Álgebra Linear - Lista de Exercícios 4 (RESOLUÇÃO)

Luís Felipe Marques

Agosto de 2022

1. Sejam S e T dois subespaços de um espaço vetorial V.

(a) Defina $S+T=\{s+t; s\in S \text{ e } t\in T\}$. Mostre que $S+T$ é um subespaço vetorial.

(b) Defina $S\cup T=\{x; x\in S \text{ ou } x\in T\}$. Argumente que $S\cup T$ não é necessariamente um subespaço vetorial.

(c) Se S e T são retas no $\mathbb{R}^3$, o que é $S+T$ e $S\cup T$?

Resolução:

(a) Devemos mostrar que $A=S+T$ é um subespaço vetorial. Para isso devemos ter:

i. $x,\, y\in A \Rightarrow x+y\in A$;

ii. $x\in A \Rightarrow \alpha x\in A \;\forall\; \alpha\in\mathbb{R}$.

Sejam $x=s_1+t_1$ e $y=s_2+t_2$, para $s_1,\, s_2\in S$ e $t_1,\, t_2\in T$. Então, $x+y=(s_1+s_2)+(t_1+t_2)$. Como S é subespaço, $s_1+s_2\in S$, e o mesmo vale para t_1 e t_2 para T, o que implica que $x+y$ é da forma s_3+t_3, ou seja, pertence a $S+T$.

Além disso, $\alpha x=\alpha(s_1+t_1)=\alpha s_1+\alpha t_1$. Novamente, como S e T são subespaços, $\alpha s_1\in S$ e αt_1 $\in T$. Portanto, x é da forma s_4+t_4, ou seja, pertence a $S+T$.

Daí, $S+T$ é também um subespaço.

(b) Tome, por exemplo, $V=\mathbb{R}^2$, $S=\left\{\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix};\ \forall\ a\in\mathbb{R}\right\}$, $T=\left\{\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix};\ \forall\ b\in\mathbb{R}\right\}$. Daí, podemos escolher $s\in\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in S$ e $t=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\in T$. Daí, para $S\cup T$ ser subespaço, $s+t$ deve também pertencer a $S\cup T$. Entretanto, $s+t=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\notin S\cup T$, já que não é nem da forma $\begin{bmatrix}a\\0\end{bmatrix}$ nem da forma $\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}$. Portanto, $S\cup T$ não é sempre um subespaço.

(c) Como $S+T$ representa as combinações lineares de vetores obtidas por uma componente em S e outra em T, caso as retas sejam distintas, teremos como resultado todo o plano definido por essas duas retas. Caso S e T representem a mesma reta, teremos apenas essa reta como resultado.

Por outro lado, como $S\cup T$ não é fechado para a soma vetorial, estamos restritos às próprias retas.

2. Como o núcleo $N(C)$ é relacionado aos núcleos $N(A)$ e $N(B)$, onde $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$?

Resolução:

Seja $\mathbf{x}$ um vetor. Assim, $C\mathbf{x}=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}A\mathbf{x}\\A\mathbf{x}\end{bmatrix}$. Portanto, $C\mathbf{x}$ é igual a $\mathbf{0}$ se, e somente se, $\begin{cases}A\mathbf{x}=\mathbf{0}\\B\mathbf{x}=\mathbf{0}\end{cases} \iff \begin{cases}x\in N(A)\\x\in N(B)\end{cases}$. Ou seja, $N(C)=N(A)\cup N(B)$.

3. Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7 & 9\\0 & 4 & 1 & 7\\2 & -2 & 11 & -3\end{bmatrix}.$$

(a) Ache a sua forma escalonada reduzida.

(b) Qual é o posto dessa matriz?

(c) Ache uma solução especial para a equação $Ax = 0$.

Resolução:

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -12 & -3 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3+3L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1-5/4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 23/4 & 1/4 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 23/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Como A possui 2 linhas não-nulas quando reduzida por linhas, seu posto é 2.

