

MATEMÁTICA FINANCEIRA

.....

**APLICAÇÕES À ANÁLISE
DE INVESTIMENTOS**

3^a Edição

Carlos Patricio Samanez

Graduado em Engenharia Industrial, Mestre em Ciências em Engenharia de Produção (PUC-Rio) e Doutor em Administração — Finanças e Economia de Empresas (FGV-SP)



São Paulo – 2002

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Porto Rico Venezuela

© 2002 by Pearson Education do Brasil

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Editor: Roger Trimer

Gerente de Produção: Silas Camargo

Produtora Editorial: Salete Del Guerra

Capa: Marcelo da Silva Françozo

Editoração: ERJ Composição e Artes Gráficas Ltda.

Impressão: São Paulo – SP

Dados de Catalogação na Publicação

Samanez, Carlos Patrício

Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos

Carlos Patrício Samanez

— São Paulo : Prentice Hall, 2002.

ISBN 85-87918-07-9

Índice para catálogo sistemático

1. Matemática

2. Matemática Financeira

2002

3^a edição

2^a reimpressão com correções

Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à

Pearson Education do Brasil Ltda.,

uma empresa do grupo Pearson Education

Rua Emílio Goeldi, 747 – Lapa

CEP: 05065-110, São Paulo – SP, Brasil

Tel: (11)3613-1222 – Fax: (11)3611-0444

e-mail: vendas@pearsoned.com.br

Ao meu pai,

Ignacio Samanez Richter, em memória

SUMÁRIO



Prefácio.....	XIII
1 Juros Simples	1
1.1 Conceitos básicos: juros, remuneração do capital e taxa de juros.....	1
1.2 Regime de juros simples	2
1.2.1 Cálculo do rendimento a juros simples	2
1.2.2 Períodos não-inteiros	3
1.2.3 Capitalização e desconto a juros simples: cálculo do montante e do principal ..	5
1.2.4 Equivalência de capitais a juros simples.....	6
1.3 Determinação da data de vencimento e prazo das aplicações: contagem de dias entre duas datas	9
1.4 Exercícios propostos	10
1.5 Respostas dos exercícios propostos.....	14
2. Juros Compostos	15
2.1 Regime de capitalização composta ou exponencial	15
2.2 Capitalização e desconto a juros compostos: cálculo do montante e do principal.....	16
2.3 Uso básico da calculadora financeira HP-12C.....	17
2.4 Equivalência de capitais a juros compostos — a equação de valor	22
2.5 Cálculo com prazos fracionários	30
2.6 Exercícios propostos	32
2.7 Respostas dos exercícios propostos.....	36
3. Taxas de Juros	37
3.1 Taxa de juros nominal.....	37
3.2 Taxa proporcional (taxa linear)	38
Exemplos de aplicação	39
3.3 Taxa de juros efetiva.....	46
3.3.1 Cálculo da taxa efetiva a partir da taxa nominal	47
3.4 Equivalência entre taxas de juros	49
Exemplos de aplicação	50

3.5	Taxa over (taxa por dia útil)	62
3.5.1	Taxa de juros efetiva equivalente à taxa over	63
Exemplos de aplicação	63	
3.5.2	Certificado de depósito interfinanceiro (CDI)	66
Exemplos de aplicação	66	
3.6	Taxa de juros aparente e taxa de juros real	67
Exemplos de aplicação	67	
3.7	Exercícios propostos	69
3.8	Respostas dos exercícios propostos.....	73
4.	Operações de Curto Prazo.....	75
4.1	Desconto.....	75
4.1.1	Desconto simples	75
4.1.1.1	Desconto racional simples.....	76
Equivalência entre desconto racional simples e juros simples.....	76	
4.1.1.2	Desconto comercial simples.....	76
4.1.1.3	Considerações entre a taxa ‘i’ e a taxa ‘d’	78
4.1.1.4	Taxa de desconto efetiva linear	79
4.1.1.5	Taxa de desconto efetiva exponencial.....	82
Exemplos de aplicação.....	83	
4.2	Títulos públicos.....	88
Exemplos de aplicação	89	
4.3	Desconto composto	92
4.3.1	Desconto racional composto (desconto financeiro)	92
Valor do desconto racional composto	92	
Valor liberado (valor descontado)	93	
Taxa mensal de desconto financeiro composto.....	93	
Exemplos de aplicação	94	
4.3.2	Desconto comercial composto	104
Valor do desconto comercial composto	104	
Taxa mensal de desconto comercial composto	104	
Exemplos de aplicação	105	
4.4	Factoring	114
4.5	Hot money	116
4.6	Commercial papers.....	117
4.7	Export note	118
4.8	Conta garantida	118
4.9	Exercícios propostos	119
Desconto simples: racional e comercial	119	
Desconto composto: racional (financeiro) e comercial.....	121	

4.10	Respostas dos exercícios propostos.....	123
5.	Séries Periódicas Uniformes.....	125
5.1	Valor presente de séries periódicas uniformes	126
	Exemplos de aplicação	127
	Séries antecipadas e postecipadas	127
	Exemplo de aplicação	139
	Séries diferidas	139
5.2	Montante de séries periódicas uniformes	142
	Exemplos de aplicação	143
5.3	Cálculo da taxa de juros em séries periódicas uniformes.....	152
5.3.1	Taxa aproximada: interpolação linear.....	154
	Exemplos de aplicação.....	154
5.4	Taxa interna de retorno de séries mistas	164
	Exemplos de aplicação	165
5.5	Exercícios propostos	168
5.6	Respostas dos exercícios propostos.....	173
6.	Séries Variáveis	175
6.1	Séries variáveis.....	175
6.2	Gradientes uniformes	175
6.2.1	Séries em progressão aritmética crescente.....	176
6.2.1.1	Séries postecipadas.....	176
6.2.1.2	Séries antecipadas	177
6.2.2	Séries em progressão aritmética decrescente	177
	Exemplos de aplicação	178
6.3	Séries variáveis em progressão geométrica – valor presente de perpetuidades crescentes	183
	Exemplos de aplicação	184
6.4	Perpetuidades	185
6.4.1	Custo capitalizado	186
	Exemplos de aplicação	187
6.5	Exercícios propostos	190
6.6	Respostas dos exercícios propostos:	192
7.	Capitalização Contínua.....	193
7.1	Valor presente de valores uniformemente distribuídos	196
7.2	Conversão entre fluxos discretos e fluxos uniformemente distribuídos.....	197
7.3	Exercícios propostos	203
7.4	Respostas dos exercícios propostos.....	205

8. Planos de Amortização de Empréstimos e Financiamentos	207
8.1 Reembolso de empréstimos e financiamentos.....	207
8.1.1 Sistema de Amortização Francês - Sistema Price	208
8.1.1.1 Cálculo das variáveis em um período qualquer.....	211
Saldo devedor.....	211
Amortização	212
Juros	212
8.1.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)	215
8.1.2.1 Cálculo das variáveis em um período qualquer.....	216
Amortização.....	217
Saldo devedor	217
Juros	217
8.1.3 Sistema de amortização crescente (sacre).....	218
8.1.4 Sistema de amortização americano	221
8.2 Custo efetivo (taxa interna de retorno) de sistemas de amortização	224
8.3 exercícios propostos	226
8.4 Respostas dos exercícios propostos:	227
9. Cálculo Financeiro em Contexto Inflacionário.....	229
9.1 Índices de preços	229
9.2 Representatividade dos valores financeiros em ambientes inflacionários	230
9.3 Taxa de juros aparente e taxa de juros real	231
9.4 Taxa efetiva em moeda nacional para operações em moeda estrangeira	232
Exemplo de aplicação	232
9.5 Custo real efetivo de empréstimos com atualização monetária e cambial	246
9.6 Lucratividade real e aparente na compra de ações	248
9.7 Exercícios propostos	249
9.8 Respostas dos exercícios propostos.....	251
10. Métodos e Critérios de Avaliação de Investimentos de Capital	253
10.1 Conceitos - etapas do processo de avaliação - métodos de análise e seleção de alternativas de investimento	253
10.2 Métodos de seleção de alternativas: valor presente líquido, pay-back descontado, índice custo-benefício, taxa interna de retorno, anuidade e custo anual equivalente	254
10.2.1 Método do valor presente líquido	255
10.2.2 Método do pay-back descontado	255
10.2.3 Método do índice custo/benefício	256
10.2.4 Método da taxa interna de retorno (TIR)	258
10.2.4.1 Problemas da TIR como método de seleção de alternativas independentes e alternativas mutuamente exclusivas	260

O problema do reinvestimento	260
O problema na seleção de projetos mutuamente exclusivos de escala diferente - taxa incremental de Fisher.....	256
Problema de múltiplas taxas internas de retorno	266
O problema da distribuição (<i>timing</i>) dos fluxos de caixa	269
10.2.5 Método da anuidade uniforme equivalente	270
10.2.6 Método do custo anual equivalente	273
10.3 Tempo ótimo de substituição e escala dos projetos de investimento	275
10.4 Ranking e seleção de projetos – racionamento de capital	279
10.5 Leasing	280
10.5.1 Principais características do leasing.....	280
10.5.2 Leasing operacional	281
10.5.2.1 Avaliação do leasing operacional.....	282
10.5.3 Leasing financeiro.....	284
10.5.3.1 Determinação da taxa de arrendamento	284
10.5.3.2 Crédito direto ao consumidor e leasing	287
10.5.3.3 Avaliação do leasing financeiro: pessoa jurídica	290
10.5.3.4 Leasing comparado com operações de repasse de recursos internos - Finame	293
Custo efetivo de operações da Finame.....	293
Custo efetivo do leasing financeiro.....	296
10.6 Exercícios propostos	298
10.7 Respostas dos exercícios propostos.....	303
11. Análise e Avaliação Econômica de Investimento de Capital.....	305
11.1 A importância dos fluxos de caixa na avaliação econômica	305
11.2 Considerações na montagem do fluxo de caixa	305
11.3 Tipos de fluxos de caixa.....	306
11.4 Fluxo econômico	308
11.4.1 Aquisição de ativos	308
11.4.2 Gastos pré-operacionais	308
11.4.3 Capital de giro.....	308
11.4.3.1 Capital de giro como porcentagem das vendas	309
11.4.4 Valor de liquidação (valor residual) e depreciação.....	310
11.4.4.1 Depreciação, amortização e exaustão	311
11.4.5 Dispêndios de capital	312
11.4.6 Gastos indiretos.....	312
11.4.7 O investimento em terrenos	312
11.4.8 Custos de oportunidade.....	312
11.4.9 Custos afundados	313
11.5 Fluxo de financiamento: a separação da decisão econômica e financeira.....	313

11.5.1 Montagem do fluxo de caixa e avaliação.....	313
11.6 Tratamento adequado da inflação	319
10.6.1 Fuxos de caixa e avaliação em moeda forte.....	323
11.6.2 Decisões de investimento em moeda nacional e em moeda estrangeira: Brasil <i>versus</i> Estados Unidos	324
11.7 Receita mínima de equilíbrio	325
11.8 Exercícios propostos	327
11.9 Respostas dos exercícios propostos.....	329
12. Custo do Capital.....	333
12.1 Custo de oportunidade do capital	333
12.2 Custo do capital da empresa: custo médio ponderado do capital (CMPC)	333
12.3 Custo da dívida.....	334
12.4 Custo do capital para o projeto: custo ajustado do capital	335
Custo da capital pela fórmula de Modigliani-Miller	335
Cálculo do Custo do Capital Próprio pelo Modelo CAPM	337
12.5 Risco financeiro e custo do capital.....	344
12.6 Risco financeiro e beta: ajuste do custo do capital para risco financeiro	347

PREFÁCIO



O cálculo financeiro e a análise de investimentos são atualmente ferramentas essenciais na tomada de decisões e na gestão financeira das empresas e das pessoas. Do ponto de vista do empresário, do profissional, ou do estudante, o desconhecimento desse ferramental pode resultar em um custo muito alto, pois decisões erradas geralmente se traduzem em perdas financeiras e custos altos. Esta terceira edição apresenta os conceitos e técnicas da matemática financeira e suas aplicações na análise de investimentos de maneira clara, abrangente, didática e simples. Os diferentes tópicos tratados no livro foram revistos e atualizados, e outros de bastante atualidade foram incluídos. Os exemplos são resolvidos enfatizando mais o lado intuitivo da resolução do que a simples aplicação de fórmulas e equações de cálculo. A resolução das operações e dos exercícios é amplamente facilitada com a utilização de máquinas financeiras, motivo pelo qual, como auxílio didático para o leitor, grande parte dos exemplos, além de serem resolvidos analiticamente, são resolvidos também utilizando máquina financeira. O final de cada capítulo traz um número considerável de exercícios propostos com suas respectivas respostas.

O livro destina-se principalmente aos estudantes das disciplinas de matemática financeira, administração financeira, engenharia econômica e análise de investimentos. Entretanto, pela objetividade e didática com que os diversos assuntos são tratados, pode ser utilizado por todos aqueles interessados em cálculos e decisões financeiras e de investimento.

Agradeço a todas as pessoas, profissionais do mercado financeiro, colegas universitários, e principalmente a todos os meus alunos e ex-alunos que de algum modo, ao longo dos anos, vêm contribuindo para o contínuo aprimoramento deste livro.

JUROS SIMPLES

CAPÍTULO

1

Conceitos básicos

Remuneração a juros simples

Cálculo do montante e do principal a juros simples

Equivalência de capitais a juros simples

1.1 Conceitos básicos: juros, remuneração do capital e taxa de juros

Juro é a remuneração do capital empregado. Se aplicarmos um capital durante um determinado período de tempo, ao fim do prazo o capital se transformará em um valor (montante) que será igual ao capital aplicado, acrescido da remuneração obtida durante o período de aplicação.

A diferença entre o montante (S) e a aplicação (P) denomina-se remuneração, rendimento ou juros ganhos:

$$\text{juros ganhos} = \text{montante} - \text{aplicação}$$

Os juros ganhos em uma aplicação financeira são o produto da taxa de juros vezes o principal:

$$i = \frac{J \text{ (juros ganhos)}}{P \text{ (aplicação)}} \Rightarrow J = P \times i$$

Igualando as duas expressões para cálculo dos juros, pode-se obter uma relação para o montante:

$$S - P = P \times i \Rightarrow S = P (1 + i)$$

O mercado financeiro trabalha com base na taxa de juros percentual, porém é necessário colocá-la na forma fracionária para realizar os cálculos financeiros. O quadro a seguir apresenta alguns juros na forma de porcentagem com seu equivalente fracionário.

