Exemplo 6.10 Exclusão de símbolos inúteis. ①

$$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$$

(V acima de $\{S, A, B, C\}$; T acima de $\{a, b, c\}$)

$P = \{$

$S \to aAa \mid bBb$

$A \to a \mid S$

$C \to c$

Etapa 1: Qualquer variável gera terminais.

$V_1 = \emptyset$

repita $V_1 = V_1 \cup \{A \mid A \to \alpha \in P$ e $\alpha \in (T \cup V_1)^*\}$

até que o cardinal de V_1 não aumente;

$\{a, b, c\} \cup \emptyset$ inicialmente.

$V_1 = \emptyset$

1ª. $V_1 = \{A, C\}$ //regras que geram terminais $\{a, b, c\}$, A e C ($A \to a$, $C \to c$)

2ª. $V_1 = \{A, C, S\}$ //regras que geram $\{a, b, c\} \cup \{A, C\} = \{a, b, c, A, C\}$

S é adicionado pois $S \to aAa$.

3ª. $V_1 = \{A, C, S\}$ parou de crescer

Como B não está em $\{a, b, c, A, C\} = V_1$ então a regra $S \to bBb$ é excluída.

Gramática resultante Etapa 1:

$$G1 = (\{A, C, S\}, \{a\}, \{S \to aAa, A \to a \mid S, C \to c\}, S).$$

(V_1, T_1, P_1; c?)

P_1 possui os mesmos elementos que P, excetuando-se as produções cujas variáveis não pertençam a V_1.

Etapa 2: Qualquer símbolo é atingível a partir do símbolo inicial.

$T_2 = \emptyset$;

$V_2 = \{S\}$;

repita $V_2 = V_2 \cup \{A \mid X \to \alpha A \beta \in P_1, X \in V_2\}$;

$T_2 = T_2 \cup \{a \mid X \to \alpha a \beta \in P_1, X \in V_2\}$

até que os cardinais de V_2 e T_2 não aumentem;

$P_1 = \{$
$S \to aAa$
$A \to a \mid S$
$C \to c$
$\}$

1 símbolo atingível a partir do inicial.

Suponha que:
$\alpha, \beta \in (T \cup V_1)^*$
$T = \{a, b, c\}$
$V_1 = \{A, C, S\}$
$\boxed{\alpha, \beta \in \{a, b, c, A, C, S\}}$

1ª iteração: $T_2 = \emptyset$;
$V_2 = \{S\}$;

$S \to aAa$

$V_2 = V_2 \cup \{A \mid X \to \alpha A \beta \in P_1,\ X \in V_2\}$

Todas as regras de P_1 com S iniciando.

$[V_2 = \{S\} \cup \{A\} = \{S, A\}$

$T_2 = T_2 \cup \{a \mid X \to \alpha a \beta \in P_1,\ X \in V_2\}$
↳ símbolo atingível pela regra.

$[T_2 = \emptyset \cup \{a\} = T_2 = \{a\}$

2ª iteração:
$T_2 = \{a\}$
$V_2 = \{S, A\}$

O conjunto P_2 possui os mesmos elementos que P_1, excetuando-se as produções cujos símbolos não pertencem a V_2 e T_2.

$P_1 = \{S \to aAa$
$A \to a \mid S$
$\cancel{C \to c}$
$\}$

A produção $C \to c$ é excluída, pois C e c não pertencem a V_2 e T_2 (novos conjuntos de variáveis e terminais).

Gramática Resultante:

$G_2 = (\{S, A\}, \{a\}, \{S \to aAa,\ A \to a \mid S\}, S)$.

Exemplo 6.11: Exclusão das produções vazias

Considere a seguinte gramática livre do contexto:

$G = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S)$, na qual:

$P = \{ S \to aXa \mid bXb \mid \varepsilon,$
$X \to a \mid b \mid Y,$
$Y \to \varepsilon$
$\}$

ETAPA 1: Variáveis que constituem produções vazias. O conjunto das variáveis que geram ε, denotado por V_ε é construído com o algoritmo:

$V_\varepsilon = \{ A \mid A \to \varepsilon \in P \}$;
repita $V_\varepsilon = V_\varepsilon \cup \{ X \mid X \to X_1 \dots X_n \in P$ tal que $X_1, \dots, X_n \in V_\varepsilon \}$
até que o cardinal de V_ε não aumente;

"Inicialmente V_ε recebe os símbolos iniciais de todas as produções que geram ε diretamente".
$P = \{ S \to \varepsilon$ e $Y \to \varepsilon \}$, P tem as produções $S \to \varepsilon$ e $Y \to \varepsilon$.

$V_\varepsilon = \{S, Y\}$

"nas iterações irá olhar para as produções que geram ε indiretamente":
$X \to X_1 \dots X_n \in P$ e $X_1, \dots X_n \in V_\varepsilon$

A produção $X \to Y$ se enquadra, pois $Y \in V_\varepsilon$. Logo, $X \Rightarrow \varepsilon$ passando por Y, já que $Y \to \varepsilon$.

$V_\varepsilon = \{S, Y, X\}$.