(c) Em particular, se $\tilde{A}$ é a forma escalonada reduzida por linhas de A, e $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, já que existe uma matriz de eliminação $E_{3\times3}$ tal que $EA = \tilde{A} \Rightarrow A = E^{-1}\tilde{A}$. Logo, podemos escolher um $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$, de tal forma que:

$$\begin{cases} 23/4x + 1/4y = -1 \\ 1/4x + 7/4y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3/20 \\ y = -11/20 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3/20 \\ -11/20 \end{bmatrix}$$

4. Ache a matrizes A_1 e A_2 (não triviais) tais que posto$(A_1B) = 1$ e posto$(A_2B) = 0$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix}$. Assim, podemos fazer $a = b = c = 1$, $d = -1$ para que $A_1B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, com posto 1. Para A_2, fazemos $a = c = 1$ e $b = d = -1 \Rightarrow A_2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, com posto 0.

5. Verdadeiro ou Falso:

(a) O espaço das matrizes simétricas é subespaço.

(b) O espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço.

(c) O espaço das matrizes não-simétricas ($A^T \neq A$) é um subespaço.

Resolução:

(a) Verdadeiro.
Sejam A e B matrizes simétricas. Daí, $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, o que prova que a soma de matrizes simétricas é também simétrica. Por outro lado $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, ou seja, um múltiplo de matriz simétrica é também simétrico. Logo, combinações lineares de matrizes simétricas são simétricas, o que prova o espaço formado por elas é um subespaço vetorial.

(b) Verdadeiro.
Sejam A e B matrizes anti-simétricas. Daí, $(A + B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A + B)$, ou seja, $A + B$ é anti-simétrica. Além disso, $(\alpha A)^T = -\alpha A^T$. Isso prova que o espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço vetorial.

(c) Falso.
Note $\mathbf{0}^T = \mathbf{0}$, ou seja, $\mathbf{0}$ é simétrica, e não faz parte desse subespaço, o que o torna impede de ser um subespaço vetorial, já que não possui elemento neutro.

6. Se A é 4×4 e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ (que é 4×8).

Resolução:

Para que $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $x \in \mathbb{R}^8$. Assim, $\mathbf{x}$ pode ser expresso como $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}^4$. Dessa forma, se expressarmos $A = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \\ v_4^T \end{bmatrix}$, sendo v_i^T os vetores-linha de A, temos que $B\mathbf{x} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot a + v_1 \cdot b \\ v_2 \cdot a + v_2 \cdot b \\ v_3 \cdot a + v_3 \cdot b \\ v_4 \cdot a + v_4 \cdot b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot (a+b) \\ v_2 \cdot (a+b) \\ v_3 \cdot (a+b) \\ v_4 \cdot (a+b) \end{bmatrix} =$ $A(a+b)$. Como A é inversível, $A(a+b) = \mathbf{0} \iff A^{-1}A(a+b) = A^{-1}\mathbf{0} \iff a+b = \mathbf{0} \iff b = -a$. Ou seja, todo vetor $v \in N(B)$ pode ser descrito como $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \end{bmatrix}^T$, sendo x_1, x_2, x_3, x_4 números reais quaisquer.

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:

(a) A e A^T tem os mesmos núcleos.

(b) A e A^T tem as mesmas variáveis livres.

(c) Se R é a forma escalonada de A, então R^T é a forma escalonada de A.

Resolução:

(a) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ 3a + 6b \end{bmatrix} \Rightarrow N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2a \\ a \end{bmatrix} ; \forall\ a \ \in \mathbb{R} \right\}$.

Por outro lado, $A^T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 3b \\ 2a + 6b \end{bmatrix} \Rightarrow N(A^T) = \left\{ \begin{bmatrix} -3a \\ a \end{bmatrix} ; \forall\ a \ \in \mathbb{R} \right\}$.

Ou seja, temos $N(A) \neq N(A^T)$.

