

Árvores B+

Prof. Othon M. N. Batista
Estrutura de Dados

Roteiro

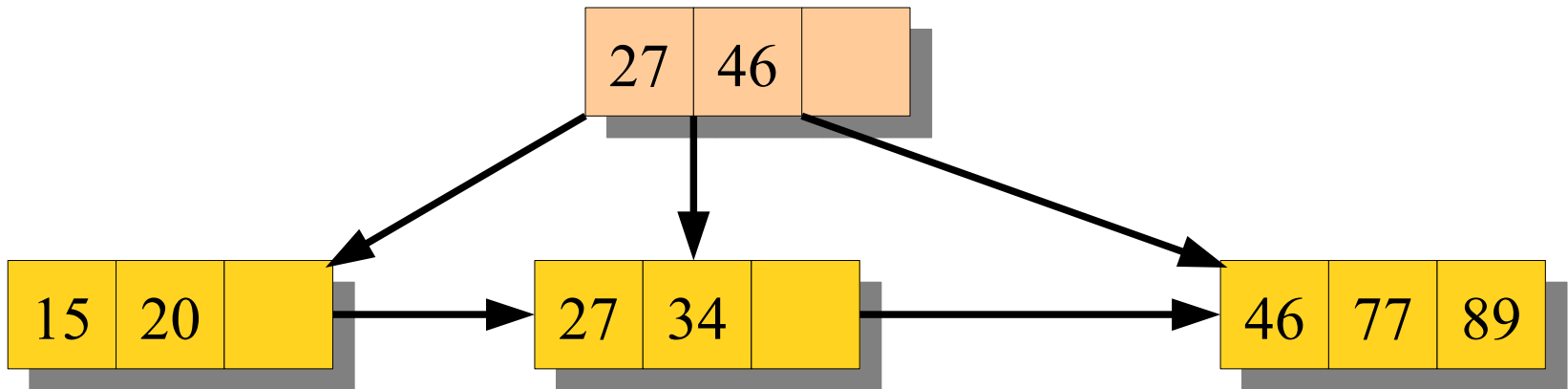
- Introdução
- Definição
- Inserção
- Remoção
- Exercícios

Introdução

- Uma árvore B+ é uma melhoria das árvores B em que:
 - › os nós interiores contêm apenas apontadores para os nós inferiores até chegar às folhas;
 - › os nós folha são as chaves para acessar os dados;
 - › os nós folha formam uma lista encadeada ordenada.

Introdução

- Exemplo de árvore B+:

