FGV EMAp
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

# O Teorema de Perron-Frobenius e Rankings Esportivos

*Luís Felipe de Almeida Marques*
*Jean Fernando Horn*

9 de Novembro de 2022

# Conteúdo

# 1 Introdução

Este relatório tem como objetivo apresentar métodos de *rankeamento* de times em competições esportivas pareadas (em que cada partida se dá entre pares de times) e as relações desses métodos com o *Teorema de Perron-Frobenius*. Também são apresentadas aplicações desses métodos com dados reais, através de implementações em *Python*.

# 2 A Motivação

O interesse geral da população em esportes leva a um interesse em perguntas como "qual o melhor time?", "quem tem mais chances de ganhar?", ou "qual o resultado mais provável?". Essas perguntas podem ser abordadas de várias maneiras, através de várias interpretações e modelagens matemáticas.

Como exemplo, temos o Campeonato Brasileiro de Futebol, discutivelmente a competição esportiva mais popular do Brasil, um campeonato em que todos os competiodores enfrentam todos os outros um mesmo número de vezes. Isso é o que chamamos de uma competição balanceada, pela igualdade em quantidades de confrontos entre pares de times.

Em contrapartida, temos a Major League Soccer, liga principal de futebol nos Estados Unidos, que segue o mesmo formato desbalanceado de outras ligas esportivas profissionais e universitárias dos Estados Unidos, em que não há garantia de que todos se enfrenterão um mesmo número de vezes, nem se todos terão a mesma quantidade de jogos ou mesmo se todos os pares de times se enfrenterão.

Surge então a necessidade de achar uma forma de comparar times nesses campeonatos *assimétricos*, e verificar se esse modelo se encaixa também nos campeonatos *mais organizados* como o Brasileirão.

Analisaremos esse problema de ordenação através de dois métodos distintos.

# 3 Método Direto

Nosso objetivo nesse método, e, de modo geral, em todos os métodos, é criar premiar cada time com uma pontuação condizente com o desempenho em partidas analisadas. Numa situação ideal, essa pontuação será influenciada pelos resultados das partidas e pela "força" dos oponentes enfrentados.

Assim, supondo que $N$ seja a quantidade de times no torneio, $n_i$ seja a quantidade de partidas disputadas pela $i$-ésima equipe, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ seja um vetor em que $\mathbf{f}_i$ é a força do $i$-ésimo time, e que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ seja um vetor em que $\mathbf{p}_i$ seja a pontuação dada ao $i$-ésimo time, podemos fazer uma modelagem inicial da forma

$$\mathbf{p}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \mathbf{f}_j, \tag{1}$$

onde $a_{ij}$ é algum número não-negativo determinado pelo resultado do confronto entre as equipes $i$ e $j$. Ou seja, resultados melhores somam mais para a pontuação, e oponentes mais fortes somam mais para a pontuação (a não ser que o resultado tenha representação 0). Além disso, podemos notar que o fator $\frac{1}{n_i}$ "tira a média" das partidas, impedindo que um time simplesmente jogue mais jogos para garantir mais pontos.

Esse modelo por si só é bem maleável, já que não definimos como os valores $a_{ij}$ (ou a matriz $A$ de entradas $a_{ij}$, muitas vezes chamada de *matriz de preferência*) são definidos. Para jogos em que não há empate, como basquete ou vôlei, temos como o exemplo o modelo em que $a_{ij} = 1$ se o time $i$ ganha, e $a_{ij} = 0$ caso $i$ perca. No caso do esporte permitir empates, como é o caso do futebol, podemos ter $a_{ij} = \frac{1}{2}$.

## 3.1 A intuição direta

Agora, podemos começar a solucionar esse vetor de pontuações $\mathbf{p}$ através de uma suposição bem simples: a pontuação deve ser diretamente proporcional à força, isto é:

$$\mathbf{p} = B\mathbf{f} = \lambda \mathbf{f}, \tag{2}$$

onde $B$ é a matriz de entradas $a_{ij}/n_i$, ou seja, uma matriz de preferência balanceada para a quantidade de jogos de cada time. Desta forma, o vetor de pontuação $\mathbf{p}$ será um autovetor da matriz positiva $B$.

## 3.2 O Teorema de Perron-Frobenius

O que nos garante que o autovetor $\mathbf{p}$ existe é o referido teorema. Vamos enunciá-lo e prová-lo:

**Teorema** (Perron-Frobenius)**.** *Se $A$ é uma matriz não-trivial e tem entradas não-negativas, então $A$ possui um autovetor $\boldsymbol{v}$ de entradas não-negativas, correspondente a um autovalor positivo $\lambda$ tal que nenhum outro autovalor de $A$ o ultrapassa em módulo. Além disso, se a matriz $A$ é irredutível, o autovetor $\boldsymbol{v}$ tem entradas estritamente positivas, é único e simples, e o autovalor correspondente é estritamente maior que outros autovalores de $A$ em módulo.*

*Demonstração.* Antes de tudo, vamos fazer algumas definições:

- chamaremos de vetor (ou matriz) positivo (ou positiva) aquele que tiver apenas entradas positivas (e de vetor/matriz não-negativo aquele com entradas não-negativas).
- $\mathbf{p} > \mathbf{q}$ sempre que $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ for vetor positivo e $\mathbf{p} \geq \mathbf{q}$ sempre que $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ for vetor não-negativo.
- uma matriz $A$ é dita irredutível se não existe uma matriz de permutação $P$ (ou seja, $P^T = P^{-1}$) tal que:
$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix}$$
onde $A_{11}$, $A_{12}$, $\mathbf{0}$ e $A_{22}$ são matrizes bloco, e $A_{11}$ e $A_{22}$ são matrizes quadradas.

Assim, como em nossa matriz de preferência $B$, $b_{ij} = 0$ representa uma derrota, nossa matriz será irredutível se, e só se, não existirem conjuntos de times $G$ e $D$ tal que não há uma vitória de algum time de $D$ sobre algum time de $G$. Como corolário, não podemos ter um time apenas com derrotas caso queiramos manter a matriz de preferência irredutível.

