Álgebra Linear - Lista de Exercícios 5

Luís Felipe Marques

Agosto de 2022

1. Explique porque essas afirmações são falsas

(a) A solução completa é qualquer combinação linear de x_p e x_n.

(b) O sistema $Ax = b$ tem no máximo uma solução particular.

(c) Se A é inversível, não existe nenhuma solução x_n no núcleo.

Resolução:

(a) No sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, caso $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, já não será verdade a afirmação. Tome, por exemplo, a compinção linear $\mathbf{x}_q = 3\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$. Assim, $A\mathbf{x}_q = 3A\mathbf{x}_p + A\mathbf{x}_n = 3\mathbf{b} \neq \mathbf{b}$. Ou seja, essa combinação linear não é solução, como queríamos demonstrar.

(b) Se $\mathbf{x_b}$ é solução particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, então todo elemento de $\mathbf{x_b} + N(A)$ é também solução particular.

(c) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é sempre solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Sejam

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Use a eliminação de Gauss-Jordan para reduzir as matrizes $\begin{bmatrix} U & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} R & d \end{bmatrix}$. Resolva $Rx = 0$ e $Rx = d$.

Resolução:

Fazendo a eliminação de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 3/4 L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2/4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} R & d \end{bmatrix}$$

Assim, podemos notar que apenas a segunda coluna de R é livre, o que implica que o núcleo de U possui o vetor $(a, 1, b)$, onde $\begin{cases} a + 2 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow N(U) = \text{span}\{(-2, 1, 0)\}$, que são as soluções de $Rx = 0$.

Para solucionar, $Rx = d$, selecionamos uma solução particular $(c, 1, d)$. Daí, $\begin{cases} c + 2 = -1 \\ d = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -3 \\ d = 2 \end{cases}$, o que implica que as soluções da equação são da forma $(-3, 1, 2) + x_n$, sendo x_n elemento qualquer de $N(R) = N(U)$.

3. Suponha que $Ax = b$ e $Cx = b$ tenham as mesmas soluções (completas) para todo b. Podemos concluir que $A = C$?

Resolução:

Sim, $A = C$.

Para provar, tome $\mathbf{x}'$ qualquer. Assim, $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}'$ para um certo $\mathbf{b}'$. Pela suposição do problema, $\mathbf{x}'$ é também solução de $C\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, ou seja, $C\mathbf{x}' = \mathbf{b}'$. Assim, $A\mathbf{x}' - C\mathbf{x}' = \mathbf{b}' - \mathbf{b}' = 0 \Rightarrow (A - C)\mathbf{x}' = 0$ para $\mathbf{x}'$ qualquer, e, portanto, $N(A - C) = \mathbb{R}^n \Rightarrow (A - C) = \mathbf{0}_{n\times n}$, pelo Teorema do Posto. Portanto, $A = C$.

4. Ache o maior número possível de vetores linearmente independentes dentre os vetores:

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

Resolução:

Façamos dos vetores colunas de uma matriz e façamos sua redução:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\-1&0&0&1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&-1&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+L_1} \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\\0&0&-1&0&-1&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+L_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&-1&0&-1&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_4+L_3} \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2-L_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-L_2} \begin{bmatrix}1&0&1&-1&0&1\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-L_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Como a matriz reduzida tem três colunas com pivô, 3 é o número máximo de vetores L.I. dentre os vetores dados.

5. Ache uma base para o plano $x - 2y + 3z = 0$ em $\mathbb{R}^3$. Encontre então uma base para a interseção desse plano com o plano xy. Ache ainda uma base para todos os vetores perpendiculares a esse plano.

Resolução:

Como se trata de um plano, precisamos apenas de dois elementos para a base. Assim, $(1, 2, 1)$ e $(-1, 1, 1)$, duas soluções linearmente independentes, são o bastante para gerar o plano. Base: $\{(1, 2, 1), (-1, 1, 1)\}$.

