

Professor: Jeferson Almir

Aluno(a): \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_  
 Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

## 1 Problemas

- 001.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que suas medianas  $CD$ ,  $AE$  e  $BF$  são concorrentes. **Dicas:**
- 002.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que suas alturas  $AE$ ,  $CF$  e  $BD$  são concorrentes. **Dicas:**
- 003.** Prove que as bissetrizes internas de um  $\triangle ABC$  são concorrentes. **Dicas:**
- 004.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seu incírculo toca  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $C_1$ ,  $A_1$  e  $B_1$  respectivamente. Prove que as retas  $CC_1$ ,  $BB_1$  e  $AA_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 005.** Prove que as mediatrizes dos lados de um dado  $\triangle ABC$  são concorrentes. **Dicas:**
- 006.** Seja  $ABC$  um triângulo de circuncírculo  $k$ . Sejam  $l_A$ ,  $l_B$  e  $l_C$  as retas tangentes a  $k$  pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente. Se  $l_A \cap l_B = C_1$ ,  $l_B \cap l_C = A_1$  e  $l_C \cap l_A = B_1$ , prove que as retas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 007.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  os pontos de tangência dos segmentos  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  com os excírculos de  $\triangle ABC$ . Prove que as retas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 008.** Seja  $ABC$  um triângulo e seja  $N$  seu ponto de Nagel (ponto de concorrência do exercício anterior). Digamos que  $AN$ ,  $BN$  e  $CN$  intersectem o incírculo de  $\triangle ABC$  nos pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ , e os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  nos pontos  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$ , respectivamente. Prove que  $AA_1 = NA_2$ ,  $BB_1 = NB_2$  e  $CC_1 = NC_2$ . **Dicas:**
- 009.** Seja  $ABC$  um triângulo. Os triângulos equiláteros  $\triangle ABC_1$ ,  $\triangle AB_1C$  e  $\triangle A_1BC$  são construídos no exterior do triângulo  $ABC$ . Prove que as retas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 010.** Seja  $ABC$  um triângulo. Os triângulos equiláteros  $\triangle ABC_1$ ,  $\triangle AB_1C$  e  $\triangle A_1BC$  são construídos no interior do triângulo  $ABC$ . Prove que as retas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 011.** Prove que para um dado  $\triangle ABC$ , existe algum ponto  $X$  tal que vale  $AX \cdot BC = BX \cdot AC = CX \cdot AB$ . **Dicas:**
- 012.** Prove que para um dado  $\triangle ABC$ , exatamente dois pontos satisfazem a condição da questão anterior. **Dicas:**
- 013.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que existe um ponto único  $S$  tal que vale  $BC + AS = CA + BS = AB + CS$ . **Dicas:**
- 014.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que existe um ponto único  $S$  tal que vale  $BC - AS = CA - BS = AB - CS$ . **Dicas:**
- 015.** Três circunferências  $k_1(A)$ ,  $k_2(B)$  e  $k_3(C)$  são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja  $C_1$  e  $B_1$  os pontos de tangência de  $k_1$  com  $k_2$ , e de  $k_1$  com  $k_3$ , respectivamente. Seja  $A_1$  o ponto de tangência de  $k_2$  com  $k_3$ . A circunferência  $k_4$  toca as outras três circunferências externamente. Prove que o primeiro centro de Soddy do  $\triangle ABC$  (problema 13) coincide com o centro de  $k_4$ . **Dicas:**
- 016.** Três circunferências  $k_1(A)$ ,  $k_2(B)$  e  $k_3(C)$  são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja  $C_1$  e  $B_1$  os pontos de tangência de  $k_1$  com  $k_2$ , e de  $k_1$  com  $k_3$ , respectivamente. Seja  $A_1$  o ponto de tangência de  $k_2$  com  $k_3$ . A circunferência  $k_4$  toca as outras três circunferências internamente. Prove que o segundo centro de Soddy do  $\triangle ABC$  (problema 14) coincide com o centro de  $k_4$ . **Dicas:**
- 017.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $S_1$  e  $S_2$  seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão sobre uma elipse de focos  $S_1$  e  $S_2$ . **Dicas:**
- 018.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $S_1$  seu primeiro centro de Soddy (problema 13). Prove que existe uma circunferência inscrita no quadrilátero convexo formado pelas retas  $CS_1$ ,  $BS_1$ ,  $AC$  e  $AB$ . **Dicas:**
- 019.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $S_2$  seu segundo centro de Soddy (problema 14). Prove que existe uma circunferência que toca as retas  $BA$  e  $BC$  e os segmentos  $AS_2$  e  $CS_2$ . **Dicas:**
- 020.** Seja  $ABC$  um triângulo, com excírculos  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  e  $\omega_c$ . Sejam  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  os centros de  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  e  $\omega_c$  respectivamente. Seja  $A_1$  o ponto de tangência de  $\omega_a$  com o lado  $BC$ . Defina os pontos  $B_1$  e  $C_1$  analogamente. Prove que as retas  $C_1I_c$ ,  $B_1I_b$  e  $A_1I_a$  são concorrentes. **Dicas:**
- 021.** Seja  $ABC$  um triângulo. O primeiro ponto de Brocard  $Br_1$  é definido como o ponto para o qual  $\angle BAB_{r_1} = \angle ACB_{r_1} = \angle CBB_{r_1}$ . Prove que esse ponto sempre existe. **Dicas:**
- 022.** Seja  $ABC$  um triângulo. O segundo ponto de Brocard  $Br_2$  é definido como o ponto tal que  $\angle ABB_{r_2} = \angle CAB_{r_2} = \angle BCB_{r_2}$ . Prove que ele sempre existe. **Dicas:**
- 023.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $L$  seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam  $Br_1$  e  $Br_2$  seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Seja  $CL \cap AB = F$ . Prove que  $\angle AFB_{r_1} = \angle BFB_{r_2}$ . **Dicas:**

