# Autômato com Pilha: Equivalência com GLCs



↳ GLCs e autômatos com Pilha são equivalentes em poder.
↳ Ambos são capazes de descrever a classe de linguagens livres-do-contexto.
↳ Converter qualquer GLC num AP que reconhece a mesma linguagem e vice-versa.
↳ Lembrando que um LLC é qualquer linguagem que possa ser descrita com uma GLC.

## Teorema 2.20 (Sipser)

Uma linguagem é livre-do-contexto se e somente se algum Autômato com Pilha a reconhece.

IDA: **Lema 2.21**: Se uma linguagem é livre-do-contexto, então algum autômato com pilha a reconhece.

Prova: Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$ um AP.
Sipser pág. 121

Sejam $q$ e $r$ estados do AP e suponha que $a$ esteja em $\Sigma_\varepsilon$ e $s$ em $\Gamma_\varepsilon$. Digamos que queiramos que o AP vá de $q$ para $r$ quando ele lê $a$ e desempilha $s$. Além do mais, queremos empilhar a cadeia inteira $u = u_1 \ldots u_\ell$ ao mesmo tempo. Novos estados podem ser criados para implementar essa ação, estados $q_1, \ldots, q_{\ell-1}$ são introduzidos e a tabela de transição fica da seguinte maneira:

$\delta(q, a, s)$ deve conter $(q_1, u_\ell)$,

$\delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_2, u_{\ell-1})\}$,

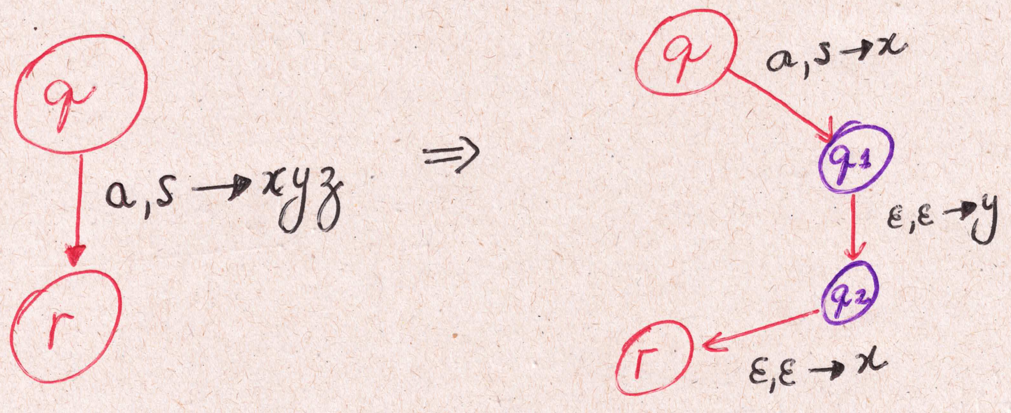
$\delta(q_2, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_3, u_{\ell-2})\}$,

$\vdots$

$\delta(q_{\ell-1}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(r, u_1)\}$.

Usamos a notação $(r, u) \in \delta(q, a, s)$ para dizer que, quando $q$ é o estado do autômato, $a$ é o próximo símbolo de entrada e $s$ o símbolo no topo da pilha, o AP pode ler o $a$ e desempilhar o $s$, então empilhar a cadeia $u$ e seguir para o estado $r$.

Por exemplo: $(r, xyz) \in \delta(q, a, s)$:




Os estados de $P$ são $Q = \{q_{início}, q_{laço}, q_{aceita}\} \cup E$, onde $E$ é o conjunto de estados que precisamos para implementar a abreviação descrita.

O estado inicial é $q_{início}$. O estado de aceitação é $q_{aceita}$.

A função de transição precisa:

↳ inicializar a pilha para conter os símbolos \$ e $S$.

passo 1: $\delta(q_{início}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_{laço}, S\$)\}$.

↳ Introduzimos as transições para o laço principal do passo 2.

