

# Máquinas de Turing

(1)

→ Modelos até agora: Autômatos Finitos → pequena quantidade de Memória.

Autômatos com Pilha → memória ilimitada utilizável na pilha.

Não são modelos de computadores de propósito geral.

## Máquinas de Turing

→ Modelo muito mais poderoso, primeiro proposto por Alan Turing em 1936.

Semelhante a um autômato finito, mas com uma memória ilimitada e irrestrita, uma MT é um modelo muito mais acurado de um computador de propósito geral.

Uma máquina de Turing pode fazer tudo que um computador real pode fazer. Entretanto, mesmo uma máquina de Turing não pode resolver certos problemas. Esses problemas estão além dos limites teóricos da computação.

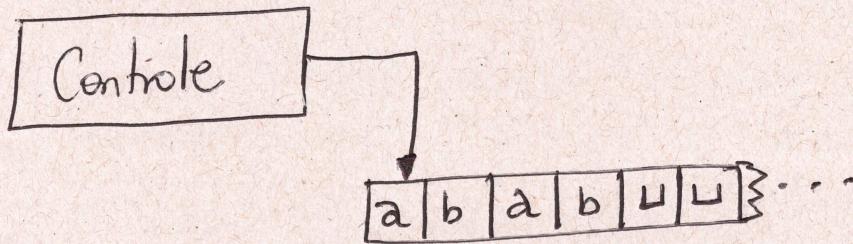
O modelo da Máquina de Turing usa uma fita infinita como sua memória ilimitada. A cabeça de fita pode ler e escrever símbolos e mover-se sobre a fita.

Inicialmente, a fita contém apenas a cadeia de entrada e está em branco em todo o restante. Se a máquina precisa armazenar informações, ela pode escrevê-las sobre a fita.

Para ler a informação escrita, a máquina pode mover sua cabeça de volta para a posição onde a informação foi escrita. ②

A máquina continua a computar até que <sup>de alguma</sup> resolva produzir uma saída.

As saídas aceite ou rejeite são obtidas entrando em estados de aceitação ou de ~~rejeição~~ rejeição. Se não entrar em um estado de aceitação ou rejeição, ela continuará para sempre, nunca parando.



Resumo das diferenças entre AFs e MTs.

1. Uma MT pode tanto escrever sobre a fita quanto ler a partir dela.
2. A cabeça de leitura-escrita pode mover-se tanto para a esquerda quanto para direita.
3. A fita é infinita.
4. Os estados especiais para rejeitar e aceitar fazem efeito imediatamente.

Vamos introduzir a MT  $M_1$  para testar a rete 3  
número na linguagem  $B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$ . Veremos  
que  $M_1$  aceite sua entrada se for um membro de  $B$  e  
rejeite caso contrário.

O algoritmo de  $M_1$ :

$M_1$  = "Sobre a cadeia de entrada  $w$ :

1. Faça um zigue-zague ao longo da fita checando posições correspondentes de ambos os lados do símbolo  $\#$  para verificar se elas contêm o mesmo símbolo. Se elas não contêm, ou se nenhum  $\#$  for encontrado, rejeite. Marque os símbolos à medida que eles são verificados para manter registro de quais símbolos têm correspondência.
2. Quando todos os símbolos à esquerda do  $\#$  tiverem sido marcados, verifique a existência de algum símbolo remanescente à direita de  $\#$ . Se houver algum símbolo, rejeite; Caso contrário, aceite.

Exemplo: entrada 011000#011000.

↓  
011000 # 011000 ↴ ...  
x11000 # 011000 ↴  
x11000 # x11000 ↴  
↓  
x11000 # x11000 ↴  
xx1000 # x11000 ↴  
:  
xxxxxx # xxxx xxxx ↴  
Aceita.