- 024.** Seja  $ABC$  um triângulo, com circuncentro  $O$ . Seja  $L$  seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam  $Br_1$  e  $Br_2$  seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Prove que valem as igualdades  $\angle OBr_1L = \angle OBr_2L = 90^\circ$  e  $Br_1L = Br_2L$ . **Dicas:**
- 025.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $Ap_1$  e  $Ap_2$  seus dois pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12). Prove que os triângulos pedais com respeito a esses dois pontos são equiláteros. **Dicas:**
- 026.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $E$  e  $D$  os pés das bissetrizes interna e externa em relação a  $C$ , respectivamente. Prove que os dois pontos isodinâmicos de  $\triangle ABC$  (problemas 11 e 12) ficam sobre a circunferência de diâmetro  $ED$ . **Dicas:**
- 027.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $T_1$  seu primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9). Prove que  $\angle AT_1B = \angle BT_1C = 120^\circ$ . **Dicas:**
- 028.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $T_2$  seu segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10). Prove que vale exatamente uma das igualdades  $\angle AT_2B = \angle AT_2C = 60^\circ$ ,  $\angle BT_2A = \angle BT_2C = 60^\circ$  e  $\angle CT_2B = \angle CT_2A = 60^\circ$ . **Dicas:**
- 029.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que o primeiro ponto isodinâmico (problema 11) é conjugado isogonal do primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9) com respeito a  $\triangle ABC$ . **Dicas:**
- 030.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que o segundo ponto isodinâmico (problema 12) é conjugado isogonal do segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10) com respeito a  $\triangle ABC$ . **Dicas:**
- 031.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $L$  seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos  $M, K \in AB$ ,  $H, I \in BC$  e  $J, G \in AC$  são escolhidos de tal forma que  $MI \parallel AC$ ,  $GH \parallel AB$ ,  $KJ \parallel BC$  e  $MI \cap KJ \cap GH = L$ . Prove que os pontos  $M, K, H, I, J$  e  $G$  ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 032.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $L$  seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos  $M, K \in AB$ ,  $H, I \in BC$  e  $J, G \in AC$  são escolhidos de tal modo que os quadriláteros  $MICA$ ,  $GHBA$  e  $KJCB$  são cíclicos e  $MI \cap KJ \cap GH = L$ . Prove que os pontos  $M, K, H, I, J$  e  $G$  ficam sobre uma circunferência de centro  $L$ . **Dicas:**
- 033.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo tal que  $AB \cap CD = E$  e  $AD \cap BC = E$ . Prove que os circuncírculos de  $\triangle BFC$ ,  $\triangle AFD$  e  $\triangle ABE$  passam por um ponto em comum. **Dicas:**
- 034.** A construção do problema 33 é dada. Prove que o ponto  $M$  e os respectivos centros  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  e  $O_4$  dos circuncírculos de  $\triangle AFD$ ,  $\triangle BFC$ ,  $\triangle ABE$  e  $\triangle DCE$  ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 035.** As circunferências  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  são dadas de tal modo que elas passam por um ponto em comum  $M$ . Prove que as circunferências que passam pelos pontos de interseção de  $(k_1, k_2, k_3)$ ,  $(k_1, k_2, k_4)$ ,  $(k_1, k_3, k_4)$  e  $(k_2, k_3, k_4)$ , diferentes de  $M$ , também passam por um ponto em comum. **Dicas:**
- 036.** Seja  $ABCDE$  um pentágono convexo tal que  $AC \cap BE = D_1$ ,  $BD \cap AC = E_1$ ,  $BD \cap EC = A_1$ ,  $EC \cap AD = B_1$  e  $AD \cap BE = C_1$ . Digamos que  $(XYZ)$  denote o circuncírculo de  $\triangle XYZ$ . Sejam  $(AD_1C_1) \cap (B_1C_1E) = \{C_1, C_2\}$ ,  $(B_1C_1E) \cap (A_1B_1D) = \{B_1, B_2\}$ ,  $(A_1B_1D) \cap (A_1E_1C) = \{A_1, A_2\}$ ,  $(A_1E_1C) \cap (E_1D_1B) = \{E_1, E_2\}$  e  $(E_1D_1B) \cap (C_1D_1A) = \{D_1, D_2\}$ . Prove que os pontos  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  e  $E_2$  ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 037.** Seja  $ABCDE$  um pentágono convexo tal que  $AC \cap BE = D'$ ,  $BD \cap AC = E'$ ,  $BD \cap EC = A'$ ,  $EC \cap AD = B'$  e  $AD \cap BE = C'$ . Digamos que  $(XYZ)$  denote o circuncírculo de  $\triangle XYZ$ . Sejam  $(AD'B) \cap (BE'C) = \{B, B''\}$ ,  $(BE'C) \cap (CA'D) = \{C, C''\}$ ,  $(CA'D) \cap (DB'E) = \{D, D''\}$ ,  $(DB'E) \cap (AC'E) = \{E, E''\}$  e  $(AC'E) \cap (AD'B) = \{A, A''\}$ . Prove que as retas  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$ ,  $DD''$  e  $EE''$  são concorrentes. **Dicas:**
- 038.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $O$  seu circuncentro. Seja  $M$  seu baricentro e seja  $H$  seu ortocentro. Prove que os pontos  $H$ ,  $O$  e  $M$  são colineares. **Dicas:**
- 039.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $N$  seu ponto de Nagel (problema 7). Seja  $M$  seu baricentro e seja  $I$  seu incentro. Prove que os pontos  $N$ ,  $I$  e  $M$  são colineares. **Dicas:**
- 040.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que as retas formadas pelos primeiro e segundo pontos de Fermat-Torricelli (problemas 9 e 10) e pelos primeiro e segundo pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12) se intersectam no ponto de Lemoine  $L$  (problema 6). Além disso, prove que o circuncentro de  $\triangle ABC$  fica na reta dada pelos pontos isodinâmicos. **Dicas:**
- 041.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que  $Ap_2T_1$  e  $Ap_1T_2$  se intersectam no baricentro  $M$  do  $\triangle ABC$ . ( $Ap_1$  e  $Ap_2$  são os pontos isodinâmicos dos problemas 11 e 12, e  $T_1$  e  $T_2$  são os pontos de Fermat-Torricelli dos problemas 9 e 10). **Dicas:**
- 042.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $I$  seu incentro, e seja  $O$  seu circuncentro. Seja  $Bi$  seu ponto de Bevan (problema 20). Prove que os pontos  $I$ ,  $O$  e  $Bi$  são colineares. **Dicas:**
- 043.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $I$  seu incentro, seja  $G$  seu ponto de Gergonne (problema 4), e sejam  $S_1$  e  $S_2$  seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos  $I$ ,  $G$ ,  $S_1$  e  $S_2$  são colineares. **Dicas:**
- 044.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero. Digamos que os pés das perpendiculares de  $A$  até  $BC$  e  $CD$  sejam  $R$  e  $Q$ ,

respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de  $B$  até  $CD$  e  $DA$  sejam  $N$  e  $I$ , respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de  $C$  até  $DA$  e  $AB$  sejam  $L$  e  $M$ , respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de  $D$  até  $AB$  e  $BC$  sejam  $J$  e  $K$ , respectivamente. Sejam  $AR \cap BI = G$ ,  $BN \cap CM = H$ ,  $CL \cap DK = E$  e  $AQ \cap DJ = F$ . Prove que os pontos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  são colineares. **Dicas:**

**045.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero tal que  $AB \cap CD = E$  e  $AD \cap BC = F$ . Prove que os pontos médios  $M$ ,  $N$  e  $P$  dos segmentos  $AC$ ,  $BD$  e  $EF$ , respectivamente, são colineares. **Dicas:**

**046.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero. Sejam  $J$  e  $I$  os pontos médios das diagonais  $AC$  e  $BD$ , respectivamente. Digamos que a perpendicular  $DG$  a  $BC$  ( $G \in BC$ ) intersecte a perpendicular  $CH$  a  $AD$  ( $H \in AD$ ) no ponto  $K$ . A perpendicular  $BF$  a  $AD$  ( $F \in AD$ ) intersecta a perpendicular  $AE$  a  $BC$  ( $E \in BC$ ) no ponto  $L$ . Prove que  $KL \perp JI$ . **Dicas:**

**047.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero tal que  $AB \cap DC = E$  e  $AD \cap BC = F$ . As circunferências  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  têm  $AC$ ,  $BD$  e  $EF$  como diâmetros, respectivamente. Prove que elas têm um eixo radical em comum. **Dicas:**

**048.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  o circuncírculo de  $\triangle ABC$ . Um ponto arbitrário  $D$  é escolhido no arco  $\widehat{AB}$  de  $k$  que não contém  $C$ . Os pontos  $E$ ,  $F$  e  $G$  ficam sobre  $CA$ ,  $AB$  e  $BC$  respectivamente, e são escolhidos de forma que  $\angle AED = \angle AFD = \angle BGD = 90^\circ$ . Prove que os pontos  $E$ ,  $F$  e  $G$  são colineares. **Dicas:**

**049.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  o circuncírculo de  $\triangle ABC$ . Um ponto arbitrário  $D$  é escolhido no arco  $\widehat{AB}$  de  $k$  que não contém  $C$ . Os pontos  $E$ ,  $F$  e  $G$  ficam sobre  $CA$ ,  $AB$  e  $BC$  respectivamente, e são escolhidos de forma que  $\angle AED = \angle AFD = \angle BGD = \varphi$ . Prove que os pontos  $E$ ,  $F$  e  $G$  são colineares. **Dicas:**

