

# Aula 2: Análise de séries temporais univariadas (ARIMA)

Marcus L. Nascimento

8 de outubro de 2025

1. Introdução
2. Séries Temporais Lineares
3. Processos Autorregressivos (AR)
4. Processos de Médias Móveis (MA)
5. Processos Autorregressivos de Médias Móveis (ARMA)
6. Material suplementar

# Introdução

- **Série temporal:** Sequência de variáveis aleatórias  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  indexadas no tempo ( $t = 1, 2, \dots, n$ ).
  - Por vezes, denotamos a sequência de variáveis aleatórias por  $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ ;
  - Frequentemente, tal sequência é considerada um subconjunto de uma sequência (possivelmente, infinita)  $\{Y_t\}$  de variáveis aleatórias.
- Propósito em análise de séries temporais:
  - **Quantificar dependências** no tempo;
  - **Utilizar as correlações** para **explicar** as observações disponíveis e **inferir** sobre valores não observados.

- Um conceito fundamental em análise de séries temporais recai sobre a ideia de **estacionariedade**.
  - Medidas estatísticas (por exemplo, média, variância e correlação) são constantes ao longo do tempo;
  - Estabilidade no processo gerador subjacente facilita a identificação de padrões e relações nos dados;
  - Modelos estatísticos e de aprendizado de máquinas pressupõem estacionariedade.
- Estacionariedade **estrita** e **fraca**.

# Estacionariedade estrita

DEFINIÇÃO: Uma série temporal  $\{Y_t\}$  é dita **estritamente estacionária** se a distribuição conjunta de  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$  é idêntica à distribuição de  $(Y_{t_1+s}, \dots, Y_{t_k+s})$  para todo  $s$ , onde  $k$  é um número inteiro positivo arbitrário e  $(t_1, \dots, t_k)$  é uma coleção de  $k$  inteiros positivos.

OBSERVAÇÕES:

- A distribuição conjunta de  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$  é invariante sob translações temporais;
- Estacionariedade estrita é uma condição bastante forte;
- Difícil verificação empírica.

## Estacionariedade fraca (segunda ordem)

DEFINIÇÃO: Uma série temporal  $\{Y_t\}$  é dita **fracamente estacionária** (ou estacionária de segunda ordem) se a média de  $Y_t$  e a covariância entre  $Y_t$  e  $Y_{t-l}$  são invariantes no tempo, onde  $l$  é um número inteiro arbitrário.

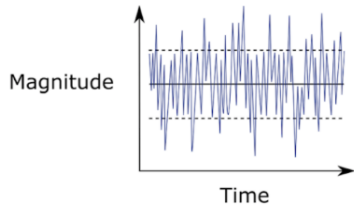
Mais especificamente,  $\{Y_t\}$  é dita fracamente estacionária se:

1.  $\mu_Y(t) = E(Y_t) = \mu, |\mu| < \infty$ ;
2.  $\sigma_Y^2(t) = E[(Y_t - \mu)^2] = \gamma_0, \gamma_0 < \infty$ ;
3.  $\gamma_Y(t, t-l) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-l}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-l} - \mu)] = \gamma_l \forall l$  com  $|\gamma_l| < \infty$ .

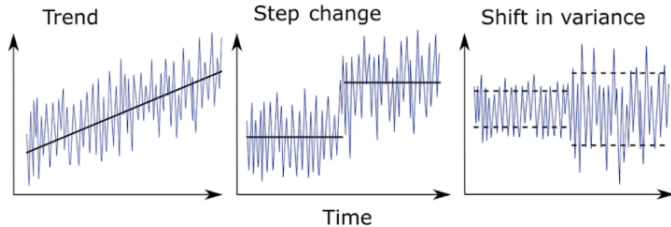
Estacionariedade de segunda ordem implica que  $\text{Cov}(Y_{t_1}, Y_{t_1-l}) = \text{Cov}(Y_{t_2}, Y_{t_2-l}) = \gamma_l$ .

# Estacionariedade Fraca

(a) Stationary



(b) Nonstationary





# Função de autocorrelação (ACF)

- Sob estacionariedade fraca, a função de autocorrelação de defasagem  $l$  (lag  $l$ ) é dada por:

$$\rho_l = \rho_Y(t, t-l) = \text{Corr}(Y_t, Y_{t-l}) = \frac{\gamma_Y(t, t-l)}{\sqrt{\sigma_Y^2(t)\sigma_Y^2(t-l)}} = \frac{\gamma_l}{\gamma_0}$$

- A autocorrelação amostral de defasagem  $l$  (lag  $l$ ), por sua vez, é definida como

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t-l} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}, \quad 0 \leq l < n-1.$$

## Função de autocorrelação (ACF) - Teste de Portmanteau

- A verificação quanto à presença ou não de autocorrelação em uma série temporal pode ser realizada através de testes de hipótese da seguinte forma:

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$$

$$H_1 : \rho_i \neq 0 \text{ para algum } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

- Proposto por Box and Pierce (1970), o teste de Portmanteau aplica a seguinte estatística de teste:

$$Q^*(m) = n \sum_{l=1}^m \hat{\rho}_l^2.$$

- Assumindo que  $\{Y_t\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com certas condições acerca dos momentos,  $Q^*(m)$  é assintoticamente  $\chi_m^2$ .