## Definição Formal de uma Máquina de Turing

(4)

A principal definição de uma MT é a função de transição  $\delta$ , pois ela nos diz como a máquina vai de um passo para o próximo: Para uma MT,  $\delta$  toma a forma:

$$Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}.$$

Quando a MT está em um certo estado  $q$  e a cabeça está sobre uma célula da fita contendo um símbolo  $a$  e se  $\delta(q, a) = (r, b, E)$ , a máquina escreve o símbolo  $b$  substituindo o  $a$  e vai para o estado  $r$ . O terceiro componente é  $E$  ou  $D$  e indica se a cabeça move para a esquerda ou direita após escrever.

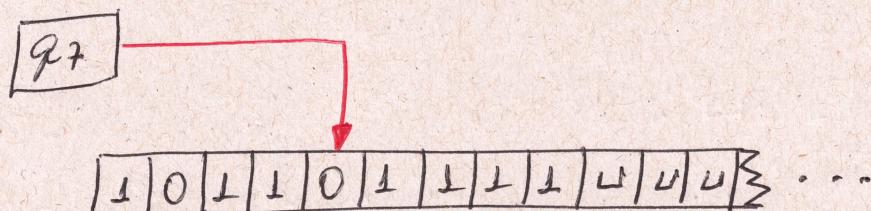
Uma Máquina de Turing é um 7-upla  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$ , onde  $Q, \Sigma, \Gamma$  são todos conjuntos finitos e

1.  $Q$  é o conjunto de estados
2.  $\Sigma$  é o alfabeto de entrada sem o símbolo em branco  $\sqcup$ ,
3.  $\Gamma$  é o alfabeto de fita, onde  $\sqcup \in \Gamma$  e  $\Sigma \subseteq \Gamma$ ,
4.  $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$  é a função de transição,
5.  $q_0 \in Q$  é o estado inicial,
6.  $q_{aceita} \in Q$  é o estado de aceitação, e
7.  $q_{rejeita} \in Q$  é o estado de rejeição, onde  $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$ .

A medida que uma máquina de Turing computa, (5)  
nudanças ocorrem no estado atual, no conteúdo  
atual da fita e na posição atual da cabeça.

Um possível valor desses três itens é denominado configuração da MT.

Configurações são frequentemente representadas de uma maneira especial. Para um estado  $q$  e duas cadeias  $u$  e  $v$  sobre o alfabeto de fita  $\Gamma$ , escrevemos  $uqv$  para ~~uma~~<sup>a</sup> configuração na qual o estado atual é  $q$ , o conteúdo atual da fita é  $uv$  e a posição atual da cabeça é sobre o primeiro símbolo de  $v$ . A fita contém apenas brancos após o último símbolo de  $v$ . Por exemplo,  $1011q_701111$  representa a configuração quando a fita é  $101101111$ , o estado atual é  $q_7$ , e a cabeça está sobre o segundo 0. Como representado na figura:



Digamos que a configuração  $C_1$  origina a configuração  $C_2$ , se a MT puder legitimamente ir de  $C_1$  para  $C_2$  em um único passo.

Suponhamos que tenhamos  $a, b, c$  em  $\Gamma$ , assim como  $u$  e  $v$  em  $\Gamma^*$  e os estados  $q_i$  e  $q_j$ . Nesse caso  $uaq_i bv$  e  $uq_j av$  são duas configurações. Digamos que:  $uaq_i bv$  origina  $uq_j av$

6

Se a função de transição  $\delta(q_i, b) = (q_j, c, E)$ .

Isto sobre o caso em que a máquina de Turing se move para a esquerda.

Para um movimento à direita, digamos que,

$u_a q_i b v$  origina  $u_a c q_j v$

Se  $\delta(q_i, b) = (q_j, c, D)$ .

Casos especiais ocorrem quando a cabeça estiver em uma das extremidades da configuração.

Na esquerda:  $q_i b v$  origina  $q_j c v$ .

Se a transição envolver um movimento para a esquerda (pq cuidarmos para que a máquina não passe da extremidade esquerda da fita). e se ela origina  $c q_i v$  para a transição que envolve um movimento para a direita.

Na direita: a configuração  $u_a q_i$  é equivalente a  $u_a q_i L$  porque assumimos que brancos vêm após a parte da fita representada na configuração.