A interseção do plano $x - 2y + 3z = 0$ com $z = 0$ é equivalente à reta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, que pode ser gerada pela base $\{(2, 1, 0)\}$. Base: $\{(2, 1, 0)\}$.

Para os vetores perpendiculares ao plano, já temos o vetor diretor $(1, -2, 3)$, que já gera todos os seus múltiplos, também perpendiculares ao plano dado. Base: $(1, -2, 3)$.

6. Ache (na sua forma mais simples) a matriz que é o produto das matrizes de posto 1 $\mathbf{uv}^T$ e $\mathbf{wz}^T$? Qual seu posto?

Resolução:

Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ iguais a $(u_1, \ldots, u_n)$, $(v_1, \ldots, v_m)$, $(w_1, \ldots, w_m)$ e $(z_1, \ldots, z_p)$ respectivamente. Daí:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\mathbf{v}^T &= \begin{bmatrix} — & u_1\mathbf{v}^T & — \\ — & \vdots & — \\ — & u_n\mathbf{v}^T & — \end{bmatrix} \\
\mathbf{w}\mathbf{z}^T &= \begin{bmatrix} | & | & | \\ z_1\mathbf{w} & \cdots & z_p\mathbf{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} \\
\therefore \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{w}\mathbf{z}^T &= \begin{bmatrix} u_1z_1\mathbf{v}^T\mathbf{w} & \cdots & u_1z_p\mathbf{v}^T\mathbf{w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nz_1\mathbf{v}^T\mathbf{w} & \cdots & u_nz_p\mathbf{v}^T\mathbf{w} \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{v}^T\mathbf{w} \begin{bmatrix} u_1z_1 & \cdots & u_1z_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nz_1 & \cdots & u_nz_p \end{bmatrix} \\
&= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}\mathbf{z}^T
\end{aligned}
$$

Assim, a matriz resultante é múltipla da matriz de posto 1 $\mathbf{u}\mathbf{z}^T$, o que torna a matriz resultante também de posto 1.

7. Suponha que a coluna j de B é uma combinação linear das colunas anteriores de B. Mostre que a coluna j de AB é uma combinação linear das colunas anteriores de AB. Conclua que $\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(B)$.

Resolução:

Sejam A e B matrizes $n \times m$ e $m \times p$ respectivamente. Daí, podemos dizes que elas são da forma:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} — & \mathbf{a}_1^T & — \\ — & \vdots & — \\ — & \mathbf{a}_n^T & — \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{b}_p \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix} \\
\therefore AB &= \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \\ A\mathbf{b}_1 & \cdots & A\mathbf{b}_j & \cdots & A\mathbf{b}_p \\ | & | & | & | & | \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Porém, se $\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \mathbf{b}_i$, então, pela linearidade de matrizes, $A\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i A\mathbf{b}_i$, o que significa que a j-ésima coluna de AB é combinação linear das anteriores.

Então, se $(p - \text{posto}(B))$ colunas de B podem ser expressas a partir de de colunas anteriores de B, ao menos $p - \text{posto}(B)$ colunas de AB podem ser expressas da mesma forma com colunas anteriores de AB. Logo, $\text{posto}(AB) \leq p - (p - \text{posto}(B)) \iff \text{posto}(AB) \leq \text{posto}(B)$.

8. O item anterior nos dá $\text{posto}(B^TA^T) \leq \text{posto}(A^T)$. É possível concluir que $\text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A)$?

Resolução:

Sim, é possível. Note que $\text{posto}(X)$ corresponde tanto à quantidade de linhas linearmente independentes quanto à quantidade de colunas linearmente independentes de X. Assim, $\text{posto}(X) = \text{posto}(X^T)$. Portanto,

$$
\begin{gathered}
\text{posto}(AB) = \text{posto}(B^TA^T) \leq \text{posto}(A^T) = \text{posto}(A) \\
\therefore \text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A)
\end{gathered}
$$

9. Suponha que A e B são matrizes quadradas e $AB = I$. Prove que $\text{posto}(A) = n$. Conclua que B precisa ser a inversa (de ambos os lados) de A. Então, $BA = I$.

