NOME: Felipe Archanjo da Cunha Mendes
RA: 2252740

Limites Laterais

Definição: Seja $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende para a pela direita,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

quando dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a,b)$ e $a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende para b pela esquerda,

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L$$

quando dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a,b)$ e $b - \delta < x < b$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

TEOREMA: SEJAM I UM INTERVALO ABERTO, $a \in I$, $f: I - \{a\} \to \mathbb{R}$. ENTÃO,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

EXEMPLO: $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \nexists$

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x} = \nexists \qquad x<0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0 \qquad x>0$$

EXEMPLO: A FUNÇÃO DE HEAVISIDE (H) É DEFINIDA

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0} H(t) = ?$$

$$t<0 \quad \lim_{t \to 0^-} H(t) = \lim_{t \to 0^-} 0 = 0$$

$$t>0 \quad \lim_{t \to 0^+} = \lim_{t \to 0^+} 1 = 1$$

COMO OS LIMITES LATERAIS SÃO DISTINTOS, TEMOS QUE $\lim_{t \to 0} H(t) = \nexists$

EXEMPLO:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} |x| = \lim_{x \to 1} x = 1$$

$$\lim_{x \to -2} |x| = \lim_{x \to -2} -x = -(-2) = 2$$

$$\lim_{x \to 0} |x| = ?$$

- $x > 0$: $\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

- $x < 0$: $\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = -0 = 0$

COMO OS LIMITES LATERAIS SÃO IGUAIS, TEMOS QUE $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

EXEMPLO:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & se \ x \neq 0 \\ 1 & se \ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$$

$x > 0$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

* $\frac{|x|}{x}$ QUANDO $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$x < 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$

* $|x| = -x$ QUANDO $x < 0$

$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = 1$ QUANDO $x < 0$

QUANDO $x \to 0$ TEMOS QUE O

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \nexists$$

Exemplo:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ 3x - 4 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = ?$$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x - 4 = 3 \cdot 2 - 4 = 2 \; //$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 - 2 = 2^2 - 2 = 2 \; //$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 2 \; //$$

CUIDADO!!

$$\cancel{\lim_{x \to -2} x^2 + 2 = (-2)^2 + 2}$$

$$2^- \neq 2^{-1}$$

A FUNÇÃO SINAL, DENOTADA sgn É DEFINIDA,

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & se\ x < 0 \\ 0, & se\ x = 0 \\ 1, & se\ x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} sgn(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} sgn(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} sgn(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \to 0} |sgn(x)| = ?$$

$$|sgn(x)| = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} |sgn(x)| = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} |sgn(x)| = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} |sgn(x)| = 1 \ //$$

Exemplo:

A função maior inteiro é definida $[[x]]$ = o maior inteiro, que é menor ou igual a x

* $[[3]] = 3$; $[[4,5]] = 4$; $[[\pi]] = 3$; $[[\sqrt{2}]] = 1$
$[[-1/2]] = [[-0,5]] = -1$

* $\lim_{x \to 5} [[x]] = \nexists$ pois quando $5 \leq x < 6 \Rightarrow \lim_{x \to 5^+} [[x]] = 5$

quando $4 \leq x < 5 \Rightarrow \lim_{x \to 5^-} [[x]] = 4$

Exemplo: Os custos de transporte de mercadorias são usualmente calculados por uma fórmula que resulta em custos mais baixos por quilo à medida que o tamanho da carga aumenta. Suponhamos que x quilos seja o peso de uma carga a ser transportada, $C(x)$ o seu custo total é

$$C(x) \begin{cases} 0,8x, & \text{se } 0 < x \leq 50 \\ 0,7x, & \text{se } 50 < x \leq 200 \\ 0,65x, & \text{se } 200 < x \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x<50 \\ x \to 50^-}} C(x) = \lim_{x \to 50^-} 0{,}8x = 0{,}8(50) = 40$$

$$\lim_{\substack{x>50 \\ x \to 50^+}} C(x) = \lim_{x \to 50^+} 0{,}7x = 0{,}7(50) = 35$$

— " —

$$\lim_{\substack{x<200 \\ x \to 200^-}} C(x) = \lim_{x \to 200} 0{,}7x = 0{,}7(200) = 140$$

$$\lim_{x \to 200^+} C(x) = \lim_{x \to 200^+} 0{,}65x = 0{,}65(200) = 130$$

A LEI DE CHARLES PARA GASES AFIRMA QUE A PRESSÃO PERMANECE CONSTANTE, ENTÃO A RELAÇÃO ENTRE VOLUME V QUE UM GÁS OCUPA E SUA TEMPERATURA T (EM °C) É DADA POR $V = V_0\left(1 + \frac{T}{273}\right)$

$T = -273°C$ É O ZERO ABSOLUTO

$$\lim_{T \to -273} V = \nexists \Rightarrow \lim_{T \to -273°C} V = \nexists$$

$$\lim_{T \to -273^+} V = \lim_{T \to -273^+ °C} V_0\left(1 + \frac{T}{273}\right) = V_0 \lim_{T \to -273^+}\left(1 + \frac{T}{273}\right)$$

$$= V_0\left(\lim_{T \to -273^+} 1 + \lim_{T \to -273^+} \frac{T}{273}\right) = V_0\left(1 + \frac{(-273)}{273}\right) = 0$$

Exemplo:

$c \approx 3{,}0 \times 10^8$ m/s

Na teoria de Einstein e fórmula

Contração de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Especifica a relação do comprimento L de um objeto que se move a uma velocidade v com respeito a um observador e seu comprimento L_0 em repouso

$$\lim_{v \to c^-} L = \lim_{v \to c^-} L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \lim_{v \to c^-} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= L_0 \sqrt{\lim_{v \to c^-} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = L_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{1 - 1} = 0 \,//$$

— // —

Supor $v > c > 0 \therefore v^2 > c^2 \quad \frac{v^2}{c^2} > 1$

Absurdo!

$$\therefore 0 > 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 0 \quad \times$$