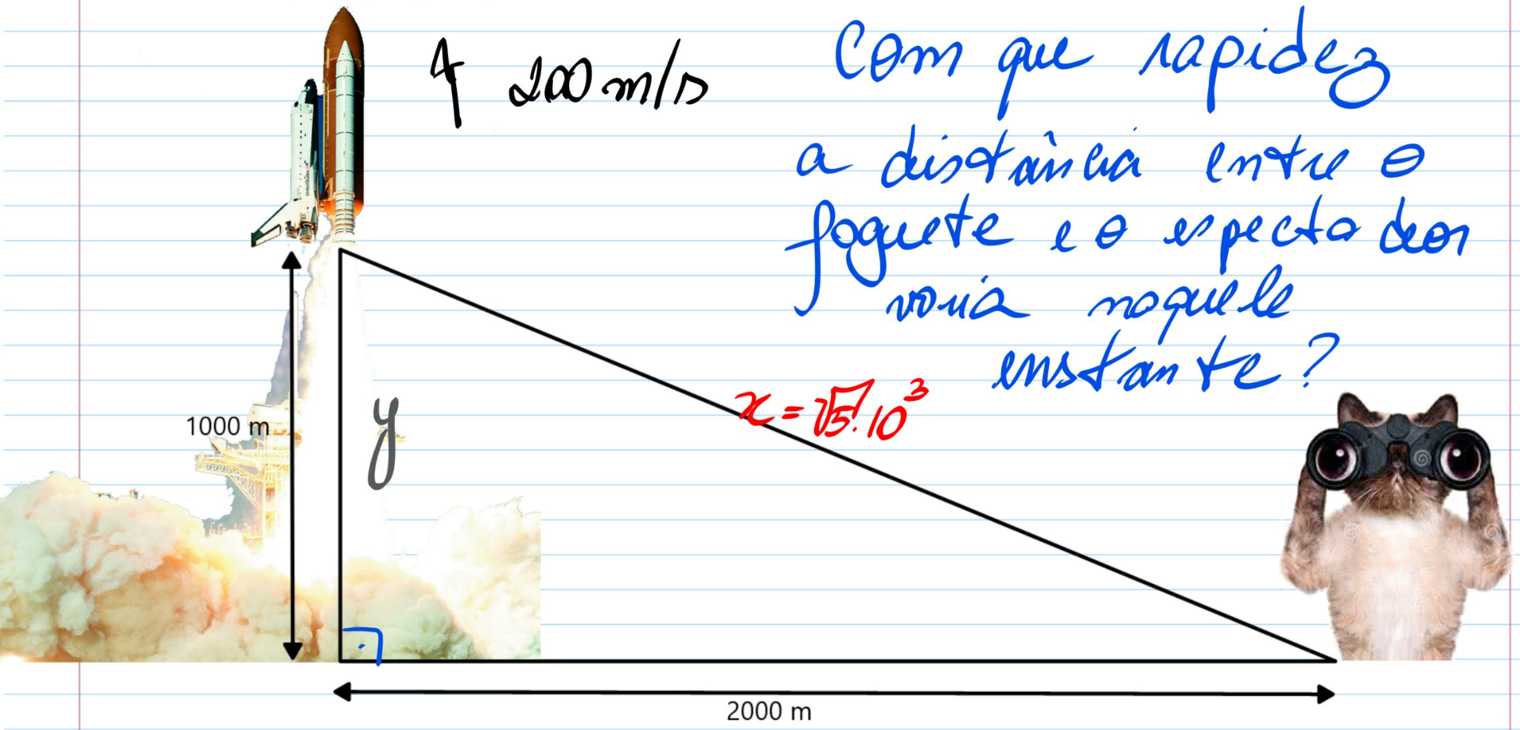
Com que rapidez a distância entre o foguete e o espectador varia naquele instante?



$y \Rightarrow$ representa a altitude do foguete

$x \Rightarrow$ a distância entre o foguete e o espectador.

em qualquer instante de tempo t

São dados em um certo instante de tempo $y = 1000\,m$

e $\dfrac{dy}{dt} = 200\ m/s$

e vamos determinar $\dfrac{dx}{dt}$ naquele instante.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\boxed{x^2 = y^2 + (2000)^2}$$

Quando $y = 1000\,m$

$$x = \sqrt{(1000)^2 + (2000)^2}$$

$$x = \sqrt{5.000.000} = \sqrt{5 \cdot 10^6}$$

$$x = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10^6} = \sqrt{5} \cdot 10^3$$

Derivando implicitamente

$$x^2 = y^2 + (2000)^2$$

em relação t,

$$\frac{d}{dt}(x^2) = \frac{d}{dt}(y^2) + \frac{d}{dt}\left((2000)^2\right)$$

$$2 \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$$

$$x \cdot \frac{dx}{dt} = y \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$$

Assim a variação de x em relação ao

tempo é

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cancel{1000} \cdot 200}{\sqrt{5} \cdot \cancel{1000}} \ m/s$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{200}{\sqrt{5}} \ m/s$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{200 \cdot \sqrt{5}}{5} \ m/s$$

$$\frac{dx}{dt} = 40 \cdot \sqrt{5} \ m/s$$

Determinar os intervalos onde a função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

é crescente e onde é decrescente.

