Álgebra Linear - Lista de Exercícios 7

Luís Felipe Marques

Setembro de 2022

1. Se $AB = 0$, as colunas de B estão em qual espaço fundamental de A? E as linhas de A estão em qual espaço fundamental de B? E possível que A e B sejam 3×3 e com posto 2?

Resolução:

Note o seguinte:

$$\begin{aligned} AB = \begin{bmatrix} — & \mathbf{a}_1^T & — \\ — & \vdots & — \\ — & \mathbf{a}_m^T & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_p \\ | & | & | \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \iff \begin{bmatrix} — & \mathbf{a}_1^T B & — \\ — & \vdots & — \\ — & \mathbf{a}_m^T B & — \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \iff \begin{bmatrix} | & | & | \\ A\mathbf{b}_1 & \cdots & A\mathbf{b}_p \\ | & | & | \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \therefore \begin{cases} A\mathbf{b}_i = \mathbf{0} \ \forall \ i \in \{1, \ldots, p\} \\ \mathbf{a}_j^T B = \mathbf{0}^T \ \forall \ j \in \{1, \ldots, m\} \end{cases} \end{aligned}$$

Ou seja, as colunas de B estão no núcleo de A, e as linhas de A estão no núcleo à esquerda de B. Isso significa que $\begin{cases} C(B) \subset N(A) \\ C(A^T) \subset N(B^T) \end{cases}$.

Assim, podemos ver que não é possível que posto(A) = posto$(B) = 2$ com $A_{3\times3}$ e $B_{3\times3}$, já que, pelo Teorema do posto e por propriedades do posto, temos:

$$\begin{cases} \dim C(A) = \dim C(B) = \dim C(A^T) = \dim C(B^T) = 2 \\ \dim N(A) = \dim N(B) = \dim N(A^T) = \dim N(B^T) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 = \dim C(B) \leq \dim N(A) = 1$$

$$\iff 2 \leq 1 \text{ Absurdo!}$$

Dado que, se $X \subset Y$, então $\dim X \leq \dim Y$.

2. Se $Ax = b$ e $A^T y = 0$, temos $y^T x = 0$ ou $y^T b = 0$?

Resolução:

Perceba: $A^T y = 0 \iff y^T A = 0^T \iff y^T Ax = 0^T x = 0 \iff y^T(Ax) = 0 \iff y^T b = 0$.

3. O sistema abaixo não tem solução:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$

Ache números y_1, y_2, y_3 para multiplicar as equações acima para que elas somem $0 = 1$. Em qual espaço fundamental o vetor y pertence? Verifique que $y^T b = 1$. O caso acima é típico e conhecido como a *Alternativa de Fredholm*: ou $Ax = b$ ou $A^T y = 0$ com $y^T b = 1$.

Resolução:

Tome $y_1 = y_2 = 1$ e $y_3 = -1$. Daí, teríamos $(1+2-3)x + (2+2-4)y + (2+3-5)z = 0 = 1 = 5+5-9$. Note que, se v_x, v_y e v_z são vetores com coordenadas iguais aos coeficientes de x, y e z, respectivamente, então $v_x^T y = v_y^T y = v_z^T y = 0$. Assim, se o sistema se traduz como $Ax = b$, então temos que $A^T y = 0$. Supondo que $N(A^T)$ não é trivial, como é o caso de nosso sistema, temos que $y' = \frac{y}{y^T b}$ é tal que $y'^T b = 1$.

4. Mostre que se $A^T Ax = 0$, então $Ax = 0$. O oposto é obviamente verdade e então temos $N(A^T A) = N(A)$.

Resolução:

Digamos que $Ax = b$ e que $A^T b = 0$. Como já vimos na questão 2, $b^T b = 0 \iff b = 0$. Logo, $A^T Ax = 0 \iff Ax = 0 \Rightarrow N(A) = N(A^T A)$.

5. Seja A uma matriz 3×4 e B uma 4×5 tais que $AB = 0$. Mostre que $C(B) \subset N(A)$. Além disso, mostre que posto(A) + posto$(B) \leq 4$.

Resolução:

$$AB = A \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_5 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ A\mathbf{b}_1 & \cdots & A\mathbf{b}_5 \\ | & | & | \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} A\mathbf{b}_1 = 0 \\ \ldots \\ A\mathbf{b}_5 = 0 \end{cases}$$

Ou seja, as colunas de B estão em $N(A) \Rightarrow$ a base de $C(B)$ está em $N(A) \Rightarrow C(B) \subset N(A)$.

