

Professor: Jeferson Almir

Aluno(a): _____ N.º: _____
 Data: ____/____/____

1 Problemas

- 001.** Seja ABC um triângulo. Prove que suas medianas CD , AE e BF são concorrentes. **Dicas:**
- 002.** Seja ABC um triângulo. Prove que suas alturas AE , CF e BD são concorrentes. **Dicas:**
- 003.** Prove que as bissetrizes internas de um $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**
- 004.** Seja ABC um triângulo. Seu incírculo toca AB , BC e CA nos pontos C_1 , A_1 e B_1 respectivamente. Prove que as retas CC_1 , BB_1 e AA_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 005.** Prove que as mediatrizes dos lados de um dado $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**
- 006.** Seja ABC um triângulo de circuncírculo k . Sejam l_A , l_B e l_C as retas tangentes a k pelos pontos A , B e C respectivamente. Se $l_A \cap l_B = C_1$, $l_B \cap l_C = A_1$ e $l_C \cap l_A = B_1$, prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 007.** Seja ABC um triângulo. Sejam A_1 , B_1 e C_1 os pontos de tangência dos segmentos BC , CA e AB com os excírculos de $\triangle ABC$. Prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 008.** Seja ABC um triângulo e seja N seu ponto de Nagel (ponto de concorrência do exercício anterior). Digamos que AN , BN e CN intersectem o incírculo de $\triangle ABC$ nos pontos A_1 , B_1 e C_1 , e os lados BC , CA e AB nos pontos A_2 , B_2 e C_2 , respectivamente. Prove que $AA_1 = NA_2$, $BB_1 = NB_2$ e $CC_1 = NC_2$. **Dicas:**
- 009.** Seja ABC um triângulo. Os triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ são construídos no exterior do triângulo ABC . Prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 010.** Seja ABC um triângulo. Os triângulos equiláteros $\triangle ABC_1$, $\triangle AB_1C$ e $\triangle A_1BC$ são construídos no interior do triângulo ABC . Prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 011.** Prove que para um dado $\triangle ABC$, existe algum ponto X tal que vale $AX \cdot BC = BX \cdot AC = CX \cdot AB$. **Dicas:**
- 012.** Prove que para um dado $\triangle ABC$, exatamente dois pontos satisfazem a condição da questão anterior. **Dicas:**
- 013.** Seja ABC um triângulo. Prove que existe um ponto único S tal que vale $BC + AS = CA + BS = AB + CS$. **Dicas:**
- 014.** Seja ABC um triângulo. Prove que existe um ponto único S tal que vale $BC - AS = CA - BS = AB - CS$. **Dicas:**
- 015.** Três circunferências $k_1(A)$, $k_2(B)$ e $k_3(C)$ são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja C_1 e B_1 os pontos de tangência de k_1 com k_2 , e de k_1 com k_3 , respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de k_2 com k_3 . A circunferência k_4 toca as outras três circunferências externamente. Prove que o primeiro centro de Soddy do $\triangle ABC$ (problema 13) coincide com o centro de k_4 . **Dicas:**
- 016.** Três circunferências $k_1(A)$, $k_2(B)$ e $k_3(C)$ são dadas, e elas são todas tangentes externamente entre si. Seja C_1 e B_1 os pontos de tangência de k_1 com k_2 , e de k_1 com k_3 , respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de k_2 com k_3 . A circunferência k_4 toca as outras três circunferências internamente. Prove que o segundo centro de Soddy do $\triangle ABC$ (problema 14) coincide com o centro de k_4 . **Dicas:**
- 017.** Seja ABC um triângulo. Sejam S_1 e S_2 seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos A , B e C estão sobre uma elipse de focos S_1 e S_2 . **Dicas:**
- 018.** Seja ABC um triângulo. Seja S_1 seu primeiro centro de Soddy (problema 13). Prove que existe uma circunferência inscrita no quadrilátero convexo formado pelas retas CS_1 , BS_1 , AC e AB . **Dicas:**
- 019.** Seja ABC um triângulo. Seja S_2 seu segundo centro de Soddy (problema 14). Prove que existe uma circunferência que toca as retas BA e BC e os segmentos AS_2 e CS_2 . **Dicas:**
- 020.** Seja ABC um triângulo, com excírculos ω_a , ω_b e ω_c . Sejam I_a , I_b e I_c os centros de ω_a , ω_b e ω_c respectivamente. Seja A_1 o ponto de tangência de ω_a com o lado BC . Defina os pontos B_1 e C_1 analogamente. Prove que as retas C_1I_c , B_1I_b e A_1I_a são concorrentes. **Dicas:**
- 021.** Seja ABC um triângulo. O primeiro ponto de Brocard Br_1 é definido como o ponto para o qual $\angle BAB_{r_1} = \angle ACB_{r_1} = \angle CBB_{r_1}$. Prove que esse ponto sempre existe. **Dicas:**
- 022.** Seja ABC um triângulo. O segundo ponto de Brocard Br_2 é definido como o ponto tal que $\angle ABB_{r_2} = \angle CAB_{r_2} = \angle BCB_{r_2}$. Prove que ele sempre existe. **Dicas:**
- 023.** Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam Br_1 e Br_2 seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Seja $CL \cap AB = F$. Prove que $\angle AFB_{r_1} = \angle BFB_{r_2}$. **Dicas:**

- 024.** Seja ABC um triângulo, com circuncentro O . Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6) e sejam Br_1 e Br_2 seu primeiro e segundo pontos de Brocard, respectivamente (problemas 21 e 22). Prove que valem as igualdades $\angle OBr_1L = \angle OBr_2L = 90^\circ$ e $Br_1L = Br_2L$. **Dicas:**
- 025.** Seja ABC um triângulo. Sejam Ap_1 e Ap_2 seus dois pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12). Prove que os triângulos pedais com respeito a esses dois pontos são equiláteros. **Dicas:**
- 026.** Seja ABC um triângulo. Sejam E e D os pés das bissetrizes interna e externa em relação a C , respectivamente. Prove que os dois pontos isodinâmicos de $\triangle ABC$ (problemas 11 e 12) ficam sobre a circunferência de diâmetro ED . **Dicas:**
- 027.** Seja ABC um triângulo. Seja T_1 seu primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9). Prove que $\angle AT_1B = \angle BT_1C = 120^\circ$. **Dicas:**
- 028.** Seja ABC um triângulo. Seja T_2 seu segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10). Prove que vale exatamente uma das igualdades $\angle AT_2B = \angle AT_2C = 60^\circ$, $\angle BT_2A = \angle BT_2C = 60^\circ$ e $\angle CT_2B = \angle CT_2A = 60^\circ$. **Dicas:**
- 029.** Seja ABC um triângulo. Prove que o primeiro ponto isodinâmico (problema 11) é conjugado isogonal do primeiro ponto de Fermat-Torricelli (problema 9) com respeito a $\triangle ABC$. **Dicas:**
- 030.** Seja ABC um triângulo. Prove que o segundo ponto isodinâmico (problema 12) é conjugado isogonal do segundo ponto de Fermat-Torricelli (problema 10) com respeito a $\triangle ABC$. **Dicas:**
- 031.** Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos $M, K \in AB$, $H, I \in BC$ e $J, G \in AC$ são escolhidos de tal forma que $MI \parallel AC$, $GH \parallel AB$, $KJ \parallel BC$ e $MI \cap KJ \cap GH = L$. Prove que os pontos M, K, H, I, J e G ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 032.** Seja ABC um triângulo. Seja L seu ponto de Lemoine (problema 6). Os pontos $M, K \in AB$, $H, I \in BC$ e $J, G \in AC$ são escolhidos de tal modo que os quadriláteros $MICA$, $GHBA$ e $KJCB$ são cíclicos e $MI \cap KJ \cap GH = L$. Prove que os pontos M, K, H, I, J e G ficam sobre uma circunferência de centro L . **Dicas:**
- 033.** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AB \cap CD = E$ e $AD \cap BC = E$. Prove que os circuncírculos de $\triangle BFC$, $\triangle AFD$ e $\triangle ABE$ passam por um ponto em comum. **Dicas:**
- 034.** A construção do problema 33 é dada. Prove que o ponto M e os respectivos centros O_1 , O_2 , O_3 e O_4 dos circuncírculos de $\triangle AFD$, $\triangle BFC$, $\triangle ABE$ e $\triangle DCE$ ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 035.** As circunferências k_1, k_2, k_3 e k_4 são dadas de tal modo que elas passam por um ponto em comum M . Prove que as circunferências que passam pelos pontos de interseção de (k_1, k_2, k_3) , (k_1, k_2, k_4) , (k_1, k_3, k_4) e (k_2, k_3, k_4) , diferentes de M , também passam por um ponto em comum. **Dicas:**
- 036.** Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $AC \cap BE = D_1$, $BD \cap AC = E_1$, $BD \cap EC = A_1$, $EC \cap AD = B_1$ e $AD \cap BE = C_1$. Digamos que (XYZ) denote o circuncírculo de $\triangle XYZ$. Sejam $(AD_1C_1) \cap (B_1C_1E) = \{C_1, C_2\}$, $(B_1C_1E) \cap (A_1B_1D) = \{B_1, B_2\}$, $(A_1B_1D) \cap (A_1E_1C) = \{A_1, A_2\}$, $(A_1E_1C) \cap (E_1D_1B) = \{E_1, E_2\}$ e $(E_1D_1B) \cap (C_1D_1A) = \{D_1, D_2\}$. Prove que os pontos A_2 , B_2 , C_2 , D_2 e E_2 ficam sobre uma circunferência. **Dicas:**
- 037.** Seja $ABCDE$ um pentágono convexo tal que $AC \cap BE = D'$, $BD \cap AC = E'$, $BD \cap EC = A'$, $EC \cap AD = B'$ e $AD \cap BE = C'$. Digamos que (XYZ) denote o circuncírculo de $\triangle XYZ$. Sejam $(AD'B) \cap (BE'C) = \{B, B''\}$, $(BE'C) \cap (CA'D) = \{C, C''\}$, $(CA'D) \cap (DB'E) = \{D, D''\}$, $(DB'E) \cap (AC'E) = \{E, E''\}$ e $(AC'E) \cap (AD'B) = \{A, A''\}$. Prove que as retas AA'' , BB'' , CC'' , DD'' e EE'' são concorrentes. **Dicas:**
- 038.** Seja ABC um triângulo. Seja O seu circuncentro. Seja M seu baricentro e seja H seu ortocentro. Prove que os pontos H , O e M são colineares. **Dicas:**
- 039.** Seja ABC um triângulo. Seja N seu ponto de Nagel (problema 7). Seja M seu baricentro e seja I seu incentro. Prove que os pontos N , I e M são colineares. **Dicas:**
- 040.** Seja ABC um triângulo. Prove que as retas formadas pelos primeiro e segundo pontos de Fermat-Torricelli (problemas 9 e 10) e pelos primeiro e segundo pontos isodinâmicos (problemas 11 e 12) se intersectam no ponto de Lemoine L (problema 6). Além disso, prove que o circuncentro de $\triangle ABC$ fica na reta dada pelos pontos isodinâmicos. **Dicas:**
- 041.** Seja ABC um triângulo. Prove que Ap_2T_1 e Ap_1T_2 se intersectam no baricentro M do $\triangle ABC$. (Ap_1 e Ap_2 são os pontos isodinâmicos dos problemas 11 e 12, e T_1 e T_2 são os pontos de Fermat-Torricelli dos problemas 9 e 10). **Dicas:**
- 042.** Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro, e seja O seu circuncentro. Seja Bi seu ponto de Bevan (problema 20). Prove que os pontos I , O e Bi são colineares. **Dicas:**
- 043.** Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro, seja G seu ponto de Gergonne (problema 4), e sejam S_1 e S_2 seus primeiro e segundo centros de Soddy (problemas 13 e 14), respectivamente. Prove que os pontos I , G , S_1 e S_2 são colineares. **Dicas:**
- 044.** Seja $ABCD$ um quadrilátero. Digamos que os pés das perpendiculares de A até BC e CD sejam R e Q ,

respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de B até CD e DA sejam N e I , respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de C até DA e AB sejam L e M , respectivamente. Digamos que os pés das perpendiculares de D até AB e BC sejam J e K , respectivamente. Sejam $AR \cap BI = G$, $BN \cap CM = H$, $CL \cap DK = E$ e $AQ \cap DJ = F$. Prove que os pontos E , F , G e H são colineares. **Dicas:**

045. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB \cap CD = E$ e $AD \cap BC = F$. Prove que os pontos médios M , N e P dos segmentos AC , BD e EF , respectivamente, são colineares. **Dicas:**

046. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Sejam J e I os pontos médios das diagonais AC e BD , respectivamente. Digamos que a perpendicular DG a BC ($G \in BC$) intersecte a perpendicular CH a AD ($H \in AD$) no ponto K . A perpendicular BF a AD ($F \in AD$) intersecta a perpendicular AE a BC ($E \in BC$) no ponto L . Prove que $KL \perp JI$. **Dicas:**

047. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB \cap DC = E$ e $AD \cap BC = F$. As circunferências k_1 , k_2 e k_3 têm AC , BD e EF como diâmetros, respectivamente. Prove que elas têm um eixo radical em comum. **Dicas:**

048. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Um ponto arbitrário D é escolhido no arco \widehat{AB} de k que não contém C . Os pontos E , F e G ficam sobre CA , AB e BC respectivamente, e são escolhidos de forma que $\angle AED = \angle AFD = \angle BGD = 90^\circ$. Prove que os pontos E , F e G são colineares. **Dicas:**

049. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Um ponto arbitrário D é escolhido no arco \widehat{AB} de k que não contém C . Os pontos E , F e G ficam sobre CA , AB e BC respectivamente, e são escolhidos de forma que $\angle AED = \angle AFD = \angle BGD = \varphi$. Prove que os pontos E , F e G são colineares. **Dicas:**