↳ Primeiro tratamos o caso (a) no qual o topo da pilha contém uma variável. ③

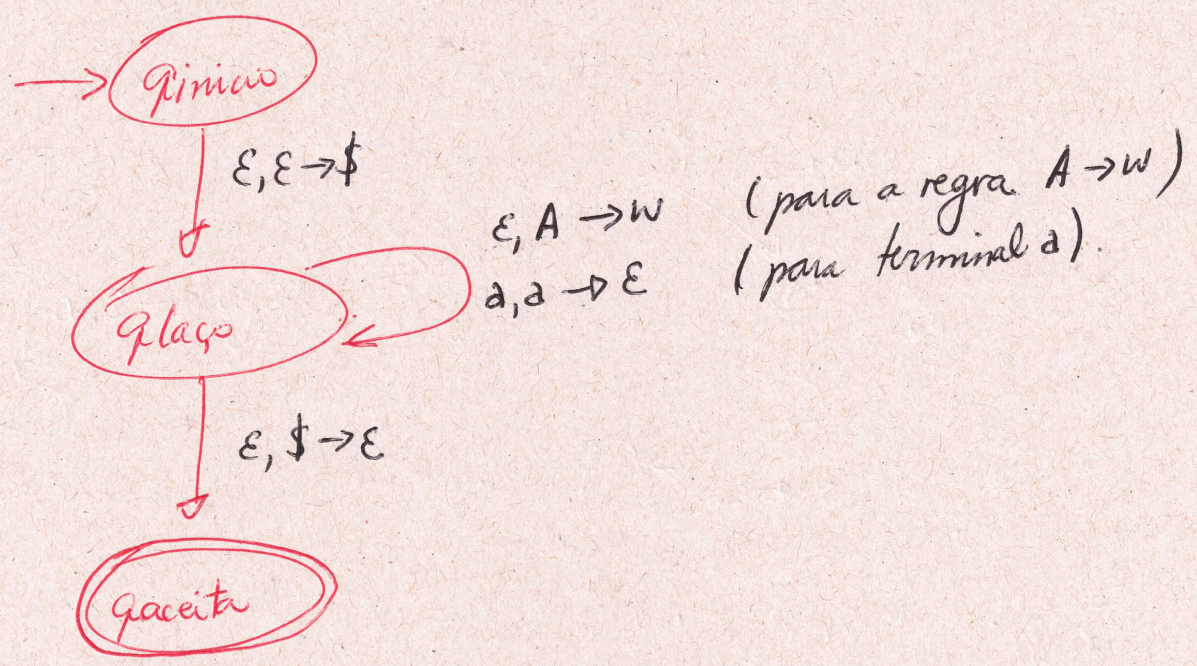
Seja $\delta(q_{laço}, \varepsilon, A) = \{(q_{laço}, w)\} \mid A \to w$ é uma regra de $R\}$

Segundo, tratamos o caso (b) no qual o topo da pilha contém um terminal.

Seja $\delta(q_{laço}, a, a) = \{(q_{laço}, \varepsilon)\}$.

Finalmente, lidamos com o caso (c) no qual o marcador de pilha vazia \$ está no topo da pilha.

