Álgebra Linear - Lista de Exercícios 8

Luís Felipe Marques

Outubro de 2022

1. Resolução:

Sendo os pontos da forma (t, b), então as equações que devem ser satisfeitas são: $7 = C - D$, $7 = C + D$ e $21 = C + 2D$. Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

que podemos reescrever como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, que não tem solução. Entretanto, podemos achar $\hat{\mathbf{x}}$, solução por mínimos quadrados do sistema, através da equação $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix}$$

que possui solução $(\hat{C}, \hat{D}) = (9, 4)$. Assim, $\mathbf{p} = A\hat{\mathbf{x}} = (5, 13, 17)$.

2. Resolução:

Note que o vetor p é a projeção de $\mathbf{b}$ ($p = P\mathbf{b}$) no espaço-coluna de A. Assim, $p \in C(A)$. Assim, sendo v um vetor qualquer de $C(A)$, $v \cdot e = v \cdot \mathbf{b} - v \cdot p = v \cdot \mathbf{b} - v \cdot P\mathbf{b} = v \cdot \mathbf{b} - P^T v \cdot \mathbf{b} = v \cdot \mathbf{b} - Pv \cdot \mathbf{b} = v \cdot \mathbf{b} - v \cdot \mathbf{b} = 0$, já que $P = A(A^T A)^{-1} A^T \Rightarrow P^T = P$ e $Pv = v$, ou seja, $e \perp v \Rightarrow e \in C(A)^\perp \Rightarrow e \in N(A^T)$. Note que $\text{posto}(A^T A) = 2$, logo $2 \geq \text{posto}(A^T) \leq \text{posto}(A^T A) = 2 \Rightarrow \text{posto}(A^T) = 2 \Rightarrow C(A^T) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} \in C(A^T)$. Por outro lado, como $N(A) = C(A^T)^\perp$, $N(A) = \{(0, 0)\}$.

3. Resolução:

Esses pontos de forma $b = Dt + C$ podem ser expressas na equação matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

A solução por mínimos quadrados $\hat{\mathbf{x}}$ é obtida por $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$, que corresponde a:

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D} \\ \hat{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

que possui solução $(\hat{D}, \hat{C}) = (-1, 1)$, o que mostra que a reta que minimiza os quadrados das distâncias aos pontos estudados é a reta descrita por $y = -x + 1$.

4. Resolução:

Primeiro, façamos a normalização dos vetores, usando a fórmula $u_i = v_i - \sum_{1 \leq j < i} \text{proj}_{u_j}(v_i)$, sendo $\text{proj}_r(s) = \frac{s \cdot r}{r \cdot r} r$. Logo, $u_1 = v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $u_2 = v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) = (0, 1, -1, 0) - \frac{-1}{2}(1, -1, 0, 0) =$

$(1/2, 1/2, -1, 0)$, e $u_3 = v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3) = (0,0,1,-1) - \frac{0}{2}(1,-1,0,0) - \frac{-1}{3/2}(1/2, 1/2, -1, 0) = (1/3, 1/3, 1/3, -1)$.

Agora, basta normalizar os vetores, fazendo $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$, logo $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, $e_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0)$ e $e_3 = (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

5. **Resolução:**

Sendo $x = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n}$, temos que cada entrada de Ax será a soma de cada linha correspondente, logo $Ax = 0$. Assim, x é um vetor não-nulo v tal que $Av = 0v$, ou seja, 0 é autovalor de A. Como $\det A$ é igual ao produto dos autovalores, $\det A = 0$.

No caso em que cada linha de A soma 1, note que cada linha de I também soma 1, logo cada linha de $A - I$ soma 0, o que recai no caso anterior. Logo, $\det(A - I) = 0$.

6. **Resolução:**

Façamos eliminação, supondo que a, b e c são números distintos:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(b^2-a^2)\frac{c-a}{b-a} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(b+a)(c-a) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & c^2-bc+ab-ac \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Como se trata de uma matriz triangular, o determinante será $(b-a)(c-b)(c-a)$. Note que se nem todos dentre a, b e c sejam distintos, temos linhas iguais, que tornam o determinante nulo, algo que se encaixa na fórmula já encontrada.

7. **Resolução:**

Note que a matriz é equivalente a $\begin{bmatrix} e_2 & e_3 & e_4 & e_1 \end{bmatrix}$, ou seja, corresponde à permutação $(2,3,4,1)$. Perceba que $(2,3,4,1) \to (2,3,1,4) \to (2,1,3,4) \to (1,2,3,4)$, ou seja, tal permutação está a 3 trocas da identidade. Logo, o determinante procurado será igual a $(-1)^3 = -1$.

8. **Resolução:**

Seja $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & k \end{bmatrix}$ e seja D_{ij} o determinante de A_k eliminando a linha i e a coluna j. Assim, $\det A_k = -D_{41} + 4D_{42} - 10D_{43} + kD_{44}$, logo $\det A_{20} - \det A_{19} = (20-19)D_{44} = D_{44}$. Como $D_{44} = 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 3 = 1$, temos que $A_{19} = A_{20} - 1 = 0$.

9. **Resolução:**

Aplicando os cofatores na primeira linha, temos que $\det A = D_{11} - D_{12} + 4D_{13} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 3 + 4 \cdot 0 = 3$.

Como $D_{13} = 0$, o determinante não muda quando mudamos 4 para 100.