Forma Percentual	Forma Fracionária
20%	20/100 = 0,20
10%	10/100 = 0,10
1%	1/100 = 0,01
0,3%	0,3/100 = 0,003

Quando o prazo da operação é dado considerando-se anos constituídos por meses de 30 dias, os juros são chamados comerciais; quando o número de dias corresponde àqueles do ano civil (365 dias), são chamados juros exatos. Nos exemplos deste livro, salvo menção em contrário, serão considerados anos comerciais (360 dias). Neste texto, a moeda nacional será representada por ‘\$’ e a moeda estrangeira por ‘US\$', quando se tratar de dólar americano.

Exemplo 1.1

Calcular os juros ganhos por \$ 3.000 aplicados por um ano à taxa simples de 25% a.a.

Dados: $P = \$3.000$, $i = 25\%$ a.a., $J = ?$

$$J = P \times i = \$3.000 \times 0,25 = \$750$$

Exemplo 1.2

Qual o montante de \$ 1.600 aplicados por um ano à taxa simples de 50% a.a.?

Dados: $P = \$1.600$, $i = 50\%$ a.a., $S = ?$

$$J = P \times i = \$1.600 \times 0,50 = \$800 \quad S = P + J = \$1.600 + \$800 = \$2.400$$

Exemplo 1.3

Qual é a taxa simples que transforma \$ 4.500 em um montante de \$ 8.100 em um ano?

Dados: $P = \$4.500$, $S = \$8.100$, $i = ?$

$$J = S - P = \$8.100 - \$4.500 = \$3.600 \quad i = \frac{J}{P} = \frac{\$3.600}{\$4.500} = 0,8 = 80\% \text{ a.a.}$$

1.2 Regime de juros simples

No regime de juros simples os juros de cada período são calculados sempre sobre o mesmo principal. Não existe capitalização de juros nesse regime, pois os juros de um determinado período não são incorporados ao principal para que essa soma sirva de base de cálculo dos juros do período seguinte. Conseqüentemente, o capital crescerá a uma taxa linear e a taxa de juros terá um comportamento linear em relação ao tempo. Nesse regime a taxa de juros pode ser convertida para outro prazo qualquer com base em multiplicações e divisões, sem alterar seu valor intrínseco, ou seja, mantém a proporcionalidade existente entre valores realizáveis em diferentes datas. A aplicação dos juros simples é muito limitada. Tem apenas algum sentido em um contexto não-inflacionário e no curíssimo prazo.

1.2.1 Cálculo do rendimento a juros simples

Os juros ganhos por uma aplicação financeira aplicada pelo prazo de um único período de tempo a que se refere a taxa de juros podem ser calculados da seguinte forma:

$$J = P \times i$$

Dado o comportamento linear dos cálculos no regime de juros simples, se aplicarmos um capital durante n períodos de tempo a que se refere a taxa de juros, os juros ganhos podem ser calculados da seguinte maneira:

$$J = P \times i \times n$$

Por exemplo, se aplicarmos um capital de \$ 100 à taxa simples de 15% a.a. durante três anos, temos os seguintes juros ganhos em cada ano:

$$J_1 = P \times i = \$100 \times 0,15 = \$15$$

$$J_2 = P \times i = \$100 \times 0,15 = \$15$$

$$J_3 = P \times i = \$100 \times 0,15 = \$15$$

Total: \$45

O exemplo anterior permite observar que, no regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o investimento inicial (\$100). Os juros não são incorporados ao principal para servirem de base de cálculo dos juros do período seguinte.

Os juros totais ganhos no prazo de três anos podem ser calculados diretamente:

$$J = P \times i \times n = \$100 \times 0,15 \times 3 = \$45$$

Expressão para o cálculo dos juros em função do montante:

$$J = P \times i \times n \Rightarrow P = \frac{J}{i \times n}$$

$$J = S - P$$

$$J = S - \frac{J}{i \times n} \Rightarrow J = \boxed{\frac{S \times i \times n}{1 + i \times n}}$$

1.2.2 Períodos não-inteiros

Algumas vezes o período de investimento é somente uma fração do período expresso na taxa de juros. Nesses casos, em que as unidades de tempo da taxa de juros e do período de investimento são diferentes, é necessário homogeneizá-las por meio de um ajuste na taxa. Vejamos alguns exemplos do ajuste requerido na taxa de juros

a) Se a taxa de juros for mensal e o prazo de aplicação referir-se a dias

$$J = P \times \left(\frac{i}{30} \right) \times n \quad (\text{juro comercial})$$

b) Se a taxa de juros for anual e o prazo de aplicação referir-se a meses

$$J = P \times \left(\frac{i}{12} \right) \times n \quad (\text{juro comercial})$$

c) Se a taxa de juros for anual e o prazo da aplicação referir-se a dias

$$J = P \times \left(\frac{i}{360} \right) \times n \quad (\text{juro comercial}) \qquad J = P \times \left(\frac{i}{365} \right) \times n \quad (\text{juro exato})$$

As taxas entre parênteses representam taxas proporcionais, homogêneas em relação ao período de aplicação.

Exemplo 1.4

Qual o rendimento de \$10.000 aplicados por um mês à taxa simples de 36% a.a.?

Dados: $P = \$10.000$, $n = 1$ mês, $i = 36\%$ a.a., $J = ?$

$$J = P \times i \times n = \$10.000 \times \left(\frac{0,36}{12} \right) \times 1 = \$300$$

Exemplo 1.5

Determinar a taxa simples para 22 dias de aplicação, equivalente à taxa de 3,05% a.m.

Dados: $n = 22$ dias, $i = 3,05\%$ a.m., $i_{22 \text{ dias}} = ?$

$$i_{22 \text{ dias}} = \left(\frac{0,0305}{30} \right) \times 22 = 0,0224 = 2,24\% \text{ em } 22 \text{ dias}$$

Exemplo 1.6

Calcular o rendimento de \$12.000 aplicado durante oito meses e três dias à taxa de juros simples de 40% a.a. Efetuar os cálculos considerando o ano comercial (360 dias) e o ano exato (365 dias).

Dados: $P = \$12.000$, $n = 8$ meses e 3 dias = 243 dias, $i = 40\%$ a.a., $J = ?$

$$J = P \times i \times n$$

$$J = P \times i \times n$$

$$J = \$ 12.000 \times \left(\frac{0,40}{360} \right) \times 243 = \$ 3.240$$

$$J = \$ 12.000 \times \left(\frac{0,40}{365} \right) \times 243 = \$ 3.195,62$$

Pelo fato de no regime de juros simples os processos de cálculo envolverem basicamente operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, muitas vezes é mais prático e rápido usar as calculadoras financeiras como máquinas de cálculo comuns. A utilidade das calculadoras financeiras, como veremos a partir do Capítulo 2, é maior no regime de juro composto, em que os cálculos são exponenciais.

Exemplo 1.7

Calcular o rendimento de \$23.000 aplicado por 14 dias à taxa simples de 2,5% a.m.

Dados: $P = \$23.000$, $i = 2,5\%$ a.m., $n = 14$ dias, $J = ?$

$$J = P \times i \times n = \$23.000 \times \left(\frac{0,025}{30} \right) \times 14 = \$268,33$$

Exemplo 1.8

Em sete meses \$18.000 renderam \$4.000 de juros. Qual é a taxa anual simples ganha?

Dados: $P = \$18.000$, $J = \$4.000$, $n = 7$ meses, $i = ?$

$$J = P \times i \times n$$

$$\$4.000 = \$18.000 \times \left(\frac{i}{12} \right) \times 7 \Rightarrow i = \left(\frac{4.000}{18.000} \right) \times \frac{12}{7} = 0,381 = 38,1\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 1.9

Um capital de \$5.000 rendeu \$1.200 em 180 dias. Qual é a taxa simples anual ganha?

Dados: $P = \$5.000$, $J = \$1.200$, $n = 180$ dias, $i = ?$

$$J = P \times i \times n$$

$$\$1.200 = \$5.000 \times \left(\frac{i}{360} \right) \times 180 \Rightarrow i = \left(\frac{1.200}{5.000} \right) \times \frac{180}{360} = 0,48 = 48\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 1.10

Um capital aplicado por quatro meses e 18 dias a juros simples de 12% a.m. transformou-se em \$23.000. Calcular os juros ganhos na aplicação.

Dados: $n = 138$ dias, $i = 12\%$ a.m., $S = \$23.000$, $J = ?$

$$J = \frac{S \times i \times n}{1 + i \times n} = \frac{\$23.000 \times \left(\frac{0,12}{30}\right) \times 138}{1 + \left(\frac{0,12}{30}\right) \times 138} = \$8.180,41$$

Exemplo 1.11

Um capital aplicado por três meses a juros simples de 4% a.m. rendeu \$360. Determinar o valor do capital.

Dados: $n = 3$ meses, $i = 4\%$ a.m., $J = \$360$, $P = ?$

$$J = P \times i \times n$$

$$\$360 = P \times 0,04 \times 3 \Rightarrow P = \frac{\$360}{0,12} = \$3.000$$

Exemplo 1.12

Um título foi resgatado por \$3.000. Se a taxa de juros simples aplicada foi de 180% a.a. e os juros ganhos totalizaram \$1.636,36, quantos meses durou a aplicação?

Dados: $S = \$3.000$, $i = 180\%$ a.a., $J = \$1.636,36$, $n = ?$ (meses)

$$\begin{aligned} J &= \frac{S \times i \times n}{1 + i \times n} \\ \$1.636,36 &= \frac{\$3.000 \times \left(\frac{1,80}{12}\right) \times n}{1 + \left(\frac{1,80}{12}\right) \times n} \\ \$1.636,36 &= \frac{450n}{1 + 0,15n} \Rightarrow n = 8 \text{ meses} \end{aligned}$$

1.2.3 Capitalização e desconto a juros simples: cálculo do montante e do principal

O montante ou valor de resgate de uma aplicação é o capital inicialmente investido (principal) acrescido de sua remuneração no período (juros ganhos):

$$\text{montante} = \text{principal} + \text{juros}$$

$$S = P + P \times i \times n$$

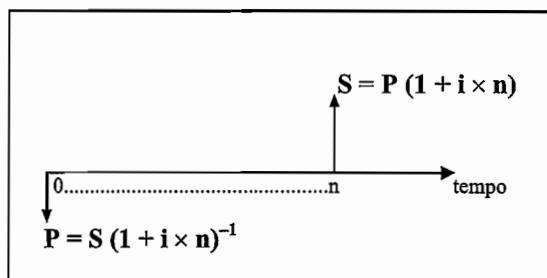
$$S = P(1 + i \times n)$$

O cálculo do principal a partir do montante é simplesmente o processo inverso:

$$P = \frac{S}{(1 + i \times n)}$$

No cálculo financeiro o diagrama de fluxo de caixa serve para mostrar graficamente as transações financeiras em um período de tempo. O tempo é representado por uma linha horizontal dividida pelo número de períodos relevantes para análise. Por convenção, as entradas ou recebimentos são representados por setas verticais apontadas para cima, e as saídas ou pagamentos são representados por setas verticais apontadas para baixo.

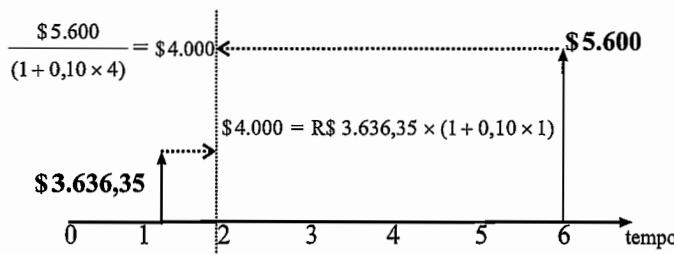
O diagrama a seguir representa o processo de capitalização e desconto de capitais no regime de juros simples.



O processo de desconto consiste no cálculo do montante ou valor futuro de um capital, enquanto o processo de capitalização consiste em calcular o valor atual de um montante futuro. Um é o inverso do outro.

1.2.4 Equivalência de capitais a juros simples

Dizemos que dois capitais são equivalentes quando têm o mesmo valor em uma determinada data de avaliação (data focal). O diagrama de fluxo a seguir ilustra a equivalência (na data focal 2) a juros simples de 10% de dois capitais — um de \$3.636,35 que ocorre na data 1 e outro de \$5.600 na data 6:



Se mudarmos a data focal, a equivalência dos capitais não será mantida. Conseqüentemente, a juros simples, capitais equivalentes em determinada época não o serão em outra. Esse resultado é produto do processo de cálculo adotado no regime linear ou de juros simples, em que não se pode fracionar o prazo da aplicação.

Exemplo 1.13

Qual o valor de resgate de \$500 aplicados por 16 meses à taxa simples de 12% a.t.?

Dados: $P = \$500$, $n = 16$ meses, $i = 12\%$ a.t., $P = ?$

$$S = P(1 + i \times n) = \$500 \times \left(1 + \frac{0,12}{3} \times 16\right) = \$820$$

Exemplo 1.14

Em dois meses \$ 5.050 transformaram-se em \$ 5.600. Qual a taxa de juros simples ganha?

Dados: $S = \$ 5.600$, $n = 2$ meses, $P = \$ 5.050$, $i = ?$ a.a.

$$S = P(1+i \times n)$$

$$\$ 5.600 = \$ 5.050 \left(1 + \frac{i}{12} \times 2 \right) \Rightarrow i = \left(\frac{\$ 5.600}{\$ 5.050} - 1 \right) \times \frac{12}{2} = 65,35\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 1.15

Qual o capital que aplicado à taxa simples de 20% a.m. em 3 meses monta \$ 8.000?

Dados: $S = \$ 8.000$, $n = 3$ meses, $i = 20\%$ a.m., $P = ?$

$$P = \frac{S}{1+i \times n} = \frac{\$ 8.000}{1+0,20 \times 3} = \$ 5.000$$

Exemplo 1.16

Aplicado por 105 dias um capital de \$ 100.000 transformou-se em \$ 145.000. Calcular a taxa mensal de juros simples ganha.