050. Seja ABC um triângulo. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABC$. Dois pontos arbitrários P e Q são escolhidos no arco \widehat{AB} que não contém C . Pontos M , N e K são escolhidos em BC , CA e AB respectivamente, tais que $\angle(PM, BC) = \angle(QM, CB)$, $\angle(PN, AC) = \angle(QN, CA)$ e $\angle(QK, AB) = \angle(PK, BA)$. Prove que os pontos M , N e K são colineares. **Dicas:**

051. Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto do circuncírculo de $\triangle ABC$. Prove que o ponto médio J do segmento DH (H é o ortocentro de $\triangle ABC$) fica sobre a reta de Simson (problema 48) do $\triangle ABC$ e do ponto D . **Dicas:**

052. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Os pés das perpendiculares de A até BC e CD são E e F , respectivamente. Os pés das perpendiculares de B até CD e DA são I e J , respectivamente. Os pés das

perpendiculares de C até DA e AB são G e H , respectivamente. Os pés das perpendiculares de D até AB e BC são K e L , respectivamente. Prove que as retas JI , EF , GH e KL são concorrentes. **Dicas:**

053. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico, e seja X um ponto arbitrário. Os pés das perpendiculares de X até AB e CD são H e I , respectivamente. Os pés das perpendiculares de X até BC e DA são K e F , respectivamente. Os pés das perpendiculares de X até AC e BD são G e J , respectivamente. Os pontos médios de HI , GJ e KF são L , M e N , respectivamente. Prove que os pontos M , N e L são colineares. **Dicas:**

054. Seja ABC um triângulo. O circuncírculo de $\triangle ABC$ é k e seu ortocentro é H . A altura relativa a B intersecta AC e k nos pontos B_1 e B_2 , respectivamente. Prove que os pontos H e B_2 são simétricos com respeito a B_1 . **Dicas:**

055. Seja O o circuncentro de $\triangle ABC$ de alturas AA_1 , BB_1 e CC_1 . As retas CC_1 e A_1B_1 se intersectam no ponto N e as retas CO e AB se intersectam no ponto E . Prove que $HM \parallel EN$, onde M é ponto médio de AB . **Dicas:**

056. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja D um ponto arbitrário na tangente a k por C . Os pontos E e F são as projeções de D em AC e BC , respectivamente. Prove que $EF \perp AB$. **Dicas:**

057. Seja ABC um triângulo. Seja P um ponto arbitrário no arco menor \widehat{AB} do circuncírculo de $\triangle ABC$. As projeções de P em AC e AB são X e Y , respectivamente. Os pontos M e N são os pontos médios de BC e XY , respectivamente. Prove que $\angle PNM = 90^\circ$. **Dicas:**

058. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Os pontos M , N , P e Q são projeções de C_1 nas retas AC , AA_1 , BB_1 e BC_1 , respectivamente. Prove que os pontos M , N , P e Q são colineares. **Dicas:**

059. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Denote as reflexões de C_1 com respeito aos lados AC e BC por M e N , respectivamente. Prove que os pontos M , B_1 , A_1 e N são colineares. **Dicas:**

060. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. Os pontos M e N são as projeções de C_1 sobre os lados AC e BC , respectivamente. Seja $P = MN \cap B_1C_1$. Prove que P é o ponto médio de B_1C_1 . **Dicas:**

061. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo e seja H seu ortocentro. Sejam AA_1 e BB_1 alturas deste triângulo. Seja D um ponto arbitrário no segmento BH . A reta AD intersecta k novamente no ponto E . Sejam $BE \cap AA_1 = F$ e K o ponto médio de FD . Prove que os pontos A_1 , B_1 e K são colineares. **Dicas:**

- 062.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. A reta CM ($M \in AB$) é bissetriz interna de $\angle ACB$, e intersecta k no ponto N . A reta que passa por M e é perpendicular a BC , intersecta BC e o arco menor \widehat{BC} de k nos pontos L e X , respectivamente. A reta que passa por C e é perpendicular a AX , intersecta AX e AB nos pontos Z e Y , respectivamente. Prove que os pontos X , Y e N são colineares. **Dicas:**
- 063.** Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 as alturas de um dado triângulo ABC . Seja P um ponto arbitrário interno ao triângulo. Os pontos C_2 e C_3 são as projeções de P em AB e CC_1 , respectivamente. Os pontos $A_2 \in BC$, $A_3 \in AA_1$, $B_2 \in AC$ e $B_3 \in BB_1$ são definidos analogamente. Prove que as retas A_2A_3 , B_2B_3 e C_2C_3 são concorrentes. **Dicas:**
- 064.** Seja ABC um triângulo. Sejam AB_1 e BA_1 alturas desse triângulo, com interseção H . As retas A_1B_1 e AB se intersectam no ponto D , e M é ponto médio de AB . Prove que $MH \perp DC$. **Dicas:**
- 065.** Seja ABC um triângulo acutângulo. O ponto H é seu ortocentro e o ponto M é ponto médio de AB . Sejam AA_1 e BB_1 alturas desse triângulo e seja $AB \cap A_1B_1 = D$. A reta CH intersecta o circuncírculo de $\triangle ABC$ nos pontos C e K . Prove que os pontos K , M , C e D são concíclicos. **Dicas:**
- 066.** Seja ABC um triângulo com $\angle ACB > 90^\circ$. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas desse triângulo. O ponto M é ponto médio do lado AB . Prove que os pontos médios de AA_1 e BB_1 , e os pontos M e C_1 são concíclicos. **Dicas:**
- 067.** Seja ABC um triângulo com $\angle ACB > 90^\circ$ e de alturas AA_1 e BB_1 . Os pontos P e M são as projeções de A_1 sobre AC e AB , respectivamente, e Q e N são as projeções de B_1 sobre BC e AB , respectivamente. Prove que $PM = QN$. **Dicas:**
- 068.** Seja ABC um triângulo. Seja CD uma altura e O o circuncentro. Seja M o ponto médio de AB . Denote a projeção de A em CO por P . Prove que $DM = PM$. **Dicas:**
- 069.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 e BB_1 alturas. A circunferência de diâmetro AC intersecta a reta BB_1 nos pontos P e M de forma que P fica entre B e M . A circunferência de diâmetro BC intersecta AA_1 nos pontos N e Q de forma que N fica entre A e Q . Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é cíclico. **Dicas:**
- 070.** Seja ABC um triângulo. Seja CD uma altura. Os pontos E e F são as projeções de D sobre AC e BC respectivamente. Prove que o quadrilátero $ABFE$ é cíclico. **Dicas:**
- 071.** Seja ABC um triângulo. Seja CD uma altura. Os pontos E e F são as projeções de D sobre AC e BC respectivamente. Os pontos M e N são os pontos médios de AC e BC respectivamente. Prove que o quadrilátero $EFNM$ é cíclico. **Dicas:**
- 072.** Seja ABC um triângulo. Os segmentos AA_1 e BB_1 são alturas, e a bissetriz interna de $\angle ACB$ intersecta os segmentos A_1B_1 no ponto L . O circuncírculo de $\triangle AB_1L$ intersecta BB_1 uma segunda vez em X . Seja $Y \in AA_1$ um ponto tal que $AY = BX$. Prove que o quadrilátero BA_1LY é cíclico. **Dicas:**
- 073.** Seja ABC um triângulo. Seu circuncentro é O , seu ortocentro é H e suas alturas são AA_1 , BB_1 e CC_1 . O ponto M é a projeção de C sobre A_1B_1 , e N é a reflexão de C com respeito a A_1B_1 . Prove que os pontos H , O , N e C_1 são concíclicos. **Dicas:**
- 074.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 e BB_1 alturas. Um ponto D é escolhido na semirreta AA_1 . Um ponto E é escolhido na semirreta BB_1 , de tal forma que $\angle DCE = 90^\circ$. Seja H o pé da perpendicular de C a ED . Prove que $\angle AHB = 90^\circ$. **Dicas:**
- 075.** Seja ABC um triângulo. Os segmentos AA_1 , BB_1 e CC_1 são alturas. Os pontos A_2 e A_3 são as projeções de A_1 sobre AC e AB respectivamente. Os pontos B_2 , B_3 , C_2 e C_3 são definidos analogamente. Prove que os pontos A_2 , A_3 , B_2 , B_3 , C_2 e C_3 são concíclicos. **Dicas:**
- 076.** Seja ABC um triângulo. Digamos que $AC = BC$. O segmento CC_1 é uma altura e M é seu ponto médio. Seja P a projeção de C_1 sobre BM . Prove que $\angle APC = 90^\circ$. **Dicas:**
- 077.** Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro e seja M o ponto médio do lado AB . Prove que o ponto simétrico de H com respeito a M coincide com o ponto diametralmente oposto de C com respeito ao circuncírculo de $\triangle ABC$. **Dicas:**
- 078.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 e BB_1 alturas que se intersectam em H . Seja D o segundo ponto de interseção dos circuncírculos de $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C$, e seja M o ponto médio de AB . Prove que os pontos D , H e M são colineares. **Dicas:**
- 079.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo e H seu ortocentro. Seja l uma reta arbitrária que passa por H . Prove que as reflexões de l com respeito a AB , BC e CA concorrem num ponto de k . **Dicas:**
- 080.** Seja ABC um triângulo. Seja O seu circuncentro. As reflexões de AB com respeito às retas AC e BC se intersectam no ponto K . Prove que os pontos C , O e K são colineares. **Dicas:**
- 081.** Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro, e seja M o ponto médio do lado AB . A reta que passa por H e que é perpendicular a HM intersecta os lados AC e BC nos pontos D e E , respectivamente. Prove que $DH = EH$. **Dicas:**
- 082.** Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro e O seu circuncentro. O ponto M está no lado BC e $\angle OC_1M = 90^\circ$. Prove que $\angle ABC = \angle MHC_1$. **Dicas:**

083. Seja ABC um triângulo. O circuncírculo de $\triangle ABC$ é k e seu ortocentro é H . Considere duas retas que passam por H que são perpendiculares entre si. Uma delas intersecta AB , BC e CA nos pontos F , K e P respectivamente, e a outra nos pontos E , Q e L respectivamente. Prove que os pontos médios S , N e M dos segmentos QK , EF e LP , respectivamente, são colineares. **Dicas:**

084. Seja ABC um triângulo. O circuncírculo de $\triangle ABC$ é k e seu ortocentro é H . Seja P um ponto arbitrário do interior de $\triangle ABC$. As retas AP , BP e CP intersectam k uma segunda vez nos pontos A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente. Os pontos A_2 , B_2 e C_2 são as projeções de P sobre BC , CA e AB , respectivamente. Os pontos A_3 , B_3 e C_3 são as reflexões de A_1 , B_1 e C_1 com respeito a A_2 , B_2 e C_2 respectivamente. Prove que os pontos H , A_3 , B_3 e C_3 são concíclicos. **Dicas:**

085. Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro e seja P um ponto arbitrário do interior do triângulo. As retas AP , BP e CP intersectam o circuncírculo k de $\triangle ABC$ nos pontos A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente. Os pontos A_2 , B_2 e C_2 são as reflexões de A_1 , B_1 e C_1 com respeito às retas BC , AC e AB , respectivamente. Prove que o quadrilátero $HA_2B_2C_2$ é cíclico. **Dicas:**

086. Seja ABC um triângulo. Sejam M e N os pés das bissetrizes internas relativas a A e B , respectivamente. O ponto P é o pé da bissetriz externa relativa a C . Prove que os pontos N , M e P são colineares. **Dicas:**

087. Seja ABC um triângulo. Sejam B_1 e C_1 os pés das bissetrizes internas relativas a B e C , respectivamente. Seja O o circuncentro de $\triangle ABC$ e seja I_a o A -exincentro. Prove que $OI_a \perp B_1C_1$. **Dicas:**

088. Seja ABC um triângulo. Digamos que $\angle ABC > 90^\circ$ e sejam CM e CN as bissetrizes interna e externa de $\angle ACB$, respectivamente. Prove que as circunferências (ACB) e (MNC) são ortogonais, isto é, que as retas tangentes por seus pontos de interseção são perpendiculares. **Dicas:**

089. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. A reta CL ($L \in AB$) é a bissetriz interna de $\angle ACB$. Denote o ponto de interseção da reta tangente a k por C com a reta AB por N . Prove que $NC = NL$. **Dicas:**

090. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 bissetrizes internas. Seja P um ponto arbitrário na reta A_1B_1 e sejam X , Y e Z suas projeções sobre as retas AB , BC e CA , respectivamente. Prove que a soma dos comprimentos de dois dos segmentos PX , PY e PZ é igual ao comprimento do terceiro. **Dicas:**

091. Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 e BB_1 bissetrizes internas. Seja E a interseção da reta A_1B_1

com o circuncírculo de $\triangle ABC$, tal que E e A estão no mesmo semiplano com respeito a BC . Prove que $\frac{1}{EA} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EC}$. **Dicas:**

092. Seja ABC um triângulo. Sejam AQ e BP bissetrizes internas e k o circuncírculo de $\triangle ABC$. As retas AQ e BP intersectam k nos pontos M e N , respectivamente. Prove que as retas PQ , MN e a reta tangente a k por C são concorrentes. **Dicas:**

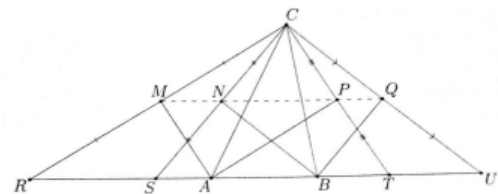
093. Seja $ABCD$ um quadrilátero. As semirretas AB e DC se intersectam no ponto E e as semirretas AD e BC se intersectam no ponto F . A bissetriz interna de $\angle EAF$ e $\angle ECF$ se intersectam em X . A bissetriz interna de $\angle ADE$ intersecta a bissetriz externa de $\angle EBC$ em Y . As bissetrizes externas de $\angle AFB$ e $\angle AEC$ se intersectam em Z . Prove que os pontos X , Y e Z são colineares. **Dicas:**