ETAPA 2: Exclusão de produções vazias. A gramática resultante desta etapa é:

$G1 = (V, T, P_1, S)$, onde P_1 é construído pelo algoritmo:

$P_1 = \{A \to \alpha \mid A \to \alpha \in P$ e $\alpha \neq \varepsilon\}$;

repita para toda $A \to \alpha \in P_1$, $X \in V_3$ tal que $\alpha = \alpha_1 X \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 \neq \varepsilon$

~~faça~~ faça $P_1 = P_1 \cup \{A \to \alpha_1\alpha_2\}$

até que o cardinal de P_1 não aumente;

[1] Inicialmente P_1 irá receber todas as produções de P que geram ε, $A \to \alpha \in P$ e $\alpha \neq \varepsilon$. [1]

$P_1 = \{S \to aXa \mid bXb,\ X \to a \mid b \mid Y\}$

[1] Nas iterações, para todas produções de P_1 no formato $A \to \alpha$ com $\alpha = \alpha_1 X \alpha_2$, com $X \in V_\varepsilon = \{S, Y, X\}$ e se $\boxed{\alpha_1\alpha_2 \neq \varepsilon}$ então $\boxed{P_1 = P_1 \cup \{A \to \alpha_1\alpha_2\}}$.

$P_1 = \{S \to aXa \mid bXb \mid aa \mid bb,\ X \to a \mid b \mid Y\}$

$S \to aXa$, como $X \in V_\varepsilon \Rightarrow S \to aa$ é adicionada em P_1

$S \to bXb \Rightarrow S \to bb$ também é adicionada a P_1.

$G1 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, \{S \to aXa \mid bXb \mid aa \mid bb,\ X \to a \mid b \mid Y\}, S)$

ETAPA 3: Geração da palavra vazia, se necessário.

Se a palavra vazia pertence à linguagem, então a produção é incluída: $S \to \varepsilon$

$G_2 = (V, T, P_2, S)$ onde $P_2 = P_1 \cup \{S \to \varepsilon\}$

Como a palavra vazia pertence à linguagem, a produção $S \to \varepsilon$ é incluída.

A gramática resultante:

$$G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, \{S \to aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \varepsilon,\ X \to a \mid b \mid Y\}, S)$$

Note que Y, originalmente um símbolo útil, tornou-se um símbolo inútil. Ou seja, a exclusão de produções vazias gerou um símbolo inútil.

De fato, não é qualquer combinação de simplificações de gramática que atinge o resultado desejado.

Ver <u>Simplificações</u> <u>combinadas</u>.

Exemplo 6.12: Exclusão das produções que substituem variáveis.

Considere a seguinte gramática livre do contexto:

$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S\}$, onde:

$P = \{S \to aXa \mid bXb,\ X \to a \mid b \mid S \mid \varepsilon\}$

A exclusão da produção $X \to S$ é como segue:

ETAPA 1: Fecho transitivo de cada variável. Fecho transitivo de uma variável é o conjunto de variáveis que podem substituí-la transitivamente. Por exemplo, se $A \to B$ e $B \to C$, então B e C pertencem ao fecho de A.

Calculamos com o algoritmo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{FECHO-}S = \emptyset \\ \text{FECHO-}X = \{S\} \end{array}}$$

para toda $A \in V$
faça FECHO-$A = \{B \mid A \neq B$ e $A \Rightarrow^{+} B$ usando exclusivamente produções de P da forma $X \to Y\}$;

ETAPA 2: Exclusão das produções que substituem variáveis.
A gramática resultante desta etapa é:

$G_1 = (V, T, P_1, S)$

P_1 é construído pelo algoritmo:

$P_1 = \{A \to \alpha \mid A \to \alpha \in P$ e $\alpha \notin V\}$;
para toda $A \in V$ e $B \in$ FECHO-A
faça
se $B \to \alpha \in P$ e $\alpha \notin V$
então $P_1 = P_1 \cup \{A \to \alpha\}$;

A exclusão das produções da forma $A \to B$.

②

iteração ∅, início: A produção $X \to S$ é descartada.

$$P_1 = \{ S \to aXa \mid bXb,\ X \to a \mid b \mid \varepsilon \}$$

iteração para "S": para toda $A \in V = \boxed{\{S, X\}}$ e $B \in$ FECHO-S $\boxed{= \emptyset}$

A:S

Como fecho de S é vazio P_1 não sofre alterações.

$$P_1 = \{ S \to aXa \mid bXb,\ X \to a, b \mid \varepsilon \}$$

iteração para "X": Fecho-X = {S} B:S

A:X

Se $B \to \alpha \in P$ e $\alpha \notin V \boxed{= \{S, X\}}$

$$\boxed{S \to \underset{\alpha}{aXa} \mid \underset{\alpha}{bXb}}$$

$P_1 = P_1 \cup \{ A \to \alpha \}$;

$= P1 \cup \{ X \to aXa,\ X \to bXb \}$

$$P_1 = \{ S \to aXa \mid bXb,\ X \to a \mid b \mid \varepsilon \mid aXa \mid bXb \}$$

A gramática resultante:

$$G_1 = (\{S, X\}, \{a, b\}, \{ S \to aXa \mid bXb,\ X \to a \mid b \mid \varepsilon \mid aXa \mid bXb \}, S)$$

Simplificações Combinadas

Sequência de Simplificação recomendada:

a) Exclusão das produções vazias;
b) Exclusão das produções que substituem variáveis;
c) Exclusão dos símbolos inúteis.

Uma gramática sem símbolos inúteis, mas com produções que substituem variáveis, o algoritmo para excluir esse tipo de produção pode gerar símbolos inúteis.