Dados: $P = \$ 100.000$, $S = \$ 145.000$, $n = 105$ dias, $i = ?$

$$S = P(1+i \times n)$$

$$\$ 145.000 = \$ 100.000 \times \left[1 + \left(\frac{i}{30} \right) \times 105 \right] \Rightarrow i = \left(\frac{145}{100} - 1 \right) \times \frac{30}{105} = 12,86\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 1.17

Em quantos meses um capital dobra a juros simples de 200% a.a.?

Dados: $i = 200\%$ a.a., $S = 2P$, $n = ?$

$$S = P(1+i \times n)$$

$$2P = P \left[1 + \left(\frac{2,00}{12} \right) n \right] \Rightarrow n = 6 \text{ meses}$$

Exemplo 1.18

Em quantos meses um capital de \$ 400 rende \$ 80 a juros simples de 60% a.a.?

Dados: $i = 60\%$ a.a., $S = \$ 480$, $P = \$ 400$, $J = \$ 80$, $n = ?$

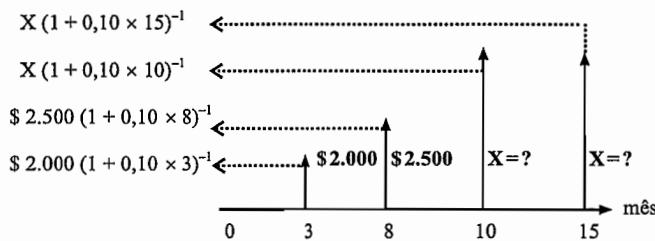
$$S = P(1+i \times n)$$

$$\$ 480 = \$ 400 \left[1 + \left(\frac{0,60}{12} \right) n \right] \Rightarrow n = \left(\frac{\$ 480}{\$ 400} - 1 \right) \times \frac{12}{0,60} = 4 \text{ meses}$$

Exemplo 1.19

Uma pessoa tem os seguintes compromissos a pagar: \$ 2.000 daqui a três meses e \$ 2.500 daqui a oito meses. Ela quer trocar esses débitos por dois pagamentos iguais, um para 10 meses e outro para 15 meses. Calcular o valor desses pagamentos considerando uma taxa de juros simples de 10% a.m.

Dados: $i = 10\%$ a.m., $S_1 = \$ 2.000$, $S_2 = \$ 2.500$, $X = ?$



Os dois esquemas de pagamento são financeiramente equivalentes em uma determinada data de avaliação. Definindo a data zero como data focal e colocando todos os valores nessa data, temos a seguinte equação de valor:

$$\frac{\$2.000}{1+0,10\times 3} + \frac{\$2.500}{1+0,10\times 8} = \frac{X}{1+0,10\times 10} + \frac{X}{1+0,10\times 15}$$

$$\$2.927,35 = X \left[\left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2,5} \right) \right] \Rightarrow X = \frac{\$2.927,35}{0,9} = \$3.252,61$$

Mudando a data de avaliação para o décimo mês e colocando todos os valores nessa data, temos a seguinte equação de valor:

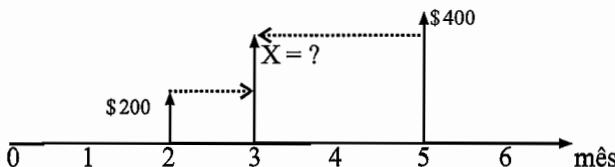
$$\$2.000 \times (1 + 0,10 \times 7) + \$2.500 \times (1 + 0,10 \times 2) = X + \frac{X}{1 + 0,10 \times 5} \Rightarrow X = \$3.840$$

Podemos observar que alterando a data focal o resultado muda, pois, a juros simples, capitais equivalentes em determinada época não o são em outra.

Exemplo 1.20

Uma pessoa deve pagar \$200 daqui a dois meses e \$400 daqui a cinco meses. A juros simples de 5% a.a., determinar o valor de um pagamento único a ser efetuado daqui a três meses que liquide a dívida.

Dados: $i = 5\%$ a.m., $S_2 = \$200$, $S_5 = \$400$, $X = ?$



Como o pagamento único será efetuado no terceiro mês, definimos esse mês como data focal. Por equivalência de capitais, os dois planos de pagamento devem ser financeiramente equivalentes naquela data. Logo, temos:

$$\frac{\text{Valor no } 3^{\text{o}} \text{ mês do plano com pagamento único}}{X} = \frac{\text{Valor no } 3^{\text{o}} \text{ mês do plano com dois pagamentos}}{\$200 \times (1 + 0,05 \times 1) + \$400 / (1 + 0,05 \times 2)}$$

$$X = \$573,64$$

1.3 Determinação da data de vencimento e prazo das aplicações: contagem de dias entre duas datas

Para determinação da data de vencimento e prazo das aplicações podemos usar a Tábua para Contagem de Dias entre Duas Datas. Para tanto, deve-se subtrair, do número de dias correspondente à data posterior, o número que corresponde à data anterior, tendo-se o cuidado de, para o caso de anos bissextos, acrescentar 1 (um) ao resultado encontrado.

Tábua para Contagem de Dias entre Duas Datas

Jan.	Fev.	Mar	Abr.	Maio	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31		90		151		212	243		304		365

Exemplo 1.21

Um capital de \$ 1.000 aplicado em 12 de fevereiro a juros simples de 0,2% ao dia foi resgatado no dia 14 de julho do mesmo ano. Determinar o valor de resgate.

Dados: $P = \$1.000$, $i = 0,2\%$ a.d., $n = ?$, $S = ?$

Determinação do prazo usando a Tábua para Contagem de Dias do ano civil entre as duas datas:

$$\begin{array}{rcl} \text{número de dias da data posterior (14 de julho)} & = & +195 \\ \text{número de dias da data anterior (12 de fevereiro)} & = & -43 \\ \text{prazo:} & & \hline & & 152 \end{array}$$

$$S = P(1+i \times n) = 1.000 \times (1+0,002 \times 152) = \$1.304$$

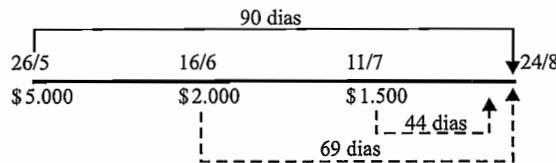
Exemplo 1.22

No dia 26 de maio foi contratado um empréstimo de \$ 5.000 a juros simples de 24% a.a. para ser totalmente liquidado em 90 dias. No dia 16 de junho foram pagos \$ 2.000 e no dia 11 de julho \$ 1.500. Determinar a data de vencimento da dívida e o valor da quantia que deverá ser pago naquela data para liquidar a dívida.

Determinação da data de resgate da aplicação usando a Tábua para Contagem de Dias do ano civil:

$$\begin{array}{rcl} \text{número de dias da data posterior (?)} & = & + Y \\ \text{número de dias da data anterior (26 de maio)} & = & -146 \\ \text{prazo:} & & \hline & & 90 \end{array}$$

Logo, $Y = 146 + 90 = 236$, que na tábua corresponde ao dia 24 de agosto



Valor de resgate =

$$\$5.000 \left(1 + \frac{0,24}{360} \times 90\right) - \$2.000 \left(1 + \frac{0,24}{360} \times 69\right) - \$1.500 \left(1 + \frac{0,24}{360} \times 44\right) = \$1.664$$

1.4 Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias.

- Qual é a taxa anual de juros simples ganha por uma aplicação de \$ 1.300 que produz após um ano um montante de \$ 1.750?
- Qual é a remuneração obtida por um capital de \$ 2.400 aplicado durante 17 meses à taxa de juros simples de 60% a.a.?
- Calcular o rendimento de um capital de \$ 80.000 aplicado durante 28 dias à taxa de juros simples de 26% a.m.

4. Aplicando \$80.000 durante 17 meses, resgatamos \$140.000. Qual é a taxa anual de juros simples ganha na operação?
5. Em quantos meses um capital de \$28.000 aplicado à taxa de juros simples de 48% a.a. produz um montante de \$38.080?
6. Um capital aplicado transformou-se em \$13.000. Considerando uma taxa de juros simples de 42% a.a. e uma remuneração de \$4.065,29, determinar o prazo da aplicação.
7. Um capital de \$135.000 transformou-se em \$180.000 após 44 dias de aplicação. Calcular a taxa de juros ganha na operação.
8. João tem uma dívida de \$35.000 que vence em 16 meses. Pretende pagar \$12.000 no fim de 158 dias e \$13.000, 189 dias depois desse primeiro pagamento. Quanto deve pagar na data de vencimento de modo que liquide a dívida? Considere juros simples de 50% a.a. e data focal no vencimento da dívida.
9. Um capital acrescido de seus juros de 21 meses soma \$156.400. O mesmo capital diminuído de seus juros de nove meses é reduzido a \$88.400. Calcular o capital e a taxa de juros simples ganha.
10. Um capital de \$4.500 foi dividido em três parcelas que foram aplicadas pelo prazo de um ano. A primeira a juros simples de 4% a.t., a segunda a juros simples de 6% a.t. e a terceira a juros simples de 10% a.t. Se o rendimento da primeira parcela for de \$160 e o rendimento das três parcelas totalizar \$1.320, calcular o valor de cada parcela.
11. Dois capitais, um de \$2.400 e outro de \$1.800, foram aplicados a uma mesma taxa de juros simples. Calcular a taxa considerando que o primeiro capital em 48 dias rendeu \$17 a mais que o segundo em 30 dias.
12. Um capital foi aplicado a juros simples de 42% a.a. durante 50 dias. Calcular o capital, sabendo-se que, se a diferença entre ele e os juros ganhos fosse aplicada à mesma taxa, renderia \$988,75 em um trimestre.
13. Certo capital foi aplicado a juros simples de 30% a.a. durante 50 dias. Calcular o capital e o rendimento obtido, sabendo-se que, se a diferença entre ambos, acrescida de \$10.000, fosse aplicada à mesma taxa, renderia \$95.000 no prazo de um ano.
14. Uma pessoa aplicou dois capitais a juros simples, o primeiro a 33% a.a. e o segundo a 45% a.a. Se o rendimento de ambas as aplicações totalizou \$52.500 no prazo de um ano, determinar o valor dos capitais, sabendo-se que o primeiro é 37,5% menor que o segundo.
15. Há 13 meses e 10 dias um capital de \$10.000 foi aplicado à taxa de juros simples de 6% a.a. Se hoje fosse aplicada a importância de \$8.000 a juros simples de 12% a.a., e o primeiro capital continuasse aplicado à mesma taxa, em que prazo os montantes respectivos seriam iguais?
16. Uma empresa obteve um empréstimo de \$200.000 a juros simples de 10% a.a. Algum tempo depois liquidou a dívida, inclusive juros, e tomou um novo empréstimo de \$300.000 a juros simples de 8% a.a. Dezoito meses após o primeiro empréstimo liquidou todos seus débitos, tendo pago \$35.000 de juros totais nos dois empréstimos. Determinar os prazos dos dois empréstimos em meses.
17. Uma pessoa tomou um empréstimo a juros simples de 9% a.a.; quarenta e cinco dias depois pagou a dívida e contraiu um novo empréstimo duas vezes maior que o primeiro, pelo prazo de dez meses a juros simples de 6% a.a. Sabendo-se que pagou ao todo \$111.250 de juros, calcular o valor do primeiro empréstimo.

- 18.** Um capital foi dividido em duas parcelas e aplicado a taxas e prazos diferentes. A primeira foi aplicada a juros simples de 10% a.m. durante seis meses, e a segunda a juros simples de 2% a.m. durante 12 meses. Se a primeira parcela for \$ 50 maior e render \$ 60 a mais que a segunda, determinar os valores de ambas as parcelas.
- 19.** Aplicado a juros simples pelo prazo de um ano, um capital transformou-se em \$ 13.000. Esse montante foi reaplicado por mais dois anos a uma taxa 20% maior que a ganha na primeira aplicação, obtendo-se um montante final de \$ 22.360. Calcular o valor do capital inicialmente aplicado e a taxa de juros ao ano à qual foi aplicado.
- 20.** Uma pessoa aplicou um capital em uma conta remunerada que rende juros simples de 30% a.a. Depois de três anos resgatou metade dos juros ganhos e reaplicou o saldo desses juros por um ano à taxa simples de 32% a.a., obtendo um rendimento de \$ 20,16 nessa última aplicação. Calcular o valor do capital inicialmente aplicado.
- 21.** Dois capitais foram colocados a juros simples, o primeiro à taxa de 20% a.a. e o segundo a 40% a.a. Calcular os capitais sabendo-se que somados montam \$ 500 e que os dois em um ano renderam juros totais de \$ 130.
- 22.** Um capital de \$ 50.000 aplicado a juros simples rendeu \$ 1.875 em um determinado prazo. Se o prazo fosse 36 dias maior, o rendimento aumentaria em \$ 250. Calcular a taxa de juros simples a.a. e o prazo da operação em dias.
- 23.** Um pessoa levantou um empréstimo de \$ 3.000 a juros simples de 18% a.a. para ser liquidado daqui a 270 dias. Se a pessoa amortizou \$ 1.000 no 75º dia, quanto deverá pagar na data de vencimento para liquidar a dívida? (data focal: 270º dia)
- 24.** Uma empresa tem duas dívidas a pagar, a primeira, de \$ 2.500, contratada a juros simples de 2,5% a.m., vence em 45 dias, e a segunda, de \$ 3.500, a juros simples de 3% a.m., vence em 90 dias. Calcular a quantia necessária para liquidar ambas as dívidas no 180º dia, considerando que no 30º dia a primeira dívida foi amortizada com \$ 1.500 e no 60º dia a segunda foi amortizada com \$ 3.000 (data focal: 180º dia).
- 25.** Uma pessoa tem duas dívidas a pagar, a primeira, de \$ 1.000, vence em 45 dias e a segunda, de \$ 3.500, vence em 120 dias. Se pretende liquidar as dívidas por meio de dois pagamentos iguais com vencimentos no 90º e 180º dia, respectivamente, calcular o importe de cada pagamento se ambas as dívidas foram contratadas a juros simples de 2% a.m. (data focal: 180º dia).
- 26.** Determinar:
- O tempo em que triplica um capital aplicado a juros simples de 5% a.m.;
 - O tempo em que quintuplica um capital aplicado a juros simples de 15% a.t.;
 - O tempo em que um capital de \$ 12.000 rende \$ 541,68 quando aplicado a juros simples de 12,5% a.a.;
 - O tempo em que um capital de \$ 7.000 se transforma em um montante de \$ 7.933,34 quando aplicado a juros simples de 24% a.a.
- 27.** Determinar:
- A taxa de juros simples anual que produz um rendimento de \$ 60 em 36 dias a partir de um capital de \$ 2.000;
 - A taxa de juros simples mensal que produz um rendimento de \$ 6.000 em 30 meses a partir de um capital de \$ 8.000;

