Álgebra Linear - Lista de Exercícios 11

Luís Felipe Marques

Novembro de 2022

1. Verdadeiro ou falso (prove ou dê um contra-exemplo):

(a) Se A é singular, então AB também é singular.
(b) O determinante de A é sempre o produto de seus pivôs.
(c) O determinante de $A - B$ é $\det A - \det B$.
(d) AB e BA tem o mesmo determinante.

Resolução:

(a) Verdadeiro. Note que uma matriz X é singular se, e só se, $\det X = 0$. Assim, $\det A = 0 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 0 \Rightarrow AB$ é singular.

(b) Falso. Observe a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Seu único pivô é 1, mas seu determinante é $6 - 6 = 0$.

(c) Falso. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Assim, $A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, com determinante 0, mas $\det A - \det B = -2 - 0 = -2 \neq 0$.

(d) Verdadeiro caso A e B sejam quadradas. Se A e B são matrizes n por n, então $\det AB = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det BA$. Agora, para $A_{n\times m}$ e $B_{m\times n}$, com $n \neq m$, temos, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde $\det AB = 1$ e $\det BA = 0$.

2. Sejam u e v vetores ortonormais em $\mathbb{R}^2$ e defina $A = uv^T$. Calcule A^2 para descobrir os autovalores de A. Verifique que o traço de A é $\lambda_1 + \lambda_2$.

Resolução:

Digamos que $u = (a, b)$ e $v = (b, -a)$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} ab & -a^2 \\ b^2 & -ab \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A^2 &= \begin{bmatrix} a^2b^2 - a^2b^2 & -a^3b + a^3b \\ ab^3 - ab^3 & -a^2b^2 + a^2b^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como 0 é único autovalor de A^2, 0 é também único autovalor de A. Note também que $\mathrm{Tr}\ A = ab - ab = 0$, soma dos autovalores.

3. A matriz B tem autovalores 1 e 2, C tem autovalores 3 e 4 e D tem autovalores 5 e 7 (todas são matrizes 2×2). Ache os autovalores de A:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Provaremos que 1, 2, 5 e 7 são os autovalores de A. Para $x \in \{1, 2\}$, note que $\det(B - xI) = 0$, ou seja, possui colunas LD. Da mesma forma, as duas primeiras colunas de $A - xI$ serão LD, já que são as mesmas colunas de $B - xI$ com coordenadas nulas a mais. Assim, $\det(A - xI) = 0$.

Da mesma forma, note que as linhas de $D - yI$ para $y \in \{5, 7\}$. Assim, como as últimas linhas de $A - yI$ são concatenções de $(0,0)^T$ e linhas de $D - yI$, temos de $\det(A - yI) = 0$.

Assim, como A tem no máximo 4 autovalores, já encontrados, temos que os autovalores de A são 1, 2, 5 e 7.

4. Seja D uma matriz $n \times n$ só com 1's em suas entradas. Procure a inversa da matriz $A = I + D$ dentre as matrizes $I + cD$ e ache o número c correto.

Resolução:

Perceba que:

$$\begin{aligned} I = (I+D)(I+cD) = I^2 + DI + cID + cD^2 &= I + (c+1)D + cD^2 \\ &\Rightarrow (c+1)D + cD^2 = 0 \end{aligned}$$

Note que D^2 é uma matriz com n em todas as suas entradas. Assim, $(c+1)D + cD^2$ é uma matriz com $nc + c + 1$ em todas as suas entradas. Assim, para $(I + cD) = (I + D)^{-1}$, temos que ter $c(n+1) + 1 = 0 \iff c = -\frac{1}{n+1}$.

5. Vamos resolver uma EDO de segunda ordem usando o que aprendemos. Considere $y'' = 5y' + 4y$ com $y(0) = C_1$ e $y'(0) = C_2$. Defina $u_1 = y$ e $u_2 = y'$. Escreva $\mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}(t)$ e ache a solução da equação.

Resolução:

Seja $\mathbf{u}'(t) = (y', y'')$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \mathbf{u}(t) \\ \Rightarrow e^{-At}\mathbf{u}'(t) - e^{-At}A\mathbf{u}(t) &= 0 \\ \Rightarrow (e^{-At}\mathbf{u}(t))' &= 0 \\ \Rightarrow e^{-At}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{c}_0 \\ \Rightarrow \mathbf{u}(t) &= e^{At}\mathbf{c}_0 \end{aligned}$$

Note que $\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$. Dessa forma, concluímos que $\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$. Agora, perceba o seguinte:

$$\begin{aligned} p_A(x) = x^2 - 5x - 4 \Rightarrow \lambda_{+,-} &= \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \\ &(\text{seja } d = \lambda_+ - \lambda_-) \\ \Rightarrow A &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d+5}{8} & \frac{d-5}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{4}{d} & \frac{d-5}{2d} \\ \frac{4}{d} & \frac{5+d}{2d} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ \Rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S\Lambda^k S^{-1}}{k!} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\Lambda)^k}{k!}\right) S^{-1} &= S \begin{bmatrix} e^{t\lambda_-} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_+} \end{bmatrix} S^{-1} \\ \Rightarrow e^{At} &= \begin{bmatrix} -e^{t\lambda_-}\frac{d+5}{8} & e^{t\lambda_+}\frac{d-5}{8} \\ e^{t\lambda_-} & e^{t\lambda_+} \end{bmatrix} S^{-1} \\ \Rightarrow e^{At} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2d}(e^{t\lambda_-}(d+5) + e^{t\lambda_+}(d-5)) & \frac{d^2-25}{16d}(e^{t\lambda_+} - e^{t\lambda_-}) \\ \frac{4}{d}(e^{t\lambda_+} - e^{t\lambda_-}) & \frac{1}{2d}(e^{t\lambda_+}(d+5) + e^{t\lambda_-}(d-5)) \end{bmatrix} \\ &(\text{seja } e^{\lambda_+} = A \text{ e } e^{\lambda_-} = B) \\ \Rightarrow e^{At} &= \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{bmatrix} B^t\lambda_+ - A^t\lambda_- & A^t - B^t \\ 4(A^t - B^t) & A^t\lambda_+ - B^t\lambda_- \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{u}(t) &= \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{bmatrix} B^t\lambda_+ - A^t\lambda_- & A^t - B^t \\ 4(A^t - B^t) & A^t\lambda_+ - B^t\lambda_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{C_1(B^t\lambda_+ - A^t\lambda_-) + C_2(A^t - B^t)}{\sqrt{41}} \end{aligned}$$

