFPR pelo link `http://www.utfpr.edu.br/biblioteca/bibliotec`.