094. Seja ABC um triângulo tal que $AC > AB > BC$. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 suas bissetrizes internas. O circuncírculo de $\triangle A_1B_1C_1$ intersecta AB , AC e BC uma segunda vez nos pontos C_2 , B_2 e A_2 , respectivamente. Prove que $C_1C_2 = A_1A_2 + B_1B_2$. **Dicas:**

095. Seja ABC um triângulo com bissetriz interna CL ($L \in AB$). A circunferência de diâmetro AB centrada em M intersecta os lados AC e BC uma segunda vez nos pontos B_1 e A_1 , respectivamente. A bissetriz interna de $\angle A_1MB_1$ intersecta a reta CL no ponto K . Prove que os quadriláteros $ALKB_1$ e $BLKA_1$ são cíclicos. **Dicas:**

096. Seja ABC um triângulo e seja l sua bissetriz externa por C . Os pontos D e E são as projeções de A e B sobre l . O segmento CH ($H \in AB$) é a altura de C até AB e o ponto F é o ponto médio de AB . Prove que o quadrilátero $DEHF$ é cíclico. **Dicas:**

097. Seja ABC um triângulo. Os pontos M , N , P e Q são os pés das perpendiculares de C até as bissetrizes interna e externas de $\angle BAC$ e $\angle ABC$, como mostrado na figura. Prove que os pontos M , N , P e Q são colineares. **Dicas:**



098. Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro. Os pontos L e P são as projeções de H sobre as bissetrizes interna e externa de $\angle ACB$, respectivamente. Prove que os pontos M , L e P são colineares, onde M é o ponto médio de AB . **Dicas:**

099. Seja ABC um triângulo. Uma reta passando por C intersecta a bissetriz interna de A e o circuncírculo de $\triangle ABC$ nos pontos M e N , respectivamente. Uma circunferência k_1 passa por A e toca CM nos pontos P e Q , respectivamente. Prove que os pontos N , P e Q são colineares. **Dicas:**

100. Seja $\angle AOC$ um ângulo. O ponto B fica sobre a semirreta OA e o ponto D fica sobre a semirreta OC . Além disso, $AB = CD$, A fica entre O e B , e C fica sobre O e D . Os circuncírculos de $\triangle ADO$ e $\triangle BOC$ intersectam-se novamente no ponto K . Prove que OK é bissetriz interna de $\angle AOC$. **Dicas:**
101. Seja ABC ($AC > BC$) um triângulo, seja CL ($L \in AB$) sua bissetriz interna, e seja O seu circuncentro. Denote os circuncentros de $\triangle ALC$ e $\triangle BLC$ por O_1 e O_2 , respectivamente. Prove que $OO_1 = OO_2$. **Dicas:**
102. Seja ABC um triângulo. Seja CL ($L \in AB$) uma bissetriz interna. O incírculo de $\triangle ALC$ toca AC , AL e CL nos pontos M , N e P , respectivamente, e o C -exincírculo de $\triangle BCL$ toca as retas BL , CB e CL nos pontos Q , R e S , respectivamente. Prove que cada uma das triplas de pontos M , N , S e P , Q , R são colineares. **Dicas:**
103. Seja ABC um triângulo. Sejam AA' e BB' alturas e k o incírculo centrado em I . As retas AI e BI intersectam BC e AC nos pontos F e G respectivamente. A circunferência k toca BC e CA nos pontos D e E respectivamente. Se $A'B' \cap GF = X$, prove que os pontos E , D e X são colineares. **Dicas:**
104. Seja ABC um triângulo. Seja CL bissetriz interna e I incentro. A mediatriz do segmento CL intersecta as bissetrizes internas de $\angle BAC$ e $\angle ABC$ nos pontos M e N , respectivamente. Prove que o quadrilátero $MINC$ é cíclico. **Dicas:**
105. Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro. Os pontos $Y \in AI$ e $X \in BI$ são escolhidos de forma que $\angle XCA = \angle YCB$. Prove que as retas AX , CI e BY são concorrentes. **Dicas:**
106. Seja ABC um triângulo. Sejam AM e BN bissetrizes internas que se intersectam em I . Pontos L e K são escolhidos sobre a reta AB tais que LN e CN são simétricas com respeito a BN , e tais que CM e KM são simétricas com respeito a AM . Seja $D = LN \cap KM$. Prove que $DI \perp AB$. **Dicas:**
107. Seja ABC ($AC > BC$) um triângulo de alturas AA_1 e BB_1 , que se intersectam no ponto H . As bissetrizes internas de $\angle HAC$ e $\angle HBC$ se intersectam no ponto L . Sejam M e N os pontos médios de AB e CH , respectivamente. Prove que os pontos M , L e N são colineares. **Dicas:**
108. Seja ABC um triângulo. Seja C_2 o ponto médio de AB . As retas tangentes ao circuncírculo de $\triangle ABC$ em A e B se intersectam no ponto N . Prove que $\angle ACC_2 = \angle BCN$. **Dicas:**
109. Seja ABC um triângulo. Os pontos D e E são escolhidos sobre os lados AC e BC de tal forma que o quadrilátero $ABED$ é cíclico. Seja M o ponto médio de AB e seja F a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de $\triangle DEC$ nos pontos D e E . Prove que os pontos M , F e C são colineares. **Dicas:**
110. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. As retas tangentes a k por A e B se intersectam no ponto D . Digamos que CD intersecte k uma segunda vez no ponto E . As projeções de E sobre AB , BC e CA são N , P e M , respectivamente. Prove que N é o ponto médio de PM . **Dicas:**
111. Seja ABC um triângulo. As retas tangentes a seu circuncírculo pelos pontos A e B se intersectam em T . A reta CT intersecta o circuncírculo de $\triangle ABC$ uma segunda vez no ponto D . Seja CL ($L \in AB$) bissetriz interna de $\angle ACB$. Prove que DL é bissetriz interna de $\angle ADB$. **Dicas:**
112. Seja ABC um triângulo. As retas tangentes ao seu circuncírculo pelos pontos A e B se intersectam em T . A reta CT intersecta o circuncírculo de $\triangle ABC$ uma segunda vez no ponto D . Seja E a reflexão de D com respeito a AB , e seja M o ponto médio de AB . Prove que os pontos C , E e M são colineares. **Dicas:**
113. Seja ABC um triângulo. As retas tangentes a seu circuncírculo pelos pontos A e B se intersectam em T . A reta CT intersecta o circuncírculo de $\triangle ABC$ uma segunda vez no ponto D . Seja $N \in CD$ um ponto tal que $\angle NBC = \angle ACN$. Prove que $\angle BCN = \angle CAN$. **Dicas:**
114. Seja ABC um triângulo. Sejam E , F e M pontos médios de AC , BC e EF , respectivamente. O segmento CD é uma altura de $\triangle ABC$. Prove que os circuncírculos de $\triangle ECF$, $\triangle BDF$ e $\triangle ADE$ concorrem num ponto da reta DM . **Dicas:**
115. Seja ABC um triângulo. Seja M o ponto médio de AB e seja D o ponto de interseção das retas tangentes ao circuncírculo de $\triangle ABC$ pelos pontos A e B . As projeções de D sobre as retas CA e CB são E e F , respectivamente. Prove que $CM \perp EF$. **Dicas:**
116. Seja ABC um triângulo. Seja N o ponto médio da altura CD e seja M o ponto médio de AB . Seja L o ponto de Lemoine de $\triangle ABC$. Prove que os pontos N , L e M são colineares. **Dicas:**
117. Seja k uma circunferência. Um ponto C é escolhido exterior a k . As retas tangentes k por C tocam a circunferência nos pontos A e B . Prove que o incentro de $\triangle ABC$ fica sobre k . **Dicas:**
118. As circunferências k_1 e k_2 se tocam externamente no ponto I . Sejam l_1 e l_2 as retas tangentes externas comuns às duas circunferências. Os pontos de tangência de l_1 e l_2 a k_2 são A e B , respectivamente. Os pontos de tangência de l_1 e l_2 a k_1 são D e C , respectivamente. Prove que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível. **Dicas:**
119. Seja ABC um triângulo. I é o incentro do triângulo. O incírculo de $\triangle ABC$ toca AB em N . O C -exincírculo de $\triangle ABC$ toca AB em M . Sejam P e Q as projeções ortogonais de A e B sobre a reta CI , respectivamente. Prove que os pontos P , M , Q e

N ficam sobre uma circunferência de diâmetro MN .

Dicas:

- 120.** Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo, de centro I . Denote a projeção ortogonal de B sobre AI por K . Sejam N e M os pontos tangência de AC e BC por ω , respectivamente. Prove que os pontos M , N e K são colineares. **Dicas:**
- 121.** Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo, de centro I . Digamos que AB toque ω em N . Sejam K e M os pontos médios de CN e AB , respectivamente. Prove que K , I e M são colineares. **Dicas:**
- 122.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu incírculo, de centro I . Digamos que AB toque k no ponto P . Seja CH ($H \in AB$) uma altura de $\triangle ABC$. Denote o ponto médio de CH por M . Seja $k_C(I_C)$ o C -exincírculo de $\triangle ABC$, e digamos que ele toque AB em F . Prove que os pontos M , I e F são colineares, e prove que os pontos M , P e I_C são colineares. **Dicas:**
- 123.** Seja ABC um triângulo. Digamos que seu incírculo toque os lados BC , CA e AB nos pontos F , E e D , respectivamente. Digamos também que seu C -exincírculo toque as retas BC , CA e AB nos pontos Q , P e M , respectivamente. Seja MN ($N \in PQ$) uma altura em $\triangle PMQ$, e seja DH ($D \in EF$) uma altura em $\triangle EDF$. Prove que $\angle ACN = \angle BCH$. **Dicas:**
- 124.** Seja ABC um triângulo. Sejam $\omega_X(I_X)$ seus X -exincírculos para $X \in \{A, B, C\}$. Digamos que ω_A toque AB , AC e BC em P , Q e E , respectivamente, assim como ω_B toca BC , BA e CA em N , M e D , respectivamente. Diremos ainda que $PE \cap MN = R$ e $MD \cap PQ = S$. Prove que os pontos I_B , R , C , S e I_A são colineares. **Dicas:**
- 125.** Seja ABC um triângulo. Sejam $\omega_X(I_X)$ seus X -exincírculos para $X \in \{A, B, C\}$. Digamos que ω_A toque AB , AC e BC em P , Q e E , respectivamente, assim como ω_B toca BC , BA e CA em N , M e D , respectivamente. Seja $PE \cap MD = F$. Prove que $CF = r$, onde r é o inraio de $\triangle ABC$. **Dicas:**
- 126.** Seja ABC um triângulo. Sejam $\omega_X(I_X)$ seus X -exincírculos para $X \in \{A, B, C\}$. Digamos que ω_A toque AB , AC e BC em P , Q e E , respectivamente, assim como ω_B toca BC , BA e CA em N , M e D , respectivamente. Sejam $PE \cap MD = U$ e $PQ \cap MN = F$. Prove que $CF \perp AB$ e que $CU \perp AB$. **Dicas:**
- 127.** Seja ABC um triângulo. Sejam $\omega_X(I_X)$ seus X -exincírculos para $X \in \{A, B, C\}$. Digamos que ω_A toque BC em N , assim como ω_B toca CA em M e ω_C toca CA e CB em P e Q , respectivamente. Prove que as retas PQ , MN e AB concorrem. **Dicas:**
- 128.** Seja ABC um triângulo. Seja K o ponto médio de AB . A reta CL ($L \in AB$) é a bissetriz interna de $\angle ACB$. O B -exincírculo de $\triangle ABC$ toca AC no ponto N . O A -exincírculo de $\triangle ABC$ toca BC no ponto P . Seja M ponto médio de NP . Prove que $KM \parallel CL$. **Dicas:**
- 129.** Seja ABC um triângulo. Seja ω_A seu A -exincírculo, e ω_B seu B -exincírculo. ω_A toca AB e BC em Q e N , respectivamente, assim como ω_B toca AB e AC em P e M , respectivamente. Prove que as mediatrizes de AN e BM , e a bissetriz interna de $\angle ACB$ são concorrentes. **Dicas:**
- 130.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja M o ponto médio de AB , e seja N o ponto médio do arco ACB . Sejam I_1 e I_2 os incentros de $\triangle ACM$ e $\triangle BCM$, respectivamente. Prove que os pontos N , C , I_1 e I_2 são concíclicos. **Dicas:**
- 131.** Seja ABC um triângulo. Seja CM uma mediana. Sejam $k_1(I_1)$ e $k_2(I_2)$ os incírculos de $\triangle ACM$ e $\triangle BCM$, respectivamente. Sejam $k_3(I_3)$ e $k_4(I_4)$ os M -exincírculos de $\triangle ACM$ e $\triangle BCM$, respectivamente. Prove que os pontos I_1 , I_2 , I_3 e I_4 são concíclicos. **Dicas:**
- 132.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu incírculo de centro I . Seja k_1 a circunferência que passa por A e B , e que toca k no ponto T . Seja CH uma altura em $\triangle ABC$, e seja M o ponto médio de CH . Seja P o ponto de tangência de AB com k . Prove que os pontos P , M e T são colineares. **Dicas:**
- 133.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 alturas. Sejam C_2 , A_2 e B_2 os pontos de tangência do incírculo de $\triangle ABC$ com AB , BC e CA , respectivamente. Denote os pontos médios de AA_1 , BB_1 e CC_1 por M , N e P , respectivamente. Prove que as retas MA_2 , NB_2 e PC_2 são concorrentes. **Dicas:**
- 134.** Seja ABC um triângulo. Seja $\omega(I)$ seu incírculo, que toca AB em M . Seja L a reflexão de M com respeito a I . Sejam $AI \cap BC = N$, $BI \cap AC = P$ e $PN \cap IC = K$. Seja H a projeção de C sobre AB . Prove que os pontos L , K e H são colineares. **Dicas:**
- 135.** Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo, que toca os lados AB , BC e CA nos pontos M , N e P , respectivamente. Uma circunferência k_1 é construída de forma que toque AB em M . Seja L o ponto de interseção das retas tangentes a k_1 por A e B (distintas de AB). Digamos que k_1 toque LA e LB nos pontos S e Q , respectivamente. Prove que os pontos P , N , Q e S são concíclicos. **Dicas:**
- 136.** Seja ABC um triângulo. Seja $\omega(I)$ seu incírculo, que toca BC e CA nos pontos M e N , respectivamente. Seja D a projeção de A sobre BI , e seja T a projeção de I sobre CD . Sejam P e Q os pontos de interseção de ω com BD . Prove que os pontos P , Q , C e T são concíclicos. **Dicas:**
- 137.** Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo, que toca AB em D . Seja $CD \cap \omega = E \neq D$. A circunferência de centro B e raio BD intersecta CD

