NOME: FELIPE ARCHANJO DA CUNHA MENDES
RA: 2252740

TESTE DA 1ª E 2º DERIVADA

DISCUTIMOS MAXIMO E MINIMO DE UMA FUNCAO EM $[a, b]$

AGORA VAMOS DISCUTIR EM INTERVALOS ARBITRARIOS

$f(c) \geq f(x)$ $\forall x \in D(f)$, c É CHAMADO DE MAXIMO ABSOLUTO

$f(c) \leq f(x)$ $\forall x \in D(f)$, c É CHAMADO DE MINIMO ABSOLUTO.

COSTUMA-SE USAR A PALAVRA GLOBAL NO LUGAR DE ABSOLUTO.

PARA ACHAR OS PONTOS CRITICOS DE f É ACHAR AS RAIZES DE $f'(x) = 0$

LEMBRANDO:

$f'(x) > 0$ ENTÃO f É CRESCENTE, ONDE $x \in I$

$f'(x) < 0$ ENTÃO f É DECRESCENTE, ONDE $x \in I$

DEFINIÇÃO: DIZEMOS QUE:

- ▸ $f'(x) < 0$ À ESQUERDA DE c, SE $f'(x) < 0$ EM ALGUM INTERVALO (a, c)

- ▸ $f'(x) < 0$ À DIREITA DE c, SE $f'(x) < 0$ EM ALGUM INTERVALO (c, b)

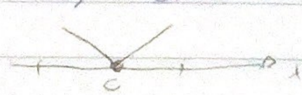
- ▸ $f'(x) > 0$ À ESQUERDA DE c, SE $f'(x) > 0$ EM ALGUM INTERVALO (a, c)

- ▸ $f'(x) > 0$ À DIREITA DE c, SE $f'(x) > 0$ EM ALGUM INTERVALO (c, b)

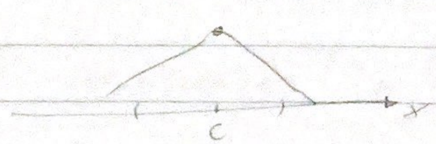
TEOREMA: (TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA)

SUPONHAMOS QUE f SEJA CONTÍNUA E DIFERENCIÁVEL EM I, EXCETO EVENTUALMENTE EM $c \in I$.

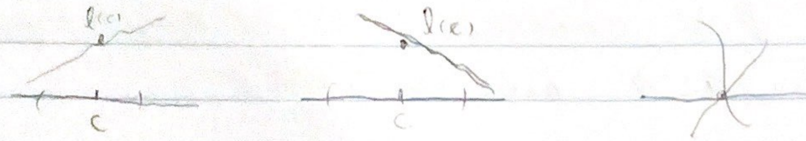
① SE $f'(x) < 0$ À ESQUERDA DE c E $f'(x) > 0$ À DIREITA DE c, ENTÃO c É UM MÍNIMO LOCAL DE f



② SE $f'(x) > 0$ À ESQUERDA DE c E $f'(x) < 0$ À DIREITA DE c, ENTÃO c É UM MÁXIMO LOCAL



③ SE $f'(x) > 0$ TANTO À ESQUERDA QUANTO À DIREITA DE c, OU $f'(x) < 0$ TANTO À ESQUERDA QUANTO À DIREITA DE c, $f(c)$ NÃO SERÁ NEM MÁXIMO E NEM MÍNIMO.



EXEMPLO: $f(x) = x + \frac{4}{x}$ $\quad x \in (0, +\infty)$

#PROCURAR PONTO CRÍTICO

• $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

* DA EQ:

$1 - \frac{4}{x^2} = 0 \therefore x^2 - 4 = 0 \therefore (x+2)(x-2) = 0$

RAÍZES: $x = \pm 2$

• COMO $D(f) = (0, +\infty)$, TEMOS SOMENTE $x = 2$ É UM PONTO CRÍTICO DA FUNÇÃO

COMPARANDO, TOMANDO $x = 1 < 2$, TEMOS

$f'(1) = 1 - \frac{4}{1^2} = 1 - 4 = -3 < 0$

TEMOS QUE f É DECRESCENTE À ESQUERDA DE 2, OU SEJA, $f'(x) < 0$ À ESQUERDA DE 2.