## Função de autocorrelação (ACF) - Teste de Ljung-Box

- Com intuito de aumentar o poder do teste em amostras finitas, Ljung and Box (1978) propuseram uma modificação na estatística  $Q^*(m)$  da seguinte forma:

$$Q(m) = n(n+2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{n-1}.$$

- Neste caso, a regra de decisão é rejeitar  $H_0$  se  $Q(m) > q_\alpha^2$ , onde:
  - $q_\alpha^2$  denota o  $100(1 - \alpha)$ -ésimo percentil da distribuição  $\chi_m^2$ ;
  - $\alpha$  é um nível de significância fixado.

# Função de autocorrelação parcial (PACF)

- Em geral, o conceito de correlação parcial se refere a uma correlação condicional.
- No contexto de séries temporais, a autocorrelação parcial entre  $Y_t$  e  $Y_{t-l}$  é definida como a correlação entre  $Y_t$  e  $Y_{t-l}$  condicional em  $Y_{t-l+1}, \dots, Y_{t-1}$  (conjunto de observação entre os tempos  $t$  e  $t-l$ ).

$$\phi_{l,l} = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t-l} | Y_{t-l+1}, \dots, Y_{t-1})}{\sqrt{\text{Var}(Y_t | Y_{t-l+1} = y_{t-l+1}, \dots, Y_{t-1} = y_{t-1}) \text{Var}(Y_{t-l} | Y_{t-l+1} = y_{t-l+1}, \dots, Y_{t-1} = y_{t-1})}}$$

## EXEMPLOS:

- A autocorrelação parcial de primeira ordem é definida para ser igual à autocorrelação de primeira ordem;
- Autocorrelação de segunda ordem:  $\phi_{2,2} = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t-2} | Y_{t-1})}{\sqrt{\text{Var}(Y_t | Y_{t-1} = y_{t-1}) \text{Var}(Y_{t-2} | Y_{t-1} = y_{t-1})}};$

## Séries Temporais Lineares

- Uma série temporal  $\{W_t\}$  é denominada **ruído branco** se  $\{W_t\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média 0 e variância constante  $\tau^2$  finita.
  - $\{W_t\}$  é estacionária;
  - Se  $s \neq t$ ,  $\text{Cov}(W_s, W_t) = E[(W_s - \mu)(W_t - \mu)] = 0$ ;
  - $\rho_l = 0$  para todo  $l$ .
- Se  $W_t$  tem distribuição normal com média 0 e variância  $\tau^2$ , a série temporal é denominada ruído branco Gaussiano.

# Série temporal linear

- Uma série temporal  $\{Y_t\}$  é dita linear se pode ser escrita da seguinte forma:

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i w_{t-i},$$

onde  $\mu$  é a média de  $Y_t$ ,  $\psi_0 = 1$  e  $\{W_t\}$  é ruído branco.

- $w_t$  denota a nova informação da série temporal no tempo  $t$  e é frequentemente chamado de inovação ou choque em  $t$ .
- Se  $\{Y_t\}$  é fracamente estacionária, pela independência de  $\{W_t\}$ ,  $E(Y_t) = \mu$  e  $\text{Var}(Y_t) = \tau^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$ .

# Série temporal linear

- A covariância de defasagem  $l$ ,  $\gamma_Y(t, t-l)$ , é dada por:

$$\begin{aligned}\gamma_Y(t, t-l) &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-l}) \\ &= E \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i w_{t-i} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-l-j} \right) \right] \\ &= E \left( \sum_{i,j=0}^{\infty} \psi_i \psi_j w_{t-i} w_{t-l-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+l} \psi_j E(w_{t-l-j}^2) = \tau^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{j+l} \psi_j.\end{aligned}$$

- Modelos lineares de séries temporais são modelos estatísticos e econométricos utilizados para descrever o padrão dos pesos  $\psi$  de  $Y_t$ .



## Processos Autorregressivos (AR)

# Processo Autorregressivo de Ordem 1 - AR(1)

- Seja  $\{W_t\}$  ruído branco, um processo AR(1) pode ser descrito como a seguir:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + w_t.$$

- Por recursão, podemos mostrar que um processo AR(1) pode ser descrito como um modelo linear de série temporal.