no ponto $F \neq D$. Seja $BF \cap AE = K$. Prove que $KF = FB$. **Dicas:**

138. Seja ABC um triângulo. Seja $\omega(I)$ seu incírculo, que toca os lados AB , BC e CA nos pontos N , Q e P , respectivamente. Seja $NI \cap PQ = E$. Seja F o ponto tal que $CF = CP$, $CF \parallel AB$, e F e A ficam em semiplanos distintos, com respeito a BC . Prove que os pontos A , E e F são colineares. **Dicas:**
139. Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo, que toca os lados AB , BC e CA nos pontos M , F e E , respectivamente. Seja $CM \cap \omega = N \neq M$. Seja $l \parallel AB$ uma reta que passa por C . Os pontos P e Q são os pontos de interseção de l com as retas ME e MF , respectivamente. Prove que $\angle ENF = \angle PNQ$. **Dicas:**
140. Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo, que toca os lados BC e CA nos pontos D e F , respectivamente. Seja $AD \cap BF = G$. Denote o ponto médio de FD por M . Sejam K e L as reflexões de F e D com respeito a A e B , respectivamente. Prove que $MG \perp KL$. **Dicas:**
141. Seja ABC um triângulo. Digamos que $AC \geq BC$ e que k seja seu incírculo, que toca os lados BC , CA e AB nos pontos D , E e F , respectivamente. Sejam L e K as respectivas reflexões de A e B com respeito a F . As retas que passam por L e K , perpendiculares a AB , intersectam CB e CA em N e M , respectivamente. Prove que MN toca k . **Dicas:**
142. Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo, que toca os lados AB , BC e CA nos pontos M , N e P , respectivamente. Seja T a interseção do segmento CI com ω . Seja $MP \cap AT = R$ e $MN \cap BT = Q$. Prove que $RQ \perp IC$. **Dicas:**
143. Seja ABC um triângulo isósceles ($AC = BC$) e digamos que $AC > AB$. Seu incírculo ω toca AB e CA em M e N , respectivamente. Seja P um ponto no lado BC tal que $AP = AB$. Seja I_1 o incentro de $\triangle APC$. As retas AI_1 e MN se intersectam em K . Prove que K é o ponto médio de AI_1 . **Dicas:**
144. Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro. Seja $k_2(I_2)$ uma circunferência que toca os segmentos AC e BC . Seja $k_1(I_1)$ uma circunferência que toca AB em G , AC , e k_2 em D . Seja $k_3(I_3)$ uma circunferência que toca AB em T , BC , e k_2 em F . Prove que I fica sobre a mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos de interseção dos segmentos AI e BI com o circuncírculo de $\triangle GTF$. **Dicas:**
145. 4.5.29
146. Sejam m_A , m_B e m_C círculos de Malfatti de um triângulo ABC de incentro I . Sejam $m_A \cap m_B = T_C$, $m_B \cap m_C = T_A$ e $m_A \cap m_C = T_B$. As circunferências m_A e m_B tocam AB em X e Y , respectivamente. Prove que o quadrilátero $XYT_A T_B$ é inscrito numa circunferência, e digamos que essa circunferência intersecte AI e BI nos pontos M e N , respectivamente. Prove também que $AM = AX$ e $BN = BY$. **Dicas:**
147. 4.5.31
148. Seja ABC um triângulo. Sejam D e E pontos sobre AB (D fica entre A e E). Sejam k_1 , k_2 , k_3 e k_4 os incírculos de $\triangle ADC$, $\triangle AEC$, $\triangle BDC$ e $\triangle BEC$, respectivamente. Prove que AB e as retas tangentes externas (diferentes de AB) dos pares de círculos (k_1, k_4) e (k_2, k_3) são concorrentes.
149. Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto arbitrário do segmento AB . Sejam k_1 e k_2 os incírculos de $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$, respectivamente. Digamos que a reta tangente externa comum a k_1 e k_2 (distinta de AB) intersecta CD em K . Prove que $CK = \frac{AC+BC-AB}{2}$. **Dicas:**
150. Seja ABC um triângulo. Seja k seu incírculo, que toca AB em E . Seja D um ponto sobre o segmento AB . Sejam $k_1(I_1)$ e $k_2(I_2)$ os incírculos de $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$, respectivamente. Prove que $\angle I_1 E I_2 = 90^\circ$. **Dicas:**
151. Seja ABC um triângulo. Seja CH uma altura e digamos que seu incírculo toque AB em M . Denote os incentros de $\triangle AHC$ e $\triangle BHC$ por I_1 e I_2 , respectivamente. Um ponto D_1 é escolhido tal que $MI_2 D_1 I_1$ é um retângulo. Prove que este retângulo é um quadrado, e prove que D_1 fica sobre CH . **Dicas:**
152. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja l a reta tal que $l \parallel AB$ e tal que l intersecta AC e BC nos pontos D e E , respectivamente. Digamos que DE intersecte k nos pontos P e Q , respectivamente (D fica entre P e E). Seja k_1 a circunferência que toca os segmentos PD , DC , e o arco menor PC de k . Seja k_2 a circunferência que toca os segmentos EQ , EC , e o arco menor QC de k . Digamos que k_1 toque DC em M . Digamos que k_2 toque EC em N . Prove que $MN \parallel l$. **Dicas:**
153. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Os pontos médios dos arcos menores BC e AC são M e N , respectivamente. As retas AM e BN se intersectam em I . Seja $k_1(N)$ a circunferência que toca AC , e seja $k_2(M)$ a circunferência que toca BC . Prove que uma das retas tangentes externas comuns a k_1 e k_2 passa por C , e a outra passa por I . **Dicas:**
154. Seja ABC um triângulo. Seja l uma reta que passa por A , que não intersecta o segmento BC . Sejam $k_1(O_1)$, $k_2(O_2)$ e $k_3(O_3)$ circunferências que tocam as retas AB , BC , CA e l (k_1 não toca AC , k_2 não toca BA e k_3 não toca l). Prove que o quadrilátero $O_1 O_3 O_2 A$ é cíclico. **Dicas:**
155. Usando a construção do problema anterior, prove que o ortocentro de $\triangle O_1 O_2 O_3$ fica sobre BC . **Dicas:**

156. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. Os quatro excírculos do quadrilátero são construídos. Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências que tocam os segmentos AD e BC . As outras duas circunferências tocam os segmentos AB e DC em L e K , respectivamente. Seja M o ponto médio de O_1O_2 . Prove que $MK = ML$. **Dicas:**
157. Seja ABC um triângulo. Sejam AF , BD e CE alturas. Digamos que seu incírculo toque AB e AC nos pontos K e L , respectivamente. Sejam I_1 e I_2 os incentros de $\triangle AED$ e de $\triangle CDF$, respectivamente. Prove que $KI_1 = LI_1 = LI_2$. **Dicas:**
158. Seja ABC um triângulo. Sejam CC_1 e CC_2 , AA_1 e AA_2 , BB_1 e BB_2 três pares de segmentos isogonalmente conjugados com respeito a $\triangle ABC$. Temos que $C_1 \in AB$, $C_2 \in AB$, $B_1 \in AC$, $B_2 \in AC$, $A_1 \in BC$, e $A_2 \in BC$. Sejam $AA_1 \cap CC_2 = X$, $BB_1 \cap AA_2 = Y$, e $CC_1 \cap BB_2 = Z$. Prove que se os quadriláteros AC_1ZB_2 e BA_1XC_2 são circunscritíveis, então o quadrilátero B_1YA_2C também é circunscritível. **Dicas:**
159. Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível e incírculo k . Digamos que as semirretas DA e CB se intersectem em E , e digamos que as semirretas DC e AB se intersectem em F . Seja H a projeção de B sobre a reta EF . Sejam k_1 e k_2 os incírculos de $\triangle ABE$ e $\triangle BCF$, respectivamente. Sejam I_1 e I_2 seus respectivos centros. Sejam HP e HQ as retas tangentes de H respectivamente a k_1 e k_2 ($P \in k_1$ e $Q \in k_2$). Prove que $\angle I_1HP = \angle I_2HQ$. **Dicas:**
160. Prove o Lema do Incentro-Exincentro, isto é, para um triângulo ABC de incentro I e circuncírculo k , se M é o segundo ponto de interseção de CI com k , então $MA = MB = MI$. **Dicas:**
161. Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro. Seja M o ponto médio de AB , e seja L o ponto médio do arco ACB . Prove que $\angle ILC = \angle IMB$. **Dicas:**
162. Prove a fórmula de Euler, isto é, que para um triângulo ABC , $OI^2 = R^2 - 2Rr$, onde O e I são o circuncentro e incentro, respectivamente, e R e r são o circunraio e o inraio, respectivamente. **Dicas:**
163. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo, ω seu incírculo, e I seu incentro. A reta que passa por I e que é perpendicular a CI , intersecta a reta AB em M . Seja K a segunda interseção de k com MC . Prove que $IK \perp MC$. **Dicas:**
164. Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo e k seu circuncírculo. A circunferência ω toca AB , BC e CA nos pontos M , N e P , respectivamente. Os pontos R , S e T são os pontos médios dos arcos menores AB , BC e CA , respectivamente. Prove que as retas MR , SN e PT são concorrentes. **Dicas:**
165. Seja ABC um triângulo. Seja ω seu incírculo e k seu circuncírculo. A circunferência ω toca BC , CA e AB nos pontos D , E e F , respectivamente. Digamos que $ED \cap AB = K$. Prove que o ponto médio M de KF fica sobre o eixo radical de k e ω . **Dicas:**
166. Prove o Lema de Verrièr, isto é, dado um triângulo ABC , com circuncírculo k , e com incírculo C -mixtilinear ω , que toca AC , BC e k nos pontos E , F e D , respectivamente, prove que o incentro de $\triangle ABC$ é o ponto médio do segmento EF . **Dicas:**
167. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja ω seu incírculo C -mixtilinear, que toca AC , BC e k nos pontos E , F e X , respectivamente. O ponto D é o ponto médio do arco ACB . Prove que os pontos X , D e o ponto médio de EF são colineares. **Dicas:**
168. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja ω seu incírculo A -mixtilinear, que toca AC , AB e k nos pontos E , F e X , respectivamente. Os pontos P e Q são os pontos médios dos arcos menores AC e AB , respectivamente. Os pontos M e N são os pontos médios de AE e AF , respectivamente. Prove que os pontos P , M , N e Q são colineares. **Dicas:**
169. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja M o ponto médio do arco menor AB de k . Seja G o ponto diametralmente oposto a C com respeito a k , e seja $AG \cap CM = X$. Seja k_1 o incírculo C -mixtilinear de $\triangle ABC$. O segmento GH ($H \in k_1$) é tangente a k_1 . Prove que $GH = GX$. **Dicas:**
170. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. O incírculo C -mixtilinear k_1 toca k no ponto M , e as retas AC e BC nos pontos F e L , respectivamente. Seja $FL \cap CM = N$. Prove que $\angle ANF = \angle BNL$. **Dicas:**
171. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja D um ponto arbitrário no arco menor AB de k . A circunferência k_1 toca k internamente no ponto D e a reta BC no ponto P . A circunferência k_2 toca k internamente no ponto D e a reta AC no ponto H . O ponto I é o incentro de $\triangle ABC$. Prove que os pontos H , I e P são colineares. **Dicas:**
172. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo e k_1 seu incírculo C -mixtilinear. Seu incírculo k_2 toca AB no ponto Q . Prove que $\angle APQ = \angle BAC$ e $\angle BPQ = \angle ABC$. **Dicas:**
173. Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro. Seja k um círculo arbitrário que passe por A e B . O círculo k_1 toca AC e BC nos pontos N e M , respectivamente. Ele também toca o arco menor AB de k internamente no ponto X . Prove que $\angle AXI = \angle IXB$. **Dicas:**
174. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. O círculo C -mixtilinear k_1 toca k no ponto P . Seja Q um ponto arbitrário no arco AB de k que não contém C . Os pontos I_1 e I_2 são os incentros de $\triangle AQC$ e $\triangle QBC$, respectivamente. Prove que o quadrilátero QPI_2I_1 é cíclico. **Dicas:**