**050.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  o circuncírculo de  $\triangle ABC$ . Dois pontos arbitrários  $P$  e  $Q$  são escolhidos no arco  $\widehat{AB}$  que não contém  $C$ . Pontos  $M$ ,  $N$  e  $K$  são escolhidos em  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  respectivamente, tais que  $\angle(PM, BC) = \angle(QM, CB)$ ,  $\angle(PN, AC) = \angle(QN, CA)$  e  $\angle(QK, AB) = \angle(PK, BA)$ . Prove que os pontos  $M$ ,  $N$  e  $K$  são colineares. **Dicas:**

**051.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $D$  um ponto do circuncírculo de  $\triangle ABC$ . Prove que o ponto médio  $J$  do segmento  $DH$  ( $H$  é o ortocentro de  $\triangle ABC$ ) fica sobre a reta de Simson (problema 48) do  $\triangle ABC$  e do ponto  $D$ . **Dicas:**

**052.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero cíclico. Os pés das perpendiculares de  $A$  até  $BC$  e  $CD$  são  $E$  e  $F$ , respectivamente. Os pés das perpendiculares de  $B$  até  $CD$  e  $DA$  são  $I$  e  $J$ , respectivamente. Os pés das

perpendiculares de  $C$  até  $DA$  e  $AB$  são  $G$  e  $H$ , respectivamente. Os pés das perpendiculares de  $D$  até  $AB$  e  $BC$  são  $K$  e  $L$ , respectivamente. Prove que as retas  $JI$ ,  $EF$ ,  $GH$  e  $KL$  são concorrentes. **Dicas:**

**053.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero cíclico, e seja  $X$  um ponto arbitrário. Os pés das perpendiculares de  $X$  até  $AB$  e  $CD$  são  $H$  e  $I$ , respectivamente. Os pés das perpendiculares de  $X$  até  $BC$  e  $DA$  são  $K$  e  $F$ , respectivamente. Os pés das perpendiculares de  $X$  até  $AC$  e  $BD$  são  $G$  e  $J$ , respectivamente. Os pontos médios de  $HI$ ,  $GJ$  e  $KF$  são  $L$ ,  $M$  e  $N$ , respectivamente. Prove que os pontos  $M$ ,  $N$  e  $L$  são colineares. **Dicas:**

**054.** Seja  $ABC$  um triângulo. O circuncírculo de  $\triangle ABC$  é  $k$  e seu ortocentro é  $H$ . A altura relativa a  $B$  intersecta  $AC$  e  $k$  nos pontos  $B_1$  e  $B_2$ , respectivamente. Prove que os pontos  $H$  e  $B_2$  são simétricos com respeito a  $B_1$ . **Dicas:**

**055.** Seja  $O$  o circuncentro de  $\triangle ABC$  de alturas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$ . As retas  $CC_1$  e  $A_1B_1$  se intersectam no ponto  $N$  e as retas  $CO$  e  $AB$  se intersectam no ponto  $E$ . Prove que  $HM \parallel EN$ , onde  $M$  é ponto médio de  $AB$ . **Dicas:**

**056.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo. Seja  $D$  um ponto arbitrário na tangente a  $k$  por  $C$ . Os pontos  $E$  e  $F$  são as projeções de  $D$  em  $AC$  e  $BC$ , respectivamente. Prove que  $EF \perp AB$ . **Dicas:**

**057.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $P$  um ponto arbitrário no arco menor  $\widehat{AB}$  do circuncírculo de  $\triangle ABC$ . As projeções de  $P$  em  $AC$  e  $AB$  são  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Os pontos  $M$  e  $N$  são os pontos médios de  $BC$  e  $XY$ , respectivamente. Prove que  $\angle PNM = 90^\circ$ . **Dicas:**

**058.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  alturas desse triângulo. Os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  são projeções de  $C_1$  nas retas  $AC$ ,  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $BC_1$ , respectivamente. Prove que os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  são colineares. **Dicas:**

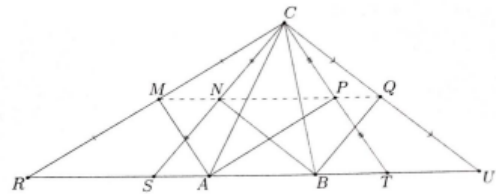
**059.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  alturas desse triângulo. Denote as reflexões de  $C_1$  com respeito aos lados  $AC$  e  $BC$  por  $M$  e  $N$ , respectivamente. Prove que os pontos  $M$ ,  $B_1$ ,  $A_1$  e  $N$  são colineares. **Dicas:**

**060.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  alturas desse triângulo. Os pontos  $M$  e  $N$  são as projeções de  $C_1$  sobre os lados  $AC$  e  $BC$ , respectivamente. Seja  $P = MN \cap B_1C_1$ . Prove que  $P$  é o ponto médio de  $B_1C_1$ . **Dicas:**

**061.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo e seja  $H$  seu ortocentro. Sejam  $AA_1$  e  $BB_1$  alturas deste triângulo. Seja  $D$  um ponto arbitrário no segmento  $BH$ . A reta  $AD$  intersecta  $k$  novamente no ponto  $E$ . Sejam  $BE \cap AA_1 = F$  e  $K$  o ponto médio de  $FD$ . Prove que os pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $K$  são colineares. **Dicas:**

