NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740

ANTIDERIVADAS E INTEGRAIS INDEFINIDAS

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

ONDE $f(x)$ É CONHECIDA.

O PROCESSO DE DETERMINAÇÃO DE UMA FUNÇÃO A PARTIR DE SUA DERIVADA É O OPOSTO DA DIFERENCIAÇÃO E É CHAMADO DE ANTIDIFEREN-CIAÇÃO.

SE FOR POSSÍVEL ACHAR UMA FUNÇÃO $y(x)$ CUJA DERIVADA É $f(x)$, ENTÃO y É CHAMADA ANTIDERIVADA DE f

EXEMPLO: $f(x) = 3$

$F(x) = 3x$, TEMOS $F'(x) = 3 = f(x)$

ENTÃO F É A ANTIDERIVADA DE f

EXEMPLO: $g(x) = 2x+1$

$G(x) = x^2+x$

$G'(x) = (x^2+x)' = 2x+1 = g(x)$

G é uma antiderivada de g

EXEMPLO: $h(x) = \cos(x)$

$H(x) = \text{sen}(x)$

$H'(x) = (\text{sen}(x))' = \cos(x) = h(x)$

H é uma antiderivada de h

EXEMPLO: $f(x) = e^x$

$F(x) = e^x \therefore F'(x) = e^x = f(x)$

e^x é antiderivada dela mesma

NOTE QUE SE $F(x)$ É UMA ANTIDERIVADA DE $f(x)$, ENTÃO $F(x)+C$, ONDE $C \in \mathbb{R}^*$ TAMBÉM É UMA DERIVADA

$(F(x)+C)' = F'(x) + (C)' = f(x)$

DEFINIÇÃO: A COLEÇÃO DE TODAS AS ANTI-DERIVADAS DA FUNÇÃO $f(x)$ É CHAMADA INTEGRAL INDEFINIDA DE f COM RELAÇÃO A x, E DENOTAMOS POR

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

ONDE $F(x)$ É UMA ANTIDERIVADA DE f

OBS. O SÍMBOLO $\int$ É UM S MEDIEVAL USADO POR LEIBNIZ COMO ABREVIATURA DA PALAVRA SUMMA (SOMA)

A COMBINAÇÃO $\int \ldots dx$ COMO UM SÍMBOLO ÚNICO

EXEMPLO:

$$\int 3\,dx = 3x + C$$

$$\int (2x+1)\,dx = x^2 + x + C$$

$$\int \cos(t)\,dt = \operatorname{sen}(t) + C$$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Lembrando que a operação de diferenciação é uma operação linear, ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left[c\,F(x)\right] = c \cdot \frac{d}{dx}\left[F(x)\right] \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) \pm G(x)\right] = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(x)$$

Dessas propriedades obtemos que a integração é uma operação linear

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

Seja F a antiderivada de $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$

$$\int c\,f(x)\,dx = D(x) + C \quad \therefore \quad D'(x) = c\,f(x)$$

$$D = c\int f(x)\,dx = c\left[F(x) + C_1\right] = cF(x) + cC_1$$

$$(cF(x) + \cancel{cC_1})' = c\,F'(x) = c\,f(x)$$

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1 \quad e \quad \int g(x)\,dx = G(x) + C_2$$

$$\left[(F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2)\right]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$$

Exemplos: $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx$

$= \ln x + \int x^{-2} dx$

$= \ln x + \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

$= \ln x - \dfrac{1}{x} + C$ //

Exemplo: $\int \left(\frac{x+1}{x}\right) dx$

$= \int \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx$

$= \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

$= \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx$

$= x + \ln(x) + C$

Exemplo: $\int (5^x + e^{-1}) dx$

$= \int 5^x dx + \int e^{-1} dx$

$= \dfrac{5^x}{\ln 5} + e^{-1} \int dx$

$= \dfrac{5^x}{\ln 5} + e^{-1} x + C$

Movimento Retilíneo

Se uma partícula se desloca em movimento retilíneo ao longo de uma linha reta - eixo x - o movimento

é descrito por sua função posição $x = x(t)$.

A velocidade da partícula $v(t)$ é a derivada da função posição em relação ao tempo

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

A aceleração $a(t)$ é a derivada da velocidade em relação ao tempo

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Em situações típicas onde sabemos a aceleração da partícula $a(t)$,

$x(0) = x_0$ - posição inicial

$v(0) = v_0$ - velocidade inicial

PARA ACHARMOS A FUNÇÃO X(t) É RESOLVER 2 PROBLEMAS DE VALOR INICIAL (PVI)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v(t) & x(0) = x_0 \quad (1) \\ \dfrac{dv}{dt} = a(t) & v(0) = v_0 \quad (2) \end{cases}$$

SABENDO A FUNÇÃO $a(t)$.

ACELERAÇÃO CONSTANTE:

SUPONHAMOS QUE $\frac{dv}{dt} = a$ (a é cte)

A ANTIDERIVADA $v = at + c$

$$\int \frac{dv}{dt}\, dt = \int a\, dt$$

$$v = at + C \qquad v(0) = v_0$$

$$v_0 = v(0) = a(0) + c = c$$

$$v = at + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \qquad x = x(0)$$

$$\int \frac{dx}{dt}\, dt = \int v(t)\, dt$$

$$x(t) = \int (at + v_0)\, dt \quad \therefore \quad x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C$$

$$x_0 = x(0) = \frac{a(0)^2}{2} + v_0(0) + c = c$$

Portanto se a aceleração é constante e então a função movimento retilíneo é dado por

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 \text{, onde}$$

x_0 é a posição inicial e v_0 é a velocidade inicial