Começemos provando um truque muito útil: se $A$ é matriz $N \times N$ não-negativa e irredutível, então:

$$(I + A)^{N-1} > 0.$$

Para provar, considere o vetor qualquer $\mathbf{y} \geq 0$ e defina $\mathbf{z}$ como $(I + A)\mathbf{y} = \mathbf{y} + A\mathbf{y}$. Como $A \geq 0$, $A\mathbf{y} \geq 0$ e, assim, $\mathbf{z}$ tem, ao menos, tantas entradas não-nulas quanto $\mathbf{y}$. Provaremos que, se $\mathbf{y}$ já não for positivo, então certamente $\mathbf{z}$ tem mais entradas não-nulas que $\mathbf{y}$.

Fazendo uma permutação consistente das entradas (tanto nos vetores, quanto nas colunas e linhas da matriz coordenadamente), podemos rescrever:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Onde $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$, com $k < N$, e sendo $\mathbf{u} > 0$. Supondo que $\mathbf{z}$ não tem mais entradas não-nulas que $\mathbf{y}$, temos $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, com $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$. Além disso, temos:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

sendo $A_{11}$ uma matriz $k \times k$ e $A_{22}$ é $(N-k) \times (N-k)$. Assim, $\mathbf{z} = \mathbf{y} + A\mathbf{y}$ é igual a $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{u} + A_{12}\mathbf{0} \\ A_{21}\mathbf{u} + A_{22}\mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} + A_{11}\mathbf{u} \\ A_{21}\mathbf{u} \end{bmatrix}$, o que implica que $A_{21}\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{u} > 0$, temos que $A_{21}\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff A_{21} = \mathbf{0}$, o que é absurdo, pela definição de matrizes irredutíveis.

Logo, $\mathbf{z} = (I + A)\mathbf{y}$ tem mais entradas não-nulas que $\mathbf{y}$. Indutivamente, temos que $(I + A)^{N-1}\mathbf{y} > 0$ para todo $\mathbf{y} \geq 0$. Variando $\mathbf{y}$ sobre $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$, temos que $(I + A)^{N-1} > 0$.

♦

Agora, considere $A$ como uma matriz $N \times N$ não-negativa irredutível e seja $r(\mathbf{x})$ uma função, definida sobre os vetores não-nulos $\mathbf{x} \geq 0$ e de $N$ entradas, definida como:

$$r(\mathbf{x}) = \min_{\substack{1 \leq i \leq N \\ x_i \neq 0}} \frac{(A\mathbf{x})_i}{\mathbf{x}_i}.$$

Note que $\mathbf{x}_j r(\mathbf{x}) \leq (A\mathbf{x})_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, N$, com igualdade para ao menos um desses $j$. Assim, $r(\mathbf{x})\mathbf{x} \leq A\mathbf{x}$ e, para todo $k > r(\mathbf{x})$, $k\mathbf{x} \not\leq A\mathbf{x}$ (ou seja, $r(\mathbf{x})$ é o maior $\lambda$ que torna $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$ não-negativo).

Seja $\mathcal{D}$ o domínio de $r$, ou seja, o conjunto dos vetores de $N$ entradas, não-negativos e diferentes da identidade aditiva. Vamos definir o número $M$ da seguinte forma:

$$M = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} r(\mathbf{x}).$$

Como $r(\alpha\mathbf{x}) = r(\mathbf{x})$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, temos que, sendo $\mathcal{S}$ o subconjunto de $\mathcal{D}$ com os elementos de $\mathcal{D}$ com norma euclidiana igual a 1,

$$M = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} r(\mathbf{x}).$$

Perceba que, caso $r(\mathbf{x})$ fosse uma função contínua sobre $\mathcal{S}$, teríamos que $M = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} r(\mathbf{x})$. Porém, não temos essa garantia, pois $r$ pode ter discontinuidades quando as entradas de $\mathbf{x}$ se tornam 0.

Assim, vamos nos ater ao conjunto $\mathcal{U}$ dos vetores $\mathbf{y}$ definidos por $\mathbf{y} = (I+A)^{N-1}\mathbf{x} \; \forall \; \mathbf{x} \in \mathcal{S}$.

Pelo truque já demonstrado, todos os elementos de $\mathcal{U}$ serão vetores positivos, assim, $\mathcal{U}$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{D}$.

Agora, tome um $\mathbf{y}$ qualquer de $\mathcal{U}$. Então, existe $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ de tal forma que

$$\mathbf{y}r(\mathbf{x}) = (I+A)^{N-1}\mathbf{x}r(\mathbf{x}) \leq (I+A)^{N-1}A\mathbf{x}$$

já que $r(\mathbf{x})\mathbf{x} \leq A\mathbf{x}$. Como $(I+A)^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} A^k$ (uma soma de potências de $A$), temos que $(I+A)^{N-1}$ comuta com $A$, o que implica que

$$\mathbf{y}r(\mathbf{x}) \leq (I+A)^{N-1}A\mathbf{x} = A(I+A)^{N-1}\mathbf{x} = A\mathbf{y}$$

Assim, temos que $r(\mathbf{x})\mathbf{y} \leq A\mathbf{y}$ para todos os pares $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{S} \times \mathcal{U}$.

Como $r(\mathbf{y})$ é o maior número $\lambda$ tal que $\lambda\mathbf{y} \leq A\mathbf{y}$, temos que $r(\mathbf{x}) \leq r(\mathbf{y})$. Desta forma,

$$\begin{aligned} M = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}} r(\mathbf{x}) &\leq \sup_{\mathbf{y}\in\mathcal{U}} r(\mathbf{y}) \\ &= \max_{\mathbf{y}\in\mathcal{U}} r(\mathbf{y}) \text{ (já que } \mathcal{U} \text{ é fechado)} \end{aligned}$$

Porém, como $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$,

$$\max_{\mathbf{y}\in\mathcal{U}} r(\mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}} r(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{D}} r(\mathbf{x})$$

