

Professor: Jeferson Almir

Aluno(a): _____ N.º: _____
 Data: ____/____/____

1 Problemas

- 001.** Seja ABC um triângulo. Prove que suas medianas CD , AE e BF são concorrentes. **Dicas:**
- 002.** Seja ABC um triângulo. Prove que suas alturas AE , CF e BD são concorrentes. **Dicas:**
- 003.** Prove que as bissetrizes internas de um $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**
- 004.** Seja ABC um triângulo. Seu incírculo toca AB , BC e CA nos pontos C_1 , A_1 e B_1 respectivamente. Prove que as retas CC_1 , BB_1 e AA_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 005.** Prove que as mediatrizes dos lados de um dado $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**
- 006.** Seja ABC um triângulo de circuncírculo k . Sejam l_A , l_B e l_C as retas tangentes a k pelos pontos A , B e C respectivamente. Se $l_A \cap l_B = C_1$, $l_B \cap l_C = A_1$ e $l_C \cap l_A = B_1$, prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 007.** Seja ABC um triângulo. Sejam A_1 , B_1 e C_1 os pontos de tangência dos segmentos BC , CA e AB com os excírculos de $\triangle ABC$. Prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 008.** Seja ABC um triângulo e seja N seu ponto de Nagel (ponto de concorrência do exercício anterior). Digamos que AN , BN e CN intersectem o incírculo de $\triangle ABC$ nos pontos A_1 , B_1 e C_1 , e os lados BC , CA e AB nos pontos A_2 , B_2 e C_2 , respectivamente. Prove que $AA_1 = NA_2$, $BB_1 = NB_2$ e $CC_1 = NC_2$. **Dicas:**
- 009.** Seja ABC um triângulo. Os triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ são construídos no exterior do triângulo ABC . Prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 010.** Seja ABC um triângulo. Os triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ são construídos no interior do triângulo ABC . Prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 011.** Prove que para um dado $\triangle ABC$, existe algum ponto X tal que vale $AX \cdot BC = BX \cdot AC = CX \cdot AB$. **Dicas:**
- 012.** Prove que para um dado $\triangle ABC$, exatamente dois pontos satisfazem a condição da questão anterior. **Dicas:**
- 013.** Seja ABC um triângulo. Prove que existe um ponto único S tal que vale $BC + AS = CA + BS = AB + CS$. **Dicas:**
- 014.** Seja ABC um triângulo. Prove que existe um ponto único S tal que vale $BC - AS = CA - BS = AB - CS$. **Dicas:**
- 015.** Três circunferências $k_1(A)$, $k_2(B)$ e $k_3(C)$ são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja C_1 e B_1 os pontos de tangência de k_1 com k_2 , e de k_1 com k_3 , respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de k_2 com k_3 . A circunferência k_4 toca as outras três circunferências externamente. Prove que o primeiro centro de Soddy do $\triangle ABC$ (problema 13) coincide com o centro de k_4 . **Dicas:**
- 016.** Três circunferências $k_1(A)$, $k_2(B)$ e $k_3(C)$ são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja C_1 e B_1 os pontos de tangência de k_1 com k_2 , e de k_1 com k_3 , respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de k_2 com k_3 . A circunferência k_4 toca as outras três circunferências internamente. Prove que o segundo centro de Soddy do $\triangle ABC$ (problema 14) coincide com o centro de k_4 . **Dicas:**
- 017.** Seja ABC um triângulo. Sejam S_1 e S_2 seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos A , B e C estão sobre uma elipse de focos S_1 e S_2 . **Dicas:**
- 018.** Seja ABC um triângulo. Seja S_1 seu primeiro centro de Soddy (problema 13). Prove que existe uma circunferência inscrita no quadrilátero convexo formado pelas retas CS_1 , BS_1 , AC e AB . **Dicas:**
- 019.** Seja ABC um triângulo. Seja S_2 seu segundo centro de Soddy (problema 14). Prove que existe uma circunferência que toca as retas BA e BC e os segmentos AS_2 e CS_2 . **Dicas:**
- 020.** Seja ABC um triângulo, com excírculos ω_a , ω_b e ω_c . Sejam I_a , I_b e I_c os centros de ω_a , ω_b e ω_c respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de ω_a com o lado BC . Defina os pontos B_1 e C_1 analogamente. Prove que as retas C_1I_c , B_1I_b e A_1I_a são concorrentes. **Dicas:**
- 021.** Seja ABC um triângulo. O primeiro ponto de Brocard Br_1 é definido como o ponto para o qual $\angle BAB_{r_1} = \angle ACB_{r_1} = \angle CBB_{r_1}$. Prove que esse ponto sempre existe. **Dicas:**
- 022.** Seja ABC um triângulo. O segundo ponto de Brocard Br_2 é definido como o ponto tal que $\angle ABB_{r_2} = \angle CAB_{r_2} = \angle BCB_{r_2}$. Prove que ele sempre existe. **Dicas:**
- 023.** Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam Br_1 e Br_2 seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Seja $CL \cap AB = F$. Prove que $\angle AFB_{r_1} = \angle BFB_{r_2}$. **Dicas:**