- 175.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo, ω seu incírculo. O incírculo C -mixtilinear k_1 toca k no ponto K . O ponto M no arco AKB é arbitrário. As retas tangentes por M a ω intersectam AB nos pontos E e F . Prove que o quadrilátero $MEFK$ é cíclico. **Dicas:**
- 176.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seu C -exincírculo k_1 toca AB no ponto F . Seu incírculo C -mixtilinear k_2 toca k no ponto D . Prove que $\angle ACF = \angle BCD$. **Dicas:**
- 177.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seu incírculo k_1 toca o segmento AB no ponto F . Seu exincírculo C -mixtilinear k_2 toca k no ponto D . Prove que $\angle ACF = \angle BCD$. **Dicas:**
- 178.** Prove o Lema de Sawayama: Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja D um ponto arbitrário em AB . A circunferência k_1 toca os segmentos AD e CD , assim como k internamente num ponto do arco AC . Digamos que k_1 toque AB em F , e CD em M . O ponto I é o incentro de $\triangle ABC$. Prove que os pontos F , M e I são colineares. **Dicas:**
- 179.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. O ponto D fica sobre o segmento AB . A circunferência k_1 toca AB no ponto F , toca CD no ponto M e toca k internamente no ponto K , sobre o arco menor AC . O ponto I é o incentro de $\triangle ABC$, e o ponto I_1 é o incentro de $\triangle ADC$. Prove que o pentágono KI_1IMC é cíclico. **Dicas:**
- 180.** Prove o Teorema de Thébault: Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. O ponto D fica sobre o segmento AB . A circunferência k_1 toca o segmento AD no ponto K , o segmento CD no ponto E , e a circunferência k internamente num ponto do arco AC . A circunferência k_2 toca o segmento BD no ponto M , o segmento CD no ponto N , e a circunferência k internamente num ponto do arco BC . O ponto I é o incentro de $\triangle ABC$ e os pontos I_1 e I_2 são os centros de k_1 e k_2 , respectivamente. Prove que os pontos I , I_1 e I_2 são colineares. **Dicas:**
- 181.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. O ponto D fica sobre o segmento AB . A circunferência k_1 toca a circunferência k internamente num ponto do arco AC , toca o segmento AD no ponto X , e toca o segmento CD no ponto F . A circunferência k_2 toca a circunferência k internamente num ponto do arco BC , toca o segmento BD em G , e toca o segmento CD no ponto K . O ponto I é o incentro de $\triangle ABC$. O segmento YZ é a segunda reta tangente externa comum entre k_1 e k_2 , tal que $Y \in k_1$ e $Z \in k_2$. Seja $ZK \cap FY = L$. Prove que os pontos A , B , I e L são concíclicos. **Dicas:**
- 182.** Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico de circuncírculo k . A circunferência k_1 toca a circunferência k internamente num ponto do arco menor AD , toca o segmento AC no ponto F , e toca o segmento BD no ponto E . A circunferência k_2 toca a circunferência k internamente num ponto do arco menor BC , toca o segmento AC num ponto N , e toca o segmento BD no ponto K . Os pontos P e Q são os pontos médios de EK e NF , respectivamente. Os pontos T e S são os pontos médios dos arcos menores CD e AB , respectivamente. Prove que os pontos T , P , Q e M são colineares. **Dicas:**
- 183.** Seja $CYBED$ um pentágono cíclico de circuncírculo k . A circunferência k_1 toca a reta CB no ponto N , toca a reta EY , e toca a circunferência k internamente num ponto do arco menor CE . A circunferência k_2 toca a reta CB no ponto M , toca a reta DY , e toca a circunferência k internamente num ponto do arco menor BD . A circunferência k_3 toca as retas CD e BE , e a circunferência k internamente no ponto X do arco menor CB . Prove que o quadrilátero $XYNM$ é cíclico. **Dicas:**
- 184.** Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico de circuncírculo k . A circunferência k_1 toca as retas AC e BD , e a circunferência k internamente no ponto E sobre o arco menor AD . A circunferência k_2 toca as retas AC e BD , e a circunferência k internamente no ponto Z sobre o arco menor BC . Sejam $X \in k_2$ e $K \in k_1$ pontos tais que XK é uma reta tangente externa comum a k_1 e k_2 , com C e X sobre o mesmo semi-plano com respeito a EZ . A circunferência k_3 toca k_1 e k_2 externamente. Seja $k_3 \cap BD = M$, tal que M é o ponto de interseção mais próximo de D , e seja $k_3 \cap AC = T$, tal que T é o ponto de interseção mais próximo de C . Prove que $MT \parallel XK \parallel CD$. **Dicas:**
- 185.** (Círculo de Euler) Seja ABC um triângulo. Seja H seu ortocentro. Prove que os pontos médios de seus lados, os pés de suas alturas, e os pontos médios dos segmentos AH , BH e CH são concíclicos. **Dicas:**
- 186.** Seja ABC um triângulo. Sejam k , k_A , k_B e k_C o incírculo e os três exincírculos, respectivamente. Sejam A_1 , B_1 e C_1 os pontos médios de BC , CA e AB , respectivamente. Prove que o circuncírculo ω de $\triangle A_1B_1C_1$ é tangente a todas as outras circunferências. **Dicas:**
- 187.** Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro e O seu circuncentro. Seja P um ponto arbitrário na reta OI . Denote os pés das perpendiculares de P a AB , BC e CA por C_2 , A_2 e B_2 , respectivamente. Prove que o ponto de Feuerbach F fica sobre o circuncírculo de $\triangle A_2B_2C_2$. **Dicas:**
- 188.** Seja ABC um triângulo. Sejam AA_1 , BB_1 e CC_1 bissetrizes internas. Seja F o ponto de Feuerbach de $\triangle ABC$. Prove que o quadrilátero $A_1B_1C_1F$ é cíclico. **Dicas:**
- 189.** Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro. Seu incírculo toca AB , BC e AC em C_2 , A_2 e B_2 , respectivamente. Os pontos médios de AB , BC e CA são C_1 , A_1 e B_1 , respectivamente. Seja $A_1B_1 \cap A_2B_2 = D$. Prove que o ponto de Feuerbach F fica sobre a reta DC_2 . **Dicas:**

190. 4.8.6

191. Seja ABC um triângulo. Denote os pontos médios de AB , BC e CA por C_1 , A_1 e B_1 , respectivamente. Denote os pontos de tangência dos excírculos com os segmentos AB , BC e CA por C_2 , A_2 e B_2 , respectivamente. Seja $A_1B_1 \cap A_2B_2 = G$. Prove que o ponto de Feuerbach F fica sobre a reta GC_2 . **Dicas:**

192. Seja ABC um triângulo. Sejam M e N os pontos médios de AB e BC , respectivamente. Denote o incírculo, o círculo de Euler e os excírculos de $\triangle ABC$ por k , k_1 , k_A , k_B e k_C , respectivamente. Sejam $k \cap k_1 = D$, $k_A \cap k_1 = E$, $k_B \cap k_1 = F$ e $k_C \cap k_1 = G$. Prove que as retas MN , DF e EG são concorrentes. **Dicas:**

193. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja X um ponto arbitrário interno a $\triangle ABC$. Denote $AX \cap BC = A_1$, $BX \cap AC = B_1$ e $CX \cap AB = C_1$. A circunferência k_A é externa a $\triangle ABC$, toca k internamente, e também toca o segmento BC no ponto A_1 . As circunferências k_B e k_C são definidas analogamente. Denote o incírculo de $\triangle ABC$ por ω . Prove que existe uma circunferência que é tangente externamente a k_A , k_B e k_C , e internamente a ω . **Dicas:**

194. (Círculo de Conway) Seja ABC um triângulo. Os pontos P e S ficam sobre a reta AB , tais que os pontos P , A , B e S estão nessa ordem, $AP = BC$ e $BS = AC$. Os pontos R e N ficam sobre a reta BC , tais que os pontos R , B , C e N estão nessa ordem, $CN = AB$ e $BR = AC$. Os pontos M e Q ficam sobre a reta CA , tais que os pontos Q , A , C e M estão nessa ordem, $CM = AB$ e $AQ = BC$. Prove que o hexágono $MNPQRS$ é cíclico. **Dicas:**

195. Seja ABC um triângulo. Os pontos D , E e F são os pontos médios dos lados BC , CA e AB , respectivamente. O ponto G é o baricentro de $\triangle ABC$. Prove que os circuncentros de $\triangle AFG$, $\triangle AEG$, $\triangle GDB$, $\triangle FGB$, $\triangle GDC$ e $\triangle EGC$ são concíclicos. **Dicas:**

196. As circunferências k_1 , k_2 e k_3 são escolhidas de forma que $k_1 \cap k_2 = \{R, S\}$, $k_2 \cap k_3 = \{P, Q\}$ e $k_3 \cap k_1 = \{M, N\}$. Denote o centro radical de k_1 , k_2 e k_3 por X . Os pontos A , B e C são escolhidos nas semirretas XM , XQ e XS após M , Q e P , respectivamente. Sejam $AB \cap k_3 = \{G, H\}$, $BC \cap k_2 = \{I, J\}$ e $CA \cap k_1 = \{K, L\}$. Prove que os pontos H , I , J , K , L e G são concíclicos. **Dicas:**

197. Seja ABC um triângulo. Uma circunferência k que passa por A e B intersecta os lados AC e BC nos pontos E e D , respectivamente. Seja $AD \cap BE = G$. Denote os pontos médios de AB e DE por M e N , respectivamente. Prove que a reta CG é tangente ao circuncírculo de $\triangle MGN$. **Dicas:**

198. Seja ABC um triângulo. Os pontos N e M são escolhidos sobre os lados AC e BC , respectivamente, de tal forma que $ABMN$ é cíclico. Sejam

$AM \cap BN = D$ e $CD \cap AB = P$. Denote o ponto médio do segmento AB por Q . Prove que o quadrilátero $MNQP$ é cíclico. **Dicas:**

199. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Sejam M , N e P os pontos médios de AB , BC e CA , respectivamente. Seja $D \in AB$ um ponto tal que CD é tangente a k . Denote o circuncírculo de $\triangle MNP$ por k_1 . Prove que o ponto C fica sobre a reta polar de D com respeito a k_1 . **Dicas:**

200. Seja ABC um triângulo. Seja O seu circuncentro. Seja k uma circunferência que passa por C e O . Denote $k \cap AC = \{C, D\}$ e $k \cap BC = \{C, E\}$. Prove que o ortocentro de $\triangle DOE$ fica sobre AB . **Dicas:**

201. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. O ponto D é o ponto médio do arco ACB . Um ponto arbitrário M é escolhido sobre o lado AC . O ponto $N \in BC$ satisfaz $AM = BN$. Prove que os pontos C , D , N e M são concíclicos. **Dicas:**

202. Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto arbitrário sobre AB . Os pontos E e F ficam sobre os lados AC e BC e são escolhidos de forma que os quadriláteros $AXFC$ e $BCEX$ são cíclicos. Seja O o circuncentro de $\triangle EFC$. Prove que $OX \perp AB$. **Dicas:**

203. Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Sejam M e N pontos arbitrários sobre o lado AB , tais que M fica entre A e N . Os pontos $K \in AC$ e $L \in BC$ são escolhidos tais que $MK \parallel BC$ e $NL \parallel AC$. A reta LK intersecta k nos pontos P e Q . Prove que o quadrilátero $MNQP$ é cíclico. **Dicas:**

204. Seja $ACBD$ um quadrilátero convexo tal que $AC = AD$ e $BC = BD$. O circuncírculo de $\triangle ABC$ intersecta AD e BD nos pontos E e F , respectivamente. Prove que $\angle ECD = \angle FCD$. **Dicas:**

205. Seja ABC um triângulo. Seu incírculo é ω e seu incentro é I . Digamos que ω toque AB , BC e CA nos pontos M , N e P , respectivamente. Seja $AB \cap PN = K$. Prove que $CM \perp KI$. **Dicas:**

206. Seja ABC um triângulo. Seu incírculo é ω e seu incentro é I . Digamos que ω toque AB , BC e CA nos pontos M , N e P , respectivamente. Sejam $AB \cap PN = K$ e $CM \cap KN = L$. Prove que $IL \perp KC$. **Dicas:**

207. Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto interno ao triângulo. Os pontos M , N e P são os pés das perpendiculares de X até AB , BC e CA , respectivamente. Seja Q o segundo ponto de interseção do circuncírculo de $\triangle MNP$ com AB , e digamos que as retas AB e PN se intersectem em T . Prove que $TX \perp CQ$. **Dicas:**

208. (Teorema de Brocard) Um quadrilátero não-trapézio $ABCD$ é inscrito numa circunferência de centro O . Seja $AC \cap BD = H$, $AB \cap CD = E$ e $AD \cap BC = F$. Prove que $FH \perp OE$. **Dicas:**