- c) A taxa de juros simples anual embutida na compra de um bem cujo valor à vista é de \$3.000, pelo qual será paga uma entrada de \$1.000 e um pagamento de \$2.200 para 60 dias.
- 28.** Calcular:
- O valor do capital que aplicado a juros simples de 24% a.a. rende \$300 em 126 dias;
 - O valor do capital que aplicado a juros simples de 26% a.a. rende \$800 em 7 trimestres;
 - O rendimento de uma aplicação de \$10.000 por 446 dias a juros simples de 24% a.a.
- 29.** Calcular:
- O rendimento de um capital de \$2.000 aplicado a juros simples de 2,5% a.m. desde o dia 12 de março até o dia 5 de junho do mesmo ano;
 - O valor do capital que rendeu \$3.000 no período compreendido entre 4 de abril e 31 de maio do mesmo ano a juros simples de 2% a.m.;
 - O valor de resgate de um capital de \$5.000 aplicado a juros simples de 2% a.m. pelo período compreendido entre 6 de abril e 26 de junho do mesmo ano;
 - O valor do capital que se transformou em um montante de \$20.000 no período compreendido entre 30 de junho e 31 de dezembro do corrente ano a juros simples de 2% a.m.;
 - A taxa de juros simples mensal ganha por uma aplicação de \$24.000 que rendeu \$2.800 no período compreendido entre 23 de maio e 18 de agosto do mesmo ano.
- 30.** No dia 26 de maio foi contratado um empréstimo de \$7.000 a juros simples de 24% a.a. para ser totalmente liquidado em 90 dias. No dia 16 de junho foram amortizados \$3.000 e no dia 11 de julho, \$2.500. Determinar a data de vencimento da dívida e o valor da quantia que deverá ser paga naquela data para liquidar a dívida (data focal: 90º dia).
- 31.** Determinar o rendimento de um capital de \$2.000 aplicado desde o dia 3 de março até o dia 28 de junho do corrente ano. A taxa de juros simples inicialmente contratada foi de 3% a.m., mas posteriormente teve uma queda para 2,8% a.m. no dia 16 de abril e para 2,6% a.m. no dia 16 de junho.
- 32.** Uma dívida de \$2.000 contraída no dia 8 de junho para ser liquidada no dia 8 de julho foi contratada originalmente a juros simples de 2% a.m. Calcular o rendimento da aplicação sabendo-se que a taxa de juros foi para 2,5% a.m. no dia 12 de junho, para 3% a.m. no dia 24 de junho e para 3,5% a.m. no dia 3 de julho.
- 33.** Uma aplicação financeira foi iniciada no dia 2 de junho com \$2.000. Posteriormente foram efetuados dois depósitos adicionais de \$500 e de \$300 nos dias 8 e 16 e um saque de \$200 no dia 26 de junho. Se inicialmente foi contratada uma taxa de juros simples de 28% a.a., que posteriormente baixou para 26% a.a. no dia 16 de junho, calcular o saldo disponível no dia 1º de julho.
- 34.** Hoje uma pessoa tem duas dívidas, a primeira, de \$8.000 vence em 36 dias e a segunda, de \$12.000, vence em 58 dias. Propõe-se a pagá-las por meio de dois pagamentos iguais dentro de 45 e 90 dias, respectivamente. A juros simples de 24% a.a., calcular o valor de cada pagamento (data focal: 90º dia).
- 35.** Resolver o exercício anterior tomando como data focal o 45º dia.

1.5 Respostas dos exercícios propostos

1. 34,61% a.a.
2. \$ 2.040
3. \$ 19.413,33
4. 52,94% a.a.
5. 9 meses
6. 13 meses
7. 22,73% a.m.
8. \$ 2.231,95
9. \$ 108.800; 25% a.a.
10. \$ 1.000; \$ 1.500; \$ 2.000
11. 0,833% a.m. (10% a.a.)
12. \$ 10.000
13. \$ 320.000 e \$ 13.333,33
14. \$ 50.000; \$ 80.000
15. 2.666,67 dias
16. 3 meses; 15 meses
17. \$ 1.000.000
18. \$ 133,33; \$ 83,33
19. \$ 10.000; 30% a.a.
20. \$ 140
21. \$ 350; \$ 150
22. 5% a.a.; 270 dias
23. \$ 2.307,50
24. \$ 1.548,75
25. \$ 2.296,12
26. 40 meses; 80 meses; 130 dias; 200 dias
27. 30% a.a.; 2,5% a.m.; 60% a.a.
28. \$ 3.571,43; \$ 1.758,24; \$ 2.973,33
29. \$ 141,67; \$ 78.947,37; \$ 5.270; \$ 17.814,73; 4.0229885% a.m.
30. 24/08; \$ 1.708,67
31. \$ 222,67
32. \$ 55
33. \$ 2.654,50
34. \$ 10.120
35. \$ 10.119,82

JUROS COMPOSTOS

CAPÍTULO

2

Capitalização composta

Cálculo do montante e do principal a juros compostos

Equivalência de capitais a juros compostos

A equação de valor

2.1 Regime de capitalização composta ou exponencial

O regime de juros compostos é o mais comum no dia-a-dia, no sistema financeiro e no cálculo econômico. Nesse regime os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte. Ou seja, o rendimento gerado pela aplicação será incorporado a ela, passando a participar da geração do rendimento no período seguinte; dizemos, então, que os juros são capitalizados. Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal. No regime de juros simples não há capitalização, pois apenas o capital inicial rende juros,

Se aplicarmos \$ 1.000 durante três meses à taxa de 20% a.m., teremos os seguintes rendimentos e montantes no regime de juros simples e no regime de juros compostos.

Mês	Juros Simples		Juros Compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	$\$ 1.000 \times 0,2 = \$ 200$	\$ 1.200	$\$ 1.000 \times 0,2 = \$ 200$	\$ 1.200
2	$\$ 1.000 \times 0,2 = \$ 200$	\$ 1.400	$\$ 1.200 \times 0,2 = \$ 240$	\$ 1.440
3	$\$ 1.000 \times 0,2 = \$ 200$	\$ 1.600	$\$ 1.440 \times 0,2 = \$ 288$	\$ 1.728

O dinheiro cresce mais rapidamente a juros compostos do que a juros simples. A juros compostos o dinheiro cresce exponencialmente em progressão geométrica ao longo do tempo, dado que os rendimentos de cada período são incorporados ao saldo anterior e passam, por sua vez, a render juros. No regime de juros simples o montante cresce linearmente, pois os juros de um determinado período não são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte (não há capitalização de juros nesse regime).

2.2 Capitalização e desconto a juros compostos: cálculo do montante e do principal

Vejamos o que acontece com o montante de um capital aplicado a juros compostos por três meses:

$$\text{Término do mês 1: } S = P \times (1 + i)$$

$$\text{Término do mês 2: } S = P \times (1 + i) \times (1 + i)$$

$$\text{Término do mês 3: } S = P \times (1 + i) \times (1 + i) \times (1 + i)$$

Generalizando para n períodos, podemos calcular diretamente o montante S resultante da aplicação do principal P durante n períodos a uma taxa de juros composta i :

$$S = P (1+i)^n$$

A fórmula expressa o montante ao fim de n períodos como uma função exponencial do capital inicial aplicado. A taxa de juros deve ser sempre referida à mesma unidade de tempo do período financeiro. O fator $(1 + i)^n$ é chamado *fator de capitalização ou fator de valor futuro para aplicação única*. É o número pelo qual devemos multiplicar o valor da aplicação inicial para obtermos seu valor futuro ou de resgate. Esse fator pode ser encontrado nas tabelas financeiras no Apêndice deste livro ou calculado com o auxílio de máquinas calculadoras.

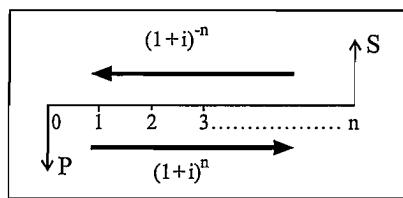
Se o capital fosse de \$1.000, a taxa composta, de 20% a.m., e o prazo, de 3 meses, o montante ao término do terceiro mês poderia ser calculado diretamente da seguinte forma:

$$S = \$1.000 \times (1+0,2)^3 = \$1.728$$

O cálculo do valor presente de um montante ou pagamento único é simplesmente o inverso do cálculo do montante:

$$P = S \times (1+i)^{-n}$$

O fator $(1 + i)^{-n}$ é conhecido como *fator de valor presente, fator de desconto ou fator de atualização para pagamento único*. Esquematicamente, os fatores de valor futuro $(1 + i)^n$ e de valor presente $(1 + i)^{-n}$ permitem efetuar as seguintes operações:



No diagrama, a flecha horizontal superior representa o processo de desconto de um pagamento ou montante único e a inferior, o processo de capitalização de um principal.

Os fatores $(1 + i)^n$ e $(1 + i)^{-n}$ têm a seguinte finalidade:

- O fator $(1 + i)^n$ “empurra” grandezas para a frente; permite encontrar o montante ou valor futuro de uma aplicação. Ou seja, capitaliza um principal levando-o a uma data posterior.
- O fator $(1 + i)^{-n}$ “puxa” grandezas para trás; permite encontrar o principal de um determinado montante. Ou seja, desconta um valor futuro trazendo-o a uma data anterior.

2.3 Uso básico da calculadora financeira HP-12C

A calculadora HP-12C é possivelmente a máquina financeira mais popular no mundo das finanças. Ela possui até três funções por tecla: brancas, amarelas e azuis. As funções brancas são automáticas e as amarelas e azuis aparecem acima e abaixo das teclas — para ativá-las é necessário que se pressione antes a tecla (f) ou (g), respectivamente. Veja a seguir algumas operações básicas da HP-12C:

- Ligar a calculadora: (ON)
- Apagar o que tem no visor: (CLX)
- Apagar o conteúdo de todos os registros: (f) (REG)
- Apagar o conteúdo das memórias financeiras: (f) (FIN)
- Introduzir um número: (número) (ENTER)
- Fazer um cálculo simples: (número) (ENTER) (número) (operação)
- Calcular porcentagem: (número) (ENTER) (percentual) (%)
- Calcular o exponencial (potenciação): (número) (ENTER) (potência) (y^x)
- Calcular o exponencial invertido (radiciação): (número) (ENTER) (raiz) (1/X) (y^x)
- Armazenar na memória: (número) (ENTER) (STO) (número qualquer de memória)
- Buscar um número na memória: (RCL) (número de memória onde foi armazenado)
- Fixar quantidade de casas decimais: (f) (número de casas decimais desejado)

Exemplos	Calculadora
Soma: $45 + 63 = 108$	45 (ENTER) 63 (+)
Multiplicação: $37 \times 14 = 518$	37 (ENTER) 14 (x)
Cálculos contínuos: $(28 + 54) / 8 = 10,50$	28 (ENTER) 54 (+) 8 (+)
Percentual: $12\% \text{ de } 1.500 = 180$	1.500 (ENTER) 12 (%)
Potenciação: $15^4 = 50.625$	15 (ENTER) 4 (y ^x)
Radiciação: $\sqrt[4]{625} = 5$	625 (ENTER) 4 (1/X) (y ^x)
Radiciação: $\sqrt[4]{5^3} = 3,34$	5 (ENTER) 3 (ENTER) 4 (+) (y ^x)

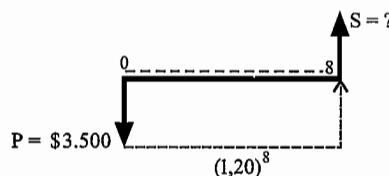
Os parênteses indicam que as respectivas teclas devem ser pressionadas

Exemplo 2.1

A juros compostos de 20% a.m., qual o montante de \$3.500 em 8 meses?

Dados: $n = 8$ meses, $i = 20\%$ a.m., $P = \$3.500$, $S = ?$

Diagrama de fluxo:



$$S = P(1+i)^n = \$3.500 \times (1+0,20)^8 = \$3.500 \times 4,29982 = \$15.049,37$$

O valor do fator $(1,20)^8$ pode ser observado nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro ou obtido com o auxílio de calculadoras com a função y^x . O cálculo do montante pode ser realizado rapidamente usando uma calculadora financeira. A seguir, mostramos a seqüência da operação na HP-12C:

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
3.500 (CHS) (PV)	entra com o valor do principal com sinal negativo
20 (i)	entra com a taxa de juros
8 (n)	entra com o número de períodos
(FV) → 15.049,37	calcula o montante

Na HP-12C, (i) e (n) representam a taxa de juros efetiva e o prazo, respectivamente. (PV) é o principal ou o valor que temos na data 0; (FV) é o valor futuro ou o montante, que será igual ao valor da aplicação mais os juros ganhos. A diferença entre entradas e saídas pode ser simbolizada pelos sinais negativo e positivo, conforme convenção do usuário. Se o principal (PV) entrar com sinal positivo, o montante (FV) será calculado com sinal negativo e vice-versa; um deve ter necessariamente sinal oposto ao outro.