- 062.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo. A reta  $CM$  ( $M \in AB$ ) é bissetriz interna de  $\angle ACB$ , e intersecta  $k$  no ponto  $N$ . A reta que passa por  $M$  e é perpendicular a  $BC$ , intersecta  $BC$  e o arco menor  $\widehat{BC}$  de  $k$  nos pontos  $L$  e  $X$ , respectivamente. A reta que passa por  $C$  e é perpendicular a  $AX$ , intersecta  $AX$  e  $AB$  nos pontos  $Z$  e  $Y$ , respectivamente. Prove que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $N$  são colineares. **Dicas:**
- 063.** Sejam  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  as alturas de um dado triângulo  $ABC$ . Seja  $P$  um ponto arbitrário interno ao triângulo. Os pontos  $C_2$  e  $C_3$  são as projeções de  $P$  em  $AB$  e  $CC_1$ , respectivamente. Os pontos  $A_2 \in BC$ ,  $A_3 \in AA_1$ ,  $B_2 \in AC$  e  $B_3 \in BB_1$  são definidos analogamente. Prove que as retas  $A_2A_3$ ,  $B_2B_3$  e  $C_2C_3$  são concorrentes. **Dicas:**
- 064.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AB_1$  e  $BA_1$  alturas desse triângulo, com interseção  $H$ . As retas  $A_1B_1$  e  $AB$  se intersectam no ponto  $D$ , e  $M$  é ponto médio de  $AB$ . Prove que  $MH \perp DC$ . **Dicas:**
- 065.** Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo. O ponto  $H$  é seu ortocentro e o ponto  $M$  é ponto médio de  $AB$ . Sejam  $AA_1$  e  $BB_1$  alturas desse triângulo e seja  $AB \cap A_1B_1 = D$ . A reta  $CH$  intersecta o circuncírculo de  $\triangle ABC$  nos pontos  $C$  e  $K$ . Prove que os pontos  $K$ ,  $M$ ,  $C$  e  $D$  são concíclicos. **Dicas:**
- 066.** Seja  $ABC$  um triângulo com  $\angle ACB > 90^\circ$ . Sejam  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  alturas desse triângulo. O ponto  $M$  é ponto médio do lado  $AB$ . Prove que os pontos médios de  $AA_1$  e  $BB_1$ , e os pontos  $M$  e  $C_1$  são concíclicos. **Dicas:**
- 067.** Seja  $ABC$  um triângulo com  $\angle ACB > 90^\circ$  e de alturas  $AA_1$  e  $BB_1$ . Os pontos  $P$  e  $M$  são as projeções de  $A_1$  sobre  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, e  $Q$  e  $N$  são as projeções de  $B_1$  sobre  $BC$  e  $AB$ , respectivamente. Prove que  $PM = QN$ . **Dicas:**
- 068.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $CD$  uma altura e  $O$  o circuncentro. Seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Denote a projeção de  $A$  em  $CO$  por  $P$ . Prove que  $DM = PM$ . **Dicas:**
- 069.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$  e  $BB_1$  alturas. A circunferência de diâmetro  $AC$  intersecta a reta  $BB_1$  nos pontos  $P$  e  $M$  de forma que  $P$  fica entre  $B$  e  $M$ . A circunferência de diâmetro  $BC$  intersecta  $AA_1$  nos pontos  $N$  e  $Q$  de forma que  $N$  fica entre  $A$  e  $Q$ . Prove que o quadrilátero  $MNPQ$  é cíclico. **Dicas:**
- 070.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $CD$  uma altura. Os pontos  $E$  e  $F$  são as projeções de  $D$  sobre  $AC$  e  $BC$  respectivamente. Prove que o quadrilátero  $ABFE$  é cíclico. **Dicas:**
- 071.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $CD$  uma altura. Os pontos  $E$  e  $F$  são as projeções de  $D$  sobre  $AC$  e  $BC$  respectivamente. Os pontos  $M$  e  $N$  são os pontos médios de  $AC$  e  $BC$  respectivamente. Prove que o quadrilátero  $EFNM$  é cíclico. **Dicas:**
- 072.** Seja  $ABC$  um triângulo. Os segmentos  $AA_1$  e  $BB_1$  são alturas, e a bissetriz interna de  $\angle ACB$  intersecta os segmentos  $A_1B_1$  no ponto  $L$ . O circuncírculo de  $\triangle AB_1L$  intersecta  $BB_1$  uma segunda vez em  $X$ . Seja  $Y \in AA_1$  um ponto tal que  $AY = BX$ . Prove que o quadrilátero  $BA_1LY$  é cíclico. **Dicas:**
- 073.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seu circuncentro é  $O$ , seu ortocentro é  $H$  e suas alturas são  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$ . O ponto  $M$  é a projeção de  $C$  sobre  $A_1B_1$ , e  $N$  é a reflexão de  $C$  com respeito a  $A_1B_1$ . Prove que os pontos  $H$ ,  $O$ ,  $N$  e  $C_1$  são concíclicos. **Dicas:**
- 074.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$  e  $BB_1$  alturas. Um ponto  $D$  é escolhido na semirreta  $AA_1$ . Um ponto  $E$  é escolhido na semirreta  $BB_1$ , de tal forma que  $\angle DCE = 90^\circ$ . Seja  $H$  o pé da perpendicular de  $C$  a  $ED$ . Prove que  $\angle AHB = 90^\circ$ . **Dicas:**
- 075.** Seja  $ABC$  um triângulo. Os segmentos  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são alturas. Os pontos  $A_2$  e  $A_3$  são as projeções de  $A_1$  sobre  $AC$  e  $AB$  respectivamente. Os pontos  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são definidos analogamente. Prove que os pontos  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são concíclicos. **Dicas:**
- 076.** Seja  $ABC$  um triângulo. Digamos que  $AC = BC$ . O segmento  $CC_1$  é uma altura e  $M$  é seu ponto médio. Seja  $P$  a projeção de  $C_1$  sobre  $BM$ . Prove que  $\angle APC = 90^\circ$ . **Dicas:**
- 077.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $H$  seu ortocentro e seja  $M$  o ponto médio do lado  $AB$ . Prove que o ponto simétrico de  $H$  com respeito a  $M$  coincide com o ponto diametralmente oposto de  $C$  com respeito ao circuncírculo de  $\triangle ABC$ . **Dicas:**
- 078.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$  e  $BB_1$  alturas que se intersectam em  $H$ . Seja  $D$  o segundo ponto de interseção dos circuncírculos de  $\triangle ABC$  e  $\triangle A_1B_1C$ , e seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Prove que os pontos  $D$ ,  $H$  e  $M$  são colineares. **Dicas:**
- 079.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo e  $H$  seu ortocentro. Seja  $l$  uma reta arbitrária que passa por  $H$ . Prove que as reflexões de  $l$  com respeito a  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  concorrem num ponto de  $k$ . **Dicas:**
- 080.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $O$  seu circuncentro. As reflexões de  $AB$  com respeito às retas  $AC$  e  $BC$  se intersectam no ponto  $K$ . Prove que os pontos  $C$ ,  $O$  e  $K$  são colineares. **Dicas:**
- 081.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $H$  seu ortocentro, e seja  $M$  o ponto médio do lado  $AB$ . A reta que passa por  $H$  e que é perpendicular a  $HM$  intersecta os lados  $AC$  e  $BC$  nos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente. Prove que  $DH = EH$ . **Dicas:**
- 082.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $H$  seu ortocentro e  $O$  seu circuncentro. O ponto  $M$  está no lado  $BC$  e  $\angle OC_1M = 90^\circ$ . Prove que  $\angle ABC = \angle MHC_1$ . **Dicas:**