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + w_t \\ &= \phi_1 (\phi_1 y_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\ &= \phi_1 (\phi_1 (\phi_1 y_{t-3} + w_{t-2}) + w_{t-1}) + w_t \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i w_{t-i}. \end{aligned}$$

# Processo Autorregressivo de Ordem 1 - AR(1)

- Sob estacionariedade, temos que

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y_t) &= \text{Var}(\phi_1 Y_{t-1} + W_t) \\ &= \text{Var}(\phi_1 Y_{t-1}) + \text{Var}(W_t) \\ &= \phi_1^2 \text{Var}(Y_{t-1}) + \tau^2 \\ &= \frac{\tau^2}{1 - \phi_1^2},\end{aligned}$$

$\phi_1^2 < 1$ . Em outras palavras, a estacionariedade fraca de um modelo AR(1) implica que  $|\phi_1| < 1$ .

# Processo Autorregressivo de Ordem 1 - AR(1)

- Ainda sob estacionariedade, temos que

$$\begin{aligned}\gamma_l &= \gamma_Y(t, t-l) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-l}) = E(Y_t Y_{t-l}) \\ &= E((\phi_1 Y_{t-1} + W_t) Y_{t-l}) \\ &= \phi_1 E(Y_{t-1} Y_{t-l}) + E(W_t Y_{t-l}) \\ &= \phi_1 E(Y_{t-1} Y_{t-l}) \\ &= \phi_1^2 E(Y_{t-2} Y_{t-l}) \\ &\vdots \\ &= \phi_1^l E(Y_{t-l} Y_{t-l}) \\ &= \phi_1^l E(Y_t Y_t) \\ &= \phi_1^l \gamma_0,\end{aligned}$$

para  $l = -1, 1, -2, 2, \dots$

# Processo Autorregressivo de Ordem 1 - AR(1)

- Para encontrar  $\gamma_0$ , basta seguirmos de forma similar.

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= E(Y_t Y_t) \\ &= E((\phi_1 Y_{t-1} + W_t) Y_t) \\ &= \phi_1 E(Y_{t-1} Y_t) + E(W_t Y_t) \\ &= \phi_1 \gamma_1 + \tau^2.\end{aligned}$$

- Como  $\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0$  e  $\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \tau^2$ , segue que  $\gamma_0 = \frac{\tau^2}{1-\phi_1^2}$ .
- A função de autocorrelação de um modelo AR(1), portanto, é dada por  $\rho_l = \frac{\gamma_l}{\gamma_0} = \phi_1^l$ , para  $l = -1, 1, -2, 2, \dots$

## Processo Autorregressivo de Ordem 2 - AR(2)

- Seja  $\{W_t\}$  ruído branco, um processo AR(2) assume a seguinte forma:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t.$$

- Para encontrar a função de covariância do modelo AR(2), aplicamos ideias similares às aplicadas no modelo AR(1).

$$\begin{aligned}\gamma_l &= E(Y_t Y_{t-l}) \\ &= E((\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + W_t) Y_{t-l}) \\ &= \phi_1 E(Y_{t-1} Y_{t-l}) + \phi_2 E(Y_{t-2} Y_{t-l}) \\ &= \phi_1 \gamma_{l-1} + \phi_2 \gamma_{l-2} + E(W_t Y_{t-l}).\end{aligned}$$

## Processo Autorregressivo de Ordem 2 - AR(2)

$$\begin{aligned}(l = 0) : \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_{-1} + \phi_2 \gamma_{-2} + E(W_t Y_{t-l}) \\ \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \tau^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(l = 1) : \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + E(W_t Y_{t-l}) \\ &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \\ &= \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \gamma_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(l = 2) : \gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 + E(W_t Y_{t-l}) \\ &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 \\ &= \left[ \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2 \right] \gamma_0\end{aligned}$$

## Processo Autorregressivo de Ordem 2 - AR(2)

Substituindo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $\gamma_0$ , temos:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} \gamma_0 + \left[ \frac{\phi_2 \phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2^2 \right] \gamma_0 + \tau^2 \\ &= \frac{(1 - \phi_2) \tau^2}{(1 - \phi_2) - \phi_1^2(1 + \phi_2) + \phi_2^2(1 - \phi_2)}.\end{aligned}$$

A função de autocorrelação, por sua vez, é dada por:

$$\begin{aligned}\rho_l &= \frac{\gamma_l}{\gamma_0} \\ &= \phi_1 \frac{\gamma_{l-1}}{\gamma_0} + \phi_2 \frac{\gamma_{l-2}}{\gamma_0} \\ &= \phi_1 \rho_{l-1} + \phi_2 \rho_{l-2}.\end{aligned}$$



## Processo Autorregressivo de Ordem 2 - AR(2)

- Note que, a partir dos resultados encontrados para as covariâncias, conhecendo os valores para as funções  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , é possível um sistema com três equações e três parâmetros desconhecidos ( $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\tau^2$ )
- Equações de Yule-Walker.
- Substituindo os valores teóricos de  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  por suas estimativas  $\hat{\gamma}_0$ ,  $\hat{\gamma}_1$ ,  $\hat{\gamma}_2$ , obtemos estimativas  $\hat{\phi}_1$ ,  $\hat{\phi}_2$  e  $\hat{\tau}^2$ .
- Tal método é de simples implementação e é utilizado no ajuste de modelos autorregressivos (uma vez que a ordem tenha sido fixada).
- Também aplicado em modelos autorregressivos mais gerais (ordem  $p$ ). Neste caso, temos um sistema linear com  $(p + 1)$  equações e  $(p + 1)$  parâmetros.

