Professor: Jeferson Almir

Aluno(a): ______________________________ Nž: __________
Data: ________/________/________

1 Problemas

001. Seja ABC um triângulo. Prove que suas medianas CD, AE e BF são concorrentes. **Dicas:**

002. Seja ABC um triângulo. Prove que suas alturas AE, CF e BD são concorrentes. **Dicas:**

003. Prove que as bissetrizes internas de um $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**

004. Seja ABC um triângulo. Seu incírculo toca AB, BC e CA nos pontos C_1, A_1 e B_1 respectivamente. Prove que as retas CC_1, BB_1 e AA_1 são concorrentes. **Dicas:**

005. Prove que as mediatrizes dos lados de um dado $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**

006. Seja ABC um triângulo de circuncírculo k. Sejam l_A, l_B e l_C as retas tangentes a k pelos pontos A, B e C respectivamente. Se $l_A \cap l_B = C_1$, $l_B \cap l_C = A_1$ e $l_C \cap l_A = B_1$, prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**

007. Seja ABC um triângulo. Sejam A_1, B_1 e C_1 os pontos de tangência dos segmentos BC, CA e AB com os exincírculos de $\triangle ABC$. Prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**

008. Seja ABC um triângulo e seja N seu ponto de Nagel (ponto de concorrência do exercício anterior). Digamos que AN, BN e CN intersectem o incírculo de $\triangle ABC$ nos pontos A_1, B_1 e C_1, e os lados BC, CA e AB nos pontos A_2, B_2 e C_2, respectivamente. Prove que $AA_1 = NA_2$, $BB_1 = NB_2$ e $CC_1 = NC_2$. **Dicas:**

009. Seja ABC um triângulo. Os triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ são construídos no exterior do triângulo ABC. Prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**

010. Seja ABC um triângulo. Os triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ são construídos no interior do triângulo ABC. Prove que as retas AA_1, BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**

011. Prove que para um dado $\triangle ABC$, existe algum ponto X tal que vale $AX \cdot BC = BX \cdot AC = CX \cdot AB$. **Dicas:**

012. Prove que para um dado $\triangle ABC$, exatamente dois pontos satisfazem a condição da questão anterior. **Dicas:**

013. Seja ABC um triângulo. Prove que existe um ponto único S tal que vale $BC + AS = CA + BS = AB + CS$. **Dicas:**

014. Seja ABC um triângulo. Prove que existe um ponto único S tal que vale $BC - AS = CA - BS = AB - CS$. **Dicas:**

015. Três circunferências $k_1(A)$, $k_2(B)$ e $k_3(C)$ são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja C_1 e B_1 os pontos de tangência de k_1 com k_2, e de k_1 com k_3, respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de k_2 com k_3. A circunferência k_4 toca as outras três circunferências externamente. Prove que o primeiro centro de Soddy do $\triangle ABC$ (problema 13) coincide com o centro de k_4. **Dicas:**

016. Três circunferências $k_1(A)$, $k_2(B)$ e $k_3(C)$ são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja C_1 e B_1 os pontos de tangência de k_1 com k_2, e de k_1 com k_3, respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de k_2 com k_3. A circunferência k_4 toca as outras três circunferências internamente. Prove que o segundo centro de Soddy do $\triangle ABC$ (problema 14) coincide com o centro de k_4. **Dicas:**

017. Seja ABC um triânguloe sejam S_1 e S_2 seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos A, B e C estão sobre uma elipse de focos S_1 e S_2. **Dicas:**

018. Seja ABC um triânguloe seja S_1 seu primeiro centro de Soddy (problema 13). Prove que existe uma circunferência inscrita no quadrilátero convexo formado pelas retas CS_1, BS_1, AC e AB. **Dicas:**

019. Seja ABC um triânguloe seja S_2 seu segundo centro de Soddy (problema 14). Prove que existe uma circunferência que toca as retas BA e BC e os segmentos AS_2 e CS_2. **Dicas:**

020. Seja ABC um triângulocom exincírculos ω_a, ω_b e ω_c. Sejam I_a, I_b e I_c os centros de ω_a, ω_b e ω_c respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de ω_a com o lado BC. Defina os pontos B_1 e C_1 analogamente. Prove que as retas C_1I_c, B_1I_b e A_1I_a são concorrentes. **Dicas:**

021. Seja ABC um triângulo. O primeiro ponto de Brocard Br_1 é definido como o ponto para o qual $\angle BABr_1 = \angle ACBr_1 = \angle CBBr_1$. Prove que esse ponto sempre existe. **Dicas:**

022. Seja ABC um triângulo. O segundo ponto de Brocard Br_2 é definido como o ponto tal que $\angle ABBr_2 = \angle CABr_2 = \angle BCBr_2$. Prove que ele sempre existe. **Dicas:**

023. Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam Br_1 e Br_2 seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Seja $CL \cap AB = F$. Prove que $\angle AFBr_1 = \angle BFBr_2$. **Dicas:**

024. Seja ABC um triângulocom circuncentro O. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam Br_1 e Br_2 seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Prove que valem as igualdades $\angle OBr_1L = \angle OBr_2L = 90°$ e $Br_1L = Br_2L$. **Dicas:**

025. Seja ABC um triângulo. Sejam Ap_1 e Ap_2 seus dois pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12). Prove que os triângulos pedais com respeito a esses dois pontos são equiláteros. **Dicas:**

026. Seja ABC um triânguloe sejam E e D os pés das bissetrizes interna e externa em relação a C, respectivamente. Prove que os dois pontos isodinâmicos de $\triangle ABC$ (problemas 11 e 12) ficam sobre a circunferência de diâmetro ED. **Dicas:**

027. Seja ABC um triânguloe seja T_1 seu primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9). Prove que $\angle AT_1B = \angle BT_1C = 120°$. **Dicas:**

028. Seja ABC um triânguloe seja T_2 seu segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10). Prove que vale exatamente uma das igualdades $\angle AT_2B = \angle AT_2C = 60°$, $\angle BT_2A = \angle BT_2C = 60°$ e $\angle CT_2B = \angle CT_2A = 60°$. **Dicas:**