6. Se A é simétrica e todos seus autovalores são iguais a λ. O que podemos dizer sobre A?

Resolução:

Pelo teorema espectral, existe uma matriz ortogonal Q tal que $A = Q\Lambda Q^T$, sendo Λ uma matriz diagonal com os autovalores de A na diagonal. Assim, $A = Q\Lambda Q^T = \lambda QIQ^T = \lambda QQ^T = \lambda I$, ou seja, A é múltipla da identidade.

7. Suponha que C é positiva definida e que A tenha as colunas LI. Mostre que A^TCA é positiva definida.

Resolução:

Primeiro, note que $(A^TCA)^T = A^T(A^TC)^T = A^TC^TA = A^TCA$, ou seja, A^TCA é simétrica.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} | & \dots & | \\ \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \\ | & \dots & | \end{bmatrix}$$

sendo $\mathbf{a}_i$ vetores de $\mathbb{R}^m$, colunas de A. Seja $\mathbf{x}$ um vetor não-nulo qualquer de $\mathbb{R}^n$, então $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, e $(A\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^TA^T = \mathbf{y}^T$, sendo $\mathbf{y}$ um certo vetor de $\mathbb{R}^m$. Assim, para qualquer vetor não-nulo $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^TA^TCA\mathbf{x} = \mathbf{y}^TC\mathbf{y}$ que, por C ser positiva definida, é maior que 0, já que $\mathbf{y}$ é não-nulo (já que A tem colunas LI, ou seja, tem núcleo trivial).

8. Quais são os autovalores de A se ela for similar a A^{-1}?

Resolução:

Pela proposição, existe uma matriz invertível S tal que $A = SA^{-1}S^{-1}$. Note que, sendo p_A o polinômio característico de A, $p_A(x) = \det(A - xI) = \det(SA^{-1}S^{-1} - xI) = \det(S(A^{-1} - xI)S^{-1}) = \det S \cdot \det S^{-1} \det(A^{-1} - xI) = p_{A^{-1}}(x)$, ou seja, A e A^{-1} possuem mesmo polinômio característico e, consequentemente, mesmos autovalores.

Agora, seja λ um autovalor de A associado ao autovetor $\mathbf{v}$. Então, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow A^{-1}A\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v} \Rightarrow A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$, ou seja, se x é autovalor de A, x^{-1} será de A^{-1}.

Juntando esses dois fatos, temos que os autovalores formam um conjunto Λ tal que, se $x \in \Lambda$, $x^{-1} \in \Lambda$. Assim, podemos concluir que o produto dos autovalores, isto é, o determinante de A, é 1.

9. Suponha que A é quadrada, mostre que $\sigma_1 \geq |\lambda|$, para qualquer autovalor λ de A, onde σ_1 é o primeiro valor singular de A.

Resolução:

Digamos que a decomposição SVD de A seja $U\Sigma V^T$. Note que, sendo $\mathbf{v}_j$ coluna de V, $A\mathbf{v}_i = U\Sigma(\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n^T\mathbf{v}_i) = U(0, \dots, \sigma_i, \dots, 0) = \sigma_i\mathbf{u}_i$, sendo $\mathbf{u}_i$ coluna de U.

Assim, sendo λ e $\mathbf{x}$ autovalor e autovetor de A, temos que $|A\mathbf{x}|^2 = |\lambda\mathbf{x}|^2 = \lambda^2|\mathbf{x}|^2$. Por outro lado, como V é ortogonal, suas colunas formam base ortonormal, assim, existem $c_1, \dots, c_n$ tais que $\mathbf{x} = \sum_i c_i\mathbf{v}_i$. Assim, $A\mathbf{x} = \sum_i Ac_1\mathbf{v}_1 = \sum_i c_i\sigma_i\mathbf{u}_i \Rightarrow |A\mathbf{x}|^2 = (A\mathbf{x})^2(A\mathbf{x}) = \sum_i c_i\sigma_i\mathbf{u}_i^T \sum_i c_i\sigma_i\mathbf{u}_i = \sum_i c_i^2\sigma_i^2$. Note também que $|x|^2 = \sum_i c_iv_i^T \sum_i c_iv_i = \sum_i c_i^2$. Logo, $|A\mathbf{x}|^2 \leq \sigma_1^2(\sum_i c_i^2) = \sigma_1^2|\mathbf{x}|^2$. Como $|A\mathbf{x}|^2 = \lambda^2|\mathbf{x}|^2$, temos que $\lambda^2 \leq \sigma_1^2$, ou seja, $|\lambda| \leq \sigma_1$.

10. Ache a decomposição SVD da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Note que $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então,

$$C = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow p_C(x) = x^2(x-2)^2 \Rightarrow \lambda \in \{0, 2\}$$

$$\Rightarrow V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$