## Processo Autorregressivo de Ordem $p$ - AR( $p$ )

- Os resultados para os modelos AR(1) e AR(2) podem ser generalizados para um modelo AR( $p$ ):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + w_t,$$

onde  $p$  é um inteiro não negativo e  $\{W_t\}$  é um ruído branco.

- De forma mais geral,  $\{Y_t\}$  é AR( $p$ ) se existe  $\phi_0$  tal que  $\{(Y_t - \phi_0)\}$  é AR( $p$ ).
- Neste caso, o valor esperado de  $Y_t$  é dado por:

$$E(Y_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}.$$

## Processo Autorregressivo de Ordem $p$ - AR( $p$ )

- Vimos que é possível estimar os parâmetros do modelo a partir de um sistema de equações uma vez fixada a ordem do processo autorregressivo.
- Uma pergunta relevante neste caso seria como definimos a ordem do processo autorregressivo neste caso.
- Considerando um modelo AR( $p$ ) estacionário Gaussiano temos os seguintes resultados para a função de autocorrelação parcial (PACF) amostral:
  - $\hat{\phi}_{p,p} \rightarrow \phi_p, n \rightarrow \infty;$
  - $\hat{\phi}_{l,l} \rightarrow 0$  para todo  $l > p;$
  - $\text{Var}(\hat{\phi}_{l,l}) \rightarrow 1/n$  para todo  $l > p.$
- Tais resultados indicam que o PACF de um modelo AP( $p$ ) zera na defasagem  $p$ .

## Processo Autorregressivo de Ordem $p$ - AR( $p$ )

- Em análise de séries temporais, muito do nosso interesse está em fazer previsões a partir dos dados observados.
- Suponha que estejamos no tempo  $h$  (**origem**) e tenhamos interesse em prever  $Y_{h+l}$  onde  $l \geq 1$  (**horizonte**).
  - $F_h$  é a informação disponível em  $h$ ;
  - $\hat{y}_h(l)$  é a previsão  $l$ -passos à frente de  $Y_t$  com origem  $h$ .

# Processo Autorregressivo de Ordem $p$ - AR( $p$ )

- Previsão 1-passo a frente:

$$\hat{y}_h(1) = E(Y_{h+1}|F_n) = \phi_0 + \phi_1 y_h + \phi_2 y_{h-1} + \dots + \phi_p y_{h+1-p}.$$

- Previsão 2-passos a frente:

$$\begin{aligned}\hat{y}_h(2) &= E(Y_{h+2}|F_n) \\ &= \phi_0 + \phi_1 \hat{y}_h(1) + \phi_2 y_h + \dots + \phi_p y_{h+2-p} \\ &= \phi_0 + \phi_1 (\phi_0 + \phi_1 y_h + \dots + \phi_p y_{h+1-p}) + \phi_2 y_h + \dots + \phi_p y_{h+2-p}.\end{aligned}$$

- Podemos aplicar o mesmo procedimento para computar  $\hat{y}_h(k)$  para qualquer  $k$ .
- As previsões são combinações lineares dos  $p$  valores observados mais recentes da série com coeficientes computados indutivamente a partir dos coeficientes do modelo.
- Previsões convergem rapidamente para a média da série ( $\phi_0$ ).

## Processos de Médias Móveis (MA)

## Processo de Média Móvel de Ordem 1 - MA(1)

- Seja  $\{W_t\}$  ruído branco, um processo MA(1) pode ser descrito como a seguir:

$$y_t = c_0 + \theta_1 w_{t-1} + w_t.$$

- Por conveniência, assumimos  $c_0 = 0$  para computar as autocovariâncias.

$$\begin{aligned}\gamma_l &= E(Y_t Y_{t-l}) \\ &= E((\theta_1 W_{t-1} + W_t)(\theta_1 W_{t-l-1} + W_{t-l})) \\ &= E(\theta_1^2 W_{t-1} W_{t-l-1}) + E(\theta_1 W_{t-1} W_{t-l}) + E(\theta_1 W_t W_{t-l-1}) + E(W_t W_{t-l}).\end{aligned}$$

- Para  $l = 0$ , temos:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= E(\theta_1^2 W_{t-1} W_{t-1}) + E(\theta_1 W_{t-1} W_t) + E(\theta_1 W_t W_{t-1}) + E(W_t W_t) \\ &= \theta_1^2 \tau^2 + \tau^2 \\ &= (1 + \theta_1^2) \tau^2.\end{aligned}$$

# Processo Média Móvel de Ordem 1 - MA(1)

- Para  $l = 1$ , temos:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= E(\theta_1^2 W_{t-1} W_{t-2}) + E(\theta_1 W_{t-1} W_{t-1}) + E(\theta_1 W_t W_{t-2}) + E(W_t W_{t-1}) \\ &= \theta_1 \tau^2.\end{aligned}$$

- Para  $l > 1$ , temos  $\gamma_l = 0$ .
- Note que a função de autocovariância será zero para toda defasagem maior que 1 em um modelo MA(1).
- $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_1 = \theta_1 / (1 + \theta_1^2)$ ,  $\rho_l = 0$  para  $l > 1$ .