(b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. $A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}$. Em $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = b$, temos z como variável livre. Por outro lado, $A^T \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Em $A^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$, não temos variáveis livres.

Assim, A e A^T têm conjuntos de variáveis livres diferentes.

(c) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq R^T$$

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$ e cujo núcleo contenha $(1, 1, 2)$.

Resolução:

É perceptível que se $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$ forem colunas da matrizes, eles fazem parte do espaço coluna. Logo, falta definir a última coluna para garantir que $(1, 1, 2)$ esteja no núcleo. Seja tal matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 3 \\ z & 5 & 1 \end{bmatrix}$. Daí,

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{bmatrix} x + 1 \\ y + 7 \\ z + 7 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 3 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de $(4,3,2,1)$.

Resolução:

Seja tal matriz $A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \\ v_4^T \end{bmatrix}$, sendo v_i vetores do $\mathbb{R}^4$. Seja $b = \begin{bmatrix} 4x \\ 3x \\ 2x \\ x \end{bmatrix}$ um múltiplo qualquer de $a = (4,3,2,1)$. Dessa forma, $Ab = 0 \iff \begin{bmatrix} v_1 \cdot xa \\ v_2 \cdot xa \\ v_3 \cdot xa \\ v_4 \cdot xa \end{bmatrix} = 0 \iff x \begin{bmatrix} v_1 \cdot a \\ v_2 \cdot a \\ v_3 \cdot a \\ v_4 \cdot a \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{bmatrix} v_1 \cdot a \\ v_2 \cdot a \\ v_3 \cdot a \\ v_4 \cdot a \end{bmatrix} = 0$. Assim, os vetores v_i devem todos ser ortogonais a a. Podemos fazer $v_1 = (1,0,-2,0)$, $v_2 = (0,1,-1,-1)$, $v_3 = (0,0,1,-2)$ e $v_4 = (1,-1,0,-1)$, e assim temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.

(a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

(b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que, para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos
$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$
Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.

Resolução:

(a) Sejam f, $g \in V^*$. Definimos $(f+g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$ e $(\alpha f)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in V$.
Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vetores quaisquer de V. Veja que $(f+g)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + g(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}) = (f+g)(\mathbf{u}) + (f+g)(\mathbf{v})$ e que $(f+g)(\alpha\mathbf{u}) = f(\alpha\mathbf{u}) + g(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \alpha g(\mathbf{u}) = \alpha(f+g)(\mathbf{u})$, ou seja, $(f+g) \in V^*$.
Além disso, $(\alpha f)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \alpha f(\mathbf{v}) = (\alpha f)(\mathbf{u}) + (\alpha f)(\mathbf{v})$ e $(\alpha f)(\beta\mathbf{u}) = \alpha f(\beta\mathbf{u}) = \alpha\beta f(\mathbf{u}) = \beta(\alpha f)(\mathbf{u}) \Rightarrow (\alpha f) \in V^*$.
Logo, V^* é um espaço vetorial.

(b) Seja $\varphi : f \to \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}$, sendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$.
Digamos que $\mathbf{v}$ seja um vetor qualquer da forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.
Por um lado, $f(\mathbf{v}) = f(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i f(e_i)$.
Por outro lado, $\langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle = \langle \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$.
Assim, $f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle$ para a φ definida. Falta provar que φ é uma bijeção.
Para isso, basta notar que $\varphi(f) = \varphi(g)$ implica que, $\forall\ \mathbf{v} \in V$, $\langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle = \langle \varphi(g), \mathbf{v} \rangle \iff f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in V$, ou seja, f e g são a mesma função linear. Isso prova que φ é injetiva.
Além disso, para $f(\sum \alpha_i e_i) = \sum x_i \alpha_i e_i$, temos $\varphi(f) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ para quaiquer x_i reais. Como podemos escolher x_i tais que $\varphi(f)$ seja qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$, φ é sobrejetiva.
Dessa forma, φ é bijetiva.