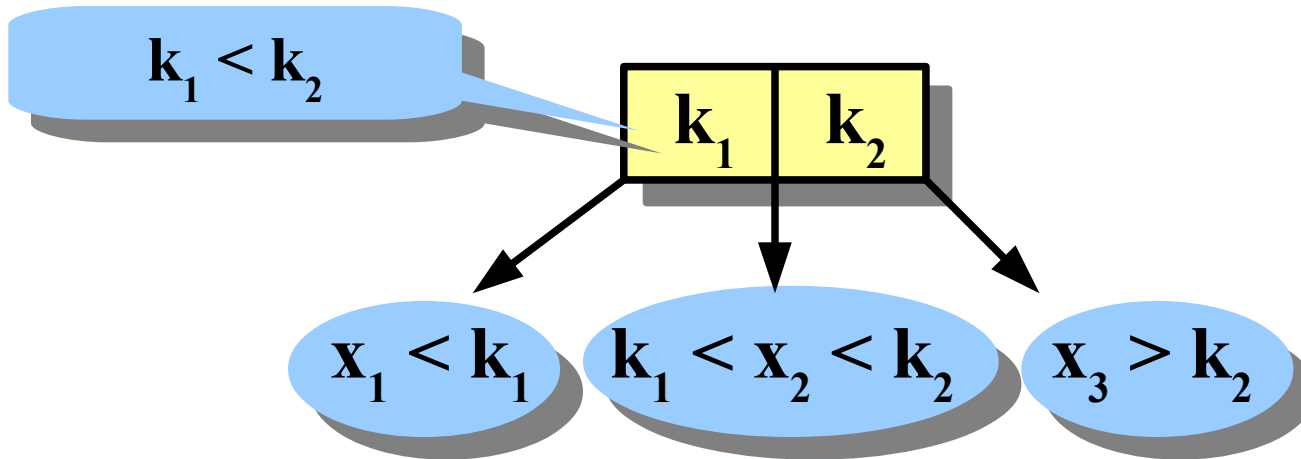


Definição

- Uma árvore B de ordem m satisfaz:
 - › cada nó tem no máximo m filhos;
 - › cada nó, exceto a raiz, tem pelo menos $m/2$ filhos;
 - › a raiz tem pelo menos dois filhos se ela não é folha;
 - › todas as folhas aparecem no mesmo nível;
 - › um nó não folha com k filhos contém $k - 1$ chaves.

Inserção

- Eis a estrutura do nó e subárvores para ordem 3:



- As respectivas subárvores tem valores (x_1, x_2, x_3) conforme as relações de ordem: $x_1 < k_1$, $k_1 < x_2 < k_2$ e $x_3 > k_2$.
- Dentro de cada nó, $k_1 < k_2$.

Inserção

- Algoritmo:
 - › encontre a folha em que o elemento estaria;
 - › se a folha não está cheia, adicione o elemento;
 - › caso contrário, divida a folha:
 - aloque uma nova folha e mova metade dos elementos da folha original para a nova folha;
 - insira o menor valor da nova folha também no nó pai;
 - se o pai estiver cheio, divida-o da mesma forma;
 - caso chegue à raiz, divida-a da mesma resultando em uma nova raiz e dois filhos.

Inserção

- As inserções sempre ocorrem nos nós folhas seguindo as relações de ordem.
- Vamos inserir os valores de 1 a 5, nesta ordem, em uma árvore B+ de ordem 3.

- Inserindo o valor 1: A diagram of a B+ leaf node, represented as a yellow rectangle divided into two cells. The first cell contains the red number '1', and the second cell is empty. The node has a black border and a gray shadow.

- Inserindo o valor 2: A diagram of a B+ leaf node, represented as a yellow rectangle divided into two cells. The first cell contains the black number '1', and the second cell contains the red number '2'. The node has a black border and a gray shadow.

Inserção

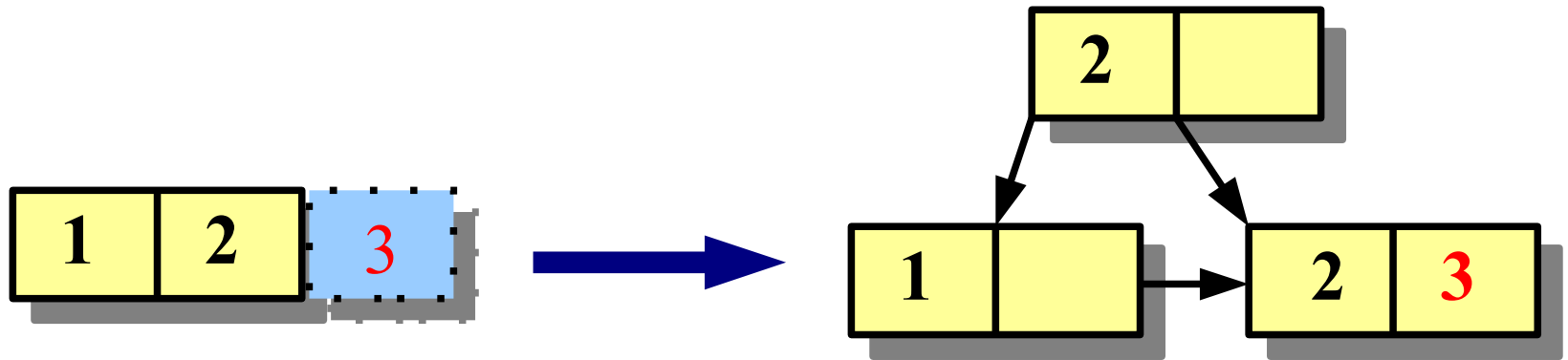
- Inserindo o valor 3 temos um estouro:



