Álgebra Linear - Lista de Exercícios 6

Luís Felipe Marques

Setembro de 2022

1. Seja A uma matriz $m \times n$ com posto r. Suponha que existem $\mathbf{b}$ tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tenha solução.

(a) Escreva todas as desigualdades ($<$ e $\leq$) que os números m, n e r precisam satisfazer.

(b) Como podemos concluir que $A^T\mathbf{x} = 0$ tem solução fora $\mathbf{x} = 0$?

Resolução:

(a) Como $C(A) \subsetneq \mathbb{R}^m$, temos que $\dim C(A) < \dim \mathbb{R}^m \Rightarrow r < m$.
Além disso, como r é também posto(A^T), temos $r \leq n$.

(b) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim N(A^T) + \dim C(A^T) = m$. Como já vimos que $\dim C(A^T) = r < m$, $\dim N(A^T) > 0$, o que implica que esse núcleo não é trivial.

2. Sem calcular A ache uma bases para os quatro espaços fundamentais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Sejam B e C tais que:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{C}$$

- $N(A)$

  Para que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\begin{cases} C\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ B\mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{b} \in N(B)$. Note que $B \sim I \Rightarrow N(B) = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow N(A) = N(C)$. Como é perceptível que posto$(C) = 3$, temos que $\dim N(C) = 1$, então basta achar a, b e c tais que $C \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou

  $$\begin{cases} c + 2 = 0 \\ b + 2c + 3 = 0 \\ a + 2b + 3c + 4 = 0 \end{cases} \iff (a, b, c) = (0, 1, -2)$$

  Portanto, $N(A) = \text{span}\{(0, 1, -2, 1)\}$.

- $C(A)$

  Note que as colunas de BC serão combinações lineares das colunas de B (note também que nenhuma coluna "se perderá", já que nenhuma coluna de C está no núcleo de B). Portanto, o espaço-coluna de BC será constituído por combinações lineares das colunas de B. Assim, $C(A) = \text{span}\{(1, 6, 9), (0, 1, 8), (0, 0, 1)\}$.

- $N(A^T)$

$$A^T = C^T B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De forma semelhante ao caso de $N(A)$, temos $\begin{cases} B^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ C^T\mathbf{b} = \mathbf{0} \end{cases} \iff \mathbf{b} \in N(C^T)$. Note que $C^T \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(C^T) = 3 \Rightarrow \dim N(C^T) = 0 \Rightarrow N(C^T) = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow N(A^T) = N(B^T)$. Como $B^T \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{posto}(B^T) = 3 \Rightarrow \dim N(B^T) = 0 \Rightarrow N(B^T) = \{\mathbf{0}\}$. Daí, $N(A^T) = \{\mathbf{0}\}$.

- $C(A^T)$

Novamente, como $A^T = C^T B^T$, o espaço-coluna de A^T será constituído de combinações lineares de combinações lineares das colunas de C^T (lembrando novamente que as colunas de B^T não "eliminam" nenhuma coluna de C^T).

Portanto, $C(A^T) = \text{span}\,(1,2,3,4),(0,1,2,3),(0,0,1,2)$.

3. Explique porque $v = (1, 0, -1)$ não pode ser uma linha de A e estar também no seu núcleo.

Resolução:

Digamos que v seja a primeira linha de A. Perceba que a primeira coordenada de Av será igual a $\langle v, v\rangle = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$. Portanto, Av não poderá ser vetor nulo.

4. A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem solução quando $\mathbf{w}$ está em qual dos quatro subespaços? Quando a solução é única (condição sobre algum dos quatro subespaços)?

Resolução:

Note que $A^T\mathbf{x}$ será uma combinação linear das colunas de A^T. Portanto, $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w} \in C(A^T)$. Assim, $\mathbf{w}$ está no espaço-linha de A.

Lembre-se que, se $A^T\mathbf{y} = \mathbf{w}$, então $\mathbf{x}_n + \mathbf{y}$ é solução para $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$ para todo $\mathbf{x}_n \in N(A^T)$. Assim, a solução é única quando $N(A^T)$ é trivial $\iff$ A^T é invertível.

5. Seja M o espaço de todas as matrizes 3×3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e note que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Quais matrizes $X \in M$ satisfazem $AX = 0$?

(b) Quais matrizes $Y \in M$ podem ser escritas como $Y = AX$, para algum $X \in M$?

Resolução:

(a) Note que $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N(A) = 1$. Como já sabemos que $A(1,1,1) = (0,0,0)$, temos que $N(A) = \text{span}\{(1,1,1)\}$. Para que $AX = 0$, temos que ter as colunas de X no núcleo de A. Assim, X é da forma

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

para a, b, c reais quaisquer.

(b) Novamente, nos atentamos aos subespaços fundamentais de A. Em $Y = AX$, as colunas de Y serão combinações lineares das colunas de A. Como já vimos que $\dim C(A) = 2$, e temos que $(1, -1, 0)$ e $(0, 1, -1)$ são linearmente independentes, temos que $C(A) = \text{span}\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$. Logo, Y será da forma

$$\begin{bmatrix} (u_1) & (u_2) & (u_3) \\ (-u_1 + v_1) & (-u_2 + v_2) & (-u_3 + v_3) \\ (-v_1) & (-v_2) & (-v_3) \end{bmatrix}$$

para u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 reais quaisquer.

6. Sejam A e B matrizes $m \times n$ com os mesmos quatro subespaços fundamentais. Se ambas estão na sua forma escalonada reduzida, prove que F e G são iguais, onde:

$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Para que A e B tenham os mesmos espaços fundamentais, suas formas escalonadas reduzidas devem ter blocos de mesmos tamanhos, ou seja, F e G são matrizes $r \times (n - r)$.

Agora, analisemos os núcleos de A e B: $A\mathbf{x}_{n\times 1} = 0$ implica que $\mathbf{x}$ é da forma $\begin{bmatrix} y_A \\ z_A \end{bmatrix}$, para $y_A \in \mathbb{R}^r$ e $z_A \in \mathbb{R}^{n-r}$, e $A\mathbf{x} = A\begin{bmatrix} y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_A + Fz_A \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \iff Fz_A = -y_A$. Analogamente, para o núcleo de B, $\mathbf{x}$ deve ser da forma (y_B, z_B) com $Gz_B = -y_B$.

Assim, F e G são matrizes tais que $F\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $G\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possuem as mesmas soluções (completas) para todo $\mathbf{b}$ (já que $F\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in N(A) \iff \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in N(B) \iff G\mathbf{x} = \mathbf{b}$). Como já visto no exercício 3 da lista 5, isso implica que $F = G$ (basta verificar que $F\mathbf{x} = \mathbf{b} = G\mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$ qualquer e um certo $\mathbf{b}$ dependente da escolha de $\mathbf{x}$, o que implica que $(F - G)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para qualquer $\mathbf{x}$, propriedade exclusiva da matriz nula $\Rightarrow (F - G) = 0 \iff F = G$).