Logo, $M = \max_{\mathbf{y}\in\mathcal{U}} r(\mathbf{y})$, e há um vetor positivo $\mathbf{v}$ tal que $M = r(\mathbf{v})$. Mostraremos que $M$ é autovalor de $A$ e que o vetor $\mathbf{v}$ é autovetor de $A$ associado a $M$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$. Assim, seja $\mathbf{w} = (I+A)^{N-1}\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{w} \in \mathcal{U}$. Já sabemos que $A\mathbf{v} - M\mathbf{v} \geq 0$. Supondo que não tenhamos autovetor e autovalor nessa situação, temos que $A\mathbf{v} - M\mathbf{v} \neq 0$. Assim,

$$
\begin{aligned}
(I+A)^{N-1}(A\mathbf{v} - M\mathbf{v}) &> 0 \\
\Rightarrow (I+A)^{N-1}A\mathbf{v} - M(I+A)^{N-1}\mathbf{v} &> 0 \\
\Rightarrow A(I+A)^{N-1}\mathbf{v} - M\mathbf{w} &> 0 \\
\Rightarrow A\mathbf{w} - M\mathbf{w} &> 0
\end{aligned}
$$

Daí, $A\mathbf{w} > M\mathbf{w}$, o que implica que $M < r(\mathbf{w})$, um absurdo pela maximalidade de $M$. Assim, $M$ e $\mathbf{v}$ são autovalor e autovetor de $A$.

Por fim, provemos que $M$ é o raio espectral de $A$ (ou seja, qualquer outro autovalor tem módulo menor ou igual a $M$). Supondo $\alpha$ como autovalor e $\mathbf{z}$ como autovetor de $A$, temos, pelo fato de $\mathbf{z} \neq 0$ e $A \geq 0$, que

$$
\begin{aligned}
\alpha\mathbf{z} &= A\mathbf{z} \\
\Rightarrow |\alpha||\mathbf{z}| &= |A\mathbf{z}| \leq A|\mathbf{z}|,
\end{aligned}
$$

onde, se $\mathbf{w}$ é um vetor, $\|\mathbf{w}\|$ é o vetor obtido ao substituir cada entrada de $\mathbf{w}$ pelo módulo dessa entrada. Assim, temos $|\alpha||\mathbf{z}| \leq A|\mathbf{z}| \Rightarrow |\alpha| \leq r(|\mathbf{z}|) \leq M$, como queríamos demonstrar.

□

Note que a demonstração se retém às matrizes não-negativas irredutíveis. No caso de redutibilidade, a dependência contínua entre os autovalores e as entradas da matriz permitem aproximar uma matriz não-negativa redutível por matrizes positivas. Assim, nesse caso mais geral, só não teremos garantia que nosso autovalor definido é o único de módulo igual ao raio espectral de $A$, e nem se o autovetor correspondente será positivo (mas com certeza será não-negativo).

### 3.3 Aplicando o método direto num exemplo real

Agora que já temos a base teórica necessária para criar nosso ranking, podemos prosseguir aplicando num exemplo prático. Usaremos o Brasileirão 2021 em seu estado atual (27 de outubro de 2022).

Para efeito demonstrativo, aqui está a tabela de pontuação no momento:

| Pos. | Equipes | P | J | V | E | D | GP | GC | SG |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Palmeiras | 74 | 34 | 21 | 11 | 2 | 59 | 22 | +37 |
| 2 | Internacional | 64 | 34 | 17 | 13 | 4 | 52 | 30 | +22 |
| 3 | Flamengo | 61 | 34 | 18 | 7 | 9 | 56 | 32 | +24 |
| 4 | Fluminense | 58 | 34 | 17 | 7 | 10 | 55 | 40 | +15 |
| 5 | Corinthians | 57 | 33 | 16 | 9 | 8 | 39 | 32 | +7 |
| 6 | Athletico Paranaense | 51 | 34 | 14 | 9 | 11 | 41 | 43 | –2 |
| 7 | Atlético Mineiro | 48 | 33 | 12 | 12 | 9 | 38 | 33 | +5 |
| 8 | Botafogo | 47 | 34 | 13 | 8 | 13 | 36 | 38 | –2 |
| 9 | São Paulo | 47 | 33 | 11 | 14 | 8 | 46 | 35 | +11 |
| 10 | América Mineiro | 46 | 34 | 13 | 7 | 14 | 33 | 36 | –3 |
| 11 | Fortaleza | 45 | 33 | 12 | 9 | 12 | 34 | 33 | +1 |
| 12 | Santos | 43 | 34 | 11 | 10 | 13 | 40 | 33 | +7 |
| 13 | Goiás | 42 | 33 | 10 | 12 | 11 | 37 | 43 | –6 |
| 14 | Red Bull Bragantino | 41 | 34 | 10 | 11 | 13 | 46 | 47 | –1 |
| 15 | Coritiba | 35 | 33 | 10 | 5 | 18 | 33 | 53 | –20 |
| 16 | Ceará | 34 | 34 | 6 | 16 | 12 | 30 | 36 | –6 |
| 17 | Atlético Goianiense | 33 | 33 | 8 | 9 | 16 | 33 | 49 | –16 |
| 18 | Cuiabá | 31 | 33 | 7 | 10 | 16 | 25 | 37 | –12 |
| 19 | Avaí | 28 | 33 | 7 | 7 | 19 | 28 | 55 | –27 |
| 20 | Juventude | 21 | 33 | 3 | 12 | 18 | 26 | 60 | –34 |

Note que a ordenação é feita pela pontuação (P), que é determinada a partir da fórmula $P = 3V + E$, onde $V$ é a quantidade de vitórias do time, e $E$ a quantidade de empates (ou seja, nesse modelo, três empates equivalem uma vitória). Note também que a quantidade de jogos em que cada time participou (J) varia, já que, apesar do campeonato ser completo, cada time tem seu calendário que pode contemplar outras competições.