- Os estouros levam à divisão do nó em três, um pai e dois filhos.
- O pai é o elemento mais à esquerda do novo filho da direita.
- O filho da esquerda são os elementos à esquerda do pai no nó original.
- O filho da direita são os elementos à direita do pai no nó original.

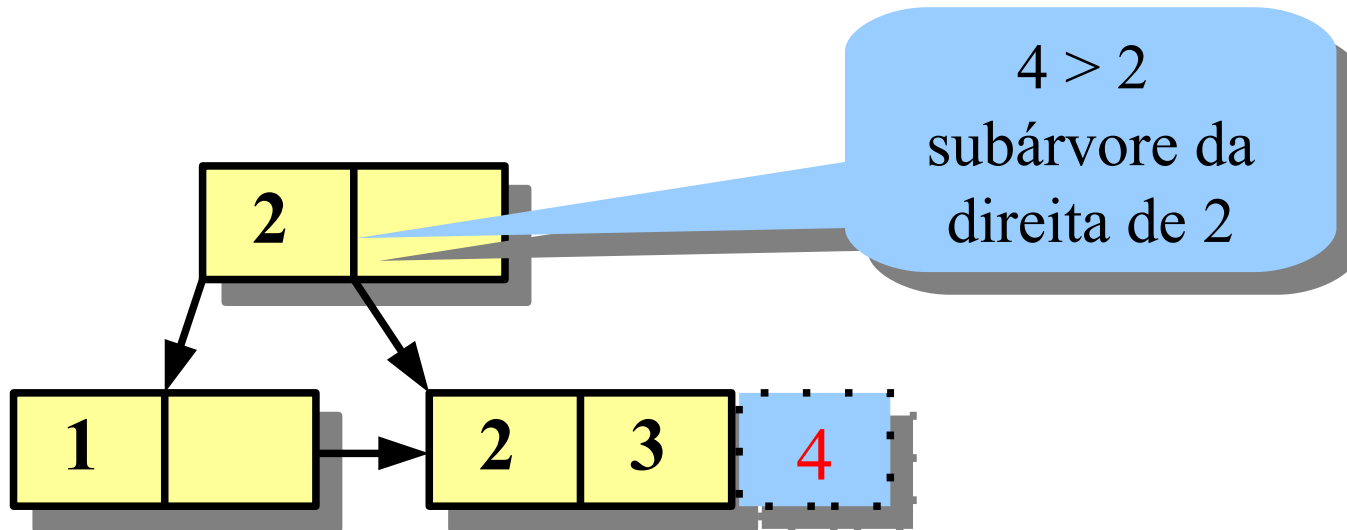
Inserção

- Lidando com a divisão de um nó após a inserção do valor 3:



