

Professor: Jeferson Almir

Aluno(a): \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_  
 Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

## 1 Problemas

- 001.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que suas medianas  $CD$ ,  $AE$  e  $BF$  são concorrentes. **Dicas:**
- 002.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que suas alturas  $AE$ ,  $CF$  e  $BD$  são concorrentes. **Dicas:**
- 003.** Prove que as bissetrizes internas de um  $\triangle ABC$  são concorrentes. **Dicas:**
- 004.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seu incírculo toca  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  nos pontos  $C_1$ ,  $A_1$  e  $B_1$  respectivamente. Prove que as retas  $CC_1$ ,  $BB_1$  e  $AA_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 005.** Prove que as mediatrizes dos lados de um dado  $\triangle ABC$  são concorrentes. **Dicas:**
- 006.** Seja  $ABC$  um triângulo de circuncírculo  $k$ . Sejam  $l_A$ ,  $l_B$  e  $l_C$  as retas tangentes a  $k$  pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente. Se  $l_A \cap l_B = C_1$ ,  $l_B \cap l_C = A_1$  e  $l_C \cap l_A = B_1$ , prove que as retas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 007.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  os pontos de tangência dos segmentos  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  com os excírculos de  $\triangle ABC$ . Prove que as retas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 008.** Seja  $ABC$  um triângulo e seja  $N$  seu ponto de Nagel (ponto de concorrência do exercício anterior). Digamos que  $AN$ ,  $BN$  e  $CN$  intersectem o incírculo de  $\triangle ABC$  nos pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ , e os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  nos pontos  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$ , respectivamente. Prove que  $AA_1 = NA_2$ ,  $BB_1 = NB_2$  e  $CC_1 = NC_2$ . **Dicas:**
- 009.** Seja  $ABC$  um triângulo. Os triângulos equiláteros  $\triangle ABC_1$ ,  $\triangle AB_1C$  e  $\triangle A_1BC$  são construídos no exterior do triângulo  $ABC$ . Prove que as retas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 010.** Seja  $ABC$  um triângulo. Os triângulos equiláteros  $\triangle ABC_1$ ,  $\triangle AB_1C$  e  $\triangle A_1BC$  são construídos no interior do triângulo  $ABC$ . Prove que as retas  $AA_1$ ,  $BB_1$  e  $CC_1$  são concorrentes. **Dicas:**
- 011.** Prove que para um dado  $\triangle ABC$ , existe algum ponto  $X$  tal que vale  $AX \cdot BC = BX \cdot AC = CX \cdot AB$ . **Dicas:**
- 012.** Prove que para um dado  $\triangle ABC$ , exatamente dois pontos satisfazem a condição da questão anterior. **Dicas:**
- 013.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que existe um ponto único  $S$  tal que vale  $BC + AS = CA + BS = AB + CS$ . **Dicas:**
- 014.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que existe um ponto único  $S$  tal que vale  $BC - AS = CA - BS = AB - CS$ . **Dicas:**
- 015.** Três circunferências  $k_1(A)$ ,  $k_2(B)$  e  $k_3(C)$  são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja  $C_1$  e  $B_1$  os pontos de tangência de  $k_1$  com  $k_2$ , e de  $k_1$  com  $k_3$ , respectivamente. Seja  $A_1$  o ponto de tangência de  $k_2$  com  $k_3$ . A circunferência  $k_4$  toca as outras três circunferências externamente. Prove que o primeiro centro de Soddy do  $\triangle ABC$  (problema 13) coincide com o centro de  $k_4$ . **Dicas:**
- 016.** Três circunferências  $k_1(A)$ ,  $k_2(B)$  e  $k_3(C)$  são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja  $C_1$  e  $B_1$  os pontos de tangência de  $k_1$  com  $k_2$ , e de  $k_1$  com  $k_3$ , respectivamente. Seja  $A_1$  o ponto de tangência de  $k_2$  com  $k_3$ . A circunferência  $k_4$  toca as outras três circunferências internamente. Prove que o segundo centro de Soddy do  $\triangle ABC$  (problema 14) coincide com o centro de  $k_4$ . **Dicas:**
- 017.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $S_1$  e  $S_2$  seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão sobre uma elipse de focos  $S_1$  e  $S_2$ . **Dicas:**
- 018.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $S_1$  seu primeiro centro de Soddy (problema 13). Prove que existe uma circunferência inscrita no quadrilátero convexo formado pelas retas  $CS_1$ ,  $BS_1$ ,  $AC$  e  $AB$ . **Dicas:**
- 019.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $S_2$  seu segundo centro de Soddy (problema 14). Prove que existe uma circunferência que toca as retas  $BA$  e  $BC$  e os segmentos  $AS_2$  e  $CS_2$ . **Dicas:**
- 020.** Seja  $ABC$  um triângulo, com excírculos  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  e  $\omega_c$ . Sejam  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  os centros de  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  e  $\omega_c$  respectivamente. Seja  $A_1$  o ponto de tangência de  $\omega_a$  com o lado  $BC$ . Defina os pontos  $B_1$  e  $C_1$  analogamente. Prove que as retas  $C_1I_c$ ,  $B_1I_b$  e  $A_1I_a$  são concorrentes. **Dicas:**
- 021.** Seja  $ABC$  um triângulo. O primeiro ponto de Brocard  $Br_1$  é definido como o ponto para o qual  $\angle BAB_{r_1} = \angle ACB_{r_1} = \angle CBB_{r_1}$ . Prove que esse ponto sempre existe. **Dicas:**
- 022.** Seja  $ABC$  um triângulo. O segundo ponto de Brocard  $Br_2$  é definido como o ponto tal que  $\angle ABB_{r_2} = \angle CAB_{r_2} = \angle BCB_{r_2}$ . Prove que ele sempre existe. **Dicas:**
- 023.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $L$  seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam  $Br_1$  e  $Br_2$  seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Seja  $CL \cap AB = F$ . Prove que  $\angle AFB_{r_1} = \angle BFB_{r_2}$ . **Dicas:**

