Álgebra Linear - Lista de Exercícios 9

Luís Felipe Marques

Novembro de 2022

1. Resolução:

(a) Note que a MA de 0 é 1, o que significa que sua MG também é 1. Assim, existe apenas um vetor (restringindo-se à independência linear) $\mathbf{v}$ tal que $B\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow N(B) = \text{span}\{\mathbf{v}\} \Rightarrow \dim N(B) = 1 \Rightarrow \text{posto}(B) = 2$.

(b) Primeiro, lembre que o determinante é igual ao produto dos autovalores. Assim, sendo $\mathbf{v}$ o autovetor de B associado a 0, então $B^T B\mathbf{v} = B^T\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{v} \Rightarrow 0$ é autovalor de $B^T B$. Logo, $\det B^T B = 0$.

(c) Como não podemos aplicar o mesmo raciocínio do item anterior para autovalores não-nulos, não podemos determinar outros autovalores de $B^T B$ além de 0.

(d) Seja α autovalor de B, com $\mathbf{v}$ autovetor associado. Então, $B\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} \Rightarrow B^2\mathbf{v} = \alpha B\mathbf{v} = \alpha^2\mathbf{v}$. Logo, α^2 será autovalor de B^2. Além disso, $B^2\mathbf{v} = \alpha^2\mathbf{v} \Rightarrow B^2\mathbf{v}+\mathbf{v} = \alpha^2\mathbf{v}+\mathbf{v} \Rightarrow (B^2+I)\mathbf{v} = (\alpha^2+1)\mathbf{v}$. Ou seja, α^2+1 será autovalor de $B^2+I \Rightarrow \{1,2,5\}$ são autovalores de B^2+I. Logo, os autovalores de $(B^2+I)^{-1}$ serão 1, $1/2$ e $1/5$.

2. Resolução:

Usaremos polinômio característico.

(a) $p_A(x) = \det \begin{bmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 0 & 4-x & 5 \\ 0 & 0 & 6-x \end{bmatrix} = (1-x)(4-x)(6-x)$.

$p_A(x) = 0 \iff x \in \{1,4,6\}$, seus autovalores.

(b) $p_B(x) = \det \begin{bmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 3 & 0 & -x \end{bmatrix} = x^2(2-x) - 3(2-x) = (2-x)(x^2-3)$.

$p_B(x) = 0 \iff x \in \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$, autovalores de B.

(c) $p_C(x) = \det \begin{bmatrix} 2-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2 & 2-x \end{bmatrix} = (2-x)^3 + 16 - 12(2-x) = -x^3 + 6x^2 = x^2(6-x)$. Daí, podemos ver que 0 é autovalor de MA igual a 2. Além disso, 6 também é autovalor.

3. Resolução:

Tomando o polinômio característico $p_A(x) = x^2 - 2x - 4$, vemos que $\alpha_1 = 1+\sqrt{5}$ e $\alpha_2 = 1-\sqrt{5}$ são autovalores de A. Para achar os autovetores, analisemos núcleos.

Para $A - \alpha_1 I = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & 4 \\ 1 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$, note que as linhas são LD, logo basta tomar algum vetor ortogonal a alguma das linhas, como $\mathbf{v}_1 = (\sqrt{5}-1, 1)$.

Para $A - \alpha_2 I = \begin{bmatrix} \sqrt{5}-1 & 4 \\ 1 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}$, note que as linhas são LD, logo basta tomar algum vetor ortogonal a alguma das linhas, como $\mathbf{v}_2 = (\sqrt{5}+1, -1)$.

Assim, para $S = \begin{bmatrix} a\mathbf{v}_1 & b\mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ (a, b números reais não-nulos), e $\Sigma = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$, temos que $A = S\Sigma S^{-1}$ e $A^{-1} = S\Sigma^{-1}S^{-1}$.

Assim, as matrizes que diagonalizam A e A^{-1} serão da forma $S = \begin{bmatrix} a\mathbf{v}_1 & b\mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$, com a e b números reais não-nulos quaisquer.