Configuração inicial: de  $M$  sobre  $w$  é  $q_0 w$ . (indicar que a máquina está no estado inicial  $q_0$  com a cabeça na posição mais à esquerda da fita).

Em uma configuração de aceitação, o estado da configuração é aceita.

Em uma configuração de rejeição, o estado é rejeita.

Configurações de aceitação ou rejeição são configurações de parada e portanto não originam configurações adicionais.

Dado que a máquina é definida para parar quando está nos estados aceita e rejeita, poderiam equivalente mente ter definido a função de transição como tendo a forma:

$S: Q' \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$ , onde  $Q'$  é  $Q$  sem aceita e rejeita.

Uma MT aceita a entrada  $w$  se uma sequência de configurações  $C_1, C_2, \dots, C_k$  existe onde:

1.  $C_1$  é a configuração inicial de  $M$  sobre a entrada  $w$ ,
2. cada  $C_i$  origina  $C_{i+1}$ .
3.  $C_k$  é uma configuração de aceitação.

A coleção de cadeias que  $M$  aceita é a linguagem de  $M$ , ou a linguagem reconhecida por  $M$ , denotada por  $L(M)$ .

Definição 3.5: Chame um linguagem de Turing-reconhecível, se alguma MT a reconhece.

É chamada de linguagem recursivamente enumerável em alguns materiais.

Quando iniciamos uma MT sobre uma entrada, <sup>8)</sup>  
três resultados são possíveis. A máquina pode  
aceitar, rejeitar ou entrar em loop (a máquina simples-  
mente não para), um comportamento simples ou  
complexo que nunca leva a um estado de parada.

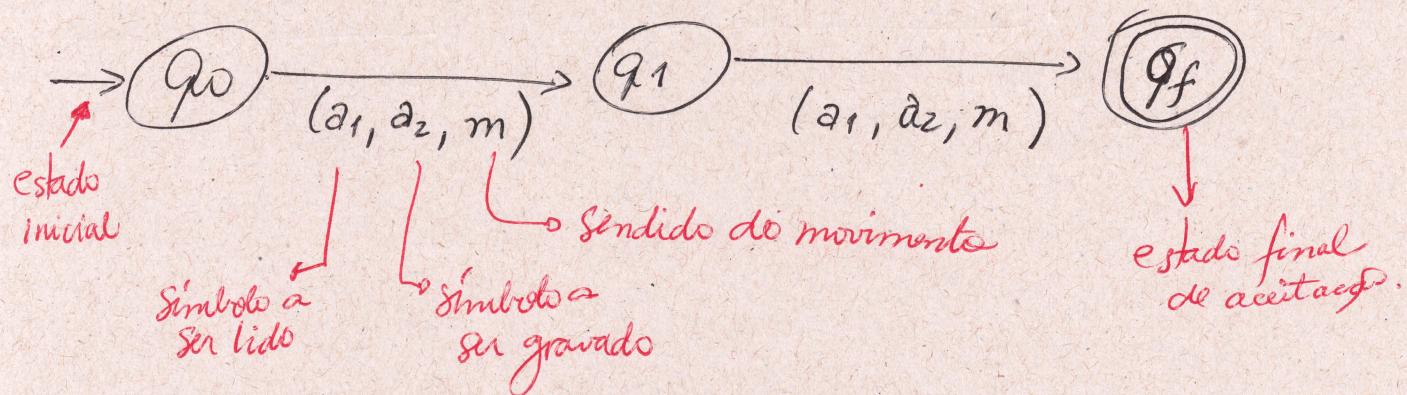
As vezes distinguir uma máquina que está em loop  
de uma que está meramente levando um tempo  
longo é difícil. Por essa razão, preferimos máquinas  
de Turing que param sobre todas as entradas; tais  
máquinas nunca entram em loop. Essas máquinas  
são chamadas de decisões, porque sempre  
tomam uma decisão de aceitar ou rejeitar.  
Um decisor que reconhece alguma linguagem é  
dito decidir essa linguagem.

Definição 3.6: Chame uma linguagem de Turing-decidível  
ou simplesmente decidível se alguma  
MT a decide.  
Ela é sua linguagem recursiva.