- 024.** Seja ABC um triângulo, com circuncentro O . Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam Br_1 e Br_2 seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Prove que valem as igualdades $\angle OBr_1L = \angle OBr_2L = 90^\circ$ e $Br_1L = Br_2L$. **Dicas:**
- 025.** Seja ABC um triângulo. Sejam Ap_1 e Ap_2 seus dois pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12). Prove que os triângulos pedais com respeito a esses dois pontos são equiláteros. **Dicas:**
- 026.** Seja ABC um triângulo. Sejam E e D os pés das bissetrizes interna e externa em relação a C , respectivamente. Prove que os dois pontos isodinâmicos de $\triangle ABC$ (problemas 11 e 12) ficam sobre a circunferência de diâmetro ED . **Dicas:**
- 027.** Seja ABC um triângulo. Seja T_1 seu primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9). Prove que $\angle AT_1B = \angle BT_1C = 120^\circ$. **Dicas:**
- 028.** Seja ABC um triângulo. Seja T_2 seu segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10). Prove que vale exatamente uma das igualdades $\angle AT_2B = \angle AT_2C = 60^\circ$, $\angle BT_2A = \angle BT_2C = 60^\circ$ e $\angle CT_2B = \angle CT_2A = 60^\circ$. **Dicas:**
- 029.** Seja ABC um triângulo. Prove que o primeiro ponto isodinâmico (problema 11) é conjugado isogonal do primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9) com respeito a $\triangle ABC$. **Dicas:**
- 030.** Seja ABC um triângulo. Prove que o segundo ponto isodinâmico (problema 12) é conjugado isogonal do segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10) com respeito a $\triangle ABC$. **Dicas:**
- 031.** Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos $M, K \in AB$, $H, I \in BC$ e $J, G \in AC$ são escolhidos de tal forma que $MI \parallel AC$, $GH \parallel AB$, $KJ \parallel BC$ e $MI \cap KJ \cap GH = L$. Prove que os pontos M, K, H, I, J e G ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 032.** Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos $M, K \in AB$, $H, I \in BC$ e $J, G \in AC$ são escolhidos de tal modo que os quadriláteros $MICA$, $GHBA$ e $KJCB$ são cíclicos e $MI \cap KJ \cap GH = L$. Prove que os pontos M, K, H, I, J e G ficam sobre uma circunferência de centro L . **Dicas:**
- 033.** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AB \cap CD = E$ e $AD \cap BC = E$. Prove que os circuncírculos de $\triangle BFC$, $\triangle AFD$ e $\triangle ABE$ passam por um ponto em comum. **Dicas:**
- 034.** A construção do problema 33 é dada. Prove que o ponto M e os respectivos centros O_1 , O_2 , O_3 e O_4 dos circuncírculos de $\triangle AFD$, $\triangle BFC$, $\triangle ABE$ e $\triangle DCE$ ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 035.** As circunferências k_1, k_2, k_3 e k_4 são dadas de tal modo que elas passam por um ponto em comum M . Prove que as circunferências que passam pelos pontos de interseção de (k_1, k_2, k_3) , (k_1, k_2, k_4) , (k_1, k_3, k_4) e (k_2, k_3, k_4) , diferentes de M , também passam por um ponto em comum. **Dicas:**