4. **Resolução:**

Analisando o polinômio característico $p_A(x) = x^2 - 0.7x - 0.3$, vemos que 1 e -0.3 são autovalores de A, correspondentes respectivamente, aos autovetores $(9, 4)$ e $(1, -1)$. Assim, sendo $S = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, e $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}$

$$A = S\Sigma S^{-1},$$

notando que $S^{-1} = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$.

Note que $\lim_{k\to\infty} \Sigma^k = \lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (-0.3)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como $A^k = S\Sigma^k S^{-1}$,

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} S\Sigma^k S^{-1} =$$
$$-\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

5. **Resolução:**

Analisemos o polinômio característico $p_\theta(x) = x^2 - 2\cos\theta x + 1$.

$$\begin{aligned} p_\theta(x) = 0 \iff x &= \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} \\ &= \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta \pm i \cdot \text{sen}\ \theta \\ &= \text{cis}\ (() \pm \theta) \end{aligned}$$

O que mostra que cis $(() \pm \theta)$ são os autovalores de $Q(\theta)$.

Sendo $\lambda_1 = \text{cis}\ (()\theta)$ e $\lambda_2 = \text{cis}\ (() - \theta)$, temos que $B_1 = Q(\theta) - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -i\text{sen}\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & -i\text{sen}\ \theta \end{bmatrix}$ e $B_2 = Q(\theta) - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} i\text{sen}\ \theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & i\text{sen}\ \theta \end{bmatrix}$. Note que posto$(B_1)$ = posto$(B_2) = 1$, então basta achar um vetor do núcleo de cada para determinar todo o núcleo. Assim, $N(B_1) = \text{span}\{(1, -i)\}$ e $N(B_2) = \text{span}\{(1, i)\}$. Assim, $(1, i)$ e $(1, -i)$ são os autovetores de $Q(\theta)$.

6. **Resolução:**

Note que $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ é uma base. Assim, tome um vetor qualquer de $\mathbb{R}^n$ $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i$.

Assim, temos paralelamente:

$$\begin{aligned} Ay &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{x}_i \\ By &= \sum_{i=1}^n \alpha_i B\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

Assim, $Ay = By$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Assim, escolhendo $y = \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, base canônica, temos que cada coluna de A é igual à equivalente de B. Logo, $A = B$.

7. **Resolução:**

Temos o seguinte:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \text{cis}\ (()\theta) & 0 \\ 0 & \text{cis}\ (() - \theta) \end{bmatrix}$$

tal que $Q(\theta) = S\Lambda S^{-1}$. Assim, $Q(\theta)^n = S\Lambda^n S^{-1} = \begin{bmatrix} \text{cis}\,(()\theta)^n & 0 \\ 0 & \text{cis}\,(() - \theta)^n \end{bmatrix} S^{-1}$. Por Moivre, $\text{cis}\,(()x)^n = \text{cis}\,(()nx)$, então $Q(\theta)^n = S \begin{bmatrix} \text{cis}\,(()n\theta) & 0 \\ 0 & \text{cis}\,(() - n\theta) \end{bmatrix} S^{-1} = Q(n\theta)$.

8. **Resolução:**

Podemos ver que $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Analisemos o polinômio característico: $p_A(x) = x^2 - 1/2x - 1/2$. $p_A(x) = 0 \iff x = 1/4 \pm 3/4$.
Assim, os autovalores são 1 e $-1/2$. Assim, $N(A - I) = N\left(\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\{(1,1)\}$ e $N(A + 1/2I) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\{(1,-2)\}$.
Logo, os autovetores são $(1,1)$ e $(1,-2)$.

(b) Diagonalizando $A = S\Lambda S^{-1}$, temos:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$
$$S^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\lim A^n = \lim S\Lambda^n S^{-1} = S(\lim \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{bmatrix})S^{-1}$. Como $\lim 1^n = 1$ e $\lim(-1/2)^n = 0$, temos que $\lim A^n = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

(c) Como $(G_n, G_{n-1}) = A(G_{n-1}, G_{n-2})$, temos que $(G_n, G_{n-1}) = A^{n-1}(G_1, G_0)$.
Se tomarmos $\lim G_n = c$, temos que que

$$(c,c) = \lim(G_n, G_{n-1}) = \lim A^{n-1}(G_1, G_0) = (\lim A^n)(G_1, G_0) =$$
$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

Assim, provamos que $\lim G_n = \frac{2}{3}$.

