Professor: Jeferson Almir

Aluno(a): ______________________________ Nž: __________
Data: __________/__________/__________

1 Problemas

001. Seja ABC um triângulo. Prove que suas medianas CD, AE e BF são concorrentes. **Dicas:**

002. Seja ABC um triângulo. Prove que suas alturas AE, CF e BD são concorrentes. **Dicas:**

003. Prove que as bissetrizes internas de um $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**

004. Seja ABC um triângulo. Seu incírculo toca AB, BC e CA nos pontos C_1, A_1 e B_1 respectivamente. Prove que as retas CC_1, BB_1 e AA_1 são concorrentes. **Dicas:**

005. Prove que as mediatrizes dos lados de um dado $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**

006. Seja ABC um triângulo de circuncírculo k. Sejam l_A, l_B e l_C as retas tangentes a k pelos pontos A, B e C respectivamente. Se $l_A \cap l_B = C_1$, $l_B \cap l_C = A_1$ e $l_C \cap l_A = B_1$, prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**

007. Seja ABC um triângulo. Sejam A_1, B_1 e C_1 os pontos de tangência dos segmentos BC, CA e AB com os exincírculos de $\triangle ABC$. Prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**

008. Seja ABC um triângulo e seja N seu ponto de Nagel (ponto de concorrência do exercício anterior). Digamos que AN, BN e CN intersectem o incírculo de $\triangle ABC$ nos pontos A_1, B_1 e C_1, e os lados BC, CA e AB nos pontos A_2, B_2 e C_2, respectivamente. Prove que $AA_1 = NA_2$, $BB_1 = NB_2$ e $CC_1 = NC_2$. **Dicas:**

009. Seja ABC um triângulo. Os triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ são construídos no exterior do triângulo ABC. Prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**

010. Seja ABC um triângulo. Os triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ são construídos no interior do triângulo ABC. Prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**

011. Prove que para um dado $\triangle ABC$, existe algum ponto X tal que vale $AX \cdot BC = BX \cdot AC = CX \cdot AB$. **Dicas:**

012. Prove que para um dado $\triangle ABC$, exatamente dois pontos satisfazem a condição da questão anterior. **Dicas:**

013. Seja ABC um triângulo. Prove que existe um ponto único S tal que vale $BC + AS = CA + BS = AB + CS$. **Dicas:**

014. Seja ABC um triângulo. Prove que existe um ponto único S tal que vale $BC - AS = CA - BS = AB - CS$. **Dicas:**

015. Três circunferências $k_1(A)$, $k_2(B)$ e $k_3(C)$ são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja C_1 e B_1 os pontos de tangência de k_1 com k_2, e de k_1 com k_3, respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de k_2 com k_3. A circunferência k_4 toca as outras três circunferências externamente. Prove que o primeiro centro de Soddy do $\triangle ABC$ (problema 13) coincide com o centro de k_4. **Dicas:**

016. Três circunferências $k_1(A)$, $k_2(B)$ e $k_3(C)$ são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja C_1 e B_1 os pontos de tangência de k_1 com k_2, e de k_1 com k_3, respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de k_2 com k_3. A circunferência k_4 toca as outras três circunferências internamente. Prove que o segundo centro de Soddy do $\triangle ABC$ (problema 14) coincide com o centro de k_4. **Dicas:**

017. Seja ABC um triângulo. Sejam S_1 e S_2 seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos A, B e C estão sobre uma elipse de focos S_1 e S_2. **Dicas:**

018. Seja ABC um triângulo. Seja S_1 seu primeiro centro de Soddy (problema 13). Prove que existe uma circunferência inscrita no quadrilátero convexo formado pelas retas CS_1, BS_1, AC e AB. **Dicas:**

019. Seja ABC um triângulo. Seja S_2 seu segundo centro de Soddy (problema 14). Prove que existe uma circunferência que toca as retas BA e BC e os segmentos AS_2 e CS_2. **Dicas:**

020. Seja ABC um triângulo, com exincírculos ω_a, ω_b e ω_c. Sejam I_a, I_b e I_c os centros de ω_a, ω_b e ω_c respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de ω_a com o lado BC. Defina os pontos B_1 e C_1 analogamente. Prove que as retas C_1I_c, B_1I_b e A_1I_a são concorrentes. **Dicas:**

021. Seja ABC um triângulo. O primeiro ponto de Brocard Br_1 é definido como o ponto para o qual $\angle BABr_1 = \angle ACBr_1 = \angle CBBr_1$. Prove que esse ponto sempre existe. **Dicas:**

022. Seja ABC um triângulo. O segundo ponto de Brocard Br_2 é definido como o ponto tal que $\angle ABBr_2 = \angle CABr_2 = \angle BCBr_2$. Prove que ele sempre existe. **Dicas:**

023. Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam Br_1 e Br_2 seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Seja $CL \cap AB = F$. Prove que $\angle AFBr_1 = \angle BFBr_2$. **Dicas:**

024. Seja ABC um triângulo, com circuncentro O. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam Br_1 e Br_2 seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Prove que valem as igualdades $\angle OBr_1L = \angle OBr_2L = 90°$ e $Br_1L = Br_2L$. **Dicas:**

025. Seja ABC um triângulo. Sejam Ap_1 e Ap_2 seus dois pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12). Prove que os triângulos pedais com respeito a esses dois pontos são equiláteros. **Dicas:**

026. Seja ABC um triângulo. Sejam E e D os pés das bissetrizes interna e externa em relação a C, respectivamente. Prove que os dois pontos isodinâmicos de $\triangle ABC$ (problemas 11 e 12) ficam sobre a circunferência de diâmetro ED. **Dicas:**

027. Seja ABC um triângulo. Seja T_1 seu primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9). Prove que $\angle AT_1B = \angle BT_1C = 120°$. **Dicas:**

028. Seja ABC um triângulo. Seja T_2 seu segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10). Prove que vale exatamente uma das igualdades $\angle AT_2B = \angle AT_2C = 60°$, $\angle BT_2A = \angle BT_2C = 60°$ e $\angle CT_2B = \angle CT_2A = 60°$. **Dicas:**

029. Seja ABC um triângulo. Prove que o primeiro ponto isodinâmico (problema 11) é conjugado isogonal do primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9) com respeito a $\triangle ABC$. **Dicas:**

030. Seja ABC um triângulo. Prove que o segundo ponto isodinâmico (problema 12) é conjugado isogonal do segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10) com respeito a $\triangle ABC$. **Dicas:**

031. Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos $M, K \in AB$, $H, I \in BC$ e $J, G \in AC$ são escolhidos de tal forma que $MI \parallel AC$, $GH \parallel AB$, $KJ \parallel BC$ e $MI \cap KJ \cap GH = L$. Prove que os pontos M, K, H, I, J e G ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**

032. Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos $M, K \in AB$, $H, I \in BC$ e $J, G \in AC$ são escolhidos de tal modo que os quadriláteros $MICA$, $GHBA$ e $KJCB$ são cíclicos e $MI \cap KJ \cap GH = L$. Prove que os pontos M, K, H, I, J e G ficam sobre uma circunferência de centro L. **Dicas:**

033. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AB \cap CD = E$ e $AD \cap BC = E$. Prove que os circuncírculos de $\triangle BFC$, $\triangle AFD$ e $\triangle ABE$ passam por um ponto em comum. **Dicas:**

034. A construção do problema 33 é dada. Prove que o ponto M e os respectivos centros O_1, O_2, O_3 e O_4 dos circuncírculos de $\triangle AFD$, $\triangle BFC$, $\triangle ABE$ e $\triangle DCE$ ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**

035. As circunferências k_1, k_2, k_3 e k_4 são dadas de tal modo que elas passam por um ponto em comum M. Prove que as circunferências que passam pelos pontos de interseção de (k_1, k_2, k_3), (k_1, k_2, k_4), (k_1, k_3, k_4) e (k_2, k_3, k_4), diferentes de M, também passam por um ponto em comum. **Dicas:**

036. Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $AC \cap BE = D_1$, $BD \cap AC = E_1$, $BD \cap EC = A_1$, $EC \cap AD = B_1$ e $AD \cap BE = C_1$. Digamos que (XYZ) denote o circuncírculo de $\triangle XYZ$. Sejam $(AD_1C_1) \cap (B_1C_1E) = \{C_1, C_2\}$, $(B_1C_1E) \cap (A_1B_1D) = \{B_1, B_2\}$, $(A_1B_1D) \cap (A_1E_1C) = \{A_1, A_2\}$, $(A_1E_1C) \cap (E_1D_1B) = \{E_1, E_2\}$ e $(E_1D_1B) \cap (C_1D_1A) = \{D_1, D_2\}$. Prove que os pontos A_2, B_2, C_2, D_2 e E_2 ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**

037. Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $AC \cap BE = D'$, $BD \cap AC = E'$, $BD \cap EC = A'$, $EC \cap AD = B'$ e $AD \cap BE = C'$. Digamos que (XYZ) denote o circuncírculo de $\triangle XYZ$. Sejam $(AD'B) \cap (BE'C) = \{B, B''\}$, $(BE'C) \cap (CA'D) = \{C, C''\}$, $(CA'D) \cap (DB'E) = \{D, D''\}$, $(DB'E) \cap (AC'E) = \{E, E''\}$ e $(AC'E) \cap (AD'B) = \{A, A''\}$. Prove que as retas AA'', BB'', CC'', DD'' e EE'' são concorrentes. **Dicas:**

