

# Lista Especial de Problemas 7

Jeferson Almir

1. Ana e Beatriz jogam um jogo com  $n$  peças. Ana joga primeiro, e elas jogam então alternadamente. A cada jogada, uma jogadora toma para si uma peça ou uma quantidade igual a um divisor primo da quantidade atual de peças. A jogadora que tomar a última peça ganha. Para quais  $n$  Ana tem uma estratégia vencedora?
2. Ana e Beatriz joga um jogo com  $n > 2$  pilhas, inicialmente cada uma consistindo de uma única moeda. As jogadoras jogam alternadamente, com Ana sendo a primeira. A cada turno, uma jogadora escolhe duas pilhas contendo quantidades de moedas primas entre si, e une-as numa única pilha. A jogadora que não puder jogar perde o jogo. Para cada  $n$ , determine a jogadora com uma estratégia vencedora.
3. Pedro e Beto jogam um jogo com 11 pilhas de 10 pedras cada. Pedro começa jogando, e eles jogam então alternadamente. Em seu turno, Pedro deve tomar para si 1, 2 ou 3 pedras de qualquer uma pilha. Em seu turno, Beto deve tomar uma pedra de 1, 2 ou 3 pilhas. Aquele que tomar a última pedra é o vencedor. Quem tem uma estratégia vencedora?
4. Dois jogadores tomam turnos escrevendo símbolos em quadrados vazios de um tabuleiro  $1 \times n$ , onde  $n$  é um inteiro maior que 1. Arão sempre escreve o símbolo X, e Gabi sempre escreve o símbolo O. Dois símbolos iguais nunca devem ocupar quadrados adjacentes. Um jogador que não puder fazer sua jogada é declarado perdedor. Se Arão é o primeiro a jogar, quem tem uma estratégia vencedora?
5. Alice e Breno jogam um jogo num tabuleiro  $1 \times (n + 2)$ . Para começar o jogo, Alice posiciona uma moeda em qualquer um dos  $n$  quadrados interiores. Em sua vez, Breno escolhe um inteiro positivo  $k$ . Alice então deve a moeda para o  $k$ -ésimo quadrado à direita ou à esquerda da sua posição atual. Se a moeda acaba fora do tabuleiro, Alice vence. Se a moeda para num dos extremos do tabuleiro, Breno vence. Se a moeda para num outro quadrado interior, o jogo continua. Para quais valores de  $n$  Breno tem uma estratégia vencedora num número finito de turnos?
6. Alice e Breno jogam um jogo na reta real. Para começar o jogo, Alice posiciona um grão de areia num número  $x$  tal que  $0 < x < 1$ . A cada turno, Breno escolhe um número positivo  $d$ . Alice então deve mover o grão para  $x + d$  ou  $x - d$ . Se o grão para em 0 ou 1, Breno vence. Senão, o jogo procede para o próximo turno. Para quais valores de  $x$  Breno tem uma estratégia que o permite vencer num número finito de turnos?
7. Num tabuleiro  $8 \times 8$ , as linhas são numeradas de 1 a 8 e as colunas são chamadas por letras de A a H. Num jogo de 2 jogadores neste tabuleiro, o primeiro jogador tem uma torre branca que começa na casa B2, e o segundo jogador tem uma torre preta que começa na casa C4. Os dois alternam turnos movendo suas torres. A cada turno, uma torre vai para uma casa na mesma coluna ou linha da casa inicial. Entretanto, essa nova casa não pode estar sob ataque da outra torre, e nenhuma torre pode ter parado nela anteriormente. O jogador sem uma jogada possível perde o jogo. Qual jogador tem uma estratégia vencedora?
8. Num tabuleiro  $8 \times 8$ , há uma torre em cada uma das casas  $(A, 1)$  e  $(C, 3)$ . Alice começa jogando, seguida por Beto, e então jogam alternadamente. A cada turno, quem joga move uma das torres um número qualquer de casas para cima ou para a direita. A torre não pode “passar por cima” ou compartilhar casa com a outra torre. O jogador que mover qualquer torre para a casa  $(H, 8)$  vence. Quem dentre Alice e Beto tem uma estratégia vencedora?

9. Ana e Belo jogam um jogo onde Ana joga primeiro e a partir daí eles jogam alternadamente. Em seu turno, Ana escolhe um inteiro. Em seu turno, Belo escreve no quadro branco ou esse número ou a soma de todas os números já escritos. É sempre possível para Ana garantir que em algum momento haverá no quadro 100 vezes escrito o número:
- (a) 5?
  - (b) 10?