9. **Resolução:**

Sendo $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, temos que o sistema representa:

$$u'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}_{A} u(t)$$

Assim, $e^{-At}u'(t) = e^{-At}Au(t) \Rightarrow e^{-At}u'(t) - e^{-At}Au(t) = 0$. Como $(e^{-At}u(t))' = e^{-At}u'(t) - e^{-At}Au(t)$, temos que a derivada de $e^{-At}u(t)$ é 0, logo $e^{-At}u(t)$ é uma constante k. Fazendo $t = 0$, temos que $(5,10) = u(0) = k$. Assim, $u(t) = e^{At}(5,10)$.

Por outro lado, podemos ver que o polinômio característico de A é $p_A(x) = x^2 - 15x + 50$, que possui raízes 5 e 10, autovalores de A. Note que $N(A - 5I) = N\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\{(1,-1)\}$ e que $N(A - 10I) = N\left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\{(3,2)\}$. Logo, $(1,-1)$ e $(3,2)$ são os autovetores de A correspondentes respectivamente a 5 e 10.

Fazendo $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$, temos que $A = S\Lambda S^{-1}$.

Perceba que

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S\Lambda^k S^{-1}}{k!} \\
&= S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\Lambda^k}{k!}\right)S^{-1} \\
&= S\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(5t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(10t)^k}{k!} \end{bmatrix} S^{-1} \\
&= {}^1\!/_5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{10t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= {}^1\!/_5 \begin{bmatrix} e^{5t} & 3e^{10t} \\ -e^{5t} & 2e^{10t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= {}^1\!/_5 \begin{bmatrix} 2e^{5t}+3e^{10t} & -3e^{5t}+3e^{10t} \\ -2e^{5t}+2e^{10t} & 3e^{5t}+2e^{10t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
u(t) = e^{At}(5,10) = \begin{bmatrix} -4e^{5t}+9e^{10t} \\ 4e^{5t}+6e^{10t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}
$$

10. Resolução:

(a) Note que $D(f_1(x)) = 2e^{2x}\text{sen } x + e^{2x}\cos x = 2f_1(x) + f_2(x)$, $D(f_2(x)) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\text{sen } x = 2f_2(x) - f_1(x)$ e $D(f_3(x)) = 2e^{2x} = 2f_3(x)$. Em termos algébricos, $D_{\mathcal{B}}(1,0,0)_{\mathcal{B}} = (2,1,0)_{\mathcal{B}}$, $D_{\mathcal{B}}(0,1,0)_{\mathcal{B}} = (-1,2,0)_{\mathcal{B}}$ e $D_{\mathcal{B}}(0,0,1)_{\mathcal{B}} = (0,0,2)_{\mathcal{B}}$. Assim, podemos ver que

$$
D_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

(b) Podemos ver que o polinômio característico de $D_{\mathcal{B}}$ é $p(x) = (2-x)^3 + (2-x) = (2-x)(4-4x+x^2+1) = (2-x)(x^2-4x+5)$, que possui raízes 2, $2+i$ e $2-i$, respectivamente os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 de $D_{\mathcal{B}}$.
Note que

$$
N(D_{\mathcal{B}} - \lambda_1 I) = N\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\{(0,0,1)_{\mathcal{B}}\}
$$
$$
N(D_{\mathcal{B}} - \lambda_2 I) = N\left(\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}\right) = \text{span}\{(1,-i,0)_{\mathcal{B}}\}
$$
$$
N(D_{\mathcal{B}} - \lambda_3 I) = N\left(\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}\right) = \text{span}\{(1,i,0)_{\mathcal{B}}\}
$$

Assim, as funções que são autovetores são $u(x) = e^{\lambda_1 x}$, $v(x) = e^{2x}\text{sen } x - ie^{2x}\cos x = -ie^{2x}\text{cis } (x) = -ie^{\lambda_2 x}$ e $w(x) = e^{2x}\text{sen } x + ie^{2x}\cos x = ie^{2x}\text{cis } (-x) = ie^{\lambda_3 x}$.