Exemplo 2.2

Utilizando as tabelas financeiras do Apêndice deste livro, obter os valores para os seguintes fatores: $(1,10)^6$; $(1,15)^{13}$; $(1,20)^{-3}$; $(1,13)^{28}$. Empregar 5 casas decimais.

$$(1,10)^6 = 1,77156; (1,15)^{13} = 6,15279; (1,20)^{-3} = \frac{1}{(1,20)^3} = 0,57870$$

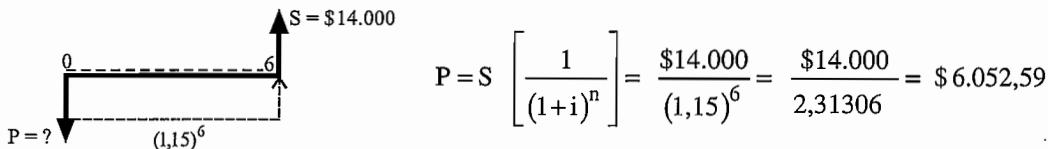
O fator $(1,13)^{28}$ não se encontra tabelado, mas, usando as propriedades multiplicativas das potências, podemos calculá-lo a partir de fatores tabelados:

$$(1,13)^{28} = (1,13)^{20} \times (1,13)^8 = 11,52309 \times 2,05844 = 30,63349$$

Exemplo 2.3

Qual o capital que, em 6 anos à taxa de juros compostos de 15% a.a., monta \$ 14.000?

Dados: $n = 6$ anos, $i = 15\%$ a.a., $S = \$ 14.000$, $P = ?$

**Calculadora HP-12C**

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
14.000 (CHS) (FV)	entra com o valor do montante com sinal negativo
15 (i)	entra com a taxa de juros
6(n)	entra com o número de períodos
(PV) → 6.052,59	calcula o principal

Exemplo 2.4

Em que prazo um empréstimo de \$ 55.000 pode ser quitado por meio de um único pagamento de \$ 110.624,80 se a taxa de juros compostos cobrada for de 15% a.m.?

Dados: $P = \$ 55.000$, $S = \$ 110.624,80$, $i = 15\%$ a.m., $n = ?$

Podemos aplicar a expressão do montante para, a seguir, destacar o fator financeiro implícito:

$$S = P(1+i)^n$$

$$\$110.624,80 = \$55.000 \times (1+0,15)^n$$

$$2,01136 = (1,15)^n$$

aplicando logaritmos: $\log 2,01136 = n \times \log 1,15 \Rightarrow n = \frac{\log 2,01136}{\log 1,15} = 5$ meses

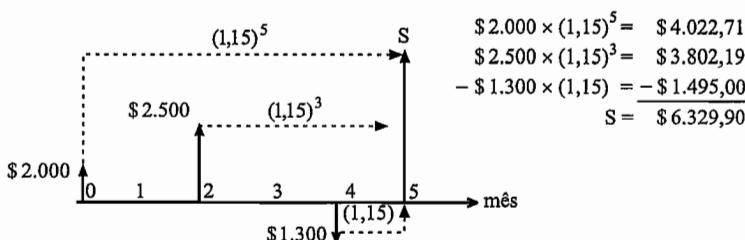
Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
110.624,80 (CHS) (FV)	entra com o valor do montante com sinal negativo
15 (i)	entra com a taxa de juros
55.000 (PV)	entra com o valor do principal
(n) → 5	calcula o número de períodos

Exemplo 2.5

Uma pessoa depositou \$ 2.000 em uma poupança. Dois meses depois, deposita mais \$ 2.500 e, dois meses depois desse último depósito, realiza uma retirada de \$ 1.300. Qual será o saldo da poupança ao fim do quinto mês, considerando que a taxa de juros compostos ganha é de 15% a.m.?

O diagrama a seguir apresenta o fluxo e o processo de cálculo do saldo final da conta.

**Calculadora HP-12C**

(f) (REG)	apaga todos os registros
15 (i)	taxa de juros
2.000 (g) (CF ₀)	fluxo do período 0
0 (g) (CF ₁)	fluxo do período 1
2.500 (g) (CF ₂)	fluxo do período 2
0 (g) (CF ₃)	fluxo do período 3
1.300 (CHS) (g) (CF ₄)	fluxo do período 4 negativo
(f) (NPV)	calcula o valor presente do fluxo
(CHS) (PV)	troca o sinal e define como principal
5 (n)	entra com o número de períodos de capitalização
(FV) → 6.329,90	calcula o montante no final do quinto mês

Exemplo 2.6

A que taxa de juros um capital de \$ 13.200,00 pode transformar-se em \$ 35.112,26, considerando um período de aplicação de sete meses?

Dados: P = \$13.200, S = \$35.112,26, n = 7, i = ?

$$S = P (1+i)^n$$

$$\$35.112,26 = \$13.200,00 \times (1+i)^7 \Rightarrow i = \left(\frac{\$35.112,26}{\$13.200,00} \right)^{\frac{1}{7}} - 1 = 0,15 = 15\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
35.112,56 (CHS) (FV)	entra com o montante com sinal negativo
13.200 (PV)	entra com o principal com sinal positivo
7 (n)	entra com o número de períodos
(i) → 15	calcula a taxa de juros

Exemplo 2.7

Quanto rende um capital de \$ 4.000 aplicado por dez meses a juros efetivos de 2% a.m.?

Dados: $n = 10$, $i = 2\%$ a.m., $P = \$ 4.000$, Juros = ?

$$\text{juros} = \text{montante} - \text{aplicação}$$

$$= P(1+i)^n - P$$

$$= \$ 4.000 \times (1,02)^{10} - \$ 4.000 = \$ 875,98$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
4.000 (CHS) (PV)
2 (i) 10 (n)
(FV)
4.000 (-) → 875,98

apaga a memória financeira
entra com o principal com sinal negativo
taxa de juros e número de períodos
calcula o montante
subtrai o principal

Exemplo 2.8

A que taxa de juros um capital de \$ 2.000 obtém um rendimento de \$ 280 em dois meses?

Dados: $n = 2$, $P = \$ 2.000$, juros = \$ 280, $S = \$ 2.280$, $i = ?$

$$S = P(1+i)^n$$

$$\$ 2.280 = \$ 2.000 \times (1+i)^2 \Rightarrow i = \left(\frac{\$ 2.280}{\$ 2.000} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,0677 = 6,77\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
2.000 (CHS) (PV)
2 (n)
2.280 (FV)
(i) → 6,77

apaga a memória financeira
entra com o capital com sinal negativo
entra com o número de períodos
entra com o valor do montante
calcula a taxa de juros a.m.

Exemplo 2.9

Determinar o capital que, aplicado por sete meses a juros efetivos de 4% a.m., rende \$ 10.000.

Dados: $n = 7$, rendimento (juros ganhos) = \$ 10.000, $i = 4\%$ a.m., $P = ?$

$$\text{juros} = \text{montante} - \text{aplicação}$$

$$\$ 10.000 = P(1,04)^7 - P \Rightarrow P = \frac{\$ 10.000}{(1,04)^7 - 1} = \$ 31.652,40$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
7 (n)
4 (i)
1 (CHS) (PV) (FV) 1 (-)
(1/x) 10.000 (x) → 31.652,40

apaga a memória financeira
entra com o número de períodos
entra com a taxa de juros
calcula o fator de capitalização para $PV = 1$, $i = 4\%$ e $n = 7$ e subtrai 1
inverte o valor anterior e multiplica-o pelo valor dos juros

Exemplo 2.10

À taxa efetiva de 5% a.m., em que prazo \$ 5.000 rendem juros de \$ 1.700,48?

Dados: $P = \$ 5.000$, juros = \$ 1.700,48, $i = 5\%$ a.m., $n = ?$

$$\text{juros} = \text{montante} - \text{aplicação}$$

$$\$ 1.700,48 = \$ 5.000 \times (1,05)^n - \$ 5.000 \Rightarrow (1,05)^n = 1,340096$$

Aplicando logaritmos:

$$n \times \log 1,05 = \log 1,340096 \Rightarrow n = \frac{\log 1,340096}{\log 1,05} = 6 \text{ meses}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)

5.000 (CHS) (PV)

5 (i)

6.700,48 (FV)

(n) → 6

apaga a memória financeira

entra com o capital negativo

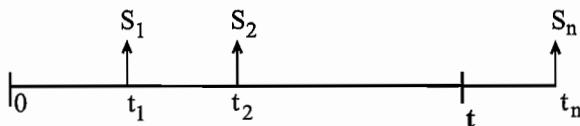
entra com o número de períodos

entra com o valor montante

calcula o prazo

2.4 Equivalência de capitais a juros compostos – a equação de valor

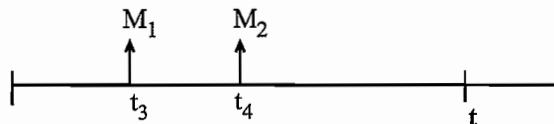
O princípio de equivalência de capitais é fundamental e essencial a todas as abordagens aplicadas aos problemas de cálculo financeiro. Diz-se que dois capitais, com datas de vencimento determinadas, são equivalentes quando, levados para uma mesma data à mesma taxa de juros, tiverem valores iguais. Para melhor compreensão do conceito de equivalência, consideremos S_1, S_2, \dots, S_n como valores de n capitais resgatáveis nos prazos t_1, t_2, \dots, t_n , respectivamente:



Dizemos que esses capitais são equivalentes em determinada data t se apresentarem valores iguais quando avaliados naquela data para uma mesma taxa de juros compostos. Assim, os capitais citados serão equivalentes na data t se a seguinte igualdade se verificar:

$$S_1(1+i)^{t-t_1} = S_2(1+i)^{t-t_2} = \frac{S_n}{(1+i)^{t_n-t}}$$

O conjunto de capitais anterior e o conjunto a seguir:



serão equivalentes na data t se:

$$S_1(1+i)^{t-t_1} + S_2(1+i)^{t-t_2} + \frac{S_n}{(1+i)^{t_n-t}} = M_1(1+i)^{t-t_3} + M_2(1+i)^{t-t_4}$$

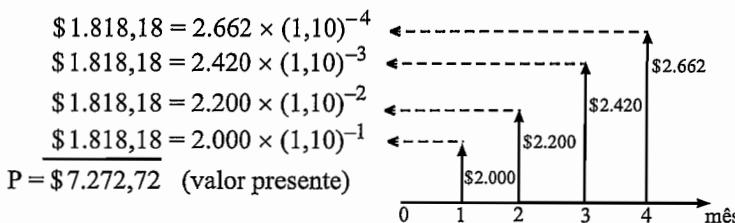
A equação anterior chama-se equação de valor na data t. É importante ressaltar que, no regime de juros compostos, dois conjuntos de obrigações equivalentes em uma determinada data o serão também em qualquer outra. Como foi visto no Capítulo 1, isso não ocorre no regime de juros simples.

Exemplo 2.11

Calcular o valor presente do conjunto de capitais apresentado a seguir e verificar se a juros compostos de 10% eles são equivalentes.

Capital	Mês de Vencimento
\$ 2.000	1
\$ 2.200	2
\$ 2.420	3
\$ 2.662	4

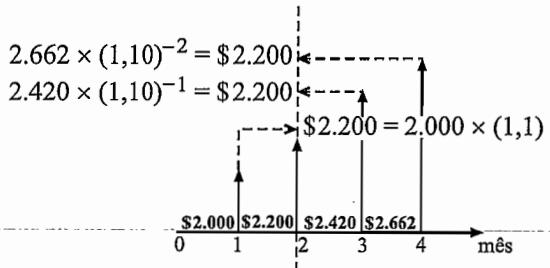
$$\frac{\$ 2.000}{(1,10)} = \frac{\$ 2.200}{(1,10)^2} = \frac{\$ 2.420}{(1,10)^3} = \frac{\$ 2.662}{(1,10)^4} = \$ 1.818,18$$



Os capitais são equivalentes na data focal inicial (data zero), tendo em vista que seus valores atualizados naquela data são iguais.

Mudando a data focal para o segundo mês,

$$\$ 2.200 = \$ 2.000 \times (1,10) = \frac{\$ 2.420}{(1,10)} = \frac{\$ 2.662}{(1,10)^2}$$



constata-se que a equivalência dos capitais é mantida. No regime de juros compostos, uma vez verificada a equivalência para uma certa data focal, essa permanecerá válida para qualquer outra.

Exemplo 2.12

Verificar se os conjuntos de capitais A e B são equivalentes, considerando uma taxa de juros de 10% a.m.

Conjunto A

Conjunto B

Capital	Mês de Vencimento	Capital	Mês de Vencimento
\$ 2.000,00	1	\$ 2.100,00	1
\$ 2.200,00	2	\$ 2.000,00	2
\$ 2.420,00	3	\$ 2.300,00	3
\$ 2.662,00	4	\$ 2.902,90	4

Dois conjuntos de capitais são equivalentes em uma determinada data focal quando a soma de seus valores atualizados para aquela data é igual. Escolhendo como data focal a data zero, tem-se:

$$\frac{\$2.000}{1,10} + \frac{\$2.200}{(1,10)^2} + \frac{\$2.420}{(1,10)^3} + \frac{\$2.662}{(1,10)^4} = \frac{\$2.100}{1,10} + \frac{\$2.000}{(1,10)^2} + \frac{\$2.300}{(1,10)^3} + \frac{\$2.902,90}{(1,10)^4} = \$7.272,72$$

Verifica-se que os valores presentes dos dois conjuntos de capitais são iguais, portanto, equivalentes. Essa equivalência permanecerá para qualquer outra data focal.

Exemplo 2.13

Em vendas à vista uma loja oferece 5% de desconto; pagando por meio de um cheque pré-datado para um mês, não há cobrança de juros, para cheques pré-datados para dois meses, há um acréscimo de 3%. Qual a melhor forma de pagamento se o rendimento da poupança for de 3,5% a.m.?

Dados: $i = 5\%$ a.m., valor à vista = $0,95P$; valor a um mês = P ; valor a dois meses = $1,03P$

- Cálculo da taxa de juros embutida

Pagamento a um mês: Por equivalência de capitais, o valor presente do pagamento a um mês deve ser igual ao valor do pagamento à vista:

$$\frac{P}{1+i} = 0,95P \Rightarrow i = \frac{1}{0,95} - 1 = 0,052632 = 5,2632\% \text{ a.m.}$$

Pagamento a dois meses: Por equivalência de capitais, o valor presente do pagamento a dois meses deve ser igual ao valor do pagamento à vista:

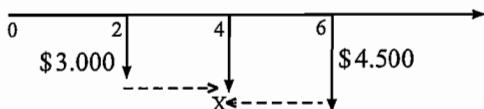
$$\frac{1,03P}{(1+i)^2} = 0,95P \Rightarrow i = \left(\frac{1,03}{0,95} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,041254 = 4,1254\% \text{ a.m.}$$

A melhor forma de pagamento é à vista, já que a taxa de juros ganha na poupança é menor que a cobrada pela loja nas outras duas formas de pagamento possíveis.