Resolução:

Primeiro, definiremos as inversas de uma matriz. Uma matriz $Y_{n\times n}$ é a *inversa à esquerda* de $X_{n\times n}$ se $YX = I$. Similarmente, Y é *inversa à direita* se $XY = I$.

Para matrizes $X_{n\times n}$ de posto n, é perceptível que existem matrizes de eliminação R e C tais que $RX = I$ e $XC = I$. Assim, chamaremos essas matrizes, respectivamente, de inversas à esquerda e à direita *canônicas* da matrix X de posto n.

Provaremos agora um resultado importante:

$$\begin{cases} X^2 = X \\ XY = I \end{cases} \Rightarrow X = I$$

De fato, $X = XI = XXY = X^2Y = XY = I \Rightarrow X = I$.

Pelos itens anteriores, temos que $\begin{cases} \text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A) \\ \text{posto}(AB) \leq \text{posto}(B) \end{cases}$. Porém, como $\text{posto}(AB) = \text{posto}(I) = n$, e $\begin{cases} \text{posto}(A) \leq n \\ \text{posto}(B) \leq n \end{cases}$ (o posto não ultrapassa a quantidade de colunas), temos que $\text{posto}(A) = \text{posto}(B) = n$.

Seja C_B a inversa à direita canônica de B. Note que $(BA)^2 = B(AB)A = BIA = BA$ e que $BABC_B = B(AB)C_B = BIC_B = BC_B = I$. Assim, pelo resultado já provado:

$$\begin{cases} (BA)^2 = BA \\ BA(BC_B) = I \end{cases} \Rightarrow BA = I$$

Além disso, podemos provar que B é igual às inversas canônicas já definidas:

$$\begin{aligned} C_A = IC_A = BAC_A = BI = B \\ R_A = R_AI = R_AAB = IB = B \end{aligned}$$

Portanto, A^{-1} tal que $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ é único.

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.

(a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

(b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que, para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos

$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v}\rangle.$$

Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.

Resolução:

(a) Sejam f, $g \in V^*$. Definimos $(f + g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$ e $(\alpha f)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in V$.
Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vetores quaisquer de V. Veja que $(f+g)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}+\mathbf{v})+g(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})+g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}) = (f + g)(\mathbf{u}) + (f + g)(\mathbf{v})$ e que $(f + g)(\alpha\mathbf{u}) = f(\alpha\mathbf{u}) + g(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \alpha g(\mathbf{u}) = \alpha(f + g)(\mathbf{u})$, ou seja, $(f + g) \in V^*$.
Além disso, $(\alpha f)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \alpha f(\mathbf{v}) = (\alpha f)(\mathbf{u}) + (\alpha f)(\mathbf{v})$ e $(\alpha f)(\beta\mathbf{u}) = \alpha f(\beta\mathbf{u}) = \alpha\beta f(\mathbf{u}) = \beta(\alpha f)(\mathbf{u}) \Rightarrow (\alpha f) \in V^*$.
Logo, V^* é um espaço vetorial.

(b) Seja $\varphi : f \to \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}$, sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Digamos que $\mathbf{v}$ seja um vetor qualquer da forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

Por um lado, $f(\mathbf{v}) = f(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i f(e_i)$.

Por outro lado, $\langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle = \langle \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$.

Assim, $f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle$ para a φ definida. Falta provar que φ é uma bijeção.

Para isso, basta notar que $\varphi(f) = \varphi(g)$ implica que, $\forall\ \mathbf{v} \in V$, $\langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle = \langle \varphi(g), \mathbf{v} \rangle \iff f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in V$, ou seja, f e g são a mesma função linear. Isso prova que φ é injetiva.

Além disso, para $f(\sum \alpha_i e_i) = \sum x_i \alpha_i e_i$, temos $\varphi(f) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ para quaiquer x_i reais. Como podemos escolher x_i tais que $\varphi(f)$ seja qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$, φ é sobrejetiva.

Dessa forma, φ é bijetiva.