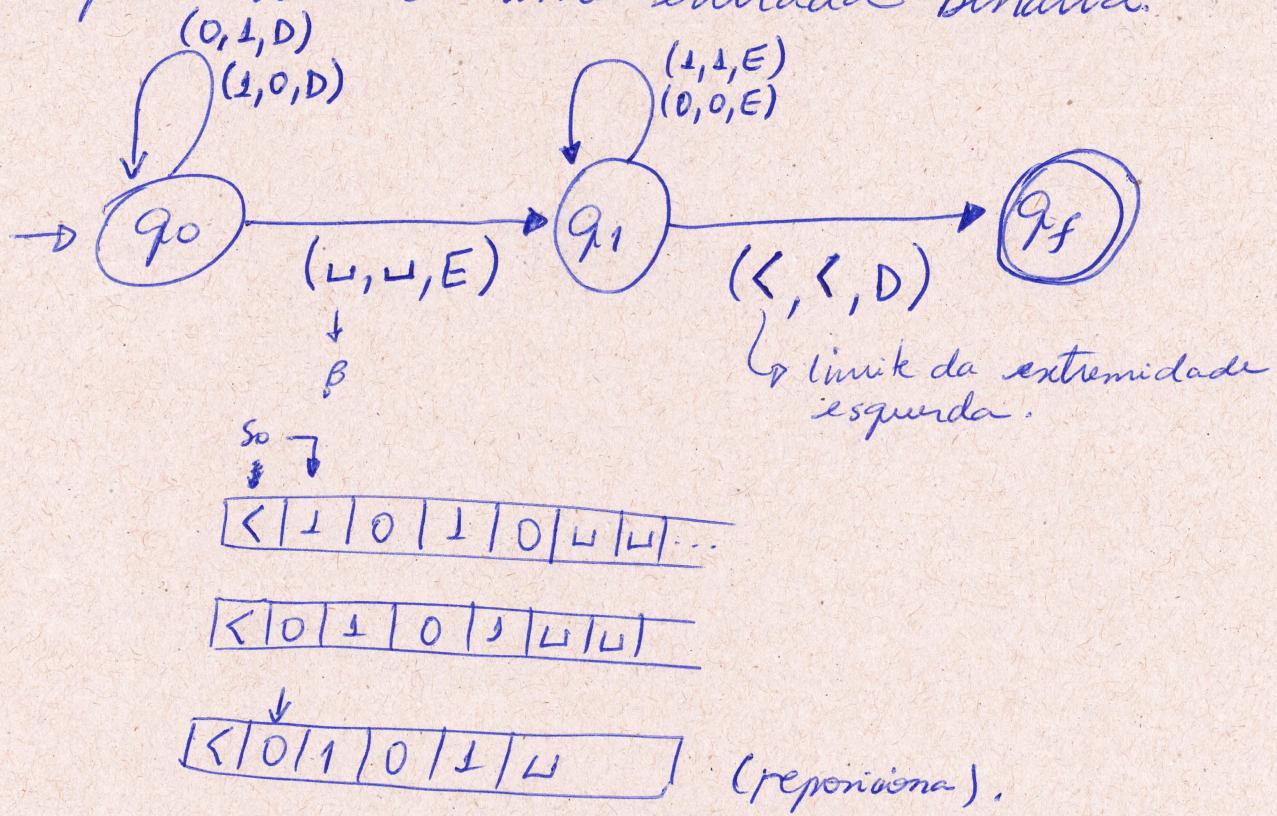
Toda linguagem decidível é Turing-reconhecível.

## Representação por diagrama

9



Exemplo: Um MT transdutora que devolve o complemento de uma entrada binária.



Exemplo 3.9

Descrição formal de  $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceite}, q_{rejeit})$ , a MT que decide a linguagem  $B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$ .

- $Q = \{q_1, \dots, q_{14}, q_{aceite}, q_{rejeit}\}$ ,
- $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ , e  $\Gamma = \{0, L, \#, x, \sqcup\}$