038. Seja ABC um triângulo. Seja O seu circuncentro. Seja M seu baricentro e seja H seu ortocentro. Prove que os pontos H, O e M são colineares. **Dicas:**

039. Seja ABC um triângulo. Seja N seu ponto de Nagel (problema 7). Seja M seu baricentro e seja I seu incentro. Prove que os pontos N, I e M são colineares. **Dicas:**

040. Seja ABC um triângulo. Prove que as retas formadas pelos primeiro e segundo pontos de Fermat-Torricelli (problemas 9 e 10) e pelos primeiro e segundo pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12) se intersectam no ponto de Lemoine L (problema 6). Além disso, prove que o circuncentro de $\triangle ABC$ fica na reta dada pelos pontos isodinâmicos. **Dicas:**

041. Seja ABC um triângulo. Prove que Ap_2T_1 e Ap_1T_2 se intersectam no baricentro M do $\triangle ABC$. (Ap_1 e Ap_2 são os pontos isodinâmicos dos problemas 11 e 12, e T_1 e T_2 são os pontos de Fermat-Torricelli dos problemas 9 e 10). **Dicas:**

042. Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro, e seja O seu circuncentro. Seja Bi seu ponto de Bevan (problema 20). Prove que os pontos I, O e Bi são colineares. **Dicas:**

043. Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro, seja G seu ponto de Gergonne (problema 4), e sejam S_1 e S_2 seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos I, G, S_1 e S_2 são colineares. **Dicas:**

044. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Digamos que os pés das perpendiculares de A até BC e CD sejam R e Q, respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de B até CD e DA sejam N e I, respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de C até DA e AB sejam L e M, respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de D até AB e BC sejam J e K, respectivamente. Sejam $AR \cap BI = G$, $BN \cap CM = H$, $CL \cap DK = E$ e $AQ \cap DJ = F$. Prove que os pontos E, F, G e H são colineares. **Dicas:**

045. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB \cap CD = E$ e $AD \cap BC = F$. Prove que os pontos médios M, N e P dos segmentos AC, BD e EF, respectivamente, são colineares. **Dicas:**

046. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Sejam J e I os pontos médios das diagonais AC e BD, respectivamente. Digamos que a perpendicular DG a BC ($G \in BC$) intersecte a perpendicular CH a AD ($H \in AD$) no ponto K. A perpendicular BF a AD ($F \in AD$) intersecta a perpendicular AE a BC ($E \in BC$) no ponto L. Prove que $KL \perp JI$. **Dicas:**

047. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB \cap DC = E$ e $AD \cap BC = F$. As circunferências k_1, k_2 e k_3 têm AC, BD e EF como diâmetros, respectivamente. Prove que elas têm um eixo radical em comum. **Dicas:**

048. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Um ponto arbitrário D é escolhido no arco $\widehat{AB}$ de k que não contém C. Os pontos E, F e G ficam sobre CA, AB e BC respectivamente, e são escolhidos de forma que $\angle AED = \angle AFD = \angle BGD = 90°$. Prove que os pontos E, F e G são colineares. **Dicas:**

049. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Um ponto arbitrário D é escolhido no arco $\widehat{AB}$ de k que não contém C. Os pontos E, F e G ficam sobre CA, AB e BC respectivamente, e são escolhidos de forma que $\angle AED = \angle AFD = \angle BGD = \varphi$. Prove que os pontos E, F e G são colineares. **Dicas:**

050. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Dois pontos arbitrários P e Q são escolhidos no arco $\widehat{AB}$ que não contém C. Pontos M, N e K são escolhidos em BC, CA e AB respectivamente, tais que $\angle(PM, BC) = \angle(QM, CB)$, $\angle(PN, AC) = \angle(QN, CA)$ e $\angle(QK, AB) = \angle(PK, BA)$. Prove que os pontos M, N e K são colineares. **Dicas:**

051. Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto do circuncírculo de $\triangle ABC$. Prove que o ponto médio J do segmento DH (H é o ortocentro de $\triangle ABC$) fica sobre a reta de Simson (problema 48) do $\triangle ABC$ e do ponto D. **Dicas:**

052. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Os pés das perpendiculares de A até BC e CD são E e F, respectivamente. Os pés das perpendiculares de B até CD e DA são I e J, respectivamente. Os pés das perpendiculares de C até DA e AB são G e H, respectivamente. Os pés das perpendiculares de D até AB e BC são K e L, respectivamente. Prove que as retas JI, EF, GH e KL são concorrentes. **Dicas:**

053. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico, e seja X um ponto arbitrário. Os pés das perpendiculares de X até AB e CD são H e I, respectivamente. Os pés das perpendiculares de X até BC e DA são K e F, respectivamente. Os pés das perpendiculares de X até AC e BD são G e J, respectivamente. Os pontos médios de HI, GJ e KF são L, M e N, respectivamente. Prove que os pontos M, N e L são colineares. **Dicas:**

054. Seja ABC um triângulo. O circuncírculo de $\triangle ABC$ é k e seu ortocentro é H. A altura relativa a B intersecta AC e k nos pontos B_1 e B_2, respectivamente. Prove que os pontos H e B_2 são simétricos com respeito a B_1. **Dicas:**

055. Seja O o circuncentro de $\triangle ABC$ de alturas AA_1, BB_1 e CC_1. As retas CC_1 e A_1B_1 se intersectam no ponto N e as retas CO e AB se intersectam no ponto E. Prove que $HM \parallel EN$, onde M é ponto médio de AB. **Dicas:**

056. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja D um ponto arbitrário na tangente a k por C. Os pontos E e F são as projeções de D em AC e BC, respectivamente. Prove que $EF \perp AB$. **Dicas:**

057. Seja ABC um triângulo. Seja P um ponto arbitrário no arco menor $\widehat{AB}$ do circuncírculo de $\triangle ABC$. As projeções de P em AC e AB são X e Y, respectivamente. Os pontos M e N são os pontos médios de BC e XY, respectivamente. Prove que $\angle PNM = 90°$. **Dicas:**

058. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1, BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Os pontos M, N, P e Q são projeções de C_1 nas retas AC, AA_1, BB_1 e BC_1, respectivamente. Prove que os pontos M, N, P e Q são colineares. **Dicas:**

059. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1, BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Denote as reflexões de C_1 com respeito aos lados AC e BC por M e N, respectivamente. Prove que os pontos M, B_1, A_1 e N são colineares. **Dicas:**

060. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1, BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Os pontos M e N são as projeções de C_1 sobre os lados AC e BC, respectivamente. Seja $P = MN \cap B_1C_1$. Prove que P é o ponto médio de B_1C_1. **Dicas:**

061. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo e seja H seu ortocentro. Sejam AA_1 e BB_1 alturas deste triângulo. Seja D um ponto arbitrário no segmento BH. A reta AD intersecta k novamente no ponto E. Sejam $BE \cap AA_1 = F$ e K o ponto médio de FD. Prove que os pontos A_1, B_1 e K são colineares. **Dicas:**

062. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. A reta CM ($M \in AB$) é bissetriz interna de $\angle ACB$, e intersecta k no ponto N. A reta que passa por M e é perpendicular a BC, intersecta BC e o arco menor $\overset{\frown}{BC}$ de k nos pontos L e X, respectivamente. A reta que passa por C e é perpendicular a AX, intersecta AX e AB nos pontos Z e Y, respectivamente. Prove que os pontos X, Y e N são colineares. **Dicas:**

063. Sejam AA_1, BB_1 e CC_1 as alturas de um dado triângulo ABC. Seja P um ponto arbitrário interno ao triângulo. Os pontos C_2 e C_3 são as projeções de P em AB e CC_1, respectivamente. Os pontos $A_2 \in BC$, $A_3 \in AA_1$, $B_2 \in AC$ e $B_3 \in BB_1$ são definidos analogamente. Prove que as retas A_2A_3, B_2B_3 e C_2C_3 são concorrentes. **Dicas:**

064. Seja ABC um triângulo. Sejam AB_1 e BA_1 alturas desse triângulo, com interseção H. As retas A_1B_1 e AB se intersectam no ponto D, e M é ponto médio de AB. Prove que $MH \perp DC$. **Dicas:**

065. Seja ABC um triângulo acutângulo. O ponto H é seu ortocentro e o ponto M é ponto médio de AB. Sejam AA_1 e BB_1 alturas desse triângulo e seja $AB \cap A_1B_1 = D$. A reta CH intersecta o circuncírculo de $\triangle ABC$ nos pontos C e K. Prove que os pontos K, M, C e D são concíclicos. **Dicas:**

066. Seja ABC um triângulo com $\angle ACB > 90°$. Sejam AA_1, BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. O ponto M é ponto médio do lado AB. Prove que os pontos médios de AA_1 e BB_1, e os pontos M e C_1 são concíclicos. **Dicas:**

067. Seja ABC um triângulo com $\angle ACB > 90°$ e de alturas AA_1 e BB_1. Os pontos P e M são as projeções de A_1 sobre AC e AB, respectivamente, e Q e N são as projeções de B_1 sobre BC e AB, respectivamente. Prove que $PM = QN$. **Dicas:**

068. Seja ABC um triângulo. Seja CD uma altura e O o circuncentro. Seja M o ponto médio de AB. Denote a projeção de A em CO por P. Prove que $DM = PM$. **Dicas:**

069.