- 209.** (Teorema de Brocard) Um quadrilátero não-trapézio $ABCD$ é inscrito numa circunferência de centro O . Seja $AC \cap BD = H$, $AB \cap CD = E$ e $AD \cap BC = F$. Prove que $OH \perp FE$. **Dicas:**
- 210.** Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto arbitrário sobre AB . Denote os circuncírculos de $\triangle AXC$ e $\triangle BXC$ por k_1 e k_2 , respectivamente. Os pontos $E \in AC$ e $F \in BC$ são escolhidos tais que $EX \parallel BC$ e $FX \parallel AC$. O ponto $M \in k_1$ é escolhido tal que $ME \perp AC$, e tal que M e X fiquem em semi-planos distintos com respeito a AC . O ponto $N \in k_2$ é escolhido tal que $NF \perp BC$, e tal que N e X fiquem em semi-planos distintos com respeito a BC . Prove que $\angle MXN = 90^\circ$. **Dicas:**
- 211.** Seja ABC um triângulo. Digamos que $AC > BC$. Seja $D \in AB$ tal que DC toca o circuncírculo de $\triangle ABC$. O ponto B' é a reflexão de B com respeito à reta CD . O ponto C' é a reflexão de C com respeito ao ponto D . Prove que o quadrilátero $AC'B'C$ é cíclico. **Dicas:**
- 212.** Seja ABC um triângulo. Digamos que $\angle ACB < 60^\circ$ e que O seja seu circuncentro. Os pontos A' e B' são as reflexões de A e B com respeito a BC e AC , respectivamente. O ponto C_1 é a reflexão de O com respeito a AB . Prove que o circuncentro O' de $\triangle B'CA'$ fica sobre a reta C_1C . **Dicas:**
- 213.** Seja ABC um triângulo. Seja CM mediana. A simediana de $\triangle ABC$ com respeito a C intersecta o circuncírculo de $\triangle AMC$ no ponto N . Sejam O , O_1 e O_2 os circuncentros de $\triangle ABC$, $\triangle AMC$ e $\triangle BNC$, respectivamente. Prove que OC corta O_1O_2 em seu ponto médio. **Dicas:**
- 214.** Seja ABC um triângulo. Os pontos D e E do segmento AB são tais que $\angle ACD = \angle BCE$. Sejam F , G , H , I os circuncentros de $\triangle ADC$, $\triangle AEC$, $\triangle BDC$ e $\triangle BEC$, respectivamente. Prove que o quadrilátero $EGHI$ é cíclico. **Dicas:**
- 215.** Seja ABC um triângulo. Seja l uma reta que passa por C e que fica no interior de $\angle ACB$. As retas l_1 e l são conjugadas isogonais com respeito a $\angle ACB$. Os pontos K e M são as projeções de A e B sobre l_1 , e os pontos L e N são as projeções de A e B sobre l , respectivamente. Prove que os pontos K , L , M e N são concíclicos. **Dicas:**
- 216.** Seja k uma circunferência de centro A e seja C um ponto exterior a k . As retas CD e CE são tangentes a k tais que $D, C \in k$. O ponto G é a projeção de C sobre uma reta arbitrária l que passa por A , e o ponto H é um ponto arbitrário sobre a semirreta CG após G . O circuncírculo de $\triangle HGD$ intersecta l nos pontos G e F . O circuncírculo de $\triangle HGE$ intersecta l nos pontos G e I . Prove que $FA = IA$. **Dicas:**
- 217.** Seja k uma circunferência de centro A e seja C um ponto exterior a k . As retas CD e CE são tangentes a k , tais que $D, E \in k$. O ponto B fica sobre k , tal que os pontos B e C ficam em semi-planos distintos com respeito a ED . Sejam G e H as projeções de C sobre BD e BE , respectivamente. Os pontos N e M são as reflexões de C com respeito a G e H , respectivamente. Prove que os segmentos MN e DE bissectam um ao outro. **Dicas:**
- 218.** Seja ABC um triângulo. Seja $DH \parallel AB$, onde $D \in AC$ e $H \in BC$. Seja E um ponto arbitrário interior a $\triangle DHC$. Denote $G = EB \cap DH$ e $F = AE \cap DH$. Prove que CE passa pelo segundo ponto de interseção I entre os circuncírculos de $\triangle DEG$ e $\triangle FHE$. **Dicas:**
- 219.** Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto arbitrário em seu interior. Os pontos E e F são escolhidos tais que $DE \parallel AC$, $E \in AB$ e $DF \parallel BC$, $F \in AB$. Prove que a reta CD passa pelo segundo ponto de interseção I entre os circuncírculos de $\triangle EDB$ e $\triangle AFG$. **Dicas:**
- 220.** Seja ABC um triângulo. A circunferência k contém A e B , e intersecta BC e CA nos pontos D e F , respectivamente. Sejam $J, K \in k$ e seja L o segundo ponto de interseção entre os circuncírculos de $\triangle FKC$ e $\triangle DJC$. Prove que $M = AJ \cap BK$ fica sobre LC . **Dicas:**
- 221.** Seja ABC um triângulo. Seja J um ponto em seu interior. Uma circunferência k passa por A e B , e intersecta CA e CB uma segunda vez nos pontos E e D , respectivamente. Sejam $JA \cap k = H$ e $JB \cap k = I$. O ponto F fica sobre a semirreta JC após C . O circuncírculo de $\triangle EIF$ intersecta a reta FJ nos pontos F e G . Prove que o quadrilátero $DGHF$ é cíclico. **Dicas:**
- 222.** Seja ABC um triângulo. Sejam D e E os pontos médios dos lados AC e BC , respectivamente. As circunferências de diâmetros BD e AE intersectam-se nos pontos H e I . Prove que os pontos H , I e C são colineares. **Dicas:**
- 223.** Seja ABC um triângulo. Os pontos D e E são os pontos médios dos lados AC e BC , respectivamente. O ponto F é o pé da altura de C em $\triangle ABC$. Os circuncírculos de $\triangle DFB$ e $\triangle AFE$ se intersectam nos pontos F e G . Denote $GF \cap DE = H$. Prove que H é o ponto médio de DE . **Dicas:**
- 224.** Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto arbitrário que não pertence a nenhum lado do triângulo. Prove que as conjugadas isogonais das retas AX , BX e CX com respeito a $\triangle ABC$ são concorrentes. **Dicas:**
- 225.** Seja ABC um triângulo. Os pontos D e E ficam sobre o lado BC tais que $\angle BAD = \angle EAC$. Os pontos F e G ficam sobre o lado AC tais que $\angle ABG = \angle FBC$. Os pontos H e I são escolhidos sobre a reta AB tais que A fica entre H e B , e B fica entre A e I . Digamos que $\angle HCA = \angle BCI$. Se os pontos E , G e H são colineares, prove que os pontos F , D e I são colineares. **Dicas:**

- 226.** Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto em seu interior. A reta AX intersecta BC no ponto A_1 . Os pontos B_1 e C_1 são definidos analogamente. Denote a reflexão de A_1 com respeito ao ponto médio de BC por A_2 . Os pontos B_2 e C_2 são definidos analogamente. Prove que as retas AA_2 , BB_2 e CC_2 são concorrentes. **Dicas:**
- 227.** Seja ABC um triângulo. Os pontos A_1 , B_1 e C_1 são colineares e ficam sobre as retas BC , CA e AB , respectivamente. Seja A_2 a reflexão de A_1 com respeito ao ponto médio de BC . Os pontos B_2 e C_2 são definidos analogamente. Prove que os pontos A_2 , B_2 e C_2 são colineares. **Dicas:**
- 228.** Seja ABC um triângulo. Os triângulos $\triangle BCD$, $\triangle CAE$ e $\triangle ABF$ são construídos externamente sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente, tais que $\angle BCD = \angle DBC = \angle CAE = \angle ACE = \angle ABF = \angle BAF = \varphi$. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 229.** Seja ABC um triângulo. Os triângulos $\triangle BCD$, $\triangle CAE$ e $\triangle ABF$ são construídos externamente sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente, tais que $\angle BCD = \angle DBC = \varphi$, $\angle CAE = \angle ACE = \theta$ e $\angle ABF = \angle BAF = \psi$. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 230.** Seja ABC um triângulo. Os pontos D , E e F ficam no interior de $\triangle ABC$ e satisfazem $\angle BCD = \angle ECA = \varphi$, $\angle DBC = \angle ABF = \theta$ e $\angle CAE = \angle BAF = \psi$. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 231.** Seja ABC um triângulo. Os pontos D , E e F são tais que $\angle BCD = \angle ECA$, $\angle DBC = \angle ABF$ e $\angle CAE = \angle BAF$. Denote $M = BF \cap CE$, $N = AF \cap CD$ e $P = AE \cap BD$. Prove que as retas MD , NE e PF são concorrentes. **Dicas:**
- 232.** Seja ABC um triângulo. Os pontos A_1 e A_2 ficam sobre o lado BC e são equidistantes do ponto médio (A_1 fica entre B e A_2). Os pontos B_1 e B_2 ficam sobre o lado AC e são equidistantes do ponto médio (B_1 fica entre C e B_2). Os pontos C_1 e C_2 ficam sobre o lado AB e são equidistantes do ponto médio (C_1 fica entre A e C_2). Denote $CC_2 \cap BB_1 = D$, $AA_2 \cap CC_1 = E$ e $BB_2 \cap AA_1 = F$. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 233.** Seja ABC um triângulo. Os pontos A_1 e A_2 ficam sobre o lado BC e são equidistantes do ponto médio (A_1 fica entre B e A_2). Os pontos B_1 e B_2 ficam sobre o lado AC e são equidistantes do ponto médio (B_1 fica entre C e B_2). Os pontos C_1 e C_2 ficam sobre o lado AB e são equidistantes do ponto médio (C_1 fica entre A e C_2). Denote $CC_2 \cap BB_1 = D$, $AA_2 \cap CC_1 = E$, $BB_2 \cap AA_1 = F$, $CC_1 \cap BB_2 = M$, $CC_2 \cap BB_1 = P$ e $CC_2 \cap AA_1 = N$. Prove que as retas MD , NE e PF são concorrentes. **Dicas:**
- 234.** Seja ABC um triângulo. Os pontos A_1 e A_2 ficam sobre o lado BC e são equidistantes do ponto médio (A_1 fica entre B e A_2). Os pontos B_1 e B_2 ficam sobre o lado AC e são equidistantes do ponto médio (B_1 fica entre C e B_2). Os pontos C_1 e C_2 ficam sobre o lado AB e são equidistantes do ponto médio (C_1 fica entre A e C_2). Denote $B_1C_1 \cap B_2C_2 = D$, $A_1C_1 \cap A_2C_2 = E$ e $A_1B_1 \cap A_2B_2 = F$. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 235.** Seja ABC um triângulo. Os pontos A_1 e A_2 ficam sobre o lado BC e são equidistantes do ponto médio (A_1 fica entre B e A_2). Os pontos B_1 e B_2 ficam sobre o lado AC e são equidistantes do ponto médio (B_1 fica entre C e B_2). Os pontos C_1 e C_2 ficam sobre o lado AB e são equidistantes do ponto médio (C_1 fica entre A e C_2). Denote $B_1C_1 \cap B_2C_2 = E$, $A_1C_1 \cap A_2C_2 = F$ e $A_1B_1 \cap A_2B_2 = D$. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 236.** Seja ABC um triângulo. Os pontos A_1 e A_2 ficam sobre o lado BC e são equidistantes do ponto médio (A_1 fica entre B e A_2). Os pontos B_1 e B_2 ficam sobre o lado AC e são equidistantes do ponto médio (B_1 fica entre C e B_2). Os pontos C_1 e C_2 ficam sobre o lado AB e são equidistantes do ponto médio (C_1 fica entre A e C_2). Denote $B_1C_1 \cap B_2C_2 = N$, $A_1C_1 \cap B_2C_2 = P$, $A_1B_1 \cap A_2C_2 = M$, $A_1B_1 \cap A_2B_2 = F$, $C_1B_1 \cap B_2C_2 = D$ e $A_1C_1 \cap A_2C_2 = E$. Prove que as retas DM , EN e PF são concorrentes. **Dicas:**
- 237.** Seja ABC um triângulo. Os pontos A_1 e A_2 ficam sobre o lado BC e são equidistantes do ponto médio (A_1 fica entre B e A_2). Os pontos B_1 e B_2 ficam sobre o lado AC e são equidistantes do ponto médio (B_1 fica entre C e B_2). Os pontos C_1 e C_2 ficam sobre o lado AB e são equidistantes do ponto médio (C_1 fica entre A e C_2). Denote $A_1B_2 \cap B_1C_2 = E$, $B_1C_2 \cap A_2C_1 = F$ e $A_2C_1 \cap A_1B_2 = D$. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 238.** (Teorema de Ceva) Seja ABC um triângulo. Sejam $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ e $C_1 \in AB$ pontos sobre os lados. Prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes se e somente se $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. **Dicas:**
- 239.** (Teorema de Carnot) Seja ABC um triângulo. Sejam $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ e $C_1 \in AB$ pontos sobre os lados. Prove que as perpendiculares pelos pontos A_1 , B_1 e C_1 aos lados em que estão são concorrentes se e somente se $AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = C_1B^2 + A_1C^2 + B_1A^2$. **Dicas:**
- 240.** Seja ABC um triângulo. Os pontos D , E e F são tais que $BD = CD$, $CE = EA$ e $AF = FB$. Prove que as perpendiculares de A até EF , de B até DF e de C até DE são concorrentes. **Dicas:**
- 241.** Seja ABC um triângulo. Seja D um ponto em seu interior. Os pontos F , E e G são escolhidos sobre as perpendiculares de D até os lados AB , BC e CA , respectivamente. Prove que as perpendiculares de A até GF , de B até FE e de C até GE são concorrentes. **Dicas:**

