Indução Matemática

MERGE SORT

$P(n)$ é verdadeiro p/ todo $n \geq a$, $a, n \in \mathbb{Z}^+$

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + \Theta(n), & n > 1 \\ \Theta(1), & n \leq 1 \end{cases}$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \; ; \; \forall n \mid n \geq 1.$$

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1.$$

$$P(2) = \sum_{i=1}^{2} i = 1 + 2 = 3$$

$$3 = \frac{2(2+1)}{2}$$

$$3 = 3$$

$$P(3) = \sum_{i=1}^{3} i = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$6 = \frac{3(3+1)}{2}$$

$$6 = 6,$$

Seja o predicado $P(n)$, onde n é um inteiro positivo. A prova que $P(n)$ é válido a partir de a é realizada em dois passos:

1. **Caso Base:** Provar que o predicado é verdadeiro para o menor valor possível que satisfaz o predicado, a proposição $P(a)$, onde a é tal valor.
2. **Passo Indutivo:** Provar que se a proposição $P(k)$ for verdadeira, então $P(k+1)$ também deve ser verdadeira.

↳ 3 estágios

1 – Vamos assumir que $P(k)$ é verdadeira. $P(k)$ é a hipótese indutiva.

2 – Vamos escrever $P(k+1)$, queremos chegar nisso.

3 – Provar $P(k+1)$ considerando que $P(k)$ é verdadeira. "Como sair do estágio 1 e chegar no estágio 2?"

Exemplo 1 Prove que $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \mid n \geq 1.$

Caso base $P(1)$ é verdadeira?

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1(2)}{2}$$

$$1 = 1.$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Passo indutivo

Estágio 1: Assumimos que $p/n=k, \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ é nossa hipótese indutiva.

Estágio 2: queremos provar que

$$p/n=k+1, \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \text{I}$$

Estágio 3: como podemos atingir o estágio 2, considerando que a AI do estágio 1 é verdadeira?

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+3+\dots+k+(k+1) \quad (\text{notação } \Sigma)$$

(notação Σ)

$$= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \leftarrow (\text{pela Hipótese Indutiva})$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{k^2+k+2k+2}{2}$$

$$= \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \text{I}$$

Usando a hipótese indutiva mostramos que $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio da indução matemática, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \mid n \geq 1.$

Exemplo 3 Prove que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, $\forall n \mid n \geq 0$.

Caso Base $P(0)$ é verdadeira?

$$P(0) = \sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 \quad 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$$

$1 = 1$. Portanto, $P(0)$ é verdadeira.

Passo Indutivo

Estágio 1: Assumimos que $P(k) = \sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$. ← Hipotese Indutiva

Estágio 2: Queremos provar que

$$P(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1 = \text{I}$$

Estágio 3: Como atingimos $P(k+1)$ considerando que a HI do estágio 1 é verdadeira?

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k + 2^{k+1} \quad (\text{notação } \Sigma)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1} \quad (\text{notação } \Sigma)$$

$$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \quad (\text{pela H.I})$$

$$= 2^1 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{(k+1)+1} - 1$$

$$= 2^{k+2} - 1 = \text{I}$$

Usando a hipotese indutiva mostramos que $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo princípio da indução matemática, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, $\forall n \mid n \geq 1$.