Álgebra Linear - Lista de Exercícios 2 (RESOLUÇÃO)

Luís Felipe Marques

Agosto de 2022

1. Ache a matriz de eliminação E que reduz a matriz de Pascal em uma menor:

$$E\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}.$$

Qual matriz M reduz a matriz de Pascal à matriz identidade?

Resolução:

Seja P a matriz de Pascal inicial e P' sua forma menor. Eliminaremos a matriz aumentada $[P|I]$ para chegar a $[P'|E]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\1&2&1&0&0&0&1&0\\1&3&3&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[i=2,3,4]{L_i-L_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&2&1&0&-1&0&1&0\\0&3&3&1&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{L_4-L_3}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&2&1&0&-1&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{L_3-L_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&0&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0&-1&1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow E=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

A partir disso, continuaremos eliminando $[P'|E]$ até chegarmos a $[I|M]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&0&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[i=3,4]{L_i-L_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&2&1&1&-1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{L_4-2L_3}$$
$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&-1&3&-3&1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow M=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-2&1&0\\-1&3&-3&1\end{bmatrix}$$

2. Use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz triangular inferior:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Basta eliminar $[U|I]$ até chegarmos a $[I|U^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - cL_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - bL_3}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - aL_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Para quais valores de a o método de eliminação não dará 3 pivôs?

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Façamos a eliminação normal para, então, analisar os casos críticos.

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & a-2 & a-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}$$

Assim, nossos candidatos a pivô são a, $a-2$, $a-4$. Para que assim o sejam, devemos ter

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a - 2 \neq 0 \\ a - 4 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq 4 \end{cases}.$$

Ou seja, para $a \in \{0, 2, 4\}$, a matriz dada não terá 3 pivôs em sua eliminação.

4. Mostre (com um contra-exemplo) que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. Calcule $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$ e ache a fórmula certa.

Resolução:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Note que $(A+B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Entretanto, $A^2 + 2AB + B^2 = I + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Logo, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Agora, para achar a fórmula correta, nos utilizamos da distributividade da multiplicação de matrizes:

$$\begin{aligned} (A+B)^2 = (A+B)(A+B) &= AA + AB + BA + BB \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \end{aligned}$$

5. Verdadeiro ou falso (prove ou forneça um contra-exemplo):

(a) Se A^2 está bem definida, então A é quadrada.
(b) Se AB e BA estão bem definidas, então A e B são quadradas.
(c) Se AB e BA estão bem definidas, então AB e BA são quadradas.
(d) Se $AB = B$, então $A = I$.

Resolução:

(a) Verdadeiro. Seja $A_{n\times m}$. Então $A_{n\times m}A_{n\times m}$ está bem definida $\iff m = n \iff A_{n\times \mathbf{n}}$ é uma matriz quadrada.

(b) Falso. Tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, AB e BA estão bem definidas como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, respectivamente.

(c) Verdadeiro. Sejam $A_{n\times m}$ e $B_{p\times q}$. Para que $A_{n\times m}B_{p\times q} = C_{n\times q}$ e $B_{p\times q}A_{n\times m} = D_{p\times m}$ estejam bem definidos, temos de ter $\begin{cases} m = p \\ q = n \end{cases}$. Assim, devemos ter $C_{n\times \mathbf{n}}$ e $D_{\mathbf{m}\times m}$, ou seja, são quadradas.

(d) Falso. Tome $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $AB = 2I\mathbf{0} = \mathbf{0} = B$, e $A \neq I$.

6. Escreva as matrizes 3×3 dadas por:

(a) $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
(b) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.
(c) $a_{ij} = i/j$.

Resolução:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ache uma matriz não-zero A tal que $A^2 = 0$ e uma matriz B com $B^2 \neq 0$ e $B^3 = 0$.

Resolução:

Tome $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Agora, considere $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Temos que

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 2 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 2 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^3 = \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 4\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 4\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 2 + 4\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 2 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 2 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

8. Ache as inversas de

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Sejam as matrizes A e B, respectivamente. Faremos primeiramente a eliminação $[A|I] \to [I|A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 4/3 L_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 - 7/6 L_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & -7/6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 30 L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 36 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & -7/6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 6 L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 36 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & -7/6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1/3 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 1/6 \end{cases}]{L_i / x_i} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & 6 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Note que se dividirmos A e A^{-1} em 4 subamatrizes 2×2, cada submatriz em A tem seu equivalente em A^{-1} como a inversa da submatriz (com exceção das submatrizes zero).

Agora, faremos $[B|I] \to [I|B^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{P_{14}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{P_{23}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases}]{L_i / x_i} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que a inversa de uma matriz diagonal secundária é também diagonal secundária, porém com os elementos inversos e em ordem reversa.