Para criar nossa matriz de preferência, usaremos uma tabela que mostra os resultados de cada um dos jogos anteriores:

| | AMM | ATP | ATG | ATM | AVA | BOT | CEA | COR | CTB | CUI | FLA | FLU | FOR | GOI | INT | JUV | PAL | RBB | SAN | SPA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| América-MG | — | 1–0 | R–38 | 1–1 | 3–1 | 1–1 | 0–2 | 1–0 | 2–0 | 2–1 | 1–2 | 0–0 | 1–2 | 1–0 | R–35 | 4–1 | 0–1 | 0–3 | 1–0 | 1–2 |
| Athletico-PR | 1–1 | — | 4–1 | 0–1 | 2–1 | R–38 | 1–0 | 1–1 | 1–0 | 2–2 | 1–0 | 1–0 | 1–1 | R–35 | 0–0 | 2–0 | 1–3 | 4–2 | 2–2 | 1–0 |
| Atlético-GO | 0–1 | R–37 | — | 0–2 | 2–1 | 1–1 | 1–0 | 0–1 | 2–0 | 1–1 | 1–1 | 3–2 | 0–1 | 0–1 | 1–2 | 3–1 | 1–1 | 2–1 | R–35 | 1–2 |
| Atlético-MG | 1–2 | 2–3 | 2–0 | — | 2–1 | R–36 | 0–0 | 1–2 | 2–2 | R–37 | 2–0 | 2–0 | 3–2 | 0–1 | 2–0 | R–34 | 0–1 | 1–1 | 1–1 | 0–0 |
| Avaí | 1–0 | 1–1 | 1–2 | 1–0 | — | 1–2 | R–37 | 1–1 | 2–1 | 1–2 | 1–2 | 0–3 | 3–2 | 3–2 | 0–1 | 1–2 | 2–2 | R–35 | 1–0 | 1–1 |
| Botafogo | 0–0 | 2–0 | 0–0 | 0–1 | 0–1 | — | 1–1 | 1–3 | 2–0 | R–35 | 0–1 | 0–1 | 3–1 | 1–2 | 0–1 | 1–1 | 1–3 | 2–1 | R–37 | 1–0 |
| Ceará | 1–2 | 0–0 | 1–1 | 0–0 | 1–0 | 1–3 | — | 3–1 | 1–1 | 1–1 | 2–2 | R–35 | 0–1 | 1–1 | 1–1 | R–38 | 1–2 | 0–1 | 2–1 | 0–2 |
| Corinthians | 1–1 | 2–1 | 2–1 | R–38 | 3–0 | 1–0 | R–36 | — | 3–1 | 2–0 | 1–0 | 0–2 | 1–0 | 1–0 | 2–2 | 2–0 | 0–1 | 1–0 | 0–0 | 1–1 |
| Coritiba | 1–0 | 0–1 | 2–0 | 0–1 | 1–0 | 1–0 | 1–0 | R–37 | — | 1–0 | R–36 | 3–2 | 2–1 | 3–0 | 1–1 | 2–2 | 0–2 | 2–1 | 1–2 | 1–1 |
| Cuiabá | 2–1 | 0–1 | 1–1 | 1–1 | R–34 | 2–0 | 0–0 | 1–0 | R–38 | — | 1–2 | 0–1 | 0–1 | 1–2 | 1–1 | 1–0 | R–36 | 1–1 | 0–0 | 1–1 |
| Flamengo | 3–0 | 5–0 | 4–1 | 1–0 | R–38 | 0–1 | 1–1 | R–35 | 2–0 | 2–0 | — | 1–2 | 1–2 | 1–0 | 0–0 | 4–0 | 0–0 | 4–1 | 3–2 | 3–1 |
| Fluminense | 0–2 | 2–1 | 0–2 | 5–3 | 2–0 | 2–2 | 2–1 | 4–0 | 5–2 | 1–0 | 1–2 | — | 2–1 | R–37 | 0–1 | 4–0 | 1–1 | 2–1 | 0–0 | R–36 |
| Fortaleza | 1–0 | 0–0 | R–36 | 0–0 | 2–0 | 1–3 | 0–1 | 1–0 | R–34 | 0–1 | 3–2 | 0–1 | — | 1–1 | 3–0 | 1–1 | 0–0 | R–37 | 0–0 | 1–1 |
| Goiás | 2–2 | 2–1 | 2–1 | 2–2 | 1–1 | 0–1 | 1–1 | R–32 | 1–0 | 1–0 | 1–1 | 2–3 | 0–1 | — | 1–2 | R–36 | 1–1 | 1–1 | 1–0 | R–38 |
| Internacional | 1–0 | R–36 | 1–1 | 3–0 | 0–0 | 2–3 | 2–1 | 2–2 | 3–0 | 1–0 | 3–1 | 3–0 | 2–1 | 4–2 | — | 4–0 | R–38 | 0–0 | 1–0 | 3–3 |
| Juventude | 0–1 | 1–3 | 1–1 | 1–2 | 1–1 | 2–2 | 1–0 | 2–2 | R–35 | 0–1 | R–37 | 1–0 | 1–1 | 0–0 | 1–1 | — | 0–3 | 2–2 | 1–2 | 1–2 |
| Palmeiras | R–37 | 0–2 | 4–2 | 0–0 | 3–0 | 4–0 | 2–3 | 3–0 | 4–0 | 1–0 | 1–1 | 1–1 | R–35 | 3–0 | 2–1 | 2–1 | — | 2–0 | 1–0 | 0–0 |
| RB Bragantino | R–36 | 4–2 | 4–0 | 1–1 | 4–0 | 0–1 | 1–1 | 0–1 | 4–2 | 2–1 | 1–0 | R–38 | 2–1 | 1–1 | 0–2 | 1–0 | 2–2 | — | 0–2 | 1–1 |
| Santos | 3–0 | 2–0 | 1–0 | 1–2 | R–36 | 2–0 | 0–0 | 0–1 | 2–1 | 4–1 | 1–2 | 2–2 | R–38 | 1–2 | 1–1 | 4–1 | 0–1 | 2–2 | — | 1–0 |
| São Paulo | 1–0 | 4–0 | R–34 | R–35 | 4–0 | 0–1 | 2–2 | 1–1 | 3–1 | 2–1 | 0–2 | 2–2 | 0–1 | 3–3 | R–37 | 0–0 | 1–2 | 3–0 | 2–1 | — |