Exemplo 2.14

Uma pessoa deve \$3.000 com vencimento em dois anos e \$4.500 com vencimento em seis anos. Pretende pagar seus débitos por meio de um pagamento único a ser realizado no final de quatro anos. Considerando uma taxa de juros efetiva de 10% a.a., determinar o valor do pagamento único que liquida a dívida.

Por equivalência de capitais, o valor do pagamento único deve ser igual ao valor atualizado (no quarto ano) do fluxo de caixa da primeira forma de pagamento:

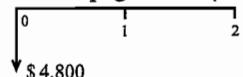


$$X = \$3.000 \times (1,10)^2 + \frac{\$4.500}{(1,10)^2} = \$7.349$$

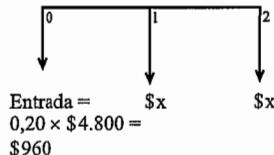
Exemplo 2.15

Uma pessoa dispõe de três formas de pagamento na compra de um bem de \$4.800. Na primeira forma paga-se à vista \$4.800; na segunda paga-se 20% de entrada e duas prestações mensais iguais e consecutivas, sendo a primeira para 30 dias; na terceira, o valor à vista é acrescido de 30% e, desse valor majorado, 20% é pago como entrada e o saldo, dividido em dois pagamentos mensais iguais sem juros, sendo o primeiro para 30 dias. Pede-se: a) a juros efetivos de 20% a.m. calcular o valor das prestações mensais na segunda forma de pagamento; b) calcular a taxa de juros efetiva embutida na terceira forma de pagamento.

1^a forma de pagamento (à vista):

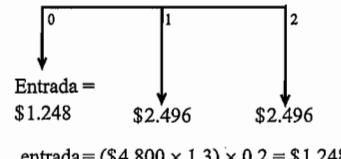


2^a forma de pagamento:



$$\text{Entrada} = 0,20 \times \$4.800 = \$960$$

3^a forma de pagamento:



$$\text{Entrada} = (\$4.800 \times 1,3) \times 0,2 = \$1.248$$

$$\text{prestação} = \left(\frac{\$4.800 \times 1,3 - \$1.248}{2} \right) = \$2.496$$

a) Por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo de caixa da segunda forma de pagamento:

$$\$4.800 = \$960 + \frac{X}{1,2} + \frac{X}{(1,2)^2} \Rightarrow X = \frac{\$3.840}{\frac{1}{1,2} + \frac{1}{(1,2)^2}} = \$2.513,46$$

Logo, na segunda forma de pagamento, paga-se uma entrada de \$960 e duas parcelas de \$2.513,46 cada.

b) Por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo de caixa da terceira forma de pagamento:

$$\$4.800 = \$1.248 + \frac{\$2.496}{1+i} + \frac{\$2.496}{(1+i)^2} \Rightarrow i \approx 26,03\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
4.800 (ENTER) 1.248 (-)
(PV)
2 (n)
2.496 (CHS) (PMT)
(i) → 26,03

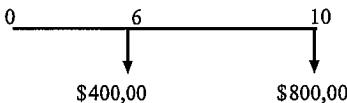
apaga a memória financeira
calcula o valor do financiamento líquido (valor à vista menos a entrada)
o valor anterior é definido como principal
entra com o número de pagamentos
entra com o valor dos pagamentos com sinal negativo
calcula a taxa de juros

A taxa de juros pode também ser encontrada por aproximações sucessivas, por interpolação linear ou usando fórmulas específicas (veja o Capítulo 5).

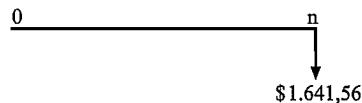
Exemplo 2.16

Um empréstimo foi contratado a juros efetivos de 5% a.m. para ser pago em dois pagamentos. O primeiro de \$400 será pago ao fim de seis meses e o segundo de \$800, ao fim de dez meses; entretanto, o empréstimo pode ser liquidado por meio de um único pagamento de \$1.641,46. Determinar em que mês deve ser realizado esse pagamento para que a taxa de 5% a.m. seja mantida.

1^a forma de pagamento:



2^a forma de pagamento:



Podemos encontrar o prazo do pagamento único se considerarmos que, por equivalência de capitais, as duas formas de pagamento devem ter o mesmo valor presente:

$$\frac{\$400}{(1,05)^6} + \frac{\$800}{(1,05)^{10}} = \frac{\$1.641,56}{(1,05)^n} \Rightarrow (1,05)^n = 2,07893$$

aplicando logaritmos:

$$n \times \log 1,05 = \log 2,07893 \Rightarrow n = \frac{\log 2,07893}{\log 1,05} = 15 \text{ meses}$$

Exemplo 2.17

Considerando juros efetivos de 5% a.m., em que data deve ser feito um pagamento único de \$160.000, de modo que liquide uma dívida pela qual o devedor irá pagar três parcelas, a saber: \$50.000 no fim de 6 meses, \$40.000 no fim de 10 meses e \$80.000 no fim de 12 meses.

- Valor presente do principal devido

$$\frac{\$50.000}{(1,05)^6} + \frac{\$40.000}{(1,05)^{10}} + \frac{\$80.000}{(1,05)^{12}} = \$106.414,29$$

- Cálculo do prazo do pagamento único

$$S = P(1+i)^n$$

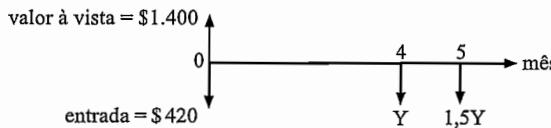
$$\$160.000 = \$106.414,29 \times (1,05)^n \Rightarrow (1,05)^n = 1,50356$$

aplicando logaritmos: $n = \frac{\log 1,50356}{\log 1,05} = 8,35894$ meses (250 dias)

Atenção: Veja o Exemplo 2.26 para um esclarecimento no uso da HP-12C nesse tipo de problema.

Exemplo 2.18

Uma compra pode ser paga à vista por \$ 1.400 ou financiada por meio de uma entrada de 30% e mais dois pagamentos mensais — o segundo sendo 50% maior que o primeiro. Sabendo-se que o início dos pagamentos será ao término de um período de carência de quatro meses e que a taxa de juros é de 5% a.m., calcular o valor dos pagamentos mensais.



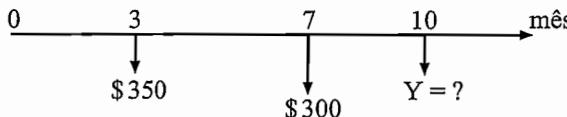
O valor de Y pode ser encontrado considerando-se que, pelo princípio de equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo de caixa da alternativa de compra financiada:

$$\$1.400 = \$420 + \frac{Y}{(1,05)^4} + \frac{1,5Y}{(1,05)^5} \Rightarrow Y = \frac{\$980}{[1/(1,05)^4 + (1,05)^5 / 1,5]} = \$490,49$$

Logo, o primeiro pagamento será de \$ 490,49 e o segundo, de 735,74 ($1,5 \times \$490,49$)

Exemplo 2.19

Uma pessoa tem uma dívida de \$ 1.000 que vence em dez meses e propõe-se a pagá-la em três parcelas: \$ 350 daqui a três meses, \$ 300 daqui a sete meses e uma parcela final no vencimento da dívida. A juros efetivos de 4% a.m, determinar o valor da parcela final que liquida a dívida.

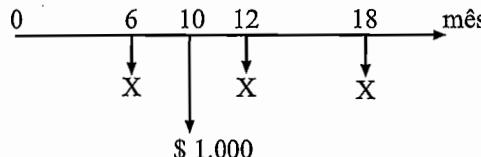


Por equivalência de capitais, no décimo mês, o valor da dívida deve ser igual ao valor das três parcelas atualizadas para aquela data:

$$\$1.000 = \$300 \times (1,04)^3 + \$350 \times (1,04)^7 + Y \Rightarrow Y = \$201,97$$

Exemplo 2.20

Uma dívida de \$ 1.000 vence daqui a dez meses. Entretanto, o devedor propõe-se dividi-la em três parcelas semestrais iguais. A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor das parcelas.



Por equivalência de capitais, no décimo mês, o valor da dívida deve ser igual à soma das parcelas avaliadas naquela data:

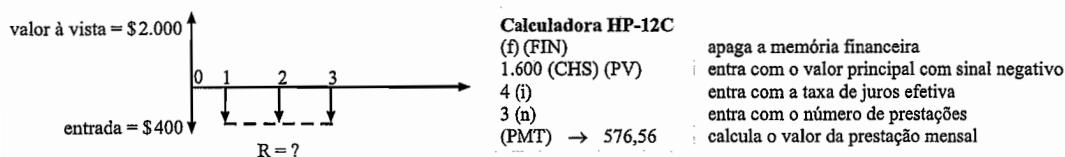
$$\$1.000 = X(1,05)^4 + \frac{X}{(1,05)^2} + \frac{X}{(1,05)^8} \Rightarrow X = \frac{\$1.000}{[(1,05)^4 + 1/(1,05)^2 + 1/(1,05)^8]} = \$357,22$$

Exemplo 2.21

Um bem vale à vista \$ 2.000. A prazo paga-se uma entrada de 20% mais três mensalidades iguais e consecutivas. A juros efetivos de 4% a.m., calcular o valor das mensalidades.

O valor da mensalidade (R) pode ser encontrado considerando-se que o valor do financiamento efetivo deve ser igual ao valor atual das três mensalidades:

$$\begin{aligned} \$2.000 - \$400 &= R(1,04)^{-1} + R(1,04)^{-2} + R(1,04)^{-3} \\ \$1.600 &= R(2,775091) \Rightarrow R = \$576,56 \end{aligned}$$

**Exemplo 2.22**

Um capital de \$ 1.000, aplicado em 12/2/1999 a juros efetivos de 0,2% ao dia, resultou em um montante de \$ 1.354,86 em 14/7/1999. Determinar o prazo da aplicação em dias considerando ano civil.

Dados: $S = \$1.354,86$, $P = \$1.000$, $i = 0,2\%$ a.d., $n = ?$

$$S = P(1+i)^n$$

$$\$1.354,86 = \$1.000 (1,002)^n \Rightarrow (1,002)^n = 1,35486$$

$$\text{aplicando logaritmos: } n \times \log 1,002 = \log 1,35486 \Rightarrow n = \frac{\log 1,35486}{\log 1,002} = 152 \text{ dias}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
1.000 (CHS)(PV)
1.354,86 (FV)
0,2 (i)
 $n \rightarrow 152$

apaga a memória financeira
aplicação com sinal negativo
entra com o valor do montante
entra com a taxa de juros efetiva a.d.
calcula o número de dias

- a) Determinação do prazo usando a Tábua para Contagem de Dias entre Duas Datas do ano civil:

$$\text{número de dias da data posterior (14 de julho)} = +195$$

$$\text{número de dias da data anterior (12 de fevereiro)} = -43$$

$$\text{prazo} = 152$$

- b) Determinação do prazo utilizando as funções Calendário da HP-12C:

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
(g) (D.MY)
12.021999 [ENTER]
14.071999 (g) (ΔDYS) → 152

apaga a memória financeira
define o modo de entrada das datas (dia/mês/ano)
entra com a data inicial
entra com a data final e calcula os dias entre as duas datas

Atenção: Na HP-12C as funções Calendário podem manipular datas a partir de 15/10/1582 a 25/10/4046.

Exemplo 2.23

Um capital de \$20.000 aplicado em 11/4/1999 a juros efetivos de 20% a.m. rendeu \$18.555,16 em um determinado prazo. Determinar o prazo e a data de resgate da aplicação considerando ano civil.

Dados: Juros = \$18.555,16, P = \$20.000, i = 20% a.m., n = ?, data = ?

$$\text{taxa de juros efetiva a.d.: } (1,20)^{\frac{1}{30}} - 1 = 0,609589\% \text{ a.d.}$$

$$S = P(1+i)^n$$

$$\$38.555,16 = \$20.000 \times (1,00609589)^n \Rightarrow (1,00609589)^n = 1,927757874$$

aplicando logaritmos e destacando o prazo:

$$n \times \ln 1,00609589 = \ln 1,927757874 \Rightarrow n = \frac{\ln 1,927757874}{\ln 1,00609589} = 108 \text{ dias}$$

Calculadora HP-12C

(f) (REG)
20.000 (CHS) (PV)
38.555,16 (FV)
1,2 [ENTER] 30 (1/x) (y^x) 1(-)100 (x) (i)
 $n \rightarrow 108$

apaga todos os registros
entra com a aplicação com sinal negativo
entra com o montante
calcula e entra com a taxa de juros efetiva a.d.
calcula o número de dias

- a) Determinação da data de resgate da aplicação usando a Tábua para Contagem de Dias entre Duas Data do ano civil:

$$\begin{array}{rcl} \text{número de dias da data posterior (?)} & = & + Y \\ \text{número de dias da data anterior (11 de abril)} & = & -101 \\ \text{prazo} & = & 108 \end{array}$$

Logo, o valor de $Y = 101 + 108 = 209$, que na tábua corresponde ao dia 28 de julho de 1999.

- b) Determinação da data de resgate utilizando as funções Calendário da HP-12C:

Calculadora HP-12C	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
(g) (D.MY)	define o modo de entrada das datas (dia/mês/ano)
11.041999 [ENTER]	entra com a data inicial
108 (g) (DATE)	entra com o prazo e pede para determinar a data de vencimento
→ 28.07.1999 3	28 de julho de 1999 – quarta-feira

o último dígito do resultado indica o dia da semana; 3 corresponde a quarta-feira.