- 083.** Seja  $ABC$  um triângulo. O circuncírculo de  $\triangle ABC$  é  $k$  e seu ortocentro é  $H$ . Considere duas retas que passam por  $H$  que são perpendiculares entre si. Uma delas intersecta  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $F$ ,  $K$  e  $P$  respectivamente, e a outra nos pontos  $E$ ,  $Q$  e  $L$  respectivamente. Prove que os pontos médios  $S$ ,  $N$  e  $M$  dos segmentos  $QK$ ,  $EF$  e  $LP$ , respectivamente, são colineares. **Dicas:**
- 084.** Seja  $ABC$  um triângulo. O circuncírculo de  $\triangle ABC$  é  $k$  e seu ortocentro é  $H$ . Seja  $P$  um ponto arbitrário do interior de  $\triangle ABC$ . As retas  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  intersectam  $k$  uma segunda vez nos pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ , respectivamente. Os pontos  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$  são as projeções de  $P$  sobre  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Os pontos  $A_3$ ,  $B_3$  e  $C_3$  são as reflexões de  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  com respeito a  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$  respectivamente. Prove que os pontos  $H$ ,  $A_3$ ,  $B_3$  e  $C_3$  são concíclicos. **Dicas:**
- 085.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $H$  seu ortocentro e seja  $P$  um ponto arbitrário do interior do triângulo. As retas  $AP$ ,  $BP$  e  $CP$  intersectam o circuncírculo  $k$  de  $\triangle ABC$  nos pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ , respectivamente. Os pontos  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$  são as reflexões de  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  com respeito às retas  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. Prove que o quadrilátero  $HA_2B_2C_2$  é cíclico. **Dicas:**
- 086.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $M$  e  $N$  os pés das bissetrizes internas relativas a  $A$  e  $B$ , respectivamente. O ponto  $P$  é o pé da bissetriz externa relativa a  $C$ . Prove que os pontos  $N$ ,  $M$  e  $P$  são colineares. **Dicas:**
- 087.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $B_1$  e  $C_1$  os pés das bissetrizes internas relativas a  $B$  e  $C$ , respectivamente. Seja  $O$  o circuncentro de  $\triangle ABC$  e seja  $I_a$  o  $A$ -exincentro. Prove que  $OI_a \perp B_1C_1$ . **Dicas:**
- 088.** Seja  $ABC$  um triângulo. Digamos que  $\angle ABC > 90^\circ$  e sejam  $CM$  e  $CN$  as bissetrizes interna e externa de  $\angle ACB$ , respectivamente. Prove que as circunferências  $(ACB)$  e  $(MNC)$  são ortogonais, isto é, que as retas tangentes por seus pontos de interseção são perpendiculares. **Dicas:**
- 089.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo. A reta  $CL$  ( $L \in AB$ ) é a bissetriz interna de  $\angle ACB$ . Denote o ponto de interseção da reta tangente a  $k$  por  $C$  com a reta  $AB$  por  $N$ . Prove que  $NC = NL$ . **Dicas:**
- 090.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  bissetrizes internas. Seja  $P$  um ponto arbitrário na reta  $A_1B_1$  e sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  suas projeções sobre as retas  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente. Prove que a soma dos comprimentos de dois dos segmentos  $PX$ ,  $PY$  e  $PZ$  é igual ao comprimento do terceiro. **Dicas:**
- 091.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$  e  $BB_1$  bissetrizes internas. Seja  $E$  a interseção da reta  $A_1B_1$  com o circuncírculo de  $\triangle ABC$ , tal que  $E$  e  $A$  estão no mesmo semiplano com respeito a  $BC$ . Prove que  $\frac{1}{EA} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EC}$ . **Dicas:**
- 092.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AQ$  e  $BP$  bissetrizes internas e  $k$  o circuncírculo de  $\triangle ABC$ . As retas  $AQ$  e  $BP$  intersectam  $k$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Prove que as retas  $PQ$ ,  $MN$  e a reta tangente a  $k$  por  $C$  são concorrentes. **Dicas:**
- 093.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero. As semirretas  $AB$  e  $DC$  se intersectam no ponto  $E$  e as semirretas  $AD$  e  $BC$  se intersectam no ponto  $F$ . A bissetriz interna de  $\angle EAF$  e  $\angle ECF$  se intersectam em  $X$ . A bissetriz interna de  $\angle ADE$  intersecta a bissetriz externa de  $\angle EBC$  em  $Y$ . As bissetrizes externas de  $\angle AFB$  e  $\angle AEC$  se intersectam em  $Z$ . Prove que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são colineares. **Dicas:**
- 094.** Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $AC > AB > BC$ . Sejam  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  suas bissetrizes internas. O circuncírculo de  $\triangle A_1B_1C_1$  intersecta  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  uma segunda vez nos pontos  $C_2$ ,  $B_2$  e  $A_2$ , respectivamente. Prove que  $C_1C_2 = A_1A_2 + B_1B_2$ . **Dicas:**
- 095.** Seja  $ABC$  um triângulo com bissetriz interna  $CL$  ( $L \in AB$ ). A circunferência de diâmetro  $AB$  centrada em  $M$  intersecta os lados  $AC$  e  $BC$  uma segunda vez nos pontos  $B_1$  e  $A_1$ , respectivamente. A bissetriz interna de  $\angle A_1MB_1$  intersecta a reta  $CL$  no ponto  $K$ . Prove que os quadriláteros  $ALKB_1$  e  $BLKA_1$  são cíclicos. **Dicas:**
- 096.** Seja  $ABC$  um triângulo e seja  $l$  sua bissetriz externa por  $C$ . Os pontos  $D$  e  $E$  são as projeções de  $A$  e  $B$  sobre  $l$ . O segmento  $CH$  ( $H \in AB$ ) é a altura de  $C$  até  $AB$  e o ponto  $F$  é o ponto médio de  $AB$ . Prove que o quadrilátero  $DEHF$  é cíclico. **Dicas:**
- 097.** Seja  $ABC$  um triângulo. Os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  são os pés das perpendiculares de  $C$  até as bissetrizes interna e externas de  $\angle BAC$  e  $\angle ABC$ , como mostrado na figura. Prove que os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $P$  e  $Q$  são colineares. **Dicas:**



- 098.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $H$  seu ortocentro. Os pontos  $L$  e  $P$  são as projeções de  $H$  sobre as bissetrizes interna e externa de  $\angle ACB$ , respectivamente. Prove que os pontos  $M$ ,  $L$  e  $P$  são colineares, onde  $M$  é o ponto médio de  $AB$ . **Dicas:**
- 099.** Seja  $ABC$  um triângulo. Uma reta passando por  $C$  intersecta a bissetriz interna de  $A$  e o circuncírculo de  $\triangle ABC$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Uma circunferência  $k_1$  passa por  $A$  e toca  $CM$  nos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Prove que os pontos  $N$ ,  $P$  e  $Q$  são colineares. **Dicas:**