O INTERVALO EM DESTAQUE É $(0, 2)$

NOTE QUE $x = 10 > 2$, TEMOS

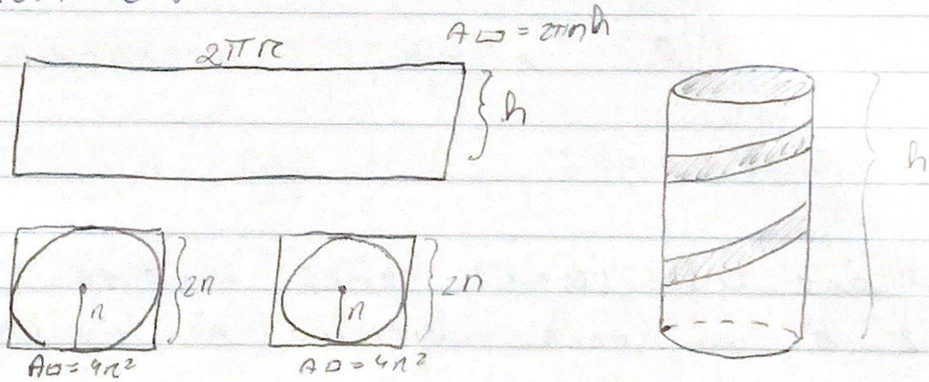
$$f'(10) = 1 - \frac{4}{10^2} = 1 - \frac{4}{100} = 1 - 0{,}04 = 0{,}96 > 0$$

ENTÃO f É CRESCENTE PARA $(2, +\infty)$, OU SEJA $f'(x) > 0$ À DIREITA DE 2

PELO TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA, GARANTO QUE 2 É UM MÍNIMO GLOBAL (ABSOLUTO) DA FUNÇÃO f.

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4 \,//$$

EXEMPLO:



QUERO QUE MINHA LATA TENHA CAPACIDADE PARA $125\ in^3$ ($\approx 2{,}04838$ litros), QUAIS OS VALORES DE r (RAIO) E h (ALTURA) QUE MINIMIZEM O CUSTO DE PRODUÇÃO?

Área total do cilindro com tampa e base:

$$A(c) = 8r^2 + 2\pi r h$$

Como $\begin{cases} V = 125 \\ V = \pi r^2 h \end{cases}$

De $125 = \pi r^2 h \therefore h = \dfrac{125}{\pi r^2}$

Então $A(r) = 8r^2 + 2\pi r \left(\dfrac{125}{\pi r^2}\right)$

$$A(r) = 8r^2 + \frac{250}{r}$$

• $A'(r) = 16r - \dfrac{250}{r^2}$

• $16r - \dfrac{250}{r^2} = 0$

$16r^3 - 250 = 0$

$r^3 = \dfrac{250}{16} = \dfrac{125}{8} \therefore \sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} = r$

$r = \dfrac{5}{2} = 2,5$ dm

$Dom(A) = (0, +\infty)$

• Em $(0, 2,5)$, tomamos $x = 1$

$$A'(1) = 16 \cdot 1 - \frac{250}{1^2} = -234 < 0$$

A FUNÇÃO É DECRESCENTE EM $(0, 2{,}5)$, OU SEJA, $A'(r) < 0$ À ESQUERDA DE 2,5

* EM $(2{,}5, +\infty)$, TOMAMOS $r = 10$

$$A'(10) = 16 \cdot 10 - \frac{250}{10^2} = 160 - \frac{250}{100} = 157{,}5 > 0$$

$A(r)$ É CRESCENTE $(2{,}5, +\infty)$, OU SEJA, $A'(r) > 0$ À DIREITA DE 2,5.

* PELO TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA, 2,5 É O MÍNIMO GLOBAL.

* LEMBRANDO, $h = \frac{125}{\pi r^2}$

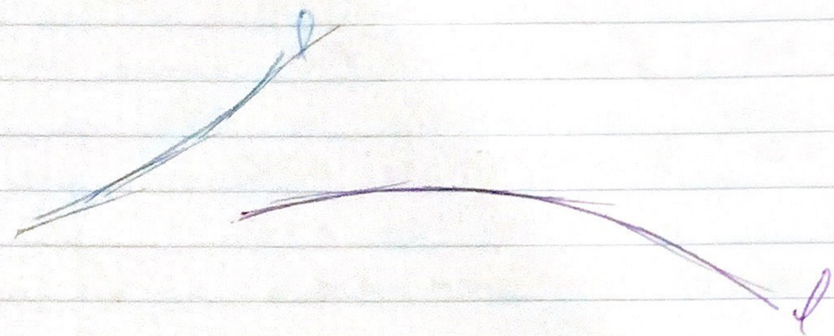
$$h(2{,}5) = \frac{125}{\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{125}{\pi \cdot \frac{25}{4}} = \frac{20}{\pi} = 6{,}37\,cm$$