## Processo Média Móvel de Ordem 2 - MA(2)

- Seja  $\{W_t\}$  ruído branco, um processo MA(2) é dado pela seguinte equação:

$$y_t = c_0 + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + w_t.$$

- Assumindo  $c_0 = 0$ , teremos as autocovariâncias como a seguir:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\tau^2$$

$$\gamma_1 = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\tau^2$$

$$\gamma_2 = \theta_2\tau^2$$

$$\gamma_l = 0. \text{ para } l > 2.$$

- Consequentemente, temos:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = (\theta_1 + \theta_1\theta_2)/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\rho_2 = \theta_2/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$\rho_l = 0. \text{ para } l > 2.$$

## Processo Média Móvel de Ordem $q$ - $MA(q)$

- Seja  $\{W_t\}$  ruído branco, generalizando os modelos  $MA(1)$  e  $MA(2)$ , descrevemos um modelo  $MA(q)$ :

$$y_t = c_0 + \theta_1 w_{t-1} + \dots + \theta_q w_{t-q} + w_t.$$

- Processos de médias móveis sempre fracamente estacionários.
  - $E(Y_t) = c_0$ ;
  - $\text{Var}(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)\tau^2$ .
- Assumindo  $c_0 = 0$ , a função de autocovariância  $\gamma_l$  e, conseqüentemente, a função de autocorrelação  $\rho_l$  serão iguais a 0 para  $l > q$ .
- Tal resultado dá uma indicação acerca da escolha da ordem de um processo de médias móveis.

## Processo Média Móvel de Ordem $q$ - $MA(q)$

- Assim como verificamos que um processo  $AR(1)$  é um processo  $MA(\infty)$ , também por recursão, podemos verificar que um processo  $MA(1)$  é um processo  $AR(\infty)$ .

$$\begin{aligned}y_t &= \theta_1 w_{t-1} + w_t \\&= \theta_1(x_{t-1} - \theta_1 w_{t-2}) + w_t \\&= \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2 w_{t-2} + w_t \\&= \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2(x_{t-2} - \theta_1 w_{t-3}) + w_t \\&= \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2 x_{t-2} - \theta_1^3 w_{t-3} + w_t \\&\vdots \\&= \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2 x_{t-2} - \theta_1^3 w_{t-3} - \dots + w_t\end{aligned}$$

- Ressalta-se que o resultado vale para  $|\theta_1| < 1$

## Processos Autorregressivos de Médias Móveis (ARMA)

# Processos Autorregressivos de Médias Móveis

- Seja  $\{W_t\}$  ruído branco, um processo autorregressivo de médias móveis de ordem  $p$  e  $q$ ,  $\text{ARMA}(p,q)$ , é descrito da seguinte forma:

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j w_{t-j} + w_t.$$

- Uma série temporal é dita um processo ARIMA se, quando tomada a diferença um número finito de vezes, a mesma se torna um processo ARMA.
- $Y \sim \text{ARIMA}(p, d, q)$  se  $Y \sim \text{ARMA}(p, q)$  após  $d$  diferenças serem tomadas.
  - $Y \sim \text{ARIMA}(p, d, q) \iff \nabla^d Y \sim \text{ARMA}(p, q).$

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- Vimos anteriormente que podemos utilizar o ACF e o PACF no ajuste de modelos  $MA(q)$  e  $AR(p)$ .
- No caso dos modelos  $ARIMA(p,d,q)$ , podemos proceder da seguinte forma:
  1. Caso necessário, transforme a série temporal em estacionária via diferenças;
  2. Verifique se a mesma é um ruído branco. Caso positivo, não há a necessidade de ajustar um modelo;
  3. Ajuste um modelo  $AR(p)$  aos dados e calcule os resíduos;
  4. Ajuste um modelo  $MA(q)$  aos resíduos ou aos dados caso o modelo  $AR(p)$  não seja considerado adequado;
  5. Utilizando as ordens  $p$  e  $q$  determinadas nos passos anteriores, ajuste um modelo  $ARMA(p,q)$  aplicando máxima verossimilhança;
  6. Analise os resíduos e teste para ruído branco.

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- Uma alternativa à identificação da ordem de um processo autorregressivo via PACF ou de um processo de médias móveis via ACF ou mesmo de um processo ARIMA seguindo os passos descritos anteriormente se dá através de critérios de seleção de modelos.
- Dentre os critérios de seleção de modelos, destacamos o AIC (Akaike Information Criterion) e o BIC (Bayesian information criterion).
- O AIC (Akaike Information Criterion) é dado pela seguinte equação;

$$\text{AIC} = \underbrace{-2 \times \log(\text{verossimilhança})}_{\text{bondade do ajuste}} + \underbrace{2 \times (\text{número de parâmetros})}_{\text{penalização}},$$

onde a verossimilhança é avaliada considerando o modelo estimado.