100. Seja  $\angle AOC$  um ângulo. O ponto  $B$  fica sobre a semirreta  $OA$  e o ponto  $D$  fica sobre a semirreta  $OC$ . Além disso,  $AB = CD$ ,  $A$  fica entre  $O$  e  $B$ , e  $C$  fica sobre  $O$  e  $D$ . Os circuncírculos de  $\triangle ADO$  e  $\triangle BOC$  intersectam-se novamente no ponto  $K$ . Prove que  $OK$  é bissetriz interna de  $\angle AOC$ . **Dicas:**
101. Seja  $ABC$  ( $AC > BC$ ) um triângulo, seja  $CL$  ( $L \in AB$ ) sua bissetriz interna, e seja  $O$  seu circuncentro. Denote os circuncentros de  $\triangle ALC$  e  $\triangle BLC$  por  $O_1$  e  $O_2$ , respectivamente. Prove que  $OO_1 = OO_2$ . **Dicas:**
102. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $CL$  ( $L \in AB$ ) uma bissetriz interna. O incírculo de  $\triangle ALC$  toca  $AC$ ,  $AL$  e  $CL$  nos pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$ , respectivamente, e o  $C$ -exincírculo de  $\triangle BCL$  toca as retas  $BL$ ,  $CB$  e  $CL$  nos pontos  $Q$ ,  $R$  e  $S$ , respectivamente. Prove que cada uma das triplas de pontos  $M$ ,  $N$ ,  $S$  e  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  são colineares. **Dicas:**
103. Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA'$  e  $BB'$  alturas e  $k$  o incírculo centrado em  $I$ . As retas  $AI$  e  $BI$  intersectam  $BC$  e  $AC$  nos pontos  $F$  e  $G$  respectivamente. A circunferência  $k$  toca  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $D$  e  $E$  respectivamente. Se  $A'B' \cap GF = X$ , prove que os pontos  $E$ ,  $D$  e  $X$  são colineares. **Dicas:**
104. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $CL$  bissetriz interna e  $I$  incentro. A mediatriz do segmento  $CL$  intersecta as bissetrizes internas de  $\angle BAC$  e  $\angle ABC$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Prove que o quadrilátero  $MINC$  é cíclico. **Dicas:**
105. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $I$  seu incentro. Os pontos  $Y \in AI$  e  $X \in BI$  são escolhidos de forma que  $\angle XCA = \angle YCB$ . Prove que as retas  $AX$ ,  $CI$  e  $BY$  são concorrentes. **Dicas:**
106. Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AM$  e  $BN$  bissetrizes internas que se intersectam em  $I$ . Pontos  $L$  e  $K$  são escolhidos sobre a reta  $AB$  tais que  $LN$  e  $CN$  são simétricas com respeito a  $BN$ , e tais que  $CM$  e  $KM$  são simétricas com respeito a  $AM$ . Seja  $D = LN \cap KM$ . Prove que  $DI \perp AB$ . **Dicas:**
107. Seja  $ABC$  ( $AC > BC$ ) um triângulo de alturas  $AA_1$  e  $BB_1$ , que se intersectam no ponto  $H$ . As bissetrizes internas de  $\angle HAC$  e  $\angle HBC$  se intersectam no ponto  $L$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $AB$  e  $CH$ , respectivamente. Prove que os pontos  $M$ ,  $L$  e  $N$  são colineares. **Dicas:**
108. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $C_2$  o ponto médio de  $AB$ . As retas tangentes ao circuncírculo de  $\triangle ABC$  em  $A$  e  $B$  se intersectam no ponto  $N$ . Prove que  $\angle ACC_2 = \angle BCN$ . **Dicas:**
109. Seja  $ABC$  um triângulo. Os pontos  $D$  e  $E$  são escolhidos sobre os lados  $AC$  e  $BC$  de tal forma que o quadrilátero  $ABED$  é cíclico. Seja  $M$  o ponto médio de  $AB$  e seja  $F$  a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de  $\triangle DEC$  nos pontos  $D$  e  $E$ . Prove que os pontos  $M$ ,  $F$  e  $C$  são colineares. **Dicas:**
110. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo. As retas tangentes a  $k$  por  $A$  e  $B$  se intersectam no ponto  $D$ . Digamos que  $CD$  intersecte  $k$  uma segunda vez no ponto  $E$ . As projeções de  $E$  sobre  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  são  $N$ ,  $P$  e  $M$ , respectivamente. Prove que  $N$  é o ponto médio de  $PM$ . **Dicas:**
111. Seja  $ABC$  um triângulo. As retas tangentes a seu circuncírculo pelos pontos  $A$  e  $B$  se intersectam em  $T$ . A reta  $CT$  intersecta o circuncírculo de  $\triangle ABC$  uma segunda vez no ponto  $D$ . Seja  $CL$  ( $L \in AB$ ) bissetriz interna de  $\angle ACB$ . Prove que  $DL$  é bissetriz interna de  $\angle ADB$ . **Dicas:**
112. Seja  $ABC$  um triângulo. As retas tangentes ao seu circuncírculo pelos pontos  $A$  e  $B$  se intersectam em  $T$ . A reta  $CT$  intersecta o circuncírculo de  $\triangle ABC$  uma segunda vez no ponto  $D$ . Seja  $E$  a reflexão de  $D$  com respeito a  $AB$ , e seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Prove que os pontos  $C$ ,  $E$  e  $M$  são colineares. **Dicas:**
113. Seja  $ABC$  um triângulo. As retas tangentes a seu circuncírculo pelos pontos  $A$  e  $B$  se intersectam em  $T$ . A reta  $CT$  intersecta o circuncírculo de  $\triangle ABC$  uma segunda vez no ponto  $D$ . Seja  $N \in CD$  um ponto tal que  $\angle NBC = \angle ACN$ . Prove que  $\angle BCN = \angle CAN$ . **Dicas:**
114. Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $E$ ,  $F$  e  $M$  pontos médios de  $AC$ ,  $BC$  e  $EF$ , respectivamente. O segmento  $CD$  é uma altura de  $\triangle ABC$ . Prove que os circuncírculos de  $\triangle ECF$ ,  $\triangle BDF$  e  $\triangle ADE$  concorrem num ponto da reta  $DM$ . **Dicas:**
115. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $M$  o ponto médio de  $AB$  e seja  $D$  o ponto de interseção das retas tangentes ao circuncírculo de  $\triangle ABC$  pelos pontos  $A$  e  $B$ . As projeções de  $D$  sobre as retas  $CA$  e  $CB$  são  $E$  e  $F$ , respectivamente. Prove que  $CM \perp EF$ . **Dicas:**
116. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $N$  o ponto médio da altura  $CD$  e seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Seja  $L$  o ponto de Lemoine de  $\triangle ABC$ . Prove que os pontos  $N$ ,  $L$  e  $M$  são colineares. **Dicas:**
117. Seja  $k$  uma circunferência. Um ponto  $C$  é escolhido exterior a  $k$ . As retas tangentes  $k$  por  $C$  tocam a circunferência nos pontos  $A$  e  $B$ . Prove que o incentro de  $\triangle ABC$  fica sobre  $k$ . **Dicas:**
118. As circunferências  $k_1$  e  $k_2$  se tocam externamente no ponto  $I$ . Sejam  $l_1$  e  $l_2$  as retas tangentes externas comuns às duas circunferências. Os pontos de tangência de  $l_1$  e  $l_2$  a  $k_2$  são  $A$  e  $B$ , respectivamente. Os pontos de tangência de  $l_1$  e  $l_2$  a  $k_1$  são  $D$  e  $C$ , respectivamente. Prove que o quadrilátero  $ABCD$  é inscritível. **Dicas:**
119. Seja  $ABC$  um triângulo.  $I$  é o incentro do triângulo. O incírculo de  $\triangle ABC$  toca  $AB$  em  $N$ . O  $C$ -exincírculo de  $\triangle ABC$  toca  $AB$  em  $M$ . Sejam  $P$  e  $Q$  as projeções ortogonais de  $A$  e  $B$  sobre a reta  $CI$ , respectivamente. Prove que os pontos  $P$ ,  $M$ ,  $Q$  e

$N$  ficam sobre uma circunferência de diâmetro  $MN$ .