Fazendo o processo do método direto premiando vitórias com 1 e empates com $\frac{1}{2}$, temos o seguinte ranking, apresentado em comparação com o ranking oficial:

| Equipes | Método Direto | Oficial |
|---|---|---|
| Palmeiras | 1 | 1 |
| Internacional | 2 | 2 |
| Flamengo | 3 | 3 |
| Fluminense | 4 | 4 |
| Corinthians | 5 | 5 |
| Atlético Mineiro | 6 | 7 |
| Athletico Paranaense | 7 | 6 |
| Fortaleza | 8 | 11 |
| São Paulo | 9 | 9 |
| Botafogo | 10 | 8 |
| América Mineiro | 11 | 10 |
| Goiás | 12 | 13 |
| Santos | 13 | 12 |
| Ceará | 14 | 16 |
| Red Bull Bragantino | 15 | 14 |
| Coritiba | 16 | 15 |
| Atlético Goianiense | 17 | 17 |
| Cuiabá | 18 | 18 |
| Avaí | 19 | 19 |
| Juventude | 20 | 20 |

É visível que as mudanças foram pontuais, já que o campeonato está quase completo. Entretanto, podemos estender esse ranquemento usando dados mais antigos, como todos os jogos da primeira divisão do Campeonato Brasileiro desde 2003:

| Ranking (Método Direto) | Pos. | Equipe | P | J | V | E | D | GP | GC | SG | Aproveitamento (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1912 | 1. | São Paulo | 1264 | 775 | 349 | 217 | 209 | 1114 | 834 | 280 | 54.36 |
| 1861 | 2. | Palmeiras | 1100 | 692 | 307 | 179 | 206 | 1006 | 802 | 204 | 52.98 |
| 1841 | 3. | Corinthians | 1149 | 737 | 312 | 213 | 212 | 947 | 780 | 167 | 51.96 |
| 1837 | 4. | Flamengo | 1216 | 776 | 335 | 211 | 230 | 1109 | 913 | 196 | 52.23 |
| 1835 | 5. | Internacional | 1155 | 738 | 321 | 192 | 225 | 989 | 806 | 183 | 52.16 |
| 1806 | 6. | Santos | 1190 | 776 | 328 | 206 | 242 | 1135 | 910 | 225 | 51.11 |
| 1795 | 7. | Cruzeiro | 1030 | 666 | 293 | 151 | 222 | 978 | 818 | 160 | 51.55 |
| 1790 | 8. | Grêmio | 1065 | 700 | 295 | 180 | 225 | 956 | 778 | 178 | 50.71 |
| 1760 | 9. | Atlético-MG | 1104 | 736 | 305 | 189 | 242 | 1072 | 942 | 130 | 50.0 |
| 1702 | 10. | Fluminense | 1111 | 776 | 302 | 205 | 269 | 1039 | 984 | 55 | 47.72 |
| 1683 | 11. | Bragantino | 150 | 110 | 37 | 39 | 34 | 151 | 133 | 18 | 45.45 |
| 1676 | 12. | Athletico-PR | 1053 | 738 | 293 | 174 | 271 | 974 | 917 | 57 | 47.56 |
| 1613 | 13. | São Caetano | 236 | 172 | 65 | 41 | 66 | 209 | 199 | 10 | 45.73 |
| 1584 | 14. | Goiás | 727 | 547 | 199 | 130 | 218 | 750 | 776 | -26 | 44.3 |
| 1582 | 15. | Barueri | 49 | 38 | 12 | 13 | 13 | 59 | 52 | 7 | 42.98 |
| 1578 | 16. | Botafogo-RJ | 861 | 654 | 227 | 180 | 247 | 813 | 839 | -26 | 43.88 |
| 1566 | 17. | Vasco | 765 | 590 | 196 | 177 | 217 | 747 | 832 | -85 | 43.22 |
| 1523 | 18. | Figueirense | 550 | 438 | 142 | 124 | 172 | 530 | 622 | -92 | 41.85 |
| 1503 | 19. | Coritiba | 681 | 547 | 179 | 144 | 224 | 646 | 707 | -61 | 41.49 |
| 1492 | 20. | Fortaleza | 339 | 273 | 90 | 69 | 114 | 317 | 371 | -54 | 41.39 |
| 1468 | 21. | Ceará | 305 | 262 | 71 | 92 | 99 | 273 | 312 | -39 | 38.8 |
| 1466 | 22. | Paraná | 304 | 248 | 83 | 55 | 110 | 312 | 369 | -57 | 40.86 |
| 1452 | 23. | Portuguesa | 131 | 114 | 31 | 38 | 45 | 137 | 157 | -20 | 38.3 |
| 1445 | 24. | Sport | 500 | 418 | 131 | 107 | 180 | 463 | 568 | -105 | 39.87 |
| 1440 | 25. | Bahia | 458 | 388 | 115 | 113 | 160 | 430 | 512 | -82 | 39.34 |
| 1439 | 26. | Ponte Preta | 433 | 362 | 114 | 91 | 157 | 414 | 534 | -120 | 39.87 |
| 1427 | 27. | Juventude | 330 | 281 | 85 | 75 | 121 | 330 | 431 | -101 | 39.14 |
| 1416 | 28. | Vitória | 468 | 396 | 123 | 99 | 174 | 492 | 581 | -89 | 39.39 |
| 1389 | 29. | Atlético-GO | 292 | 261 | 72 | 76 | 113 | 282 | 355 | -73 | 37.29 |
| 1388 | 30. | Guarani | 147 | 130 | 36 | 39 | 55 | 140 | 180 | -40 | 37.69 |
| 1380 | 31. | Cuiabá | 78 | 71 | 17 | 27 | 27 | 59 | 74 | -15 | 36.61 |
| 1374 | 32. | Paysandu | 154 | 134 | 41 | 31 | 62 | 193 | 245 | -52 | 38.3 |
| 1356 | 33. | Chapecoense | 287 | 265 | 70 | 77 | 118 | 261 | 359 | -98 | 36.1 |
| 1354 | 34. | América-MG | 204 | 186 | 51 | 51 | 84 | 178 | 247 | -69 | 36.55 |
| 1338 | 35. | Criciúma | 188 | 168 | 50 | 38 | 80 | 194 | 264 | -70 | 37.3 |
| 1283 | 36. | Brasiliense | 42 | 42 | 10 | 12 | 20 | 49 | 68 | -19 | 33.33 |
| 1283 | 37. | Santo André | 41 | 38 | 11 | 8 | 19 | 46 | 61 | -15 | 35.96 |
| 1264 | 38. | Náutico | 200 | 190 | 54 | 38 | 98 | 224 | 318 | -94 | 35.08 |
| 1261 | 39. | Avaí | 264 | 261 | 64 | 72 | 125 | 268 | 410 | -142 | 33.71 |
| 1111 | 40. | Ipatinga | 35 | 38 | 9 | 8 | 21 | 37 | 67 | -30 | 30.7 |
| 1055 | 41. | CSA | 32 | 38 | 8 | 8 | 22 | 24 | 58 | -34 | 28.07 |
| 1044 | 42. | Grêmio Prudente | 31 | 38 | 7 | 10 | 21 | 39 | 64 | -25 | 27.19 |
| 1019 | 43. | Joinville | 31 | 38 | 7 | 10 | 21 | 26 | 48 | -22 | 27.19 |
| 964 | 44. | Santa Cruz | 59 | 76 | 15 | 14 | 47 | 86 | 145 | -59 | 25.87 |
| 555 | 45. | América-RN | 17 | 38 | 4 | 5 | 29 | 24 | 80 | -56 | 14.91 |