Solução.

1º Passo: Calcular $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 12)$$

$$f'(x) = 3(x+2)(x-4)$$

é contínua em $\mathbb{R}$

Os zeros de $f'(x)$ são nos pontos $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$.

Esses pontos determinam os intervalos a serem analisados a "monotocidade".

$(-\infty, -2)$, $(-2, 4)$ e $(4, +\infty)$

Em $(-\infty, -2)$ $\quad f'(x) = 3 \cdot (x+2)(x-4)$

$-3 \in (-\infty, -2)$

$$f'(-3) = 3 \cdot (-3+2)(-3-4)$$
$$= 3 \cdot (-1)(-7) = 21 > 0$$

Podemos afirmar que f é crescente em $(-\infty, -2)$

Em $(-2, 4)$, $\quad f'(x) = 3 \cdot (x+2)(x-4)$

$0 \in (-2, 4)$ $\quad f'(0) = 3 \cdot (0+2)(0-4)$

$$f'(0) = 3 \cdot 2 \cdot (-4) = -24 < 0$$

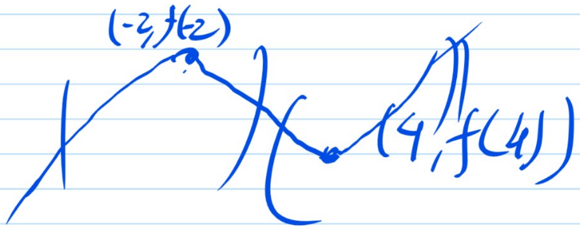
então f é decrescente em $(-2, 4)$

Em $(4,+\infty)$ $\quad f'(x) = 3.(x+2)(x-4)$

$5 \in (4,+\infty)$ $\quad f'(5) = 3.(5+2)(5-4)$

$= 3.7\ (1) = +21 > 0$

então f é crescente em $(4,+\infty)$



1.

$$g(x) = \sqrt[5]{x^2}$$

$$g'(x) = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$$

$-\frac{5}{5}$

$$g'(x) = \frac{2}{5}\ \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

g' é descontínua em $x=0$

Os intervalos a serem estudados a "monotonicidade" são $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$

Para $x=-1 \in (-\infty,0)$ $\quad g'(-1) = \frac{2}{5\sqrt[5]{(-1)^3}} = -\frac{2}{5} < 0$

então g é decrescente em $(-\infty, 0)$.

Para $x = 1 \in (0, +\infty)$

$$g'(1) = \frac{2}{5\sqrt[5]{1^3}} = \frac{2}{5} > 0$$

então g é crescente em $(0, +\infty)$

Então 0 é um mínimo local

como $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x^2} = +\infty = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[5]{x^2}$

podemos afirmar que 0 é um mínimo global.

Determinação de Receita Máxima

Uma empresa determinou que a receita total (em Reais) para um produto pode ser modelado por

$$R(x) = R = -x^3 + 450x^2 + 52.500x$$

em que x é o número de unidades produzidas (e vendidas). Qual é o nível de produção que gera receita máxima?

Solução Para maximizar a receita, determinar os pontos críticos.

$$R = -x^3 + 450x^2 + 52.500x$$

$$\frac{dR}{dx} = -3x^2 + 900x + 52.500$$

$$\frac{dR}{dx} = -3(x^2 - 300x - 17.500)$$

$$\frac{dR}{dx} = -3(x-350)(x+50)$$

os pontos críticos são 350, −50

então −50 não faz parte do domínio de R,

O ponto crítico conveniente é $x = 350$

Analisar os intervalos de $[0, 350)$ e $(350, +\infty)$

$$\frac{dR}{dx} = -3(x-350)(x+50)$$

Em $0 \in [0,350) \Rightarrow \frac{dR}{dx}(0) = -3.(-350).50$

$$= 52.500 > 0$$

então R é crescente

Em $400 \in (350, +\infty)$

$$\frac{dR}{dx}(400) = -3(400)^2 + 900 \cdot 400 + 52.500$$

$$= -480.000 + 360.000 + 52.500$$

$$= -120.000 + 52.500$$

$$= -67.500 < 0$$

então R decrescente em $(350, +\infty)$

Assim 350 é um máximo local.

$$R(350) = -(350)^3 + 450.(350)^2 + 52.500(350)$$

$$= -42.875000 + 55.125000 + 18.375.000$$

$$= 30.625.000$$