**Dicas:**

- 120.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega$  seu incírculo, de centro  $I$ . Denote a projeção ortogonal de  $B$  sobre  $AI$  por  $K$ . Sejam  $N$  e  $M$  os pontos tangência de  $AC$  e  $BC$  por  $\omega$ , respectivamente. Prove que os pontos  $M$ ,  $N$  e  $K$  são colineares. **Dicas:**
- 121.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega$  seu incírculo, de centro  $I$ . Digamos que  $AB$  toque  $\omega$  em  $N$ . Sejam  $K$  e  $M$  os pontos médios de  $CN$  e  $AB$ , respectivamente. Prove que  $K$ ,  $I$  e  $M$  são colineares. **Dicas:**
- 122.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu incírculo, de centro  $I$ . Digamos que  $AB$  toque  $k$  no ponto  $P$ . Seja  $CH$  ( $H \in AB$ ) uma altura de  $\triangle ABC$ . Denote o ponto médio de  $CH$  por  $M$ . Seja  $k_C(I_C)$  o  $C$ -exincírculo de  $\triangle ABC$ , e digamos que ele toque  $AB$  em  $F$ . Prove que os pontos  $M$ ,  $I$  e  $F$  são colineares, e prove que os pontos  $M$ ,  $P$  e  $I_C$  são colineares. **Dicas:**
- 123.** Seja  $ABC$  um triângulo. Digamos que seu incírculo toque os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  nos pontos  $F$ ,  $E$  e  $D$ , respectivamente. Digamos também que seu  $C$ -exincírculo toque as retas  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  nos pontos  $Q$ ,  $P$  e  $M$ , respectivamente. Seja  $MN$  ( $N \in PQ$ ) uma altura em  $\triangle PMQ$ , e seja  $DH$  ( $D \in EF$ ) uma altura em  $\triangle EDF$ . Prove que  $\angle ACN = \angle BCH$ . **Dicas:**
- 124.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $\omega_X(I_X)$  seus  $X$ -exincírculos para  $X \in \{A, B, C\}$ . Digamos que  $\omega_A$  toque  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  em  $P$ ,  $Q$  e  $E$ , respectivamente, assim como  $\omega_B$  toca  $BC$ ,  $BA$  e  $CA$  em  $N$ ,  $M$  e  $D$ , respectivamente. Diremos ainda que  $PE \cap MN = R$  e  $MD \cap PQ = S$ . Prove que os pontos  $I_B$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $S$  e  $I_A$  são colineares. **Dicas:**
- 125.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $\omega_X(I_X)$  seus  $X$ -exincírculos para  $X \in \{A, B, C\}$ . Digamos que  $\omega_A$  toque  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  em  $P$ ,  $Q$  e  $E$ , respectivamente, assim como  $\omega_B$  toca  $BC$ ,  $BA$  e  $CA$  em  $N$ ,  $M$  e  $D$ , respectivamente. Seja  $PE \cap MD = F$ . Prove que  $CF = r$ , onde  $r$  é o inraio de  $\triangle ABC$ . **Dicas:**
- 126.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $\omega_X(I_X)$  seus  $X$ -exincírculos para  $X \in \{A, B, C\}$ . Digamos que  $\omega_A$  toque  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  em  $P$ ,  $Q$  e  $E$ , respectivamente, assim como  $\omega_B$  toca  $BC$ ,  $BA$  e  $CA$  em  $N$ ,  $M$  e  $D$ , respectivamente. Sejam  $PE \cap MD = U$  e  $PQ \cap MN = F$ . Prove que  $CF \perp AB$  e que  $CU \perp AB$ . **Dicas:**
- 127.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $\omega_X(I_X)$  seus  $X$ -exincírculos para  $X \in \{A, B, C\}$ . Digamos que  $\omega_A$  toque  $BC$  em  $N$ , assim como  $\omega_B$  toca  $CA$  em  $M$  e  $\omega_C$  toca  $CA$  e  $CB$  em  $P$  e  $Q$ , respectivamente. Prove que as retas  $PQ$ ,  $MN$  e  $AB$  concorrem. **Dicas:**
- 128.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $K$  o ponto médio de  $AB$ . A reta  $CL$  ( $L \in AB$ ) é a bissetriz interna de  $\angle ACB$ . O  $B$ -exincírculo de  $\triangle ABC$  toca  $AC$  no ponto  $N$ . O  $A$ -exincírculo de  $\triangle ABC$  toca  $BC$  no ponto  $P$ . Seja  $M$  ponto médio de  $NP$ . Prove que  $KM \parallel CL$ . **Dicas:**
- 129.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega_A$  seu  $A$ -exincírculo, e  $\omega_B$  seu  $B$ -exincírculo.  $\omega_A$  toca  $AB$  e  $BC$  em  $Q$  e  $N$ , respectivamente, assim como  $\omega_B$  toca  $AB$  e  $AC$  em  $P$  e  $M$ , respectivamente. Prove que as mediatrizes de  $AN$  e  $BM$ , e a bissetriz interna de  $\angle ACB$  são concorrentes. **Dicas:**
- 130.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo. Seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ , e seja  $N$  o ponto médio do arco  $ACB$ . Sejam  $I_1$  e  $I_2$  os incentros de  $\triangle ACM$  e  $\triangle BCM$ , respectivamente. Prove que os pontos  $N$ ,  $C$ ,  $I_1$  e  $I_2$  são concíclicos. **Dicas:**
- 131.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $CM$  uma mediana. Sejam  $k_1(I_1)$  e  $k_2(I_2)$  os incírculos de  $\triangle ACM$  e  $\triangle BCM$ , respectivamente. Sejam  $k_3(I_3)$  e  $k_4(I_4)$  os  $M$ -exincírculos de  $\triangle ACM$  e  $\triangle BCM$ , respectivamente. Prove que os pontos  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  são concíclicos. **Dicas:**
- 132.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu incírculo de centro  $I$ . Seja  $k_1$  a circunferência que passa por  $A$  e  $B$ , e que toca  $k$  no ponto  $T$ . Seja  $CH$  uma altura em  $\triangle ABC$ , e seja  $M$  o ponto médio de  $CH$ . Seja  $P$  o ponto de tangência de  $AB$  com  $k$ . Prove que os pontos  $P$ ,  $M$  e  $T$  são colineares. **Dicas:**
- 133.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  alturas. Sejam  $C_2$ ,  $A_2$  e  $B_2$  os pontos de tangência do incírculo de  $\triangle ABC$  com  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente. Denote os pontos médios de  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  por  $M$ ,  $N$  e  $P$ , respectivamente. Prove que as retas  $MA_2$ ,  $NB_2$  e  $PC_2$  são concorrentes. **Dicas:**
- 134.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega(I)$  seu incírculo, que toca  $AB$  em  $M$ . Seja  $L$  a reflexão de  $M$  com respeito a  $I$ . Sejam  $AI \cap BC = N$ ,  $BI \cap AC = P$  e  $PN \cap IC = K$ . Seja  $H$  a projeção de  $C$  sobre  $AB$ . Prove que os pontos  $L$ ,  $K$  e  $H$  são colineares. **Dicas:**
- 135.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega$  seu incírculo, que toca os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$ , respectivamente. Uma circunferência  $k_1$  é construída de forma que toque  $AB$  em  $M$ . Seja  $L$  o ponto de interseção das retas tangentes a  $k_1$  por  $A$  e  $B$  (distintas de  $AB$ ). Digamos que  $k_1$  toque  $LA$  e  $LB$  nos pontos  $S$  e  $Q$ , respectivamente. Prove que os pontos  $P$ ,  $N$ ,  $Q$  e  $S$  são concíclicos. **Dicas:**
- 136.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega(I)$  seu incírculo, que toca  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Seja  $D$  a projeção de  $A$  sobre  $BI$ , e seja  $T$  a projeção de  $I$  sobre  $CD$ . Sejam  $P$  e  $Q$  os pontos de interseção de  $\omega$  com  $BD$ . Prove que os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $C$  e  $T$  são concíclicos. **Dicas:**
- 137.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega$  seu incírculo, que toca  $AB$  em  $D$ . Seja  $CD \cap \omega = E \neq D$ . A circunferência de centro  $B$  e raio  $BD$  intersecta  $CD$

no ponto  $F \neq D$ . Seja  $BF \cap AE = K$ . Prove que  $KF = FB$ . **Dicas:**

138. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega(I)$  seu incírculo, que toca os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $N$ ,  $Q$  e  $P$ , respectivamente. Seja  $NI \cap PQ = E$ . Seja  $F$  o ponto tal que  $CF = CP$ ,  $CF \parallel AB$ , e  $F$  e  $A$  ficam em semiplanos distintos, com respeito a  $BC$ . Prove que os pontos  $A$ ,  $E$  e  $F$  são colineares. **Dicas:**
139. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega$  seu incírculo, que toca os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $M$ ,  $F$  e  $E$ , respectivamente. Seja  $CM \cap \omega = N \neq M$ . Seja  $l \parallel AB$  uma reta que passa por  $C$ . Os pontos  $P$  e  $Q$  são os pontos de interseção de  $l$  com as retas  $ME$  e  $MF$ , respectivamente. Prove que  $\angle ENF = \angle PNQ$ . **Dicas:**
140. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega$  seu incírculo, que toca os lados  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $D$  e  $F$ , respectivamente. Seja  $AD \cap BF = G$ . Denote o ponto médio de  $FD$  por  $M$ . Sejam  $K$  e  $L$  as reflexões de  $F$  e  $D$  com respeito a  $A$  e  $B$ , respectivamente. Prove que  $MG \perp KL$ . **Dicas:**
141. Seja  $ABC$  um triângulo. Digamos que  $AC \geq BC$  e que  $k$  seja seu incírculo, que toca os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  nos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente. Sejam  $L$  e  $K$  as respectivas reflexões de  $A$  e  $B$  com respeito a  $F$ . As retas que passam por  $L$  e  $K$ , perpendiculares a  $AB$ , intersectam  $CB$  e  $CA$  em  $N$  e  $M$ , respectivamente. Prove que  $MN$  toca  $k$ . **Dicas:**
142. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $\omega$  seu incírculo, que toca os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$ , respectivamente. Seja  $T$  a interseção do segmento  $CI$  com  $\omega$ . Seja  $MP \cap AT = R$  e  $MN \cap BT = Q$ . Prove que  $RQ \perp IC$ . **Dicas:**
143. Seja  $ABC$  um triângulo isósceles ( $AC = BC$ ) e digamos que  $AC > AB$ . Seu incírculo  $\omega$  toca  $AB$  e  $CA$  em  $M$  e  $N$ , respectivamente. Seja  $P$  um ponto no lado  $BC$  tal que  $AP = AB$ . Seja  $I_1$  o incentro de  $\triangle APC$ . As retas  $AI_1$  e  $MN$  se intersectam em  $K$ . Prove que  $K$  é o ponto médio de  $AI_1$ . **Dicas:**
144. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $I$  seu incentro. Seja  $k_2(I_2)$  uma circunferência que toca os segmentos  $AC$  e  $BC$ . Seja  $k_1(I_1)$  uma circunferência que toca  $AB$  em  $G$ ,  $AC$ , e  $k_2$  em  $D$ . Seja  $k_3(I_3)$  uma circunferência que toca  $AB$  em  $T$ ,  $BC$ , e  $k_2$  em  $F$ . Prove que  $I$  fica sobre a mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos de interseção dos segmentos  $AI$  e  $BI$  com o circuncírculo de  $\triangle GTF$ . **Dicas:**
145. 4.5.29
146. Sejam  $m_A$ ,  $m_B$  e  $m_C$  círculos de Malfatti de um triângulo  $ABC$  de incentro  $I$ . Sejam  $m_A \cap m_B = T_C$ ,  $m_B \cap m_C = T_A$  e  $m_A \cap m_C = T_B$ . As circunferências  $m_A$  e  $m_B$  tocam  $AB$  em  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Prove que o quadrilátero  $XYT_A T_B$  é inscrito numa