Onde é mais claro como o ranqueamento opera: não há favorecimento para times com mais jogos, já que normalizamos essa condição, e o aproveitamento de pontos dos times (de fórmula $(3V + E)/(3J)$) não se traduz na ordenação dos times, muito em razão pela matriz de preferência premiar uma vitória com o equivalente de dois empates, enquanto os pontos seguem a lógica de que uma vitória equivale a três empates (uma estratégia do campeonato de incentivar a competitividade).

Entretanto, há como melhorar nossa matriz de preferência.

### 3.4 Especificando a Preferência

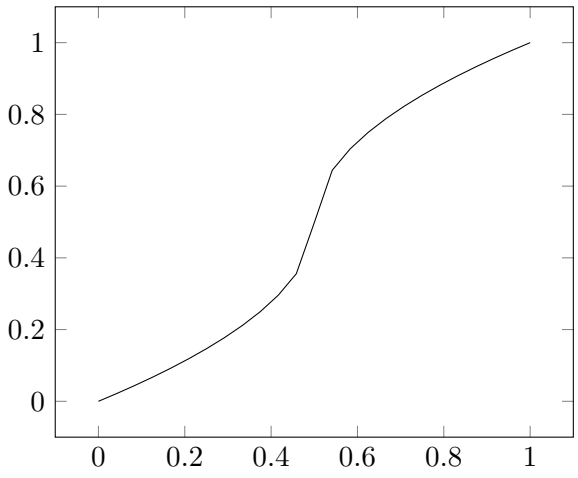
A forma como definimos nossa matriz de preferência tem alguns problemas: quando nos restringimos a uma temporada (ou uma parte dela), contamos com poucos jogos entre pares de times, o que acarreta em poucas informações sobre seus confrontos. Além disso, as vitórias passam a ser "genéricas", isto é, uma vitória por 1 a 0 vale o mesmo que uma vitória por 7 a 1, por exemplo. Um outro problema técnico enfrentado é a possibilidade de haver um time sem vitórias ou empates. Nesse caso, a matriz de preferência fica irredutível, e nossos cálculos podem se tornar mais complicados.

Dessa forma, imaginemos que numa partida entre os times $i$ e $j$, $i$ marca $G_{ij}$ gols e $j$ marca $G_{ji}$ gols. Uma boa estratégia de preferência é premiar o time $i$ com $\frac{G_{ij}+1}{G_{ij}+G_{ji}+2}$, e o time $j$, com $\frac{G_{ji}+1}{G_{ij}+G_{ji}+2}$. Desta forma, cada partida premia um total de $\frac{G_{ij}+1+G_{ji}+1}{G_{ij}+G_{ji}+2} = 1$, e cada time ganha uma quantidade não-nula de pontos. Note, porém, que a pontuação que o time $i$ ganha cresce conforme mais gols o time marca. Assim, para tornar os goleadas "menos decisivas", impedindo que os times se aproveitem indevidamente de times mais fracos, podemos utilizar uma função não-linear como

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{|2x-1|}$$

onde sgn($x$) é a função sinal (1 para números positivos, 0 para 0, e -1 para números negativos).

Essa função é interessante para nosso caso pois $h(x) > x$ para $x > \frac{1}{2}$ e $h(x) < x$ para $x < \frac{1}{2}$, $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $h\left(\frac{1}{2}+x\right) + h\left(\frac{1}{2}-x\right) = 1$, e $h(x)$ tem uma taxa de variação baixa para $x$ próximo de 0 ou 1, e alta pra $x$ perto de $\frac{1}{2}$. Abaixo, um gráfico de $y = h(x)$.



E, assim, façamos um ranking melhorado dos times da Série A desde 2003, usando

$$a_{ij} = h\left(\frac{G_{ij}+1}{G_{ij}+G_{ji}+2}\right)$$

como entradas da matriz de preferência:

| Ranking (Método Direto Melhorado) | Pos. | Equipe | P | J | V | E | D | GP | GC | SG | Aproveitamento (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1743 | 1. | São Paulo | 1264 | 775 | 349 | 217 | 209 | 1114 | 834 | 280 | 54.36 |
| 1711 | 2. | Palmeiras | 1100 | 692 | 307 | 179 | 206 | 1006 | 802 | 204 | 52.98 |
| 1702 | 3. | Internacional | 1155 | 738 | 321 | 192 | 225 | 989 | 806 | 183 | 52.16 |
| 1702 | 4. | Flamengo | 1216 | 776 | 335 | 211 | 230 | 1109 | 913 | 196 | 52.23 |
| 1696 | 5. | Corinthians | 1149 | 737 | 312 | 213 | 212 | 947 | 780 | 167 | 51.96 |
| 1695 | 6. | Santos | 1190 | 776 | 328 | 206 | 242 | 1135 | 910 | 225 | 51.11 |
| 1688 | 7. | Grêmio | 1065 | 700 | 295 | 180 | 225 | 956 | 778 | 178 | 50.71 |
| 1674 | 8. | Cruzeiro | 1030 | 666 | 293 | 151 | 222 | 978 | 818 | 160 | 51.55 |
| 1657 | 9. | Atlético-MG | 1104 | 736 | 305 | 189 | 242 | 1072 | 942 | 130 | 50.0 |
| 1625 | 10. | Bragantino | 150 | 110 | 37 | 39 | 34 | 151 | 133 | 18 | 45.45 |
| 1616 | 11. | Fluminense | 1111 | 776 | 302 | 205 | 269 | 1039 | 984 | 55 | 47.72 |
| 1607 | 12. | Athletico-PR | 1053 | 738 | 293 | 174 | 271 | 974 | 917 | 57 | 47.56 |
| 1606 | 13. | Barueri | 49 | 38 | 12 | 13 | 13 | 59 | 52 | 7 | 42.98 |
| 1579 | 14. | São Caetano | 236 | 172 | 65 | 41 | 66 | 209 | 199 | 10 | 45.73 |
| 1552 | 15. | Goiás | 727 | 547 | 199 | 130 | 218 | 750 | 776 | -26 | 44.3 |
| 1546 | 16. | Botafogo-RJ | 861 | 654 | 227 | 180 | 247 | 813 | 839 | -26 | 43.88 |
| 1541 | 17. | Vasco | 765 | 590 | 196 | 177 | 217 | 747 | 832 | -85 | 43.22 |
| 1515 | 18. | Coritiba | 681 | 547 | 179 | 144 | 224 | 646 | 707 | -61 | 41.49 |
| 1502 | 19. | Figueirense | 550 | 438 | 142 | 124 | 172 | 530 | 622 | -92 | 41.85 |
| 1497 | 20. | Ceará | 305 | 262 | 71 | 92 | 99 | 273 | 312 | -39 | 38.8 |
| 1491 | 21. | Fortaleza | 339 | 273 | 90 | 69 | 114 | 317 | 371 | -54 | 41.39 |
| 1491 | 22. | Portuguesa | 131 | 114 | 31 | 38 | 45 | 137 | 157 | -20 | 38.3 |
| 1480 | 23. | Bahia | 458 | 388 | 115 | 113 | 160 | 430 | 512 | -82 | 39.34 |
| 1476 | 24. | Paraná | 304 | 248 | 83 | 55 | 110 | 312 | 369 | -57 | 40.86 |
| 1465 | 25. | Sport | 500 | 418 | 131 | 107 | 180 | 463 | 568 | -105 | 39.87 |
| 1454 | 26. | Juventude | 330 | 281 | 85 | 75 | 121 | 330 | 431 | -101 | 39.14 |
| 1452 | 27. | Ponte Preta | 433 | 362 | 114 | 91 | 157 | 414 | 534 | -120 | 39.87 |
| 1450 | 28. | Vitória | 468 | 396 | 123 | 99 | 174 | 492 | 581 | -89 | 39.39 |
| 1447 | 29. | Cuiabá | 78 | 71 | 17 | 27 | 27 | 59 | 74 | -15 | 36.61 |
| 1435 | 30. | Guarani | 147 | 130 | 36 | 39 | 55 | 140 | 180 | -40 | 37.69 |
| 1433 | 31. | Atlético-GO | 292 | 261 | 72 | 76 | 113 | 282 | 355 | -73 | 37.29 |
| 1418 | 32. | Paysandu | 154 | 134 | 41 | 31 | 62 | 193 | 245 | -52 | 38.3 |
| 1407 | 33. | Chapecoense | 287 | 265 | 70 | 77 | 118 | 261 | 359 | -98 | 36.1 |
| 1406 | 34. | Criciúma | 188 | 168 | 50 | 38 | 80 | 194 | 264 | -70 | 37.3 |
| 1406 | 35. | América-MG | 204 | 186 | 51 | 51 | 84 | 178 | 247 | -69 | 36.55 |
| 1396 | 36. | Santo André | 41 | 38 | 11 | 8 | 19 | 46 | 61 | -15 | 35.96 |
| 1371 | 37. | Brasiliense | 42 | 42 | 10 | 12 | 20 | 49 | 68 | -19 | 33.33 |
| 1356 | 38. | Náutico | 200 | 190 | 54 | 38 | 98 | 224 | 318 | -94 | 35.08 |
| 1340 | 39. | Avaí | 264 | 261 | 64 | 72 | 125 | 268 | 410 | -142 | 33.71 |
| 1246 | 40. | Ipatinga | 35 | 38 | 9 | 8 | 21 | 37 | 67 | -30 | 30.7 |
| 1238 | 41. | Grêmio Prudente | 31 | 38 | 7 | 10 | 21 | 39 | 64 | -25 | 27.19 |
| 1226 | 42. | Joinville | 31 | 38 | 7 | 10 | 21 | 26 | 48 | -22 | 27.19 |
| 1209 | 43. | CSA | 32 | 38 | 8 | 8 | 22 | 24 | 58 | -34 | 28.07 |
| 1198 | 44. | Santa Cruz | 59 | 76 | 15 | 14 | 47 | 86 | 145 | -59 | 25.87 |
| 884 | 45. | América-RN | 17 | 38 | 4 | 5 | 29 | 24 | 80 | -56 | 14.91 |

# 4 Método de Probabilidades

Uma outra pergunta que surge frequentemente em círculos de debate esportivo é sobre quem tem mais probabilidade de ganhar um confronto direto. Note que estamos descartando a possibilidade de empate. Essa suposição é especialmente útil para competições como a Copa do Mundo, em que dada fase da competição é mata-mata. Para tal fim, podemos usar uma visão probabilística em nossa matriz de preferência. Assim, supondo que **p** seja o

vetor pontuação dos times, e $\pi_{ij}$ seja a probabilidade do time $i$ ganhar do time $j$, digamos que

$$\pi_{ij} = \frac{p_i}{p_i + p_j}.$$

E, como $\pi_{ij} + \pi_{ji} = 1$, temos que

$$\pi_{ji} p_i - \pi_{ij} p_j = 0.$$

É notável que, sabendo $\pi_{ij}$, poderíamos determinar $p_i$. Como não temos uma definição exata das probabilidades, podemos estimá-las com $P_{ij}$ definidos como

$$P_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_{ij} + S_{ji}},$$

sendo $S_{ij}$ alguma varíavel que represente o histórico do time $i$ sobre o time $j$. Assim,

$$S_{ji} p_i - S_{ij} p_j = 0.$$

Tomando um histórico extenso o bastante, vemos que teremos mais equações do que variáveis. Assim, como não é garantia que teremos uma solução única que fará todas equações serem satisfeitas, podemos ao menos achar a solução com menor "distância"às equações.