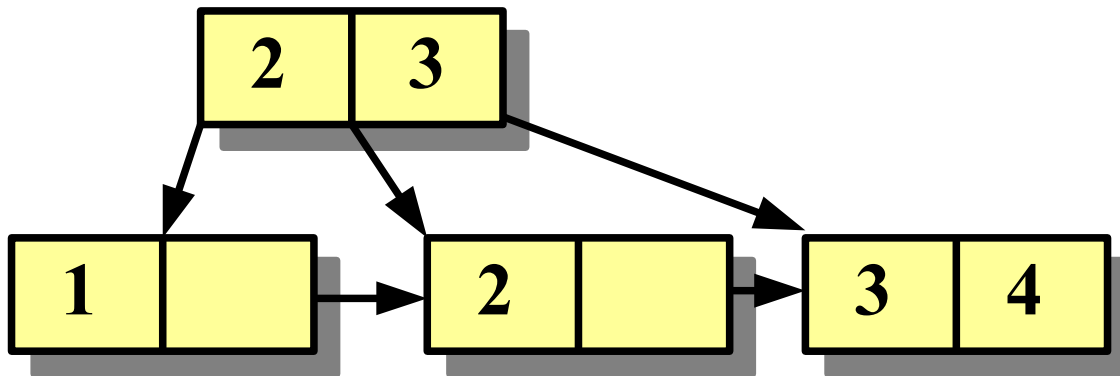
Inserção

- Ao inserir o valor 4 ocorre um estouro:



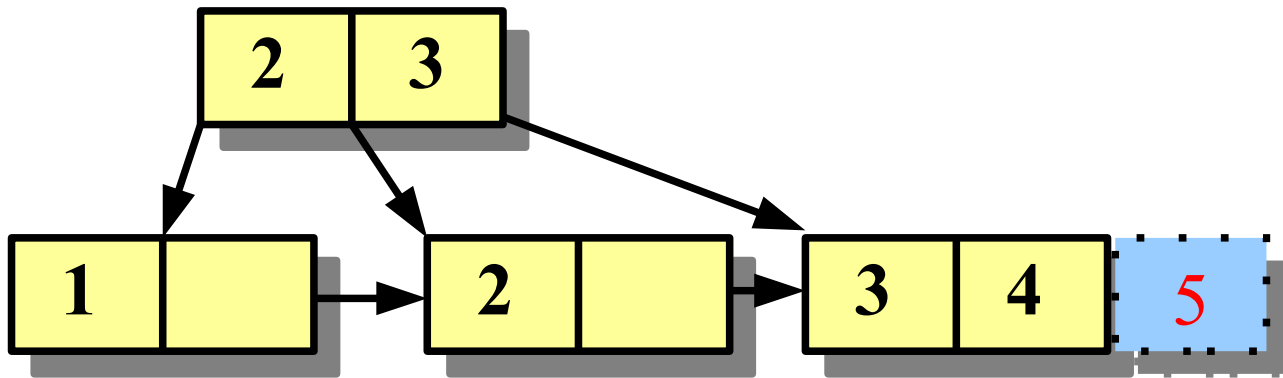
Inserção

- Inserindo o valor 4:



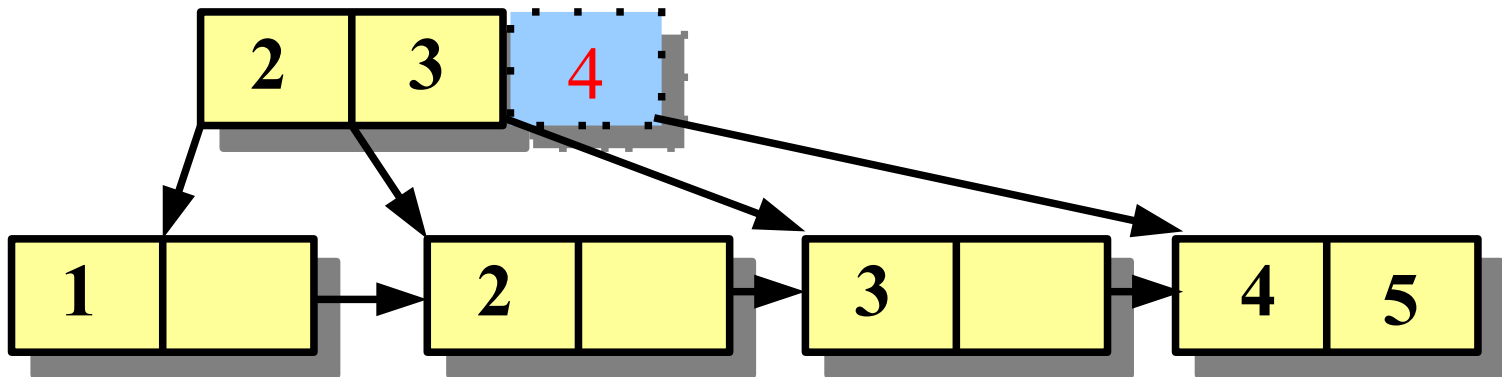
Inserção

- Ao inserir o valor 5 também há um estouro e o nó deve ser dividido:



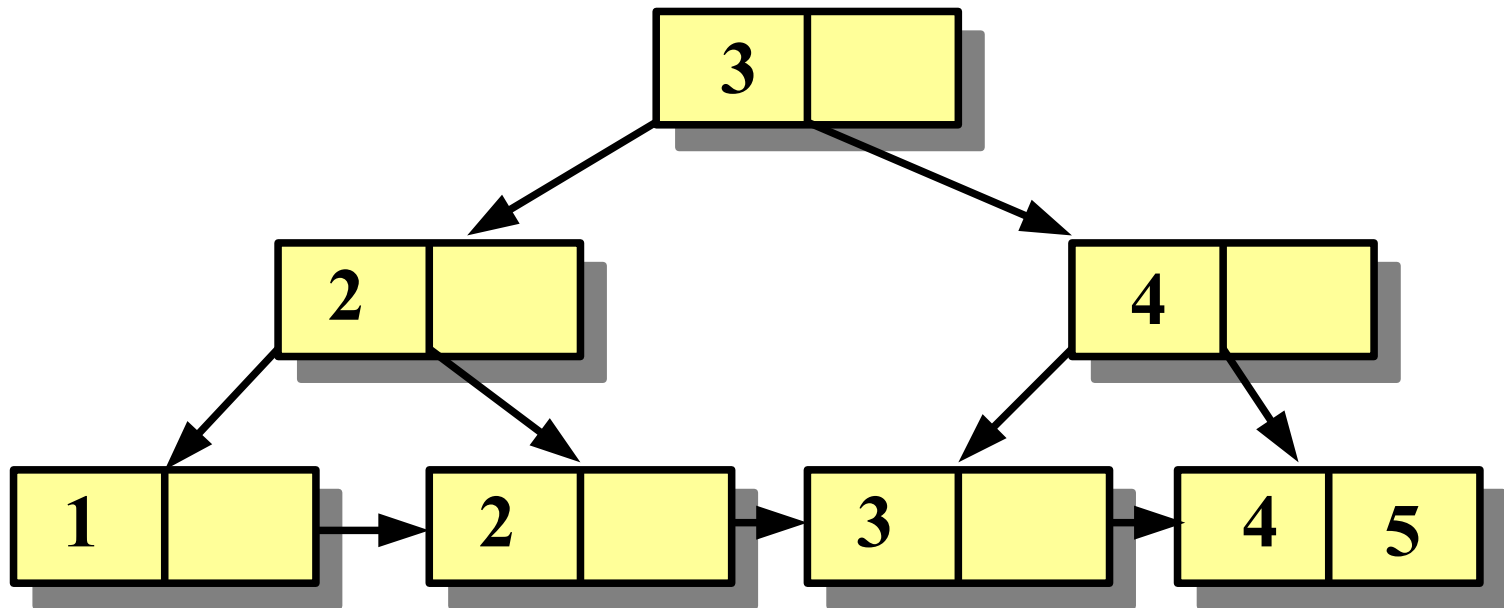
Inserção

- Ao lidar com a divisão do nó folha, há um estouro no nó pai e ele também precisa ser dividido.