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- Considerando um modelo  $AR(p)$  estimado utilizando Yule-Walker, ao invés de avaliar a função de verossimilhança, podemos aplicar:

$$AIC = n \times (\log(\tilde{\tau}^2) + 1) + 2(p + 1),$$

onde  $n$  é o tamanho da amostra e  $\tilde{\tau}^2$  é o valor estimado para a variância do ruído branco ( $\tau^2$ ).

- Para identificação da ordem de um processo AR via critérios de seleção de modelos, pode, por exemplo, realizar os seguintes passos:
  1. Ajuste de modelos AR com diferentes ordens;
  2. Calcule o critério para cada um dos modelos;
  3. Selecione o modelo com melhor métrica.



# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- Há ainda uma versão “corrigida” do *Akaike Information Criterion*,  $AIC_c$ .
- Considerando um modelo ARIMA, o  $AIC_c$  é dado pela seguinte equação:

$$AIC_c = AIC + 2 \times \frac{(p + q + k + 1)(p + q + k + 2)}{n - p - q - k - 2},$$

onde  $k = 1$  se  $\mu \neq 0$  e  $k = 0$  se  $\mu = 0$ .

- O BIC (Bayesian information criterion), por sua vez, é dado pela seguinte equação;

$$BIC = \underbrace{-2 \times \log(\text{verossimilhança})}_{\text{bondade do ajuste}} + \underbrace{(\text{número de parâmetros}) \times \log(\text{tamanho da amostra})}_{\text{penalização}},$$

onde a verossimilhança é avaliada considerando o modelo estimado.

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- As penalizações para o AIC e o BIC são 2 e  $\log(n)$  respectivamente.
  - BIC tende a selecionar modelos AR de ordens menores quando o tamanho da amostra é moderado ou grande.
- A ordem dos processos é identificada através dos modelos que produzem os menores valores para o AIC ou para o BIC.
- Vale destacar que critérios de seleção de modelos tendem a ser úteis na seleção dos valores de  $p$  e  $q$  e tendem a não ser tão eficazes na seleção de  $d$ .
  - Tomar diferenças altera o dado no qual a verossimilhança é computada;
  - Critérios de seleção de modelos não são comparáveis para diferentes valores de  $d$ .

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- Em R, modelos ARIMA são comumente ajustados através da função `auto.arima()`.
  - Aplica uma variação do algoritmo descrito em Hyndman and Khandakar (2008);
  - Combina testes de raiz unitária (Aula 05),  $AIC_c$  e estimação por máxima verossimilhança.
- Os argumentos da função `auto.arima()` possibilitam a especificação de diferentes variações do algoritmo.
- A seguir descrevemos a versão padrão do algoritmo.

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

1. O número de diferenças  $0 \leq d \leq 2$  é determinado aplicando repetidos testes KPSS.
2. Os valores de  $p$  e  $q$  são escolhidos pela minimização do  $AIC_c$ . O algoritmo aplica uma busca *stepwise* ao invés de considerar todas as combinações possíveis de  $p$  e  $q$ .
  - a. Quatro modelos iniciais são ajustados:  $ARIMA(0,d,0)$ ,  $ARIMA(2,d,2)$ ,  $ARIMA(1,d,0)$ ,  $ARIMA(0,d,1)$ .  
 $\mu$  é incluído a menos que  $d = 2$ ; se  $d \leq 1$ , um modelo adicional também é ajustado:  $ARIMA(0,d,0)$  com  $\mu = 0$ .
  - b. O melhor modelo ajustado em (a) de acordo com o  $AIC_c$  é fixado como o “modelo atual”.
  - c. Variações do modelo atual são consideradas:
    - Varie  $p$  e  $q$  do modelo atual adicionando e subtraindo 1 unidade;
    - Inclua/exclua  $\mu$  do modelo atual.
  - d. Repita o passo 2(c) até que não seja encontrado um  $AIC_c$  menor.

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- À medida que vamos combinando diferentes componentes (por exemplo, nos modelos ARIMA) com intuito de formar modelos mais complexos, a notação estabelecida anteriormente pode se tornar um complicador.
- Uma alternativa à notação utilizada até o momento se dá através da aplicação do **operador de defasagem**.
- O **operador de defasagem**  $B$  é bastante útil quando trabalhamos com defasagens:

$$By_t = y_{t-1}.$$

- Além da notação  $B$  (*backshift*) que aplicaremos ao longo do curso, o operador de defasagem também é comumente denotado por  $L$  (*lag*).