- 242.** Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto em seu interior. Os pontos A_1 , B_1 e C_1 são as projeções de X sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Denote as reflexões de A_1 com respeito ao ponto médio de BC por A_2 . Os pontos B_2 e C_2 são definidos analogamente. Prove que as perpendiculares de A_2 , B_2 e C_2 aos seus respectivos lados são concorrentes. **Dicas:**
- 243.** Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto em seu interior. Denote os pés das perpendiculares de X até os lados AB , BC e CA por D , E e F , respectivamente. O circuncírculo de $\triangle DEF$ intersecta AB , BC e CA nos pontos D' , E' e F' , respectivamente. Prove que as perpendiculares de D' até AB , de E' até BC e de F' até CA são concorrentes. **Dicas:**
- 244.** Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto em seu interior. Os pontos $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ e $C_1 \in AB$ são escolhidos de tal forma que as retas XA_1 , XB_1 e XC_1 são bissetrizes internas de $\angle BXC$, $\angle CXA$ e $\angle AXB$, respectivamente. Prove que as retas AA_1 , BB_1 e CC_1 são concorrentes. **Dicas:**
- 245.** Seja ABC um triângulo. Denote os pontos médios dos lados BC , CA e AB por D , E e F , respectivamente. Sejam M , N e P os incentros de $\triangle AFE$, $\triangle FBD$ e $\triangle EDC$, respectivamente. Prove que as retas DM , EN e FP são concorrentes. **Dicas:**
- 246.** Seja ABC um triângulo. Os pontos F e K ; E e J ; G e D são escolhidos sobre as retas BC , CA e AB , respectivamente, tais que as ordens em cada reta são $F - C - B - K$, $J - A - C - E$ e $D - B - A - G$. Além disso, $DB = BC = CE$, $FC = CA = AG$ e $JA = AB = BK$. Sejam $BE \cap CD = M$, $FA \cap CG = N$ e $JB \cap AK = P$. Prove que as retas AM , BN e CP são concorrentes. **Dicas:**
- 247.** Seja ABC um triângulo. Os pontos F e K ; E e J ; G e D são escolhidos sobre as retas BC , CA e AB , respectivamente, tais que as ordens em cada reta são $F - C - B - K$, $J - A - C - E$ e $D - B - A - G$. Além disso, $DB = BC = CE$, $FC = CA = AG$ e $JA = AB = BK$. Denote $ED \cap JK = N$, $JK \cap GF = M$ e $GF \cap ED = P$. Prove que as retas AM , BN e CP são concorrentes. **Dicas:**
- 248.** Seja $ABCDEF$ um hexágono tal que $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ e $\angle A = \angle D$. Prove que se os pontos M , N , P , Q , R e S são os pontos médios de AB , BC , CD , DE , EF e FA , respectivamente, então as retas MQ , NR e PS são concorrentes. **Dicas:**
- 249.** Seja $AFBDCE$ um hexágono tal que $\angle FBD = \angle DCE = \angle EAF = \varphi$, $AF = FB$, $BD = DC$ e $CE = EA$. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 250.** Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto. As projeções e reflexões de X com respeito a BC , CA e AB são D e D' , E e E' , e F e F' , respectivamente. Prove que os circuncírculos de $\triangle AF'E'$, $\triangle BF'D'$, $\triangle CE'D$ e $\triangle ABC$ têm um ponto comum. **Dicas:**
- 251.** Seja ABC um triângulo. Seja I seu incentro. Os pontos F , D e E são escolhidos sobre as perpendiculares de I até os lados AB , BC e CA , de forma que suas distâncias até I são iguais. Prove que as retas AD , BE e CF são concorrentes. **Dicas:**
- 252.** Seja ABC um triângulo. Seja X um ponto arbitrário que não fica sobre nenhum dos lados do triângulo. Denote $D = AX \cap BC$, $E = BX \cap AC$ e $F = CX \cap AB$. As circunferências k_1 , k_2 e k_3 são externas a $\triangle ABC$. Elas tocam o circuncírculo de $\triangle ABC$ internamente nos pontos M , N e P , e os lados BC , AC e AB nos pontos D , E e F , respectivamente. Prove que as retas AM , BN e CP são concorrentes. **Dicas:**
- 253.** Seja ABC um triângulo. Seja k seu circuncírculo. Seja X um ponto arbitrário, que não pertence a nenhum lado do triângulo. Denote $XA \cap k = \{X, A_1\}$, $XB \cap k = \{X, B_1\}$ e $XC \cap k = \{X, C_1\}$. Os pontos D , E e F são as reflexões de X com respeito a BC , CA e AB , respectivamente. Prove que os circuncírculos de $\triangle XA_1D$, $\triangle XB_1E$ e $\triangle XC_1F$ se intersectam em k . **Dicas:**
- 254.** Seja ABC um triângulo. Seja CH uma altura ($H \in AB$). Seja CL ($L \in AB$) a bissetriz interna de $\angle ACH$. Digamos que a reta paralela a CL que passa por B , intersecta CH no ponto N . Seja M o ponto médio de AC . Prove que os pontos M , L e N são colineares. **Dicas:**
- 255.** Seja ABC um triângulo. Digamos que $\angle ACB = 90^\circ$, e seja CD ($D \in AB$) uma altura. Os incentros de $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ são E e F , respectivamente. Prove que o quadrilátero $ABFE$ é cíclico. **Dicas:**
- 256.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 90^\circ$, e seja CH ($H \in AB$) uma altura. Os incentros de $\triangle AHC$ e $\triangle BHC$ são I_1 e I_2 , respectivamente. Os pontos X e Y ficam sobre os lados AC e BC , respectivamente, tais que $I_1X \perp AC$ e $I_2Y \perp BC$. Prove que as retas XI_1 e YI_2 se intersectam sobre a reta AB . **Dicas:**
- 257.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 90^\circ$ e AA_1 ($A_1 \in BC$) e BB_1 ($B_1 \in AC$) bissetrizes internas, que se intersectam no ponto I . Prove que a reta definida por I e pelo ponto médio do segmento A_1B_1 , é perpendicular a AB . **Dicas:**
- 258.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 90^\circ$ e ω seu incírculo, que toca AB , BC e CA nos pontos N , M e P , respectivamente. Um ponto K é escolhido sobre a reta AC , tal que $CK = BM$ e C fica entre K e A . Prove que os pontos M , N e K são colineares. **Dicas:**
- 259.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle BAC = 90^\circ$. Sejam M e N os pontos médios de AC e BC , respectivamente. O ponto $D \in BC$ é arbitrário. Seja k o circuncírculo de $\triangle ABD$. As retas tangentes a k pelos pontos A e D se intersectam no ponto F . Prove que os pontos N , M e F são colineares. **Dicas:**

- 260.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 90^\circ$ e ω seu incírculo, que toca AB , BC e CA nos pontos M , N e P , respectivamente. Seja K a reflexão de P com respeito ao ponto médio do lado AC . Prove que $KN \perp PM$. **Dicas:**
- 261.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 90^\circ$. Seja CD uma altura. Sejam I_1 e I_2 os incentros de $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$, respectivamente. Sejam P e Q os pontos de tangência dos lados AC e BC com o incírculo de $\triangle ABC$, respectivamente. Prove que o quadrilátero $I_1 I_2 QP$ é um paralelogramo. **Dicas:**
- 262.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 60^\circ$. As bissetrizes internas AA_1 ($A_1 \in BC$) e BB_1 ($B_1 \in AC$) se intersectam no ponto I . Prove que $A_1 I = B_1 I$. **Dicas:**
- 263.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 60^\circ$. As bissetrizes internas AA_1 ($A_1 \in BC$) e BB_1 ($B_1 \in AC$) se intersectam no ponto I . Prove que a reflexão de C com respeito à reta $A_1 B_1$ fica sobre a reta AB . **Dicas:**
- 264.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 60^\circ$. As bissetrizes internas AA_1 ($A_1 \in BC$) e BB_1 ($B_1 \in AC$) se intersectam no ponto I . Prove que o segundo ponto de interseção dos circuncírculos de $\triangle AA_1 C$ e $\triangle BB_1 C$ fica sobre a reta AB . **Dicas:**
- 265.** Seja ABC um triângulo. Seja O seu circuncentro e $\angle ACB = 60^\circ$. Sejam AA_1 ($A_1 \in BC$) e BB_1 ($B_1 \in AC$) alturas do triângulo, que se intersectam no ponto H . A reta OH intersecta as retas AC e BC nos pontos P e Q . Prove que $\triangle PQC$ é equilátero. **Dicas:**
- 266.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 120^\circ$. As retas AA_1 ($A_1 \in BC$), BB_1 ($B_1 \in AC$) e CC_1 ($C_1 \in AB$) são bissetrizes internas. Prove que $\angle A_1 C_1 B_1 = 90^\circ$. **Dicas:**
- 267.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 120^\circ$. As retas AA_1 ($A_1 \in BC$), BB_1 ($B_1 \in AC$) e CC_1 ($C_1 \in AB$) são bissetrizes internas. Prove que $\angle AA_1 C_1 = \angle BB_1 C_1 = 30^\circ$. **Dicas:**
- 268.** Seja k uma circunferência de centro C . Os pontos A e B em k são tais que $\angle ACB = 60^\circ$. Para um ponto arbitrário D no arco AB , os pontos M , N , P e Q são os pontos médios dos segmentos AD , DB , BC e CA . Prove que $MP \perp QN$. **Dicas:**
- 269.** Seja ABC um triângulo. Seja $\angle ACB = 30^\circ$. Sejam AA_1 ($A_1 \in BC$) e BB_1 ($B_1 \in AC$) alturas do triângulo, e sejam M e N os pontos médios de AC e BC , respectivamente. Prove que $A_1 M \perp B_1 N$. **Dicas:**
- 270.** Seja ABC um triângulo. Seja O seu circuncentro e $\angle ACB = 45^\circ$. Sejam AA_1 ($A_1 \in BC$) e BB_1 ($B_1 \in AC$) alturas do triângulo, e seja H seu ortocentro. Prove que o ponto médio de OH fica sobre a reta $A_1 B_1$. **Dicas:**
- 271.** Seja ABC um triângulo. Seja CC_1 uma altura ($C_1 \in AB$). Um ponto arbitrário P é escolhido sobre o lado BC . As retas AP e CC_1 se intersectam no ponto E , e a reta BE intersecta AC no ponto Q . Prove que $C_1 C$ é bissetriz interna de $\angle PC_1 Q$. **Dicas:**
- 272.** Seja $ABCD$ um quadrilátero. As semirretas AB e DC se intersectam no ponto E , e as semirretas DA e CB se intersectam no ponto F . Seja $AC \cap BD = P$ e seja H o pé da perpendicular de P até EF . Prove que $\angle AHB = \angle DHC$. **Dicas:**
- 273.** Os triângulos ABC e BDP têm ângulos internos iguais no vértice B e têm a mesma orientação. Sejam $DP \cap AC = Q$ e $AP \cap DC = M$. Prove que $\angle PBM = \angle CBQ$. **Dicas:**
- 274.** Sejam D e E pontos arbitrários sobre os lados BC e AC do triângulo ABC , respectivamente. As retas AD e BE se intersectam no ponto S . Seja $F \in AB$ um ponto arbitrário, e seja l uma reta que passa por C , paralela a AB . As retas FE e FD intersectam l nos pontos P e Q , respectivamente. Prove que se $CP = CQ$, então os pontos C , S e F são colineares. **Dicas:**
- 275.** As retas AE ($E \in BC$), BF ($F \in AC$) e CD ($D \in AB$) são as bissetrizes internas do triângulo ABC . Sejam $M = AE \cap DF$ e $N = BF \cap DE$. Prove que $\angle ACM = \angle BCN$. **Dicas:**
- 276.** O ponto D é o ponto médio do lado AB do triângulo ABC . Os triângulos APC e BQC são construídos externamente ao triângulo, tais que $\angle APC = \angle BQC = 90^\circ$ e $\angle PAC = \angle QBC$. Prove que $PD = QD$. **Dicas:**
- 277.** Seja ABC um triângulo. Os pontos M e N são externos a $\triangle ABC$ e são tais que as retas CN e CM são conjugadas isogonais com respeito $\angle ACB$, e $\angle NAC = \angle MBC = 90^\circ$. Seja CH ($H \in AB$) uma altura de $\triangle ABC$. Prove que as retas AM , BN e CH são concorrentes. **Dicas:**
- 278.** Seja ABC um triângulo. Os pontos D e E são os pontos médios dos lados BC e CA , respectivamente. As retas que passam por um ponto arbitrário $X \in AB$, que são paralelas a AD e BE , intersectam BC e CA nos pontos N e M , respectivamente. O segmento MN intersecta AD e BE nos pontos L e K , respectivamente. Prove que $ML = LK = KN$. **Dicas:**
- 279.** Sejam ABC e DEF triângulos semelhantes. Denote os pontos médios dos segmentos AD , BE e CF por M , N e P , respectivamente. Prove que $\triangle MNP \sim \triangle ABC$. **Dicas:**
- 280.** Sejam $\angle AXD$ e $\angle BXC$ ângulos retos e sejam $AC \cap BD = E$ e $AB \cap DC = F$. Prove que $\angle FXE = 90^\circ$. **Dicas:**