2.5 Cálculo com prazos fracionários

No cálculo financeiro a juros compostos, muitas vezes o prazo da aplicação não corresponde a um número inteiro de períodos a que se refere a taxa de juros, mas a um número fracionário. Nesse caso, geralmente admitem-se duas alternativas de cálculo: cálculo pela *convenção linear* e cálculo pela *convenção exponencial*.

- Cálculo pela convenção linear
Os juros compostos são usados para o número inteiro de períodos e os juros simples para a parte fracionária de períodos.
- Cálculo pela convenção exponencial
Os juros compostos são usados tanto para o número inteiro de períodos quanto para a parte fracionária de períodos.

Exemplo 2.24

Para um capital de \$25.000, aplicado durante 77 dias a juros de 5% a.m., calcular o montante utilizando as convenções linear e exponencial.

Dados: $P = \$25.000$, $i = 5\%$ a.m., $n = 77$ dias (2 meses e 17 dias), $S = ?$

- Convenção linear: $S = \$25.000 (1 + 0,05)^2 \times \left(1 + 0,05 \times \frac{17}{30}\right) = \$28.343,44$

Calculadora HP-12C	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
25.000 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
5 (i)	entra com a taxa de juros
77 [ENTER] 30 (+) (n)	calcula e entra com o prazo em meses
(FV) → 28.343,44	calcula o montante

- Convenção exponencial: $S = \$25.000 (1 + 0,05)^{\frac{77}{30}} = \$28.335,17$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
(STO) (EEX)	permite o uso de prazo fracionário (convenção exponencial)
25.000 (CHS) (PV)	entra com o valor do principal com sinal negativo
5 (i)	entra com a taxa de juros
77 [ENTER] 30 (÷) (n)	calcula e entra com o prazo em meses
(FV) → 28.335,17	calcula o montante

Atenção: Para cálculos pela convenção exponencial, as teclas (STO)(EEX) devem ser pressionadas (a letra c aparece no visor); caso contrário, a máquina fará os cálculos pela convenção linear. Para apagá-la do visor, basta pressionar novamente as teclas (STO)(EEX).

Exemplo 2.25

Um determinado capital, aplicado a juros efetivos de 40% a.a. durante 4 anos e 11 meses, resultou em um montante de \$ 10.000. Determinar o valor do capital.

Dados: S = \$10.000, i = 40% a.a., n = 4 anos e 11 meses (59 meses), P = ?

- Convenção linear: $P = \frac{\$10.000}{(1+0,40)^4 \times \left(1 + 0,40 \times \frac{11}{12}\right)} = \$1.904,69$
- Convenção exponencial: $P = \frac{\$10.000}{(1 + 0,40)^{59}} = \$1.912,22$

Exemplo 2.26

Um capital de \$ 27.000 aplicado a juros efetivos de 6% a.m. rendeu \$ 5.654,80. Determinar o prazo da aplicação em meses.

Dados: S = \$32.654,80, P = \$27.000, i = 6% a.m., n = ?

- Convenção exponencial:

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
27.000 (CHS) (PV)	entra com o valor do principal com sinal negativo
6 (i)	entra com a taxa de juros
32.654,80 (FV)	entra com o montante
(n) → 4	calcula o prazo

$$S = P(1+i)^n$$

$$\$32.654,80 = \$27.000 (1,06)^n \Rightarrow (1,06)^n = 1,2094370$$

$$\text{aplicando logaritmos: } n \times \ln 1,06 = \ln 1,2094370 \Rightarrow n = \frac{\ln 1,2094370}{\ln 1,06} = 3,2634 \text{ meses}$$

Atenção: Se a incógnita do problema for o prazo da aplicação e se o prazo for um número fracionário, a HP-12C arredondará sempre para o número inteiro superior. Logo, neste caso, pela convenção exponencial deve-se necessariamente usar logaritmos para o cálculo do prazo correto.

- Convenção linear:

$$S = P (1+i)^3 (1+i \times n)$$

$$\$ 32.654,80 = \$ 27.000 (1,06)^3 (1+0,06 \times n) \Rightarrow n = 0,2578 \text{ mês}$$

Prazo : $3 + 0,2578 = 3,2578$ meses

2.6 Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais (360 dias).

1. Calcular o montante de uma aplicação de \$ 3.500, pelas seguintes taxas efetivas e prazos:
a) 4% a.m., 6 meses; b) 8% a.t., 18 meses; c) 12% a.a., 18 meses.
2. Em que prazo um capital de \$ 18.000 acumula um montante de \$ 83.743 à taxa efetiva de 15% a.m.?
3. Um investimento resultou em um montante de \$ 43.000 no prazo de três meses. Se a taxa de juros efetiva ganha for de 10% a.m., calcular o valor do investimento.
4. Uma empresa pretende comprar um equipamento de \$ 100.000 daqui a quatro anos com o montante de uma aplicação financeira. Calcular o valor da aplicação necessária se os juros efetivos ganhos forem de:
a) 13% a.t.; b) 18% a.a.; c) 14% a.s.; d) 12% a.m.
5. Um capital de \$ 51.879,31 aplicado por seis meses resultou em \$ 120.000. Qual a taxa efetiva ganha?
6. Uma pessoa deve pagar três prestações mensais de \$ 3.500 cada, sendo a primeira para 30 dias. Se resolvesse quitar a dívida por meio de um pagamento único daqui a 3 meses, qual seria o valor desse pagamento considerando uma taxa de juros efetiva de 5% a.m.?
7. Dispõe-se de duas formas de pagamento: a) pagamento à vista de \$ 1.400; b) dois cheques pré-datados de \$ 763,61 cada, para 30 e 60 dias, respectivamente. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada. Se o cliente obtiver 5% a.m. em suas aplicações, qual será a melhor opção de compra: à vista ou a prazo?
8. Na compra de um bem cujo valor à vista é de \$ 140, deve-se pagar uma entrada mais duas prestações de \$ 80 no fim dos próximos dois meses. Considerando uma taxa de juros de 20% a.m., qual o valor da entrada?
9. Uma casa é vendida por \$ 261.324,40 à vista. Se o comprador se propuser pagar \$ 638.000 daqui a quatro meses, calcular a taxa de juros efetiva ao mês embutida na proposta.
10. Em quanto tempo triplica uma população que cresce à taxa de 3% a.a.?
11. A rentabilidade efetiva de um investimento é de 10% a.a. Se os juros ganhos forem de \$ 27.473 sobre um capital investido de \$ 83.000, quanto tempo o capital ficará aplicado?
12. Nas vendas a crédito uma loja aumenta em 40% o valor sobre o preço à vista. Desse valor majorado, 20% é exigido como entrada e o resto será quitado em duas prestações mensais de \$ 1.058 cada, sendo a primeira para daqui a um mês. Se o valor à vista é de \$ 2.000, determinar a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.

13. Um produto, cujo preço à vista é de \$ 450, será pago em duas prestações mensais consecutivas, de \$ 280 e \$ 300, a primeira para 30 dias. Se a taxa de juros embutida na primeira prestação for de 10% a.m., determinar a taxa embutida na segunda.
14. Um apartamento pode ser comprado à vista por \$ 320.000 ou pagando 20% de entrada mais duas prestações de \$ 170.000 cada, a primeira para 3 meses e a segunda para 7 meses. Calcular o custo efetivo do financiamento. Se a taxa de juros vigente é de 2% a.m., qual será a melhor opção de compra?
15. Certa loja tem como política de vendas a crédito exigir 20% do valor à vista como entrada e o restante a ser liquidado em três prestações mensais iguais, a primeira para 30 dias. Se a taxa de juros efetiva cobrada for de 15% a.m., determinar a porcentagem do valor à vista a ser pago como prestação a cada mês.
16. Uma loja permite pagamentos em três prestações iguais. Se cada prestação for igual a um terço do valor à vista, sendo a primeira paga no ato da compra (antecipada), calcular a taxa de juros cobrada.
17. O valor à vista de um bem é de \$ 6.000. A prazo, paga-se uma entrada mais três parcelas mensais de \$ 2.000 cada, sendo a primeira daqui a um mês. Calcular o valor da entrada se a taxa de juros aplicada for de 7% a.m.
18. Por um equipamento de \$ 360.000 paga-se uma entrada de 20% mais dois pagamentos mensais consecutivos. Se o primeiro pagamento for de \$ 180.000 e a taxa de juros efetiva aplicada, de 10% a.m., calcular o valor do segundo pagamento.
19. Pretende-se daqui a seis meses comprar um automóvel de \$ 25.000. Calcular a aplicação necessária a ser efetuada hoje em um investimento que rende juros efetivos de 13% a.m., de modo que o veículo possa ser comprado *com os juros ganhos* na aplicação.
20. Um capital de \$ 50.000 rendeu \$ 1.000 em um determinado prazo. Se o prazo fosse dois meses maior, o rendimento aumentaria em \$ 2.060,40. Calcular a taxa de juros efetiva a.m. ganha pela aplicação e o prazo em meses.
21. Dois capitais foram aplicados durante dois anos, o primeiro a juros efetivos de 2% a.m. e o segundo, a 1,5% a.m. O primeiro capital é \$ 10.000 maior que o segundo e seu rendimento excedeu em \$ 6.700 o rendimento do segundo capital. Calcular o valor de cada um dos capitais.
22. Dois capitais, o primeiro de \$ 2.400 e o segundo de \$ 1.800, foram aplicados, respectivamente, por 40 e 32 dias. Considerando uma taxa efetiva ganha pelo primeiro capital de 5% a.m. e sabendo-se que esse capital rendeu \$ 100 a mais do que o segundo, determinar a taxa mensal ganha pelo segundo capital.
23. Um capital foi aplicado por seis meses a juros efetivos de 15% a.a. Determinar o valor do capital sabendo-se que, se o montante ao término do prazo, diminuído da metade dos juros ganhos, fosse reaplicado à mesma taxa efetiva, renderia em 3 meses juros de \$ 18,42.
24. Um certo capital após quatro meses transformou-se em \$ 850,85. Esse capital, diminuído dos juros ganhos nesse prazo, reduz-se a \$ 549,15. Calcular o capital e a taxa de juros efetiva a.m. ganha na aplicação.
25. Um capital foi aplicado a juros efetivos de 30% a.a. Após três anos, resgatou-se metade dos juros ganhos e, logo depois, o resto do montante foi reaplicado à taxa efetiva de 32% a.a., obtendo-se um rendimento de \$ 102,30 no prazo de um ano. Calcular o valor do capital inicialmente aplicado.

26. Um capital foi aplicado por 50 dias a juros efetivos de 3% a.m. Se a diferença entre o capital inicial e os juros ganhos fosse aplicada à mesma taxa, renderia em 3 meses juros de \$ 44,02. Determinar o valor do capital.
27. Um capital foi aplicado durante dez meses à taxa efetiva de 2% a.m. Ao término desse prazo, seu montante foi reaplicado durante 11 meses a 3% a.m. A que taxa mensal única poderia ser aplicado o capital durante todo esse tempo de modo que resultasse no mesmo montante?
28. Um capital aplicado à taxa de 4% a.m. rendeu após um ano \$ 480,83 de juros. Do montante obtido foram retirados \$ 600 e o saldo restante reaplicado à mesma taxa, resultando em um novo montante de \$ 1.226,15 depois de um certo prazo. Determinar o valor do capital inicial e o prazo da reaplicação.
29. Dois capitais, o primeiro igual ao dobro do segundo, foram aplicados pelo mesmo prazo e à mesma taxa efetiva de 4% a.m. Sabendo-se que o primeiro capital ganhou \$ 400 de juros, e que a soma do primeiro capital mais os juros ganhos pelo segundo totalizam \$ 1.032,91, calcular os capitais e o prazo.
30. Dois capitais, o primeiro de \$ 1.000 e o segundo de \$ 227,27, foram aplicados a juros efetivos de 20% a.a. O primeiro capital, na metade do tempo do segundo, obteve um rendimento de \$ 100,00 a mais. Considerando que o segundo capital resultou em um montante de \$ 327,27, calcular os prazos das duas aplicações.
31. Um capital foi aplicado por dois anos a juros efetivos de 20% a.a. Ao término desse prazo, um terço dos juros ganhos foi reaplicado à taxa efetiva de 25% a.a., obtendo-se uma remuneração semestral de \$ 34,62. Calcular o valor do capital inicialmente aplicado.
32. Um capital foi aplicado durante 50 dias a juros efetivos de 3% a.m. Se a diferença entre o capital e os juros ganhos, acrescida de \$ 10.000, fosse aplicada à mesma taxa, renderia \$ 12.342,82 ao ano. Calcular o capital.
33. Uma pessoa tomou dois empréstimos. O primeiro por 3 meses a juros efetivos de 5% a.m. e o segundo por 10 meses a juros de 4% a.m. Sabendo-se que os juros pagos totalizaram \$ 11.181,14 e que o primeiro empréstimo é igual à metade do segundo, calcular o valor total dos empréstimos.
34. Dois capitais, o primeiro igual ao triplo do segundo, foram aplicados, respectivamente, a taxas efetivas de 5% a.m. e 10% a.m. Determinar o prazo em que os montantes dos dois capitais se igualam.
35. Uma empresa tem duas dívidas, a primeira, de \$ 10.000, contratada a juros efetivos de 3% a.m., vence em 48 dias e a segunda, de \$ 15.000, a juros efetivos de 4% a.m., vence em 63 dias. A empresa pretende liquidar as dívidas com o dinheiro proveniente do desconto financeiro de uma promissória com valor nominal de \$ 27.033 que vence em 90 dias. Calcular a taxa mensal efetiva aplicada pelo banco no desconto do título.
36. Em quanto tempo o rendimento gerado por um capital iguala-se ao próprio capital, aplicando-se uma taxa efetiva de 5% a.m.?
37. Quanto tempo deve transcorrer para que a relação entre um capital de \$ 8.000, aplicado a juros efetivos de 4% a.m., e seu montante seja igual a $\frac{4}{10}$?
38. Três dívidas, a primeira de \$ 2.000 vencendo em 30 dias, a segunda de \$ 1.000 vencendo em 60 dias e a terceira de \$ 3.000 vencendo em 90 dias, serão liquidadas por meio de um