Inserção

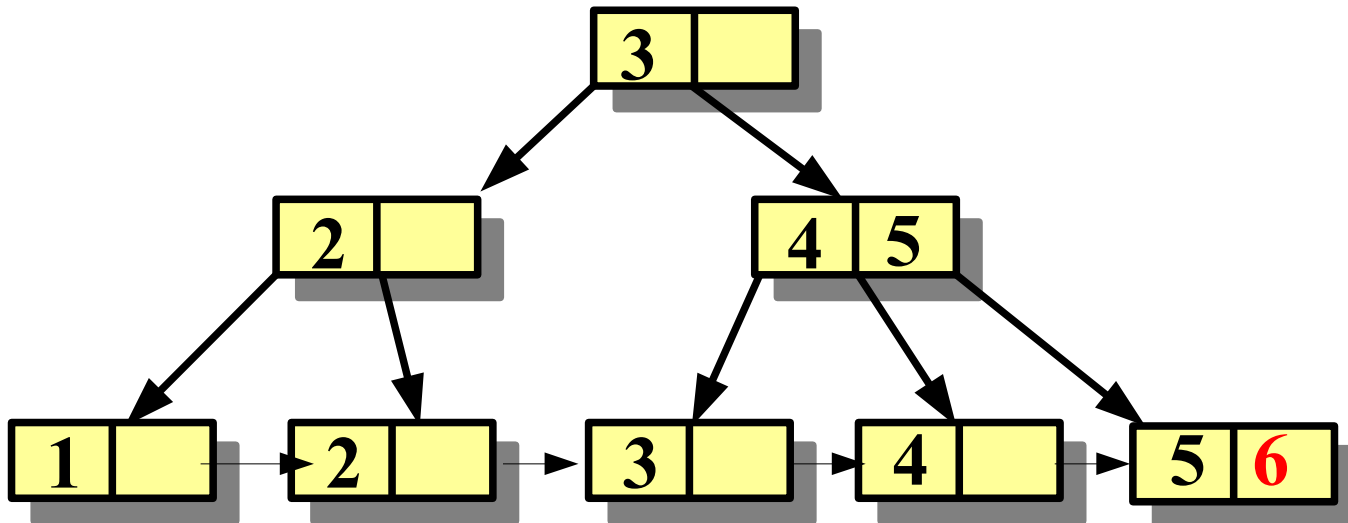
- A divisão leva a uma nova raiz com dois filhos.



- A divisão de nós não folha é igual à divisão nas árvores B.