## 4.1 Achando uma Boa Solução

A ideia de achar uma solução que esteja "próxima"de equações lembra a ideia dos mínimos quadrados, isto é, considerar os quadrados das equações, e minimizar a soma, já que assim, estamos tornando cada equações próxima de zero.

Entretanto, como o vetor nulo $\mathbf{p} = (0, \ldots, 0)$ satisfaz todas as equações, devemos alguma restrição em nosso cálculo, como, por exemplo, que o vetor $\mathbf{p}$ tenha norma euclidiana 1. Assim, expressando essa restrição através de um multiplicador de Lagrange $\mu$, temos que nossa função a ser minimizada será:

$$\left( \sum_{ij} (S_{ji} p_i - S_{ij} p_j)^2 \right) - \mu \left( \left( \sum_i p_i^2 \right) - 1 \right).$$

Para achar o mínimo, diferenciamos a função anterior em relação a $p_i$, e a igualamos a zero, donde temos:

$$\left( \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} 2(S_{ji}p_i - S_{ij}p_j)S_{ji} \right) - 2\mu p_i = 0$$

$$\iff \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} (S_{ji}^2 p_i - S_{ij}S_{ji}p_j) = \mu p_i$$

$$\iff B\mathbf{p} = \mu \mathbf{p},$$

onde $B$ é uma matriz $N \times N$ definida como $b_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \neq i} S_{ki}^2 \text{ , se } i = j \\ -S_{ij}S_{ji} \text{ , se } i \neq j \end{cases}$. Ou seja, $B$ é uma matriz tal que seus elementos na diagonal são positivos, e os elementos fora da diagonal são não-positivos. Provaremos que $\mathbf{p}$ é um autovetor positivo único em uma matriz relacionada a $B$.

Primeiro, note que, devido ao grande número de jogos esperados, é bem provável que as colunas de $B$ sejam linearmente independetes, ou seja, $B$ é invertível. Além disso, existe um valor real positivo $\lambda$ tal que a matriz $B' = B + \lambda I$ é diagonalmente dominante (isto é, para todo $i = 1, \ldots, N$, temos que $|b'_{ii}| > \sum_{j \neq i} |b'_{ij}|$). Assim, para o vetor $\mathbf{v}_0 = (1, \ldots, 1)$, $B'\mathbf{v}_0 > 0$. Agora, analisemos $B'\mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \geq 0$, com $\mathbf{x} \not> 0$. Sendo $\mathbf{v}_j$ um vetor de entradas positivas, com exceção da $j$-ésima entrada, nula, então a $j$-ésima entrada de $B'\mathbf{v}_j$ será negativa ou nula. Supondo que tenhamos tido jogos o suficiente para que $(B'\mathbf{v}_j)_j$ seja estritamente negativo, então $B'\mathbf{x} \not\geq 0$ para $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x} \geq 0$ e $\mathbf{x} \not> 0$. Como existe um vetor, $\mathbf{v}_0$, que é mapeado por $B'$ do ortante positivo para o ortante positivo, então $B'$ é uma transformação linear que leva o ortante positivo a um conjunto que contém o ortante positivo. Assim, $B'^{-1}$ é uma transformação linear que leva o ortante positivo ao ortante positivo, o que mostra que $B'^{-1} \geq 0$.

Assim, pelo Teorema de Perron-Frobenius, $B'^{-1}$ possui um autovetor positivo $\mathbf{p}$ correspondente a um autovalor $\mu$, maior ou igual em módulo a todos os outros autovalores de $B'^{-1}$. Assim, $\mathbf{p}$ é autovetor de $B'$, correspondente ao autovalor de menor módulo dentre os autovalores de $B'$.

## 4.2 Prevendo a Copa do Mundo

Agora, botemos em prática nossa teoria.

Usando $S_{ij} = \sum h\left(\frac{G_{ij}+1}{G_{ij}+G_{ji}+2}\right)$, isto é, somatório das pontuações estabelecidas no método anterior, temos o seguinte ranking de seleções para a Copa do Mundo 2022.

| Ranking (Método Probabilístico) | Equipe |
|---|---|
| 1. | Brasil |
| 2. | Argentina |
| 3. | Senegal |
| 4. | Marrocos |
| 5. | Equador |
| 6. | Uruguai |
| 7. | Japão |
| 8. | Tunísia |
| 9. | Estados Unidos |
| 10. | México |
| 11. | Canadá |
| 12. | Coreia do Sul |
| 13. | Arábia Saudita |
| 14. | Irã |
| 15. | Gana |
| 16. | Camarões |
| 17. | Costa Rica |
| 18. | Holanda |
| 19. | Austrália |
| 20. | Catar |
| 21. | Espanha |
| 22. | Inglaterra |
| 23. | Alemanha |
| 24. | Sérvia |
| 25. | França |
| 26. | Portugal |
| 27. | Bélgica |
| 28. | Suíça |
| 29. | Croácia |
| 30. | Dinamarca |
| 31. | Polônia |
| 32. | Gales |

# 5 Conclusão

Podemos concluir que o Teorema de Perron-Frobenius é de grande valia, podendo inclusive ser peça-chave dos mais diversos e eficientes métodos de ranqueamento esportivo. Apesar de ser uma técnica da Álgebra Linear, pudemos usá-lo de forma mais refinada para resolver um problema de mínimos quadrados, inclusive. Podemos também perceber que métodos alternativos de ranqueamento são úteis para verificar pontos fortes de times que não são valorizados nos ranqueamentos comuns.

No mais, resta-nos torcer para que o ranking gerado por Perron-Frobenius esteja correto e nos leve ao hexacampeonato.

# Referências

[Keener 1993] KEENER, J. The Perron-Frobenius Theorem and the Ranking of Football Teams. **SIAM Review**. Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 35, n.1, p. 80–93, Mar. 1993.

[Lancaster 1969] LANCASTER, P. Theory of matrices. **Academic Press**. New York.