Álgebra Linear - Lista de Exercícios 3 (RESOLUÇÃO)

Luís Felipe Marques

Agosto de 2022

1. Ache a decomposição LU da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:
Eliminaremos a matriz aumentada $[A|I]$ para chegar a $[U|E]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 2L_1}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 6/5 L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8/5 & -6/5 & 1 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir disso, invertemos E para obter U.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 8/5 & -6/5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -8/5 & 6/5 & 1 \end{bmatrix} = L$$

2. Ache a decomposição LU da matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Qual condição para a, b, c, d para que A ter quatro pivots?
Resolução:
Eliminemos normalmente $[A|I]$ até chegarmos a $[U|E]$ e depois analisar o que obtemos.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & b & b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[i=2,3,4]{L_i - L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & c-a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & d-a & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[i=3,4]{L_i - L_2}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & d-b & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 - L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & a & a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a & b-a & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b & c-b & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, a, $b-a$, $c-b$, e $d-c$ são os candidatos a pivot. Para realmente o serem, devemos ter $\begin{cases} a \neq 0 \\ b-a \neq 0 \\ c-b \neq 0 \\ d-c \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq a \\ c \neq b \\ d \neq c \end{cases}$, que são as condições para A ter quatro pivots.

3. Ache a uma matriz de permutação P tal que:

(a) P é 3×3, $P \neq I$ e $P^3 = I$.

(b) S é 4×4 e $S^4 \neq I$

Resolução:

(a) Seja $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Note:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I.$$

(b) Considere $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Perceba que:

$$S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I.$$

4. Seja A uma matriz 4×4. Quantas entradas de A podem ser escolhidas independentemente caso A seja

(a) simétrica ($A^T = A$)?

(b) anti-simétrica ($A^T = -A$)?

Resolução:

(a)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} \\ a_2 & a_6 & a_{10} & a_{14} \\ a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} \\ a_4 & a_8 & a_{12} & a_{16} \end{bmatrix}$$

Assim, temos

$$\begin{cases} a_2 = a_5 \\ a_3 = a_9 \\ a_4 = a_{13} \\ a_7 = a_{10} \\ a_8 = a_{14} \\ a_{12} = a_{15} \end{cases}.$$

Ou seja, 6 das 16 entradas são dependentes, logo podemos escolher no máximo 10 entradas.

(b) Note que se A é anti-simétrica, então $A = -A^T$.

$$-\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_5 & -a_9 & -a_{13} \\ -a_2 & -a_6 & -a_{10} & -a_{14} \\ -a_3 & -a_7 & -a_{11} & -a_{15} \\ -a_4 & -a_8 & -a_{12} & -a_{16} \end{bmatrix}$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_5 \\ a_3 = a_9 \\ a_4 = a_{13} \\ a_7 = a_{10} \\ a_8 = a_{14} \\ a_{12} = a_{15} \end{cases} \begin{cases} a_1 = -a_1 \\ a_6 = -a_6 \\ a_{11} = -a_{11} \\ a_{16} = -a_{16} \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_6 = 0 \\ a_{11} = 0 \\ a_{16} = 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, as entradas da diagonal principal já são definidos. Assim, temos apenas 6 entradas livres para escolha.

5. Suponha que A já é triangular inferior com 1's na diagonal. Mostre que $U = I$.

Resolução:

Note que I é uma matriz diagonal superior.

Provaremos que a decomposição LU é única. Digamos que hajam matrizes triangulares inferiores de diagonal unitária L_1 e L_2 e matrizes triangulares superiores U_1 e U_2 tais que $A = L_1U_1 = L_2U_2$. Note que toda matriz triangular T pode ser escalonada por uma matriz de eliminação E (seja por Gauss ou Gauss-Jordan) de tal forma que $ET = I$. Assim, $E = T^{-1}$, o que prova que toda matriz triangular é invertível. Assim,

$$L_1U_1 = L_2U_2$$
$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

Como o produto de matrizes triangulares inferiores é também triangular inferior (e o mesmo se aplica às triangulares superiores), a última equação indica que temos uma triangular inferior igual a uma triangular superior, o que só é possível se ambas forem diagonais. Porém, como L_1 e L_2 têm diagonais unitárias, ambas as matrizes diagonais também têm diagonais unitárias, ou seja, são a identidade.

Assim, $U_2U_1^{-1} = I \iff U_2 = U_1$ e $L_1 = L_2$. Logo, toda decomposição LU é única.

Para a matriz A do enunciado, tome $L = A$ e $U = I$, que satisfazem $A = LU$. Como A já é triangular inferior de diagonal unitária, ela satisfaz os requisitos de L, o que prova que toda decomposição LU de A tem U como I.