- 281.** (Teorema de Morley) Seja ABC um triângulo. P , K e L são pontos em seu interior de forma que $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$, $\angle CBP = \angle PBK = \angle KBA$ e $\angle BAL = \angle LAP = \angle PAC$. Temos que $AP \cap CK = Q$, $BP \cap CL = N$ e $BK \cap AL = M$. Prove que $\triangle QMN$ é equilátero. **Dicas:**
- 282.** Seja ABC um triângulo. P , K e L são pontos em seu interior de forma que $\angle ACK = \angle KCL = \angle LCB$, $\angle CBP = \angle PBK = \angle KBA$ e $\angle BAL = \angle LAP = \angle PAC$. Temos que $AP \cap CK = Q$, $BP \cap CL = N$ e $BK \cap AL = M$. Prove que $PQ = PN$. **Dicas:**
- 283.** Seja $ABCD$ um paralelogramo. Seja E o ponto médio de AB e seja F o pé da perpendicular de D até a reta EC . Prove que $AF = AD$. **Dicas:**
- 284.** Seja $ABCD$ um paralelogramo. Os pontos E e F são escolhidos sobre os segmentos DC e AD , respectivamente, de forma que $EC = AF$. Seja $AE \cap CF = P$. Prove que BP é a bissetriz interna de $\angle ABC$. **Dicas:**
- 285.** Seja $ABCD$ um paralelogramo. Um ponto P é escolhido em seu interior, de forma que $\angle DAP = \angle DCP$. Prove que $\angle PBA = \angle PDA$. **Dicas:**
- 286.** Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AC \cap BD = E$. Seja P um ponto sobre CD , de forma que $\angle EPC = \angle BCD$. Prove que $AP = BP$. **Dicas:**
- 287.** Seja $ABCD$ um paralelogramo. As circunferências $k_1(A; AB)$ e $k_2(C; CB)$ são construídas. Seja $P \in k_1$ um ponto no interior de $ABCD$, e seja $BP \cap k_2 = \{B, Q\}$. Prove que $DP = DQ$. **Dicas:**
- 288.** Seja $ABCD$ um paralelogramo. A bissetriz interna de $\angle BAD$ intersecta a reta BC e o segmento DC nos pontos E e F , respectivamente. Seja O o circuncentro de $\triangle EFC$. Prove que o quadrilátero $BDOC$ é cíclico. **Dicas:**
- 289.** Seja $ABCD$ um paralelogramo com $AC \cap BD = M$. Sejam P , F e E os pés das perpendiculares de B até as retas AD , AC e CD , respectivamente. Prove que o quadrilátero $PMFE$ é cíclico. **Dicas:**
- 290.** Seja $ABCD$ um losango. O ponto P fica em BD . A reta AP intersecta o segmento DC no ponto Q . O circuncírculo de $\triangle ADQ$ intersecta BD uma segunda vez no ponto K . Prove que o quadrilátero $CQPK$ é cíclico. **Dicas:**
- 291.** Seja $ABCD$ um paralelogramo. O ponto P fica sobre o segmento CD . Sejam O_1 , O_2 e O_3 os circuncentros de $\triangle ADP$, $\triangle BPC$ e $\triangle ABP$, respectivamente. Prove que o ortocentro de $\triangle O_1O_2O_3$ fica sobre AB . **Dicas:**
- 292.** Sejam OA , OB e OC segmentos de reta. Os pontos D , E e F são tais que os quadriláteros $AOBD$, $BOCE$ e $AOCF$ são paralelogramos. Prove que os circuncírculos de $\triangle ABD$, $\triangle BEC$ e $\triangle ACF$ têm um ponto em comum. **Dicas:**
- 293.** Os segmentos OA , OB e OC são dados. Os pontos D , E e F são escolhidos de forma que os quadriláteros $AOBD$, $BOCE$ e $AOCF$ são paralelogramos. Sejam H_1 o pé da perpendicular de A até DF , H_2 , de B até DE , e H_3 , de C até EF . Prove que as retas AH_1 , BH_2 e CH_3 são concorrentes. **Dicas:**
- 294.** (Teorema de Steiner) Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio e sejam M e N pontos médios de AB e CD , respectivamente. Denote $AC \cap BD = F$ e $AD \cap BC = E$. Prove que os pontos M , F , N e E são colineares. **Dicas:**
- 295.** Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio circunscrito. Seja $AD \cap BC = E$. O ponto P fica sobre o segmento AB e $EP \cap CD = Q$. A reta, paralela a AB e tangente ao incírculo de $\triangle APE$, intersecta EP e EB nos pontos M e N , respectivamente. Prove que o quadrilátero $MNCQ$ é circunscrito. **Dicas:**
- 296.** Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio. As diagonais AC e BD se intersectam em M . As circunferências k_1 e k_2 de diâmetros AD e BC , respectivamente, não se intersectam. Prove que M fica sobre o eixo radical de k_1 e k_2 . **Dicas:**
- 297.** Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio. As diagonais AC e BD se intersectam em M . As circunferências k_1 e k_2 de diâmetros AD e BC , respectivamente, se intersectam. Prove que M fica sobre o eixo radical de k_1 e k_2 . **Dicas:**
- 298.** Um trapézio $ABCD$ ($AB \parallel CD$) é inscrito numa circunferência de centro O e raio R . Seja M o ponto médio de AB . Seja K um dos pontos de interseção das circunferências de diâmetros AB e CD . O ponto H é o pé da perpendicular de K até CD . Prove que $KH = OM$. **Dicas:**
- 299.** Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio com $AC \cap BD = M$. O circuncírculo de $\triangle AMD$ intersecta os segmentos AB e CD uma segunda vez nos pontos F e K , respectivamente. O circuncírculo de $\triangle BMC$ intersecta os segmentos AB e CD uma segunda vez nos pontos N e P , respectivamente. Sejam M e E os pontos de interseção dessas duas circunferências. Prove que as triplas de pontos F , E , P e N , E , K são colineares. **Dicas:**
- 300.** Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio. Os pontos P e Q ficam sobre os segmentos AC e BD , respectivamente. Se $\angle BPD = \angle AQC$, prove que o quadrilátero $PQCD$ é cíclico. **Dicas:**
- 301.** Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio. Sejam M e N os pontos médios de AC e BD , respectivamente. Se $\angle NAB = \angle CAD$, prove que $\angle ADM = \angle BDC$. **Dicas:**
- 302.** Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio. Sejam $AC \cap BD = F$ e $AD \cap BC = E$. Os circuncírculos k_1 e k_2 de $\triangle AFD$ e $\triangle BCF$, respectivamente, se intersectam uma segunda vez no ponto P . Prove que $\angle AEF = \angle BEP$. **Dicas:**

- 303.** Seja $ABCD$ ($AB \parallel CD$) um trapézio. Seja $AD \cap BC = E$. Os circuncírculos k_1 e k_2 de $\triangle BCD$ e $\triangle ABD$ têm centros O_1 e O_2 , respectivamente. Prove que $\angle AEO_2 = \angle BEO_1$. **Dicas:**
- 304.** Seja $ABCD$ um quadrado e seja E um ponto no segmento BC . O quadrado $BKFE$ é construído de forma que é externo a $ABCD$. Sejam $AE \cap CK = M$ e $KE \cap AC = N$. Prove que os pontos D , N , M e F são colineares. **Dicas:**
- 305.** Seja $ABCD$ um quadrado. Seu incírculo k toca o lado AD no ponto M . O ponto P fica sobre o segmento AB e satisfaz $\angle PMA = \alpha > 45^\circ$. O ponto Q fica sobre o segmento BC , de forma que $QD \parallel PM$. Prove que a reta PQ é tangente a k . **Dicas:**
- 306.** Seja $ABCD$ um quadrado e seja P um ponto em seu interior. Prove que as perpendiculares de A até DP , de B até AP , de C até BP , e de D até CP são concorrentes. **Dicas:**
- 307.** Seja BAD um triângulo. As circunferências k_1 e k_2 são inscritas em $\angle BAD$, de forma que ambas tocam os segmentos AB e AD , mas não suas extensões. As retas tangentes por B e D a k_1 (distintas de AB e AD) se intersectam no ponto N . As retas tangentes por B e D a k_2 (distintas de AB e AD) se intersectam no ponto C . Prove que o quadrilátero $BCDN$ é circunscrito. **Dicas:**
- 308.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito. As circunferências k_1 e k_2 são inscritas em $\angle BAD$ e $\angle BCD$, respectivamente. As retas tangente por B e D a k_2 (distintas de DC e BC) se intersectam no ponto N . As retas tangentes por B e D a k_1 (distintas de AB e AD) se intersectam no ponto Q . Prove que o quadrilátero $QBND$ é circunscrito. **Dicas:**
- 309.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito. As circunferências k_1 e k_2 são inscritas em $\angle BAD$ e $\angle ABC$, respectivamente. As retas tangentes por C e D a k_2 e k_1 , distintas de CB e AD , intersectam AB nos pontos N e M , respectivamente. A reta tangente comum externa de k_1 e k_2 , distinta de AB , intersecta os segmentos DM e CN nos pontos R e S , respectivamente. Prove que o quadrilátero $RSCD$ é circunscrito. **Dicas:**
- 310.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito. As três circunferências k_1 , k_3 e k_2 são inscritas em $\angle BAD$, $\angle ABC$ e $\angle BCD$, respectivamente. As retas tangentes por D a k_1 e k_2 (distintas de AD e DC) intersectam AB e BC nos pontos N e T , respectivamente. As retas tangentes externas comuns a k_1 e k_3 , e a k_2 e k_3 (distintas de AB e BC) intersectam DN e DT nos pontos P e U , respectivamente. Essas retas tangentes se intersectam no ponto R . Prove que o quadrilátero $PRUD$ é circunscrito. **Dicas:**
- 311.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito. As circunferências k_1 , k_2 , k_3 , k_4 são inscritas em $\angle BAD$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle CDA$, respectivamente. Denote as retas tangentes externas comuns de k_1 e k_2 , de k_2 e k_4 , de k_3 e k_4 e de k_3 e k_1 , distintas dos lados de $ABCD$, por t_{12} , t_{24} , t_{34} e t_{13} , respectivamente. Seja $I = t_{12} \cap t_{13}$, $J = t_{12} \cap t_{24}$, $M = t_{13} \cap t_{34}$ e $K = t_{24} \cap t_{34}$. Prove que o quadrilátero $IJKM$ é circunscrito. **Dicas:**
- 312.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito. Prove que o incentro I e os pontos médios M e N dos segmentos AC e BD , respectivamente, são colineares. **Dicas:**
- 313.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k . As circunferências $k_1(I_1)$, $k_2(I_2)$, $k_3(I_3)$, $k_4(I_4)$ são os incírculos de $\triangle ARU$, $\triangle RBS$, $\triangle SCT$ e $\triangle UTD$, respectivamente, onde R , S , T e U são os pontos de tangência de AB , BC , CD e DA com k , respectivamente. Denote as retas tangentes externas em comum entre k_1 e k_2 , de k_2 e k_3 , de k_3 e k_4 , e de k_4 e k_1 , distintas dos lados de $ABCD$, por t_{12} , t_{23} , t_{34} e t_{14} , respectivamente. Sejam $M = t_{12} \cap t_{14}$, $N = t_{12} \cap t_{23}$, $P = t_{23} \cap t_{34}$ e $Q = t_{34} \cap t_{14}$. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um losango. **Dicas:**
- 314.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k . A circunferência k_1 é inscrita em $\angle ABC$ e intersecta o segmento AC nos pontos M e N . Prove que a circunferência que passa por M e N , e que toca CD , também toca AD . **Dicas:**
- 315.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k . Seja $AC \cap BD = X$. Sejam $k_1(M)$, $k_2(N)$, $k_3(P)$ e $k_4(Q)$ os incírculos de $\triangle ABX$, $\triangle BCX$, $\triangle CDX$ e $\triangle DAX$, respectivamente. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é cíclico. **Dicas:**
- 316.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k de centro I . Os pés das perpendiculares de B e D até a bissetriz interna de $\angle BAD$ são M e P , respectivamente, e os pés das perpendiculares de B e D até a bissetriz interna de $\angle BCD$ são N e Q , respectivamente. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é cíclico. **Dicas:**
- 317.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k de centro I . Seja $ABCD$ também inscrito numa circunferência k_1 . Os pontos T e J são os incentros de $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$, respectivamente. Prove que o quadrilátero $DJTB$ é cíclico. **Dicas:**
- 318.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k de centro I . Seja $ABCD$ também inscrito numa circunferência k_1 . Digamos que k toque AB , BC , CD e DA nos pontos M , N , P e Q , respectivamente. Prove que $MP \perp NQ$. **Dicas:**
- 319.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k de centro I . A reta AC intersecta k em Y e Z . O ponto X é o ponto médio de YZ . Prove que $\angle BXC = \angle DXC$. **Dicas:**
- 320.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k de centro I . A reta que passa por A e que é perpendicular a AD , intersecta a bissetriz interna de $\angle ADC$ no ponto T , e a reta que passa por A e que é

perpendicular a AB , intersecta a bissetriz interna de $\angle ABC$ no ponto S . Prove que $ST \perp AC$. **Dicas:**

- 321.** Seja k uma circunferência inscrita no ângulo $\angle ABC$. Digamos que k toque AB e BC nos pontos M e P , respectivamente. Uma reta que passa por B intersecta k nos pontos N e Q , de forma que N fica entre B e Q . O ponto X é o ponto médio do segmento NQ . Prove que $\angle MXN = \angle PXN$. **Dicas:**
- 322.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito com $BC \cap AD = F$ e $BA \cap CD = E$. Sejam $N \in BC$ e $M \in AB$. A reta FM intersecta as retas EN e DC nos pontos X e P , respectivamente. Seja $EX \cap AD = Q$. Se o quadrilátero $AMXQ$ é circunscritível, prove que o quadrilátero $XNCP$ é circunscritível. **Dicas:**
- 323.** Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito de incírculo k . Sejam $AD \cap BC = E$ e $AB \cap CD = F$. As circunferências k_1 , k_2 e k_3 são inscritas em $\angle ABC$, $\angle BCD$ e $\angle CDA$, respectivamente. Uma das retas tangentes internas em comum entre k_1 e k_2 passa por

F e intersecta EA e as retas tangentes de E até k_1 e k_3 nos pontos M , S e R , respectivamente. A reta tangente a k_3 e que passa por F intersecta as mesmas retas nos pontos N , P e Q , respectivamente. Uma das retas tangentes internas em comum entre k_2 e k_3 passa por E e intersecta DC e AB nos pontos K e H . A reta tangente a k_1 que passa por E intersecta DC e AB nos pontos L e G , respectivamente. Prove que o quadrilátero $AGPN$ é circunscritível. **Dicas:**

- 324.** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. As bissetrizes l_a , l_b , l_c e l_d dos ângulos externos de $ABCD$ formam o quadrilátero $EFGH$, onde $l_a \cap l_b = E$, $l_b \cap l_c = F$, $l_c \cap l_d = G$ e $l_d \cap l_a = H$. A perpendicular de E até AB intersecta a perpendicular de F até BC no ponto N . A perpendicular de G até CD intersecta a perpendicular de F até BC no ponto M . A perpendicular de E até AB intersecta a perpendicular de H até AD no ponto K . A perpendicular de H até AD intersecta a perpendicular de G até DC no ponto L . Prove que o quadrilátero $LMNK$ é circunscritível. **Dicas:**