Determinar os extremos relativos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$$

usando o teste da segunda derivada

Solução:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24$$
$$= 3(x^2 - 2x - 8) = 3(x+2)(x-4)$$

Então $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$ são pontos críticos da função

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

Como $f''(-2) = 6(-2-1) = 6 \cdot (-3) = -18 < 0$

que $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24(-2) + 32$
$$= -8 - 12 + 48 + 32$$
$$= -20 + 80 = 60$$

é um máximo relativo.

$f''(4) = 6(4-1) = 6 \cdot 3 = 18 > 0$

o teste da segunda derivada garante

que $f(4) = 4^3 - 3 \cdot (4)^2 - 24 \cdot (4) + 32 = -48$

é um mínimo relativo.

Considerando que o total de vendas S (em milhões de reais) de uma fabricante de computadores, se relaciona com a quantidade de dinheiro x (em milhões de reais) que a empresa gasta anunciando seus produtos pela fórmula.

$$S = -0{,}01x^3 + 1{,}5x^2 + 200 \quad (0 \leq x \leq 100)$$

Encontre o ponto de inflexão?

Solução. $S' = -0{,}03x^2 + 3x$

$S'' = -0{,}06x + 3.$

Resolvendo a equação $S'' = -0{,}06x + 3 = 0$

$$-0{,}06x + 3 = 0$$

$$-0{,}06x = -3$$

$$x = \frac{-3}{-0{,}06} = \frac{3}{6 \times 10^{-2}} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{10^{-2}} = \frac{3}{6} \cdot 10^{2}$$

$$x = \frac{300}{6} = 50$$

único candidato a ponto de inflexão

$$S''(x) = -0{,}06x + 3$$

Para $x = 10 < 50$,

$$S''(10) = -0{,}06(10) + 3 = -0{,}6 + 3 = 2{,}4 > 0$$

concavidade para cima

e $x = 100 > 50$

$$S''(100) = -0{,}06(100) + 3 = -6 + 3 = -3 < 0$$

concavidade para baixo.

Portanto $(50, S(50))$ é o ponto de inflexão de S (ponto de retorno decrescente)

$$S(50) = -0{,}01(50)^3 + 1{,}5 \cdot (50)^2 + 200$$

$$= -1 \times 10^{-2} \cdot (125000) + 15 \times 10^{-1} \cdot (2500) + 200$$

$$= -1250 + 3750 + 200 = 2700$$

$(50, 2700)$ é o ponto de inflexão.

L' Hospital

$n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \to +\infty}{x^n \to +\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \to +\infty}{n \cdot x^{n-1} \to +\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n \cdot (n-1)\, x^{n-2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n \cdot (n-1)(n-2) \cdot x^{n-3}} = \dots = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(n-1))\, x^{n-(n-1)}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!\, x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

Portanto $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{tg\left(\frac{1}{x}\right)}{arctg\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$(tg(u))' = sec^2(u) \cdot u'$$

$$(arctg(u))' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$u = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$u' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{sec^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cancel{\left(-x^{-2}\right)}}{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \cancel{\left(-x^{-2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[sec^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{sec^2\left(\overset{0}{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}\right)}{\frac{1}{1+\overset{0}{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}}}$$

$$= \frac{\sec^2(0)}{\frac{1}{1+0}} = \frac{1}{1} = 1 \; //$$

Outra maneira de Calcular

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

Usando L'Hospital mostre que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Solução:

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\ln(f(x)) = \ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$$

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\ln(f(x)) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$(\ln(u))' = \frac{1}{u} \cdot u' \quad ; \quad u = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow u' = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \cancel{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}}{\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

Então

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(f(x)) = 1$$

$$e^{\ln\left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)} = e^1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$