circunferência, e digamos que essa circunferência intersecte  $AI$  e  $BI$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Prove também que  $AM = AX$  e  $BN = BY$ .

**Dicas:**

147. 4.5.31
148. Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $D$  e  $E$  pontos sobre  $AB$  ( $D$  fica entre  $A$  e  $E$ ). Sejam  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$  os incírculos de  $\triangle ADC$ ,  $\triangle AEC$ ,  $\triangle BDC$  e  $\triangle BEC$ , respectivamente. Prove que  $AB$  e as retas tangentes externas (diferentes de  $AB$ ) dos pares de círculos  $(k_1, k_4)$  e  $(k_2, k_3)$  são concorrentes.
149. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $D$  um ponto arbitrário do segmento  $AB$ . Sejam  $k_1$  e  $k_2$  os incírculos de  $\triangle ADC$  e  $\triangle BDC$ , respectivamente. Digamos que a reta tangente externa comum a  $k_1$  e  $k_2$  (distinta de  $AB$ ) intersecta  $CD$  em  $K$ . Prove que  $CK = \frac{AC+BC-AB}{2}$ . **Dicas:**
150. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu incírculo, que toca  $AB$  em  $E$ . Seja  $D$  um ponto sobre o segmento  $AB$ . Sejam  $k_1(I_1)$  e  $k_2(I_2)$  os incírculos de  $\triangle ADC$  e  $\triangle BDC$ , respectivamente. Prove que  $\angle I_1 E I_2 = 90^\circ$ . **Dicas:**
151. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $CH$  uma altura e digamos que seu incírculo toque  $AB$  em  $M$ . Denote os incentros de  $\triangle AHC$  e  $\triangle BHC$  por  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. Um ponto  $D_1$  é escolhido tal que  $MI_2 D_1 I_1$  é um retângulo. Prove que este retângulo é um quadrado, e prove que  $D_1$  fica sobre  $CH$ . **Dicas:**
152. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo. Seja  $l$  a reta tal que  $l \parallel AB$  e tal que  $l$  intersecta  $AC$  e  $BC$  nos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente. Digamos que  $DE$  intersecte  $k$  nos pontos  $P$  e  $Q$ , respectivamente ( $D$  fica entre  $P$  e  $E$ ). Seja  $k_1$  a circunferência que toca os segmentos  $PD$ ,  $DC$ , e o arco menor  $PC$  de  $k$ . Seja  $k_2$  a circunferência que toca os segmentos  $EQ$ ,  $EC$ , e o arco menor  $QC$  de  $k$ . Digamos que  $k_1$  toque  $DC$  em  $M$ . Digamos que  $k_2$  toque  $EC$  em  $N$ . Prove que  $MN \parallel l$ . **Dicas:**
153. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $k$  seu circuncírculo. Os pontos médios dos arcos menores  $BC$  e  $AC$  são  $M$  e  $N$ , respectivamente. As retas  $AM$  e  $BN$  se intersectam em  $I$ . Seja  $k_1(N)$  a circunferência que toca  $AC$ , e seja  $k_2(M)$  a circunferência que toca  $BC$ . Prove que uma das retas tangentes externas comuns a  $k_1$  e  $k_2$  passa por  $C$ , e a outra passa por  $I$ . **Dicas:**
154. Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $l$  uma reta que passa por  $A$ , que não intersecta o segmento  $BC$ . Sejam  $k_1(O_1)$ ,  $k_2(O_2)$  e  $k_3(O_3)$  circunferências que tocam as retas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  e  $l$  ( $k_1$  não toca  $AC$ ,  $k_2$  não toca  $BA$  e  $k_3$  não toca  $l$ ). Prove que o quadrilátero  $O_1 O_3 O_2 A$  é cíclico. **Dicas:**
155. Usando a construção do problema anterior, prove que o ortocentro de  $\triangle O_1 O_2 O_3$  fica sobre  $BC$ . **Dicas:**



- 156.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo. Os quatro excírculos do quadrilátero são construídos. Sejam  $O_1$  e  $O_2$  os centros das circunferências que tocam os segmentos  $AD$  e  $BC$ . As outras duas circunferências tocam os segmentos  $AB$  e  $DC$  em  $L$  e  $K$ , respectivamente. Seja  $M$  o ponto médio de  $O_1O_2$ . Prove que  $MK = ML$ . **Dicas:**
- 157.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $AF$ ,  $BD$  e  $CE$  alturas. Digamos que seu incírculo toque  $AB$  e  $AC$  nos pontos  $K$  e  $L$ , respectivamente. Sejam  $I_1$  e  $I_2$  os incentros de  $\triangle AED$  e de  $\triangle CDF$ , respectivamente. Prove que  $KI_1 = LI_1 = LI_2$ . **Dicas:**
- 158.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $CC_1$  e  $CC_2$ ,  $AA_1$  e  $AA_2$ ,  $BB_1$  e  $BB_2$  três pares de segmentos isogonalmente conjugados com respeito a  $\triangle ABC$ . Temos que  $C_1 \in AB$ ,  $C_2 \in AB$ ,  $B_1 \in AC$ ,  $B_2 \in AC$ ,  $A_1 \in BC$ , e  $A_2 \in BC$ . Sejam  $AA_1 \cap CC_2 = X$ ,  $BB_1 \cap AA_2 = Y$ , e  $CC_1 \cap BB_2 = Z$ . Prove que se os quadriláteros  $AC_1ZB_2$  e  $BA_1XC_2$  são circuncritíveis, então o quadrilátero  $B_1YA_2C$  também é circuncritível. **Dicas:**
- 159.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero circuncritível e incírculo  $k$ . Digamos que as semirretas  $DA$  e  $CB$  se intersectem em  $E$ , e digamos que as semirretas  $DC$  e  $AB$  se intersectem em  $F$ . Seja  $H$  a projeção de  $B$  sobre a reta  $EF$ . Sejam  $k_1$  e  $k_2$  os incírculos de  $\triangle ABE$  e  $\triangle BCF$ , respectivamente. Sejam  $I_1$  e  $I_2$  seus respectivos centros. Sejam  $HP$  e  $HQ$  as retas tangentes de  $H$  respectivamente a  $k_1$  e  $k_2$  ( $P \in k_1$  e  $Q \in k_2$ ). Prove que  $\angle I_1HP = \angle I_2HQ$ . **Dicas:**