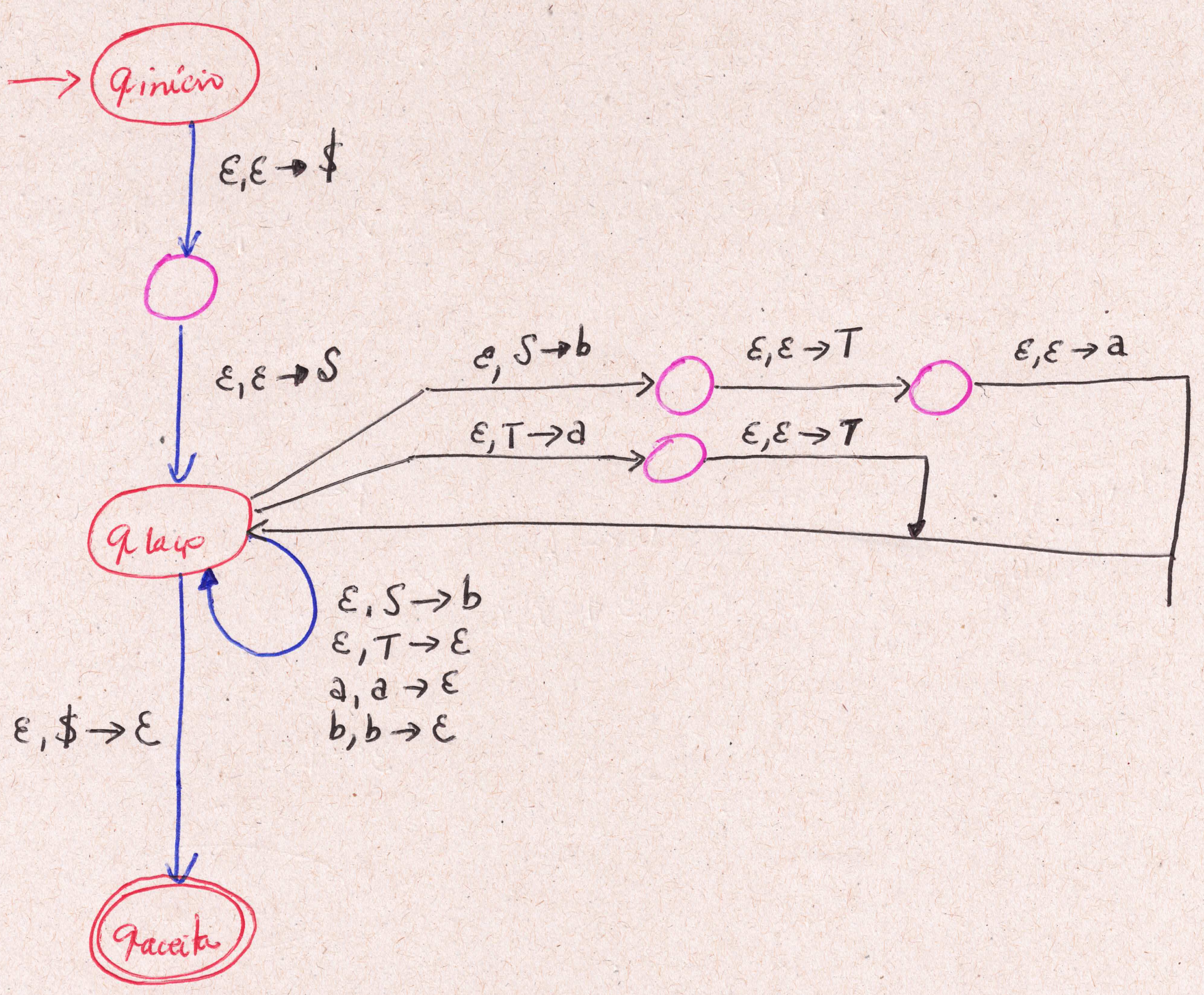
Seja $\delta(q_{laço}, \varepsilon, \$) = \{(q_{aceita}, \varepsilon)\}$.



Exemplo: Construa o AP $P_1$ utilizando o lema 2.21 (Sipser) a partir da GLC G: 

$S \to aTb \mid b$

$T \to Ta \mid \varepsilon$



1. A gramática deve estar na FNG. (Greibach).
[+ produções na forma $A \rightarrow a\alpha$, $\alpha$ palavra de variáveis).

O AP gerado simula a derivação mais à esquerda.

Suponha a produção $A \rightarrow a\alpha$.

- Lê o símbolo $a$ da fita;
- Lê o símbolo $A$ da pilha;
- Empilha a palavra $\alpha$.