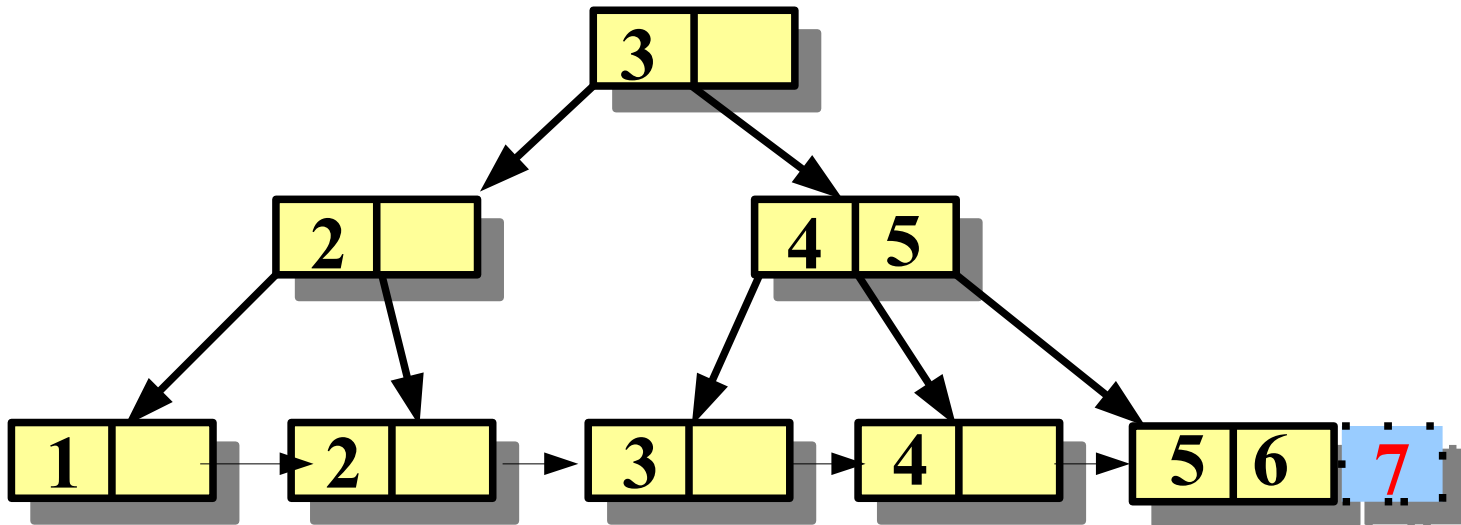
Inserção

- Inserção do elemento 6.



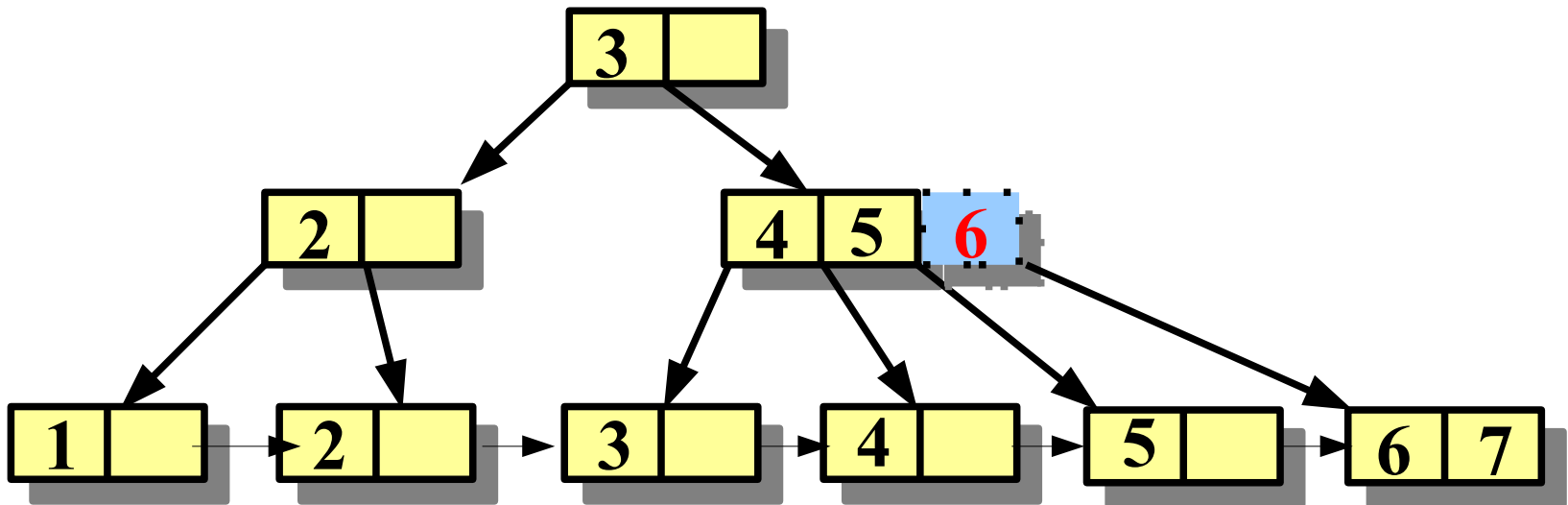
Inserção

- Inserção do elemento 7. Há estouro e divisão do nó com os elementos 5 e 6.