- 024.** Seja  $ABC$  um triângulo, com circuncentro  $O$ . Seja  $L$  seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam  $Br_1$  e  $Br_2$  seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Prove que valem as igualdades  $\angle OBr_1L = \angle OBr_2L = 90^\circ$  e  $Br_1L = Br_2L$ . **Dicas:**
- 025.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $Ap_1$  e  $Ap_2$  seus dois pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12). Prove que os triângulos pedais com respeito a esses dois pontos são equiláteros. **Dicas:**
- 026.** Seja  $ABC$  um triângulo. Sejam  $E$  e  $D$  os pés das bissetrizes interna e externa em relação a  $C$ , respectivamente. Prove que os dois pontos isodinâmicos de  $\triangle ABC$  (problemas 11 e 12) ficam sobre a circunferência de diâmetro  $ED$ . **Dicas:**
- 027.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $T_1$  seu primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9). Prove que  $\angle AT_1B = \angle BT_1C = 120^\circ$ . **Dicas:**
- 028.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $T_2$  seu segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10). Prove que vale exatamente uma das igualdades  $\angle AT_2B = \angle AT_2C = 60^\circ$ ,  $\angle BT_2A = \angle BT_2C = 60^\circ$  e  $\angle CT_2B = \angle CT_2A = 60^\circ$ . **Dicas:**
- 029.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que o primeiro ponto isodinâmico (problema 11) é conjugado isogonal do primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9) com respeito a  $\triangle ABC$ . **Dicas:**
- 030.** Seja  $ABC$  um triângulo. Prove que o segundo ponto isodinâmico (problema 12) é conjugado isogonal do segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10) com respeito a  $\triangle ABC$ . **Dicas:**
- 031.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $L$  seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos  $M, K \in AB$ ,  $H, I \in BC$  e  $J, G \in AC$  são escolhidos de tal forma que  $MI \parallel AC$ ,  $GH \parallel AB$ ,  $KJ \parallel BC$  e  $MI \cap KJ \cap GH = L$ . Prove que os pontos  $M, K, H, I, J$  e  $G$  ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 032.** Seja  $ABC$  um triângulo. Seja  $L$  seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos  $M, K \in AB$ ,  $H, I \in BC$  e  $J, G \in AC$  são escolhidos de tal modo que os quadriláteros  $MICA$ ,  $GHBA$  e  $KJCB$  são cíclicos e  $MI \cap KJ \cap GH = L$ . Prove que os pontos  $M, K, H, I, J$  e  $G$  ficam sobre uma circunferência de centro  $L$ . **Dicas:**
- 033.** Seja  $ABCD$  um quadrilátero convexo tal que  $AB \cap CD = E$  e  $AD \cap BC = F$ . Prove que os circuncírculos de  $\triangle BFC$ ,  $\triangle AFD$  e  $\triangle ABE$  passam por um ponto em comum. **Dicas:**
- 034.** A construção do problema 33 é dada. Prove que o ponto  $M$  e os respectivos centros  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  e  $O_4$  dos circuncírculos de  $\triangle AFD$ ,  $\triangle BFC$ ,  $\triangle ABE$  e  $\triangle DCE$  ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 035.** As circunferências  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  são dadas de tal modo que elas passam por um ponto em comum  $M$ . Prove que as circunferências que passam pelos pontos de interseção de  $(k_1, k_2, k_3)$ ,  $(k_1, k_2, k_4)$ ,  $(k_1, k_3, k_4)$  e  $(k_2, k_3, k_4)$ , diferentes de  $M$ , também passam por um ponto em comum. **Dicas:**
- 036.** Seja  $ABCDE$  um pentágono convexo tal que  $AC \cap BE = D_1$ ,  $BD \cap AC = E_1$ ,  $BD \cap EC = A_1$ ,  $EC \cap AD = B_1$  e  $AD \cap BE = C_1$ . Digamos que  $(XYZ)$  denote o circuncírculo de  $\triangle XYZ$ . Sejam  $(AD_1C_1) \cap (B_1C_1E) = \{C_1, C_2\}$ ,  $(B_1C_1E) \cap (A_1B_1D) = \{B_1, B_2\}$ ,  $(A_1B_1D) \cap (A_1E_1C) = \{A_1, A_2\}$ ,  $(A_1E_1C) \cap (E_1D_1B) = \{E_1, E_2\}$  e  $(E_1D_1B) \cap (C_1D_1A) = \{D_1, D_2\}$ . Prove que os pontos  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  e  $E_2$  ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 037.** Seja  $ABCDE$  um pentágono convexo tal que  $AC \cap BE = D'$ ,  $BD \cap AC = E'$ ,  $BD \cap EC = A'$ ,  $EC \cap AD = B'$  e  $AD \cap BE = C'$ . Digamos que  $(XYZ)$  denote o circuncírculo de  $\triangle XYZ$ . Sejam  $(AD'B) \cap (BE'C) = \{B, B''\}$ ,  $(BE'C) \cap (CA'D) = \{C, C''\}$ ,  $(CA'D) \cap (DB'E) = \{D, D''\}$ ,  $(DB'E) \cap (AC'E) = \{E, E''\}$  e  $(AC'E) \cap (AD'B) = \{A, A''\}$ . Prove que as retas  $AA''$ ,  $BB''$ ,  $CC''$ ,  $DD''$  e  $EE''$  são concorrentes. **Dicas:**