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Qual é o número c que leva o segundo pivô a ser 0? O que podemos fazer para resolver tal problema? Ainda é válido $A = LU$?

(b) Qual é o número c que leva o terceiro pivô a ser 0? É possível resolver esse problema?

Resolução:

(a) Inicialmente, faremos a eliminação de A.

$$\begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2-2L_1} \begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 4-2c & 1\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-3L_1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 4-2c & 1\\ 0 & 5-3c & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-\frac{5-3c}{4-2c}L_2} \begin{bmatrix}1 & c & 0\\ 0 & 4-2c & 1\\ 0 & 0 & \frac{-1+c}{4-2c}\end{bmatrix}$$

Para não termos o segundo pivô, é necessário $4-2c=0 \iff c=2$.

Para resolvermos esse problema, precisamos permutar as linhas da matriz. Na terceira matriz, após o segundo passo de eliminação, por exemplo, precisamos trocar as segunda e terceira linhas. Veja:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Dessa forma, $A=LU$ já não é mais válido, sendo $PA=LU$ ainda válido na situação.

7. Se A e B são simétricas, quais dessas matrizes são também simétricas:

(a) A^2-B^2;

(b) $(A+B)(A-B)$;

(c) ABA;

(d) $ABAB$.

Resolução:

(a) Seja $C=A^2$.

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}a_{ki}=c_{ji}$$

Assim, o quadrada de uma matriz simétrica é também simétrica. Assim, como a combinação linear de matrizes simétricas é também simétrica, A^2-B^2 **é simétrica**.

(b) Como $(A+B)(A-B)=A^2-B^2+BA-AB$ e A^2-B^2 é simétrica, basta verificar se $BA-AB$ é simétrica.

$(BA-AB)^T=(BA)^T-(AB)^T=A^TB^T-B^TA^T=AB-BA$. Ou seja, $BA-AB$ é anti-simétrica.

Assim, $(A+B)(A-B)$ **não é sempre simétrica**. Como exemplo, podemos ter $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, onde $(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

(c) Sejam $C = BA$ e $D = AC$. Assim:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} \\ d_{ij} &= \sum_{m=1}^{n} a_{im}c_{mj} \\ &= \sum_{m=1}^{n} a_{im} \sum_{k=1}^{n} b_{mk}a_{kj} \\ &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{im}b_{mk}a_{kj} \\ &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{mi}b_{km}a_{jk} \\ &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{km}a_{mi} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{jk}b_{km}a_{mi} \\ &= d_{ji}. \end{aligned}$$

Ou seja, ABA **é simétrica**.

(d) Tome $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, $ABAB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, que não é simétrica. Assim, $ABAB$ **não é sempre simétrica**.

8. Prove que é sempre possível escrever $A = B + C$, onde B é simétrica e C anti-simétrica. *Dica: B e C são combinações simples de A e A^T.*

Resolução:

Tome $B = \frac{A+A^T}{2}$ e $C = \frac{A-A^T}{2}$. Assim, $B^T = \frac{A^T+A}{2} = B$ e $C^T = \frac{A^T-A}{2} = -C$, o que implica que B é simétrica e C é anti-simétrica. Além disso, $B + C = \frac{A+A^T+A-A^T}{2} = \frac{2A}{2} = A$.

9. Seja A uma matriz em blocos:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde cada A_{ii} é quadrada $n \times n$ com A_{11} invertível. Ache L e U em blocos tal que $A = LU$:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

onde L_{11}, L_{22} são triangulares inferiores com 1's na diagonal e U_{11}, U_{22} são triangulares superiores.

Resolução:

Primeiro, notamos que pelas definições dadas, todos os blocos são da forma $n \times n$, ou seja, podemos multiplicá-las e somá-las sem grandes preocupações. Para seguir, precisamos supor que A_{11} e $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ podem ser decompostos em LU, digamos $A_{11} = L_1U_1$ e $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = L_2U_2$.

Começemos eliminando A:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - A_{21}A_{11}^{-1}L_1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1U_1 & A_{12} \\ \mathbf{0} & L_2U_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & L_1^{-1}A_{12} \\ \mathbf{0} & U_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ A_{21}(L_1U_1)^{-1}L_1 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & L_1^{-1}A_{12} \\ \mathbf{0} & U_2 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ A_{21}U_1^{-1} & L_2 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 & L_1^{-1}A_{12} \\ \mathbf{0} & U_2 \end{bmatrix}}_{U}
\end{aligned}
$$