A simulação é realizada para cada produção, usando um único estado de controle. A construção do autômato com pilha $M$ a partir da gramática $G=(V,T,P,S)$:

- Seja $G_{FNG} = (V_{FNG}, T_{FNG}, P_{FNG}, S)$, transformação de $G$ para a FNG.
- Seja $M = (T_{FNG}, \{q_0, q_1, q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\}, V_{FNG})$ onde:

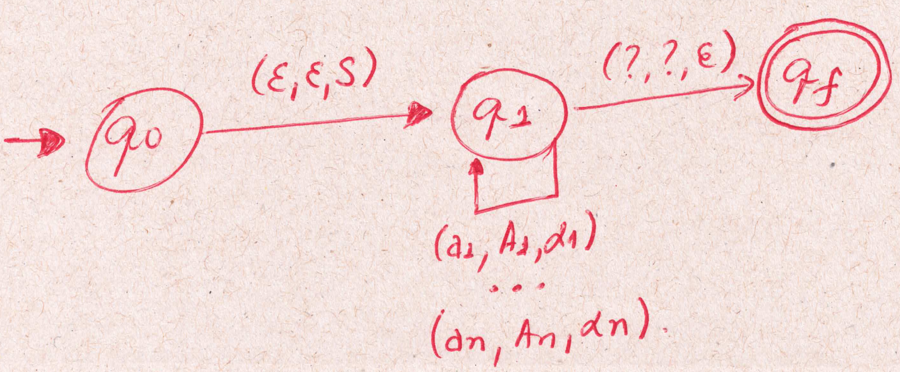
$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_1, S)\}$

~~$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_1$~~

$\delta(q_1, a, A) = \{(q_1, \alpha) \mid A \rightarrow a\alpha \in P_{FNG}\}$.

$\delta(q_1, ?, ?) = \{(q_f, \varepsilon)\} \equiv$

Epsei: $\delta(q_1, \varepsilon, \$) = \{(q_f, \varepsilon)\}$.



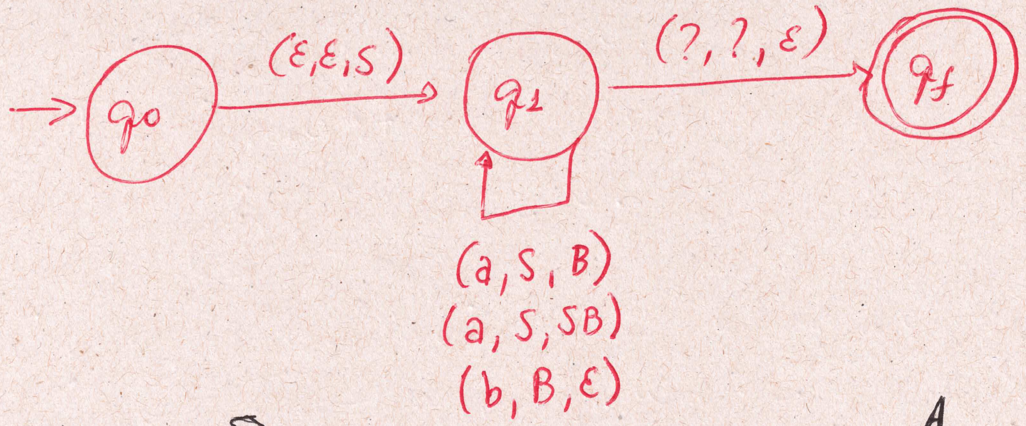
Exemplo:

$L_5 : \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$

Gramática na FNG:

$G_5 = ( \{S, B\}, \{a, b\}, P_5, S )$

$P_5 = \{ S \to aB \mid aSB \,;\, B \to b \}$




$M_5 = ( \overset{\Sigma}{\{a, b\}}, \overset{Q}{\{q_0, q_1, q_f\}}, \delta_5, q_0, \overset{A}{\{q_f\}}, \overset{\Gamma}{\{S, B\}} )$