Seja r igual a posto$(A) \Rightarrow 4 - r$ é a dimensão de $N(A) \Rightarrow$ posto$(B) \leq 4 - r$ (já que é um subespaço de $N(A)$) $\Rightarrow$ posto(A) + posto$(B) \leq r + 4 - r = 4$.

6. Sejam $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vetores não-zeros de $\mathbb{R}^2$.

(a) Quais são as condições sobre esses vetores para que cada um possa ser, respectivamente, base dos espaços $C(A^T)$, $N(A)$, $C(A)$ e $N(A^T)$ para uma dada matriz A que seja 2×2. *Dica: cada espaço fundamental vai ter somente um desses vetores como base.*

(b) Qual seria uma matriz A possível?

Resolução:

(a) Sem perda de generalidade, digamos que $\begin{cases} \operatorname{span} \mathbf{a} = C(A^T) \\ \operatorname{span} \mathbf{b} = N(A) \\ \operatorname{span} \mathbf{c} = C(A) \\ \operatorname{span} \mathbf{d} = N(A^T) \end{cases}$. Assim, temos $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ e $\mathbf{c} \perp \mathbf{d}$.

(b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Assim, $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, -1)$, $\mathbf{c} = (1, 2)$ e $\mathbf{d} = (2, -1)$.

7. Ache $S^\perp$ para os seguintes conjuntos:

(a) $S = \{0\}$

(b) $S = \operatorname{span}\{[1, 1, 1]\}$

(c) $S = \operatorname{span}\{[1, 1, 1], [1, 1, -1]\}$

(d) $S = \{[1, 5, 1], [2, 2, 2]\}$. Note que S não é um subespaço, mas $S^\perp$ é.

Resolução:

(a) Assumindo, que estamos tratando do $\mathbb{R}^3$, $S^\perp = \mathbb{R}^3$, já que $x^T 0 = 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^3$.

(b) Como $\dim S = 1$, $\dim S^\perp = 2$, assim basta achar dois vetores L.I. ambos ortogonais a $[1, 1, 1]$. Basta notar que $\mathbf{a} = [1, 0, -1]$ e $\mathbf{b} = [0, 1, -1]$ são tais que $\mathbf{a}^T[1, 1, 1] = \mathbf{b}^T[1, 1, 1] = 0$ e que $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ é L.I. já que um não é múltiplo do outro ($\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{-1}$). Assim, $S^\perp = \operatorname{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$.

(c) Como $\dim S = 2$, $\dim S^\perp = 1$, ou seja, basta achar um vetor ortogonais a ambos. Note que $\mathbf{x} = [1, -1, 0]$ satisfaz essas condições, temos que $S^\perp = \operatorname{span} \mathbf{x}$.

(d) Note que, se $\mathbf{x} \in \operatorname{span} S$, sendo da forma $a[1,5,1] + b[2,2,2]$, então $x^T[1,5,1] = 27a + 14b$ e $x^T[2,2,2] = 14a + 12b$, e, assim, $x^T[1,5,1] = x^T[2,2,2] = 0 \iff a = b = 0$. Ou seja, nenhum elemento de $\operatorname{span} S$ está em $S^\perp$. Assim, $S^\perp = (\operatorname{span} S)^\perp$. Como $\dim \operatorname{span} S = 2$, então $\dim S^\perp = 1$. Basta achar um vetor ortogonal aos dois elementos de S. Note que $[1,0,-1]$ satisfaz às condições, então $S^\perp = \operatorname{span}\{[1,0,-1]\}$.

8. Seja A uma matriz 4×3 formada pelas primeiras 3 colunas da matriz identidade 4×4. Projeta o vetor $b = [1,2,3,4]$ no espaço coluna de A. Ache a matriz de projeção P.

Resolução:

Temos:

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a projeção de b em A $b_A = Pb = [1,2,3,0]$.

9. Se $P^2 = P$, mostre que $(I-P)^2 = I - P$. Para a matriz P do exercício anterior, em qual subespaço a matriz $I - P$ projeta?

Resolução:

$(I-P)^2 = I^2 - IP - PI + P^2 = I - 2P + P = I - P$. Note que $I - P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, assim, $I - P$ projeta no subespaço de $\mathbb{R}^4$ caracterizado por vetores da forma $[0,0,0,x]$.