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- O operador de defasagem consiste em “retroceder” os dados em um período de tempo.
  - Duas aplicações de  $B$ , por exemplo, “retrocede” o dado em dois períodos:  $B(By_t) = B^2y_t = y_{t-2}$ .
  - Dados mensais em que desejamos considerar um mês específico no ano anterior à observação fixada:  $B^{12}y_t = y_{t-12}$ .
- O operador também é conveniente na descrição de processos de diferenças.
  - Diferença de primeira ordem:

$$y'_t = y_t - y_{t-1} = y_t - By_t = (1 - B)y_t.$$

- Diferença de segunda ordem:

$$y''_t = y'_t - y'_{t-1} = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = (1 - B)^2y_t.$$

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- De forma geral, diferenças de ordem  $d$  podem, portanto, ser escritas como  $(1 - B)^d y_t$ .
- O operador de defasagem pode ser aplicado na combinação de diferenças. Em particular, termos envolvendo  $B$  podem ser multiplicados. Por exemplo, uma diferença sazonal seguida por uma primeira diferença:

$$(1 - B)(1 - B^m)y_t = (1 - B - B^m + B^{m+1})y_t = y_t - y_{t-1} - y_{t-m} + y_{t-m+1}.$$

- Utilizando o operador de defasagem, o modelo  $ARIMA(p, d, q)$  é escrito da seguinte forma:

$$\underbrace{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)}_{AR(p)} \underbrace{(1 - B)^d}_{d \text{ diferenças}} y_t = \mu + \underbrace{(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q)}_{MA(q)} w_t.$$

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- Através desta notação, podemos escrever um guia (passo a passo) sobre como previsões em modelos  $ARIMA(p,d,q)$  podem ser construídas:
  1. Expanda o modelo  $ARIMA$  de tal forma que  $y_t$  esteja na parcela esquerda da equação, enquanto os demais termos estejam na parcela direita da equação;
  2. Reescreva a equação substituindo  $h$  (origem) por  $h + l$ ;
  3. No lado direito da equação, substitua as futuras observações por suas previsões, os erros futuros por zero e os erros passados por seus respectivos resíduos.
- Começando por  $l = 1$ , os passos acima podem ser repetidos para  $l = 2, 3, \dots$  até que todas as previsões sejam calculadas.



# Processos Autorregressivos de Médias móveis

EXEMPLO: ARIMA(3,1,1).

- Primeiro passo:

$$\begin{aligned}(1 - \hat{\phi}_1 B - \hat{\phi}_2 B^2 - \hat{\phi}_3 B^3)(1 - B)y_t &= (1 + \hat{\theta}_1)w_t \Rightarrow \\ \left[1 - (1 + \hat{\phi}_1)B + (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2)B^2 + (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3)B^3 + \hat{\phi}_3 B^4\right] y_t &= (1 + \hat{\theta}_1)w_t \Rightarrow \\ y_t - (1 + \hat{\phi}_1)y_{t-1} + (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2)y_{t-2} + (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3)y_{t-3} + \hat{\phi}_3 y_{t-4} &= w_t + \hat{\theta}_1 w_{t-1} \Rightarrow \\ y_t = (1 + \hat{\phi}_1)y_{t-1} - (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2)y_{t-2} - (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3)y_{t-3} - \hat{\phi}_3 y_{t-4} &+ w_t + \hat{\theta}_1 w_{t-1}.\end{aligned}$$

- Segundo passo:

$$y_h(1) = (1 + \hat{\phi}_1)y_h - (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2)y_{h-1} - (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3)y_{h-2} - \hat{\phi}_3 y_{h-3} + w_h(1) + \hat{\theta}_1 w_h.$$

# Processos Autorregressivos de Médias móveis

- Terceiro passo ( $h = n$ ):

$$\hat{y}_n(1) = (1 + \hat{\phi}_1)y_n - (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2)y_{n-1} - (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3)y_{n-2} - \hat{\phi}_3y_{n-3} + \hat{\theta}_1\tilde{w}_n.$$

- Podemos escrever a previsão dois passos a frente:

$$\hat{y}_n(2) = (1 + \hat{\phi}_1)\hat{y}_n(1) - (\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2)y_n - (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_3)y_{n-1} - \hat{\phi}_3y_{n-2}.$$

- O processo é repetido de tal forma que as previsões de todos os períodos futuros sejam obtidas.

Material suplementar

# Modelos ARIMA sazonais (SARIMA)

- Sazonalidade é um comportamento comumente apresentado ao analisarmos séries temporais, ou seja, os dados frequentemente apresentam ciclos ou comportamentos periódicos.
- Em algumas aplicações, a sazonalidade possui importância secundária, sendo removida dos dados.
  - O procedimento de remoção da sazonalidade de uma série temporal é denominado **ajuste sazonal**;
  - O procedimento de inferência é realizado com base na série temporal ajustada sazonalmente.
- Muitos dados econômicos publicados pelo IBGE e pelo Banco Central são ajustados sazonalmente (por exemplo, IPCA e IBC-Br).