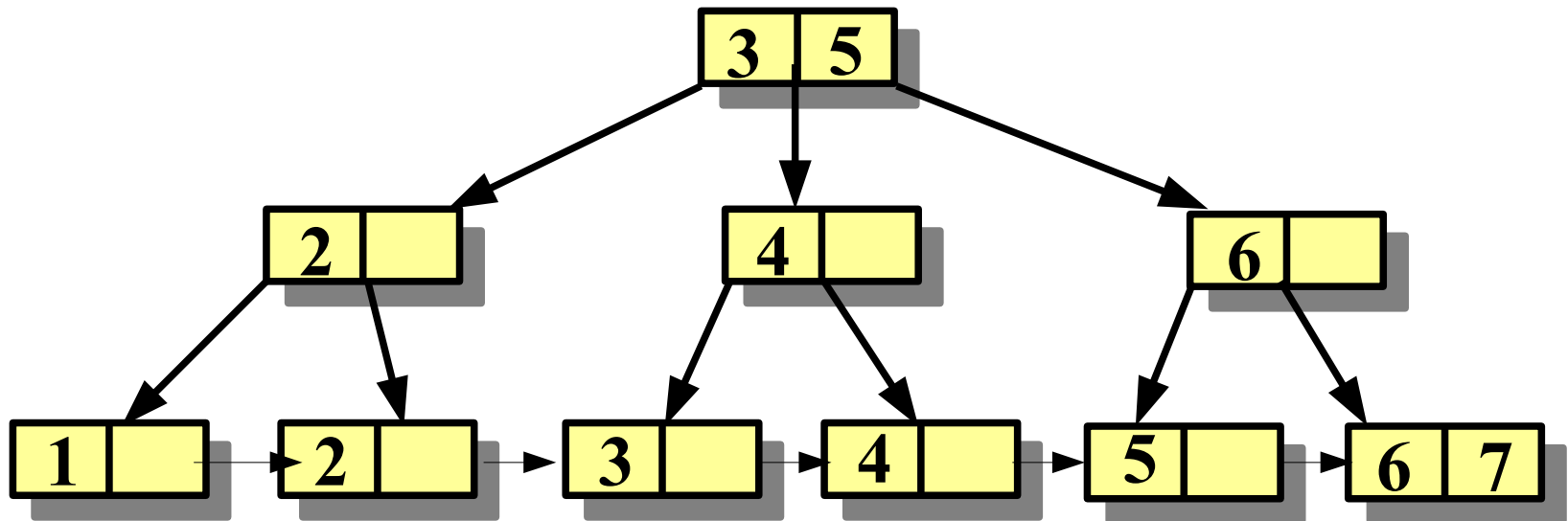
Inserção

- Inserção do elemento 7, leva ao estouro do pai.



Inserção

- Estouros de nós não folha são iguais aos das árvores B. O elemento central é promovido.



- Como exercício, insira os valores 8, 9 e 10.

Remoção

- A remoção de um valor de uma árvore B+ é deixada como um exercício para você!!!

Exercício

1. Mostre a evolução das inserções em uma árvore B+ de ordem 4 para os nomes dos meses do ano considerando ordenação alfabética, ou seja, $a < b < c < d < e < \dots < z$.
2. Mostre a árvore B+ de ordem 6 resultante da inserção nesta ordem dos valores 34, 2, 1, 4, 7, 5, 102, 23, 45, 67, 43, 112, 32, 765, 234, 12, 14, 15, 23, 25, 33, 46, 35, 18 e 26.

Exercício

3. Mostre a árvore B resultante para os nomes dos meses do ano considerando ordenação alfabética, ou seja, $a < b < c < d < e < \dots < z$. Compare a altura com a árvore B+ do exercício 1. Qual é a conclusão que você pode tirar?

4. Mostre a árvore B resultante da inserção nesta ordem dos valores 34, 2, 1, 4, 7, 5, 102, 23, 45, 67, 43, 112, 32, 765, 234, 12, 14, 15, 23, 25, 33, 46, 35, 18 e 26. Compare a altura com a árvore B+ do exercício 2. Qual é a conclusão que você pode tirar?

Exercício

5. Implemente em qualquer linguagem de programação o algoritmo de inserção em árvore B para o exercício anterior, mas que insere strings lidas do teclado.
6. Faça uma rotina que pesquisa na árvore B implementada.
7. Faça uma rotina que exibe toda a árvore inserida.