PORTANTO, PARA $r = 2{,}5$ E $h = \frac{20}{\pi}$ SÃO AS MEDIDAS PARA QUE A ÁREA DA LATA SEJA MÍNIMA

TESTE DA SEGUNDA DERIVADA

$f''(x) > 0 \therefore f'$ é crescente $x \in I$

$f''(x) < 0 \therefore f'$ é decrescente $x \in I$



Ponto crítico $c \Rightarrow f'(c) = 0$

Teorema: (Teste da 2º derivada)

Suponhamos que a função f seja duas vezes diferenciável em I (aberto), contendo um ponto crítico $c \in I$.

Então: 1) Se $f''(x) > 0$ em I, $f(c)$ é um mínimo de f em I.

2) Se $f''(x) < 0$ em I, $f(c)$ é um máximo de f em I.

Obs. $f''(c) = 0$

$f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ e $h(x) = x^3$

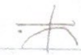
$f'(x) = 4x^3$, $g'(x) = -4x^3$ e $h'(x) = 3x^2$

$x=0$ é um ponto crítico

$f''(x)=12x^2$, $g''(x)=-12x^2$ e $h''(x)=6x$

$f''(0)=0$; $f''(x)>0$ $x\neq 0$ MIN GLOBAL

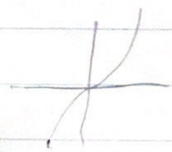
$g''(0)=0$; $g''(x)<0$ $x\neq 0$ MÁXIMO GLOBAL



$h''(0)=0$; $h''(x)>0$ se $x>0$

$h''(x)<0$ se $x<0$

↳ não é max nem min



EXEMPLO: $f(x)=x^3-3x^2+3$, $I=\mathbb{R}$

* Achar pontos críticos

• $f'(x)=3x^2-6x$

• $3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

Temos que $x=0$ e $x=2$ são pontos críticos de f.

Os intervalos para analisar se 0 e 2 são máximos ou mínimos da função.

$(-\infty,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$

$(-\infty,2)$ $(0,+\infty)$

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$

Para $x = 0$, analisar no intervalo $(-\infty, 1)$

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$

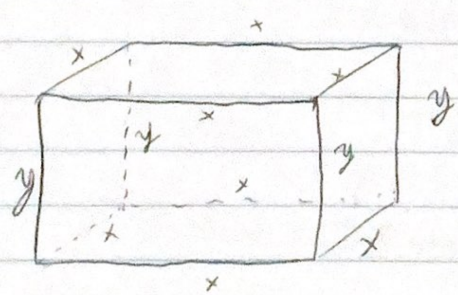
Então $x = 0$ é um máximo local de f no intervalo $(-\infty, 1)$

Para $x = 2$, analisar no intervalo $(1, +\infty)$

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 12 - 6 = 6 > 0$

Então 2 é um mínimo local em $(1, +\infty)$

Exemplo:



Queremos que o volume seja $500\ cm^3$.
Quais as dimensões de x e y para que o custo do material da caixa seja mínimo?

$A(\text{CUBO}) = x^2 + 4xy$

$V = 500 = x^2 y \therefore y = \frac{500}{x^2}$

TROCANDO NA FUNÇÃO ÁREA:

* $A(x) = x^2 + 4x\left(\frac{500}{x^2}\right)$

$A(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$

* $A'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2}$

* $2x - \frac{2000}{x^2} = 0$

$2x^3 - 2000 = 0$

$x = \sqrt[3]{1000}$

$x = 10$

10 É PONTO CRÍTICO

* $A''(x) = 2 + \frac{4000}{x^3}$

PARA $x > 0 \therefore A''(x) > 0$

$A''(10) = 2 + \frac{4000}{10^3} = 6 > 0$

GARANTO QUE 10 É UM MÍNIMO GLOBAL

+LEMBRANDO QUE $y = \frac{500}{x^2}$

$x = 10 \therefore y = \frac{500}{10^2} = \frac{500}{100} = 5$

SÃO AS MEDIDAS PARA QUE A PRODUÇÃO DA CAIXA SEJA MÍNIMA EM CUSTOS.