# Álgebra Linear - Lista de Exercícios 4 (RESOLUÇÃO)

Luís Felipe Marques

Novembro de 2022

**1.** Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Ache $b$ tal que $A$ tenha um autovalor negativo.

(b) Como podemos concluir que $A$ precisa ter um pivô negativo?

(c) Como podemos concluir que $A$ não pode ter dois autovalores negativos?

**Resolução:**

(a) Analisando o polinômio característico:

$$p_A(x) = x^2 - 2x + 1 - b^2 = 0 \iff (x-1)^2 = b^2 \iff x = 1 \pm b$$

Assim, para $|b| > 1$, como $b = 2$, temos um dos autovalores de $A$ será $1 - 2 = -1 < 0$.

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - bL_1} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 - b^2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, usando $|b| > 1$ do item anterior, temos que $1 - b^2 < 0$.

(c) Note que a soma dos autovalores é igual a $\text{Tr } A = 2$. Assim, o autovalor de maior módulo positivo.

**2.** Em quais das seguintes classes as matrizes $A$ e $B$ abaixo pertencem: invertível, ortogonal, projeção, permutação, diagonalizável, Markov?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quais das seguintes fatorações são possíveis para $A$ e $B$? $LU$, $QR$, $S\Lambda S^{-1}$ ou $Q\Lambda Q^T$?

**Resolução:**

Podemos notar que $A$ é invertível ($\det A = -1 \neq 0$), ortogonal ($A^T = A^{-1}$), permutativa ($A^2 = I$), diagonalizável (simétrica) e de Markov (cada coluna tem soma 1). Além disso, $B$ é de projeção ($B^2 = B$), de Markov e diagonalizável (é simétrica).

Na matriz $A$, podemos fazer as fatorações $QR$, $S\Lambda S^{-1}$ e $Q\Lambda Q^T$, enquanto a matriz $B$ pode ser fatorada em $LU$ e $Q\Lambda Q^T$.

**3.** Complete a matriz $A$ abaixo para que seja de Markov e ache o autovetor estacionário. Sua conclusão é válida para qualquer matriz simétrica de Markov $A$? Por quê?

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

**Resolução:**

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Note que o vetor estacionário é $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, já que $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Podemos concluir que toda matriz simétrica de Markov será duplamente de Markov, o que garante que 1 sempre será autovalor para o autovetor de entradas unitárias.

**4.** Dizemos que $\mathcal{M}$ é um grupo de matrizes invertíveis se $A, B \in \mathcal{M}$ implica $AB \in \mathcal{M}$ e $A^{-1} \in \mathcal{M}$. Quais dos conjuntos abaixo é um grupo?

(a) O conjunto das matrizes positivas definidas;

(b) o conjunto das matrizes ortogonais;

(c) o conjunto $\{e^{tC};\ t \in \mathbb{R}\}$, para uma matriz $C$ fixa;

(d) o conjunto das matrizes com determinante igual a 1.

**Resolução:**

(a) Não. Note que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ são positivas definidas, mas $AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$, que não é positiva definida (não é simétrica).

(b) Sim. Note que se $A \in \mathcal{M}$ $(A^{-1} = A^T)$, então $A^{-1} \in \mathcal{M}$ $((A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A)$ e, se $B$ também está em $\mathcal{M}$, então $AB \in \mathcal{M}$ $((AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T)$.

(c) Sim. Sejam $A, B \in \mathcal{M}$, $A = e^{aC}$, $B = e^{bC}$. Logo, $A^{-1} = e^{(-a)C} \in \mathcal{M}$ e $AB = e^{(a+b)C} \in \mathcal{M}$.

(d) Sim, já que se $\det A = 1$, $\det(A^{-1}) = 1$, e $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1$.

**5.** Sejam $A$ e $B$ matrizes simétricas e positivas definidas. Prove que os autovalores de $AB$ são positivos. Podemos dizer que $AB$ é simétrica e positiva definida?

**Resolução:**

Seja $\lambda$ um autovalor de $AB$, relativo ao autovetor $x$.

$$ABx = \lambda x \Rightarrow (ABx)^T = \lambda x^T \Rightarrow (ABx)^T Bx = \lambda x^T Bx \Rightarrow (Bx)^T ABx = \lambda x^T Bx$$

Como $A$ é positiva, $(Bx)^T ABx > 0$, e, como $B$ é positiva, $x^T Bx > 0 \Rightarrow \lambda > 0$.

Não podemos dizer que $AB$ é simétrica (ver questão anterior).

**6.** Ache a forma quadrática associada à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Qual o sinal dessa forma quadrática? Positivo, negativo ou ambos?

**Resolução:**

$$q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 5xy + 7xy + 9y^2 = (x + 3y)^2 + 6xy$$

Note que o sinal será positivo para $(x, y) = (1, 1)$, e negativo para $(x, y) = (-1, 1)$, por exemplo.

**7.** Prove os seguintes fatos:

(a) Se $A$ e $B$ são similares, então $A^2$ e $B^2$ também o são.

(b) $A^2$ e $B^2$ podem ser similares sem $A$ e $B$ serem similares.

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

**Resolução:**

(a) Existe $M$ invertível tal que $A = MBM^{-1}$. Logo, $A^2 = MBM^{-1}MBM^{-1} = MB^2M^{-1}$, ou seja, a matriz de similaridade é a mesma.

(b) Seja $A = \mathbf{0}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $A^2 = B^2 = \mathbf{0} \Rightarrow A^2 \sim B^2$, mas $A \not\sim B$.

(c) Note que $\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

(d) Note que 3 é autovalor nas duas matrizes, mas

$$2 = \dim N\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) \neq \dim N\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = 1$$

Assim, as matrizes não podem ser similares, por terem autodecomposições em quantidades diferentes de autovetores.

**8.** Ache os valores singulares (como na decomposição SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

**Resolução:**

$$A^T A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow p_{A^T A}(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

**9.** Suponha que as colunas de $A$ sejam $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ que são vetores ortogonais com comprimentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Calcule $A^T A$. Ache a decomposição SVD de $A$.

**Resolução:**

Pela ortogonalidade das colunas, $A^T A$ será matriz diagonal de entrada $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$. Temos ainda que $A^T A = V\Sigma^2 V^T$, o que nos diz que $\Sigma$ é a matriz diagonal de entradas $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, e que $V = I$.

Assim, como $A = U\Sigma V^T$, e já conhecemos $\Sigma$ e $V$, sabemos que $U$ será igual a $AD$, onde $D$ é matriz diagonal de entradas $\frac{1}{\sigma_i}$.