- 036.** Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $AC \cap BE = D_1$, $BD \cap AC = E_1$, $BD \cap EC = A_1$, $EC \cap AD = B_1$ e $AD \cap BE = C_1$. Digamos que (XYZ) denote o circuncírculo de $\triangle XYZ$. Sejam $(AD_1C_1) \cap (B_1C_1E) = \{C_1, C_2\}$, $(B_1C_1E) \cap (A_1B_1D) = \{B_1, B_2\}$, $(A_1B_1D) \cap (A_1E_1C) = \{A_1, A_2\}$, $(A_1E_1C) \cap (E_1D_1B) = \{E_1, E_2\}$ e $(E_1D_1B) \cap (C_1D_1A) = \{D_1, D_2\}$. Prove que os pontos A_2 , B_2 , C_2 , D_2 e E_2 ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 037.** Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $AC \cap BE = D'$, $BD \cap AC = E'$, $BD \cap EC = A'$, $EC \cap AD = B'$ e $AD \cap BE = C'$. Digamos que (XYZ) denote o circuncírculo de $\triangle XYZ$. Sejam $(AD'B) \cap (BE'C) = \{B, B''\}$, $(BE'C) \cap (CA'D) = \{C, C''\}$, $(CA'D) \cap (DB'E) = \{D, D''\}$, $(DB'E) \cap (AC'E) = \{E, E''\}$ e $(AC'E) \cap (AD'B) = \{A, A''\}$. Prove que as retas AA'' , BB'' , CC'' , DD'' e EE'' são concorrentes. **Dicas:**
- 038.** Seja ABC um triângulo. Seja O seu circuncentro. Seja M seu baricentro e seja H seu ortocentro. Prove que os pontos H , O e M são colineares. **Dicas:**
- 039.** Seja ABC um triângulo. Seja N seu ponto de Nagel (problema 7). Seja M seu baricentro e seja I seu incentro. Prove que os pontos N , I e M são colineares. **Dicas:**
- 040.** Seja ABC um triângulo. Prove que as retas formadas pelos primeiro e segundo pontos de Fermat-Torricelli (problemas 9 e 10) e pelos primeiro e segundo pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12) se intersectam no ponto de Lemoine L (problema 6). Além disso, prove que o circuncentro de $\triangle ABC$ fica na reta dada pelos pontos isodinâmicos. **Dicas:**
- 041.** Seja ABC um triângulo. Prove que Ap_2T_1 e Ap_1T_2 se intersectam no baricentro M do $\triangle ABC$. (Ap_1 e Ap_2 são os pontos isodinâmicos dos problemas 11 e 12, e T_1 e T_2 são os pontos de Fermat-Torricelli dos problemas 9 e 10). **Dicas:**
- 042.** Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro, e seja O seu circuncentro. Seja Bi seu ponto de Bevan (problema 20). Prove que os pontos I , O e Bi são colineares. **Dicas:**
- 043.** Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro, seja G seu ponto de Gergonne (problema 4), e sejam S_1 e S_2 seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos I , G , S_1 e S_2 são colineares. **Dicas:**
- 044.** Seja $ABCD$ um quadrilátero. Digamos que os pés das perpendiculares de A até BC e CD sejam R e Q ,

respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de B até CD e DA sejam N e I , respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de C até DA e AB sejam L e M , respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de D até AB e BC sejam J e K , respectivamente. Sejam $AR \cap BI = G$, $BN \cap CM = H$, $CL \cap DK = E$ e $AQ \cap DJ = F$. Prove que os pontos E , F , G e H são colineares. **Dicas:**

045. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB \cap CD = E$ e $AD \cap BC = F$. Prove que os pontos médios M , N e P dos segmentos AC , BD e EF , respectivamente, são colineares. **Dicas:**

046. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Sejam J e I os pontos médios das diagonais AC e BD , respectivamente. Digamos que a perpendicular DG a BC ($G \in BC$) intersecte a perpendicular CH a AD ($H \in AD$) no ponto K . A perpendicular BF a AD ($F \in AD$) intersecta a perpendicular AE a BC ($E \in BC$) no ponto L . Prove que $KL \perp JI$. **Dicas:**

047. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB \cap DC = E$ e $AD \cap BC = F$. As circunferências k_1 , k_2 e k_3 têm AC , BD e EF como diâmetros, respectivamente. Prove que elas têm um eixo radical em comum. **Dicas:**

048. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Um ponto arbitrário D é escolhido no arco \widehat{AB} de k que não contém C . Os pontos E , F e G ficam sobre CA , AB e BC respectivamente, e são escolhidos de forma que $\angle AED = \angle AFD = \angle BGD = 90^\circ$. Prove que os pontos E , F e G são colineares. **Dicas:**

049. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Um ponto arbitrário D é escolhido no arco \widehat{AB} de k que não contém C . Os pontos E , F e G ficam sobre CA , AB e BC respectivamente, e são escolhidos de forma que $\angle AED = \angle AFD = \angle BGD = \varphi$. Prove que os pontos E , F e G são colineares. **Dicas:**

050. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Dois pontos arbitrários P e Q são escolhidos no arco \widehat{AB} que não contém C . Pontos M , N e K são escolhidos em BC , CA e AB respectivamente, tais que $\angle(PM, BC) = \angle(QM, CB)$, $\angle(PN, AC) = \angle(QN, CA)$ e $\angle(QK, AB) = \angle(PK, BA)$. Prove que os pontos M , N e K são colineares. **Dicas:**

051. Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto do circuncírculo de $\triangle ABC$. Prove que o ponto médio J do segmento DH (H é o ortocentro de $\triangle ABC$) fica sobre a reta de Simson (problema 48) do $\triangle ABC$ e do ponto D . **Dicas:**

052. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Os pés das perpendiculares de A até BC e CD são E e F , respectivamente. Os pés das perpendiculares de B até CD e DA são I e J , respectivamente. Os pés das

perpendiculares de C até DA e AB são G e H , respectivamente. Os pés das perpendiculares de D até AB e BC são K e L , respectivamente. Prove que as retas JI , EF , GH e KL são concorrentes. **Dicas:**

053. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico, e seja X um ponto arbitrário. Os pés das perpendiculares de X até AB e CD são H e I , respectivamente. Os pés das perpendiculares de X até BC e DA são K e F , respectivamente. Os pés das perpendiculares de X até AC e BD são G e J , respectivamente. Os pontos médios de HI , GJ e KF são L , M e N , respectivamente. Prove que os pontos M , N e L são colineares. **Dicas:**

054. Seja ABC um triângulo. O circuncírculo de $\triangle ABC$ é k e seu ortocentro é H . A altura relativa a B intersecta AC e k nos pontos B_1 e B_2 , respectivamente. Prove que os pontos H e B_2 são simétricos com respeito a B_1 . **Dicas:**

055. Seja O o circuncentro de $\triangle ABC$ de alturas AA_1 , BB_1 e CC_1 . As retas CC_1 e A_1B_1 se intersectam no ponto N e as retas CO e AB se intersectam no ponto E . Prove que $HM \parallel EN$, onde M é ponto médio de AB . **Dicas:**

056. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja D um ponto arbitrário na tangente a k por C . Os pontos E e F são as projeções de D em AC e BC , respectivamente. Prove que $EF \perp AB$. **Dicas:**

057. Seja ABC um triângulo. Seja P um ponto arbitrário no arco menor \widehat{AB} do circuncírculo de $\triangle ABC$. As projeções de P em AC e AB são X e Y , respectivamente. Os pontos M e N são os pontos médios de BC e XY , respectivamente. Prove que $\angle PNM = 90^\circ$. **Dicas:**

058. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Os pontos M , N , P e Q são projeções de C_1 nas retas AC , AA_1 , BB_1 e BC_1 , respectivamente. Prove que os pontos M , N , P e Q são colineares. **Dicas:**

059. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Denote as reflexões de C_1 com respeito aos lados AC e BC por M e N , respectivamente. Prove que os pontos M , B_1 , A_1 e N são colineares. **Dicas:**

060. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Os pontos M e N são as projeções de C_1 sobre os lados AC e BC , respectivamente. Seja $P = MN \cap B_1C_1$. Prove que P é o ponto médio de B_1C_1 . **Dicas:**

061. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo e seja H seu ortocentro. Sejam AA_1 e BB_1 alturas deste triângulo. Seja D um ponto arbitrário no segmento BH . A reta AD intersecta k novamente no ponto E . Sejam $BE \cap AA_1 = F$ e K o ponto médio de FD . Prove que os pontos A_1 , B_1 e K são colineares. **Dicas:**

- 062.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. A reta CM ($M \in AB$) é bissetriz interna de $\angle ACB$, e intersecta k no ponto N . A reta que passa por M e é perpendicular a BC , intersecta BC e o arco menor \widehat{BC} de k nos pontos L e X , respectivamente. A reta que passa por C e é perpendicular a AX , intersecta AX e AB nos pontos Z e Y , respectivamente. Prove que os pontos X , Y e N são colineares. **Dicas:**
- 063.** Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 as alturas de um dado triângulo ABC . Seja P um ponto arbitrário interno ao triângulo. Os pontos C_2 e C_3 são as projeções de P em AB e CC_1 , respectivamente. Os pontos $A_2 \in BC$, $A_3 \in AA_1$, $B_2 \in AC$ e $B_3 \in BB_1$ são definidos analogamente. Prove que as retas A_2A_3 , B_2B_3 e C_2C_3 são concorrentes. **Dicas:**
- 064.** Seja ABC um triângulo. Sejam AB_1 e BA_1 alturas desse triângulo, com interseção H . As retas A_1B_1 e AB se intersectam no ponto D , e M é ponto médio de AB . Prove que $MH \perp DC$. **Dicas:**
- 065.** Seja ABC um triângulo acutângulo. O ponto H é seu ortocentro e o ponto M é ponto médio de AB . Sejam AA_1 e BB_1 alturas desse triângulo e seja $AB \cap A_1B_1 = D$. A reta CH intersecta o circuncírculo de $\triangle ABC$ nos pontos C e K . Prove que os pontos K , M , C e D são concíclicos. **Dicas:**
- 066.** Seja ABC um triângulo com $\angle ACB > 90^\circ$. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. O ponto M é ponto médio do lado AB . Prove que os pontos médios de AA_1 e BB_1 , e os pontos M e C_1 são concíclicos. **Dicas:**
- 067.** Seja ABC um triângulo com $\angle ACB > 90^\circ$ e de alturas AA_1 e BB_1 . Os pontos P e M são as projeções de A_1 sobre AC e AB , respectivamente, e Q e N são as projeções de B_1 sobre BC e AB , respectivamente. Prove que $PM = QN$. **Dicas:**
- 068.** Seja ABC um triângulo. Seja CD uma altura e O o circuncentro. Seja M o ponto médio de AB . Denote a projeção de A em CO por P . Prove que $DM = PM$. **Dicas:**
- 069.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 e BB_1 alturas. A circunferência de diâmetro AC intersecta a reta BB_1 nos pontos P e M de forma que P fica entre B e M . A circunferência de diâmetro BC intersecta AA_1 nos pontos N e Q de forma que N fica entre A e Q . Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é cíclico. **Dicas:**
- 070.** Seja ABC um triângulo. Seja CD uma altura. Os pontos E e F são as projeções de D sobre AC e BC respectivamente. Prove que o quadrilátero $ABFE$ é cíclico. **Dicas:**
