

Lista Especial de Problemas 14

Jeferson Almir

1. O número 4 tem uma quantidade ímpar de divisores positivos ímpares, apenas o 1, e uma quantidade par de divisores positivos pares, o 2 e o 4. Existe algum número com uma quantidade ímpar de divisores positivos pares e uma quantidade par de divisores positivos ímpares?
2. Cada um de três inteiros positivos é um múltiplo do máximo divisor comum dos outros dois, e um divisor do mínimo múltiplo comum dos outros dois. Esses três números devem ser iguais?
3. Seja p um número primo. Um conjunto de $p + 2$ inteiros positivos, não necessariamente distintos, é chamado de *interessante* se a soma de quaisquer p deles é divisível por cada um dos outros dois. Determine todos os conjuntos interessantes.
4. (a) Pedro e Bruno pensam, cada um, em três inteiros positivos. Para cada par de seus números, Pedro escreve o MDC dos dois números. Para cada par de seus números, Bruno escreve o MMC dos dois números. Se ambos Pedro e Bruno escreveram os mesmos três números, esses três números escritos devem ser iguais entre si?
(b) O resultado análogo é verdade se Pedro e Bruno pensam, cada um, em quatro inteiros positivos, no lugar de três?
5. Seja $a \wedge b$ o número a^b . A ordem das operações na expressão $7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7$ deve ser determinada inserindo cinco pares de parênteses. É possível pôr os parênteses de duas formas distintas de forma que as expressões tenham valores iguais?
6. Parênteses devem ser inseridos na expressão $10 \div 9 \div 8 \div 7 \div 6 \div 5 \div 4 \div 3 \div 2$ de forma que o número resultante seja inteiro.
(a) Determine o valor máximo desse inteiro.
(b) Determine o valor mínimo desse inteiro.
7. Temos uma cópia de 0 e duas cópias de cada um de $1, 2, \dots, n$. Para quais n podemos ordenar os $2n + 1$ números, de tal forma que para $1 \leq k \leq n$, há exatamente k outros números entre as cópias do número m ?
8. O Barão de Munchausen tem um conjunto de 50 moedas. A massa de cada uma é um inteiro positivo distinto que não excede 100, e a massa total é par. O Barão diz que não é possível dividir as moedas em duas pilhas de mesma massa total. É possível que o Barão esteja certo?
9. Um conjunto de pelo menos dois objetos com pesos distintos tem a propriedade de que para qualquer par de objetos do conjunto, podemos escolher um subconjunto dos objetos restantes de tal forma que o peso total é igual ao peso total do par. Qual é o número mínimo de objetos neste conjunto?