# Modelos ARIMA sazonais (SARIMA)

- Em muitas aplicações, no entanto, a sazonalidade é uma característica tão relevante quanto as demais e deve ser modelada.
- Nos casos em que desejamos modelar a sazonalidade, uma abordagem possível se dá através de modelos ARIMA sazonais (SARIMA).
- Um modelo ARIMA sazonal consiste em incluir termos sazonais adicionais ao modelo ARIMA:

$$\text{ARIMA } \underbrace{(p, d, q)}_{\substack{\text{componente} \\ \text{não sazonal}}} \underbrace{(P, D, Q)_m}_{\substack{\text{componente} \\ \text{sazonal}},}$$

onde  $m$  é o número de observações por ano.

# Modelos ARIMA sazonais (SARIMA)

- A componente sazonal do modelo consiste de termos similares à componente não sazonal, porém envolve defasagens do período sazonal.
- Como exemplo, podemos considerar um modelo  $\text{ARIMA}(1,1,1)(1,1,1)_4$  (com  $\mu = 0$ ) para uma série temporal trimestral:

$$(1 - \phi_1 B)(1 - \Phi_1 B^4)(1 - B)(1 - B^4)y_t = (1 + \theta_1 B)(1 + \Theta_1 B^4)w_t.$$

OBSERVAÇÃO: Note que os termos referentes à componente sazonal são simplesmente multiplicados pelos termos da componente não sazonal.

# Modelos ARIMA para $d$ fracionário (ARFIMA)

- Ao lidarmos com modelos ARIMA, precisamos fixar um número inteiro  $d$  referente ao número de diferenças que devem ser tomadas a fim de que a série temporal  $\{(1 - B)^d Y_t\}$  seja um processo estacionário.
  - O procedimento padrão para determinar se uma série temporal é estacionária ou não se dá através da aplicação de **testes de raiz unitária (Aula 05)**;
  - **Testes de raiz unitária (Aula 05)** tendem a apresentar problemas para distinguir entre séries de fato não estacionárias e séries estacionárias com quebra estrutural ou mudança de regime;
  - Em casos nos quais tais testes não conseguem diferenciar claramente, costuma-se aplicar uma diferença de primeira ordem.
- Modelos ARFIMA são desenhados para representar séries temporais que exibem uma **dependência de longo prazo** tal que não sejam classificadas como estacionárias, mas não podem ser ditas não estacionárias.

# Modelos ARIMA para $d$ fracionário (ARFIMA)

- Modelos ARFIMA permitem que a série temporal seja integrada de forma fracionária.
  - Generaliza o modelo ARIMA de ordem de integração inteira  $d$  ao permitir que  $d$  assuma valores entre  $-0,5 < d < 0,5$ .
- O conceito de integração fracionária usualmente refere-se à definição de uma série temporal com dependência de longo prazo ou memória longa.
- Processos ARIMA estacionários podem ser considerados séries temporais de memória curta.
  - Modelos  $AR(p)$  possuem memória infinita ( $MA(\infty)$ ), mas os efeitos dos valores passados seguem uma forma geométrica, tendendo a valores próximos de zero rapidamente;
  - Modelos  $MA(q)$  possuem memória de exatamente  $q$  períodos, decaindo a zero rapidamente.



# Modelos ARIMA para $d$ fracionário (ARFIMA)

- Um modelo ARFIMA( $p, d, q$ ) é caracterizado pela seguinte equação:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d y_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) w_t,$$

onde

$$(1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - d) B^k}{\Gamma(-d) \Gamma(k + 1)},$$

na qual  $\Gamma(\cdot)$  denota a função gamma e  $d$  pode assumir qualquer valor real.

- O processo é não estacionário para  $d \geq 0,5$ .

# Modelos ARIMA para $d$ fracionário (ARFIMA)

- Assumindo que  $d \in [0, 0.5)$ , Hosking (1981) demonstrou que a função de autocorrelação de um processo ARFIMA é proporcional a  $k^{2d-1}$  à medida que  $k \rightarrow \infty$ .
  - A autocorrelação de um processo ARFIMA decai hiperbolicamente para zero ( $k \rightarrow \infty$ ) em contraste com o decaimento geométrico (mais rápido) do processo estacionário ARMA.
- Para  $d \in (0, 0.5)$ , o processo ARFIMA é dito de memória longa ou de dependência de longo prazo positiva; para  $d \in (-0.5, 0)$ , o processo é dito de dependência de longo prazo negativa.

- Box, G. E. P., and David A. Pierce. 1970. "Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models." *Journal of the American Statistical Association* 65 (332): 1509–1526.
- Hosking, J. R. M. 1981. "Fractional differencing." *Biometrika* 68 (1): 165–176.
- Hyndman, R. J., and Y. Khandakar. 2008. "Automatic time series forecasting: The forecast package for R." *Journal of Statistical Software* 27 (1): 1–22.
- Ljung, G. M., and G. E. P. Box. 1978. "On a measure of lack of fit in time series models." *Biometrika* 65 (2): 297–303.