- 071.** Seja ABC um triângulo. Seja CD uma altura. Os pontos E e F são as projeções de D sobre AC e BC respectivamente. Os pontos M e N são os pontos médios de AC e BC respectivamente. Prove que o quadrilátero $EFNM$ é cíclico. **Dicas:**
- 072.** Seja ABC um triângulo. Os segmentos AA_1 e BB_1 são alturas, e a bissetriz interna de $\angle ACB$ intersecta os segmentos A_1B_1 no ponto L . O circuncírculo de $\triangle AB_1L$ intersecta BB_1 uma segunda vez em X . Seja $Y \in AA_1$ um ponto tal que $AY = BX$. Prove que o quadrilátero BA_1LY é cíclico. **Dicas:**
- 073.** Seja ABC um triângulo. Seu circuncentro é O , seu ortocentro é H e suas alturas são AA_1 , BB_1 e CC_1 . O ponto M é a projeção de C sobre A_1B_1 , e N é a reflexão de C com respeito a A_1B_1 . Prove que os pontos H , O , N e C_1 são concíclicos. **Dicas:**
- 074.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 e BB_1 alturas. Um ponto D é escolhido na semirreta AA_1 . Um ponto E é escolhido na semirreta BB_1 , de tal forma que $\angle DCE = 90^\circ$. Seja H o pé da perpendicular de C a ED . Prove que $\angle AHB = 90^\circ$. **Dicas:**
- 075.** Seja ABC um triângulo. Os segmentos AA_1 , BB_1 e CC_1 são alturas. Os pontos A_2 e A_3 são as projeções de A_1 sobre AC e AB respectivamente. Os pontos B_2 , B_3 , C_2 e C_3 são definidos analogamente. Prove que os pontos A_2 , A_3 , B_2 , B_3 , C_2 e C_3 são concíclicos. **Dicas:**
- 076.** Seja ABC um triângulo. Digamos que $AC = BC$. O segmento CC_1 é uma altura e M é seu ponto médio. Seja P a projeção de C_1 sobre BM . Prove que $\angle APC = 90^\circ$. **Dicas:**
- 077.** Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro e seja M o ponto médio do lado AB . Prove que o ponto simétrico de H com respeito a M coincide com o ponto diametralmente oposto de C com respeito ao circuncírculo de $\triangle ABC$. **Dicas:**
- 078.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 e BB_1 alturas que se intersectam em H . Seja D o segundo ponto de interseção dos circuncírculos de $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C$, e seja M o ponto médio de AB . Prove que os pontos D , H e M são colineares. **Dicas:**
- 079.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo e H seu ortocentro. Seja l uma reta arbitrária que passa por H . Prove que as reflexões de l com respeito a AB , BC e CA concorrem num ponto de k . **Dicas:**
- 080.** Seja ABC um triângulo. Seja O seu circuncentro. As reflexões de AB com respeito às retas AC e BC se intersectam no ponto K . Prove que os pontos C , O e K são colineares. **Dicas:**
- 081.** Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro, e seja M o ponto médio do lado AB . A reta que passa por H e que é perpendicular a HM intersecta os lados AC e BC nos pontos D e E , respectivamente. Prove que $DH = EH$. **Dicas:**
- 082.** Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro e O seu circuncentro. O ponto M está no lado BC e $\angle OC_1M = 90^\circ$. Prove que $\angle ABC = \angle MHC_1$. **Dicas:**

- 083.** Seja ABC um triângulo. O circuncírculo de $\triangle ABC$ é k e seu ortocentro é H . Considere duas retas que passam por H que são perpendiculares entre si. Uma delas intersecta AB , BC e CA nos pontos F , K e P respectivamente, e a outra nos pontos E , Q e L respectivamente. Prove que os pontos médios S , N e M dos segmentos QK , EF e LP , respectivamente, são colineares. **Dicas:**
- 084.** Seja ABC um triângulo. O circuncírculo de $\triangle ABC$ é k e seu ortocentro é H . Seja P um ponto arbitrário do interior de $\triangle ABC$. As retas AP , BP e CP intersectam k uma segunda vez nos pontos A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente. Os pontos A_2 , B_2 e C_2 são as projeções de P sobre BC , CA e AB , respectivamente. Os pontos A_3 , B_3 e C_3 são as reflexões de A_1 , B_1 e C_1 com respeito a A_2 , B_2 e C_2 respectivamente. Prove que os pontos H , A_3 , B_3 e C_3 são concíclicos. **Dicas:**
- 085.** Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro e seja P um ponto arbitrário do interior do triângulo. As retas AP , BP e CP intersectam o circuncírculo k de $\triangle ABC$ nos pontos A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente. Os pontos A_2 , B_2 e C_2 são as reflexões de A_1 , B_1 e C_1 com respeito às retas BC , AC e AB , respectivamente. Prove que o quadrilátero $HA_2B_2C_2$ é cíclico. **Dicas:**
- 086.** Seja ABC um triângulo. Sejam M e N os pés das bissetrizes internas relativas a A e B , respectivamente. O ponto P é o pé da bissetriz externa relativa a C . Prove que os pontos N , M e P são colineares. **Dicas:**
- 087.** Seja ABC um triângulo. Sejam B_1 e C_1 os pés das bissetrizes internas relativas a B e C , respectivamente. Seja O o circuncentro de $\triangle ABC$ e seja I_a o A -exincentro. Prove que $OI_a \perp B_1C_1$. **Dicas:**
- 088.** Seja ABC um triângulo. Digamos que $\angle ABC > 90^\circ$ e sejam CM e CN as bissetrizes interna e externa de $\angle ACB$, respectivamente. Prove que as circunferências (ACB) e (MNC) são ortogonais, isto é, que as retas tangentes por seus pontos de interseção são perpendiculares. **Dicas:**
- 089.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. A reta CL ($L \in AB$) é a bissetriz interna de $\angle ACB$. Denote o ponto de interseção da reta tangente a k por C com a reta AB por N . Prove que $NC = NL$. **Dicas:**
- 090.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 bissetrizes internas. Seja P um ponto arbitrário na reta A_1B_1 e sejam X , Y e Z suas projeções sobre as retas AB , BC e CA , respectivamente. Prove que a soma dos comprimentos de dois dos segmentos PX , PY e PZ é igual ao comprimento do terceiro. **Dicas:**
- 091.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 e BB_1 bissetrizes internas. Seja E a interseção da reta A_1B_1 com o circuncírculo de $\triangle ABC$, tal que E e A estão no mesmo semiplano com respeito a BC . Prove que $\frac{1}{EA} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EC}$. **Dicas:**
- 092.** Seja ABC um triângulo. Sejam AQ e BP bissetrizes internas e k o circuncírculo de $\triangle ABC$. As retas AQ e BP intersectam k nos pontos M e N , respectivamente. Prove que as retas PQ , MN e a reta tangente a k por C são concorrentes. **Dicas:**
- 093.** Seja $ABCD$ um quadrilátero. As semirretas AB e DC se intersectam no ponto E e as semirretas AD e BC se intersectam no ponto F . A bissetriz interna de $\angle EAF$ e $\angle ECF$ se intersectam em X . A bissetriz interna de $\angle ADE$ intersecta a bissetriz externa de $\angle EBC$ em Y . As bissetrizes externas de $\angle AFB$ e $\angle AEC$ se intersectam em Z . Prove que os pontos X , Y e Z são colineares. **Dicas:**
- 094.** Seja ABC um triângulo tal que $AC > AB > BC$. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 suas bissetrizes internas. O circuncírculo de $\triangle A_1B_1C_1$ intersecta AB , AC e BC uma segunda vez nos pontos C_2 , B_2 e A_2 , respectivamente. Prove que $C_1C_2 = A_1A_2 + B_1B_2$. **Dicas:**
- 095.** Seja ABC um triângulo com bissetriz interna CL ($L \in AB$). A circunferência de diâmetro AB centrada em M intersecta os lados AC e BC uma segunda vez nos pontos B_1 e A_1 , respectivamente. A bissetriz interna de $\angle A_1MB_1$ intersecta a reta CL no ponto K . Prove que os quadriláteros $ALKB_1$ e $BLKA_1$ são cíclicos. **Dicas:**
- 096.** Seja ABC um triângulo e seja l sua bissetriz externa por C . Os pontos D e E são as projeções de A e B sobre l . O segmento CH ($H \in AB$) é a altura de C até AB e o ponto F é o ponto médio de AB . Prove que o quadrilátero $DEHF$ é cíclico. **Dicas:**
- 097.** Seja ABC um triângulo. Os pontos M , N , P e Q são os pés das perpendiculares de C até as bissetrizes interna e externas de $\angle BAC$ e $\angle ABC$, como mostrado na figura. Prove que os pontos M , N , P e Q são colineares. **Dicas:**