- pagamento único de \$ 6.000. Se a taxa de juros efetiva aplicada for de 3% a.m., determinar daqui a quanto tempo deve ser efetuado este pagamento.
39. Quanto tempo deve transcorrer para que o montante de um capital de \$ 5.000 aplicado a juros efetivos de 6% a.m. se iguale ao montante de outro capital de \$ 8.000 aplicado à taxa efetiva de 4% a.m.?
40. Calcular o rendimento de um capital de \$ 7.000 aplicado à taxa efetiva de 1% a.m. no período compreendido entre 3 de abril e 6 de junho do mesmo ano. (Considere ano civil.)
41. Qual a taxa mensal anual efetiva que permite a duplicação de um capital no prazo de 42 meses?
42. Um capital de \$ 20.000 foi aplicado por 90 dias à taxa efetiva diária de 0,1% a.d. Determinar o rendimento ganho entre o 46º e o 87º dia.
43. Duas dívidas de \$ 20.000 e \$ 30.000 com vencimento em 2 e 4 meses, respectivamente, serão liquidadas por meio de um único pagamento a ser efetuado em 3 meses. Considerando-se juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor deste pagamento.
44. Uma pessoa necessita dispor de \$ 20.000 daqui a 8 meses. Para tanto, pretende efetuar duas aplicações em um fundo que rende juros efetivos de 3% a.m. A primeira aplicação de \$ 10.000 foi efetuada hoje e a segunda o será daqui a um mês. De quanto deverá ser esta segunda aplicação de modo que possa dispor da quantia necessitada ao término do oitavo mês?
45. Um empréstimo de \$ 5.000 contratado à taxa efetiva de 5% a.m. será liquidado por meio de 5 pagamentos mensais consecutivos, sendo o primeiro daqui a 30 dias. Se o valor de cada um dos 4 primeiros pagamentos é de \$ 1.000, determinar o valor do último pagamento.
46. Determinar o capital que aplicado durante 3 meses à taxa efetiva composta de 4% a.m. produz um montante que excede em \$ 500 ao montante que seria obtido se o mesmo capital fosse aplicado pelo mesmo prazo a juros simples de 4% a.m.
47. Um capital aplicado a juros compostos durante 2 meses a uma taxa efetiva mensal produz o mesmo rendimento se fosse aplicado por 75 dias a juros simples a uma determinada taxa mensal. Calcular esta taxa.
48. Uma pessoa depositou \$ 1.000 em um fundo que paga juros efetivos de 5% a.m., com o objetivo de dispor de \$ 1.102,50 dentro de 2 meses. Passados 24 dias após a aplicação, a taxa efetiva baixou para 4% a.m. Quanto tempo adicional terá de esperar para obter o capital requerido?
49. Um capital de \$ 4.000 foi aplicado dividido em duas parcelas, a primeira à taxa efetiva de 6% a.t. e a segunda a 2% a.m. Se após 8 meses os montantes de ambas as parcelas se igualam, determinar o valor de cada parcela.
50. Um capital aplicado em um fundo duplicou seu valor entre 11 de julho e 22 de dezembro do mesmo ano. A que taxa efetiva mensal foi aplicado? (Considere ano civil.)
51. Um financiamento foi contratado por 90 dias a uma taxa efetiva de 12% a.t. Se foi liquidado após 60 dias, calcular a taxa efetiva paga no período.
52. Determinar o valor dos juros pagos por um empréstimo de \$ 2.000 contratado à taxa efetiva de 5% a.m. pelo prazo de 25 dias.
53. Um empréstimo de \$ 5.000 foi tomado em 14 de abril e liquidado por \$ 5.850 em 28 de maio do mesmo ano. Determinar a taxa efetiva mensal contratada. (Considere ano civil.)

2.7 Respostas dos exercícios propostos

1. \$ 4.428,62; \$ 5.554,06; \$ 4.148,54
2. 11 meses
3. \$ 32.306,54
4. \$ 14.149,62; \$ 51.578,89;
\$ 35.055,91; \$ 434,05
5. 15% a.m.
6. \$ 11.033,75
7. 6% a.m.; à vista
8. \$ 17,78
9. 25% a.m.
10. 37,17 anos
11. 3 anos
12. 30% a.m.
13. 23,89% a.m.
14. 5,9822% a.m.; à vista
15. 35,05%
16. 0%
17. \$ 751,37
18. \$ 150.480
19. \$ 23.106,43
20. 2% a.m.; 1 mês
21. \$ 13.440,52; \$ 3.440,52
22. 3,19% a.m.
23. \$ 500
24. \$ 700,00; 5,0% a.m.
25. \$ 200
26. \$ 500
27. 2,5225927% a.m.
28. \$ 800; 15 meses
29. \$ 832,91; \$ 416,46; 10 meses
30. 1 ano; 2 anos
31. \$ 2.000
32. \$ 20.000
33. \$ 30.000
34. 23,61591 meses (aproximadamente
23 meses e 18 dias)
35. 5% a.m.
36. 14 meses e 6 dias
37. 23,362419 meses
38. 65 dias
39. 24,67444448 meses (740 dias)
40. \$ 150,18
41. 21,9% a.a.
42. \$ 875,98
43. \$ 49.571,43
44. \$ 5.961,83
45. \$ 1.855,78
46. \$ 102.796,05
47. 50% a.m.
48. 8.7836 dias
49. \$ 2.003,04; \$ 1.996,96
50. 13,5184526% a.m.
51. 7,8480%
52. \$ 82,99
53. 11,2987% a.m.

TAXAS DE JUROS

CAPÍTULO

3

- Taxa nominal
- Taxa proporcional
- Taxas efetivas
- Equivalentes de taxas
- Taxa over
- Taxa aparente e taxa real

Neste capítulo aprenderemos a distinguir as diferentes formas em que a taxa de juros se apresenta no mercado e a maneira de tratá-la no cálculo financeiro. A didática a ser utilizada será a mesma dos capítulos anteriores, ou seja, apresentaremos alguns conceitos básicos seguidos de vários exemplos de aplicação.

3.1 Taxa de juros nominal

Freqüentemente, os juros são capitalizados mais de uma vez no período a que se refere a taxa de juros, ou seja, os juros são incorporados ao principal mais de uma vez no período da taxa de juros. Quando isso ocorre, a taxa de juros é chamada de taxa nominal. Veja as suas características a seguir:

- Aplica-se diretamente em operações de juros simples.
- É suscetível de ser proporcionalizada (dividida ou multiplicada) ‘k’ vezes em seu período referencial, de modo que possa ser expressa em outra unidade de tempo (caso dos juros simples) ou como unidade de medida para ser capitalizada em operações de juros compostos.
- É uma taxa referencial que não incorpora capitalizações.
- É calculada com base no valor nominal da aplicação ou empréstimo.

Exemplos de taxas nominais:

- 18% ao ano capitalizada mensalmente;
- 5% ao mês capitalizada diariamente;
- 8% ao semestre capitalizada mensalmente;
- operações de *overnight* em que a taxa de juros é mensal com capitalizações diárias;
- operações de câmbio.

Considerando um capital aplicado a uma taxa de juros efetiva em que os juros são capitalizados apenas uma única vez por ano, o montante ao término do primeiro ano de aplicação é:

$$S = P (1 + i)$$

Se a taxa de juros for nominal a.a., capitalizada semestralmente (capitalizada duas vezes por ano), o montante ao fim de um ano será:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{2}\right)^{2 \times 1}$$

Se a taxa de juros for nominal a.a., capitalizada mensalmente (capitalizada 12 vezes por ano), o valor do montante ao final do terceiro ano será:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12 \times 3}$$

Em geral, podemos expressar do seguinte modo o montante de um capital aplicado pelo prazo 'm' a uma taxa nominal 'j' com juros capitalizados 'k' vezes durante o período referencial da taxa nominal:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

onde: j = taxa de juros nominal;

k = número de vezes em que os juros são capitalizados no período a que se refere a taxa nominal;

m = prazo da aplicação na mesma unidade de tempo da taxa nominal; e

P = capital aplicado.

3.2 Taxa proporcional (taxa linear)

A maior parte dos juros praticados no sistema financeiro nacional e internacional encontra-se referenciada na taxa linear, como a remuneração linear da caderneta de poupança, as taxas internacionais *libor* e *prime rate*, o desconto bancário, os juros da Tabela Price, as taxas do mercado interfinanceiro, entre outros. A taxa proporcional é determinada pela relação simples entre a taxa considerada na operação (taxa nominal) e o número de vezes em que ocorrem juros (quantidade de períodos de capitalização).

A taxa proporcional ao mês para uma taxa nominal de 18% a.a. capitalizada mensalmente é de 1,5% a.m.:

$$\text{taxa proporcional} = \frac{18\%}{12} = 1,5\% \text{ a.m.}$$

Neste caso a taxa proporcional é uma taxa efetiva mensal. A taxa proporcional de 6% a.m., para 3 meses, é de 18%; a de 24% a.a., para 5 meses, é de 10% e assim sucessivamente, variando linearmente. Logo, as taxas proporcionais devem atender à seguinte proporção:

$$n_1 \times i_1 = n_2 \times i_2$$

onde n_1 e n_2 representam os prazos de cada taxa; e i_1 e i_2 , os percentuais das taxas consideradas.

A taxa proporcional não é um tipo de taxa de juros, é apenas uma característica do regime de juros simples. A taxa nominal pode ser proporcionalizada de modo que possa ser expressa em diferentes períodos de tempo. Entretanto, basicamente, o conceito de taxa proporcional é somente utilizado para capitalização simples, no sentido de que o valor dos juros é proporcional apenas ao tempo.

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.1

Determinar as seguintes taxas proporcionais:

- a) 2,5% a.m. é proporcional a qual taxa anual? $2,5\% \times 12 = 30\% \text{ a.a.}$
- b) 3,0% a.s. é proporcional a qual taxa anual? $3,0\% \times 2 = 6\% \text{ a.a.}$
- c) 4,0% a.t. é proporcional a qual taxa anual? $4,0\% \times 4 = 18\% \text{ a.a.}$
- d) 9,0% a.s. é proporcional a qual taxa trimestral? $9,0\% \div 2 = 4,5\% \text{ a.t.}$

Exemplo 3.2

Calcular o montante resultante de um investimento de \$ 1.200 aplicado por três anos a juros nominais de 16% a.a., capitalizados mensalmente.

Dados: $P = \$1.200$, $m = 3$ anos, $j = 16\%$ a.a., $k = 12$, $S = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} = \$1.200 \times \left(1 + \frac{0,16}{12}\right)^{12 \times 3} = \$1.933,15$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
1.200 (CHS) (PV)	entra com o valor do principal com sinal negativo
16 (g) (12 ÷)	entra com a taxa de juros por período de capitalização
3 (g) (12 ×)	número de períodos de capitalização do prazo
(FV) → 1.933,15	calcula o montante

O prazo m deve estar na mesma unidade de tempo da taxa nominal.

Exemplo 3.3

Qual o valor de resgate para um capital de \$ 200 aplicado pelos seguintes prazos e taxas?

- a) 27 dias a 9% a.m. capitalizados diariamente

$$S = P \left(1 + \frac{j}{h}\right)^{h \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,09}{30}\right)^{30 \times \left(\frac{27}{30}\right)} = \$216,85$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
9 [ENTER] 30 (=) (i)	entra com a taxa de juros por período
27 (n)	entra com o número de dias do prazo
200 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
(FV) → 216,85	calcula o montante

O prazo dado foi transformado à mesma unidade de tempo da taxa nominal $\left(m = \frac{27}{30} \text{ meses} \right)$.

b) 6 meses a 28% a.a. capitalizados mensalmente:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,28}{12} \right)^{12 \times \left(\frac{6}{12} \right)} = \$229,69$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
28 [ENTER] 12 (÷) (i)	entra com a taxa de juros por período
6 (n)	entra com o número de meses de prazo
200 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
(FV) → 229,69	calcula o montante

O prazo dado foi transformado à mesma unidade de tempo da taxa nominal $\left(m = \frac{6}{12} \text{ anos} \right)$.

c) 8 meses a 18% a.s. capitalizados mensalmente:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,18}{6} \right)^{6 \times \left(\frac{8}{6} \right)} = \$253,35$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
18 [ENTER] 6 (÷) (i)	entra com a taxa de juros por período de capitalização
8 (n)	entra com o número de meses de prazo
200 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
(FV) → 253,35	calcula o montante

O prazo dado foi transformado à mesma unidade de tempo da taxa nominal $\left(m = \frac{8}{6} \text{ semestres} \right)$.

d) 27 meses a 12% a.t. capitalizados mensalmente:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,12}{3} \right)^{3 \times \left(\frac{27}{3} \right)} = \$576,67$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
12 [ENTER] 3 (+) (i)	entra com a taxa de juros por período de capitalização
27 (n)	entra com o número de meses do prazo
200 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
(FV) → 576,67	calcula o montante

O prazo dado foi transformado à mesma unidade de tempo da taxa nominal $\left(m = \frac{27}{3} \text{ trimestres} \right)$.

e) 7 meses a 28% a.a. capitalizados trimestralmente:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,28}{4}\right)^{4 \times \left(\frac{7}{12}\right)} = \$200 \times \left(1 + \frac{0,28}{4}\right)^2 = \$228,98$$

O produto $k \times m$ é 2,33, contudo, no cálculo do montante foi considerada unicamente a parte inteira, pois o prazo da operação é de sete meses, mas haverá capitalização de juros por somente dois trimestres (seis meses). O prazo restante (0,33 trimestre), por não completar um período de capitalização (trimestre), não renderá juros.

Exemplo 3.4

Calcular o *rendimento* de uma aplicação de \$ 4.000 pelo prazo de 217 dias a juros nominais de 12% a.s., capitalizados trimestralmente. Admita que a freqüência na capitalização dos juros coincide com a da taxa nominal.

Dados: $P = \$4.000$, $m = 217/180$ semestres, $j = 12\%$ a.s., $k = 2$, rendimento = ?

rendimento = montante – aplicação

$$\begin{aligned} &= P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} - P = \$4.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2 \times \left(\frac{217}{180}\right)} - \$4.000 \\ &= \$4.000 \times (1,06)^{2,41} - \$4.000 = \$4.000 \times (1,06)^2 - \$4.000 = \$494,40 \end{aligned}$$

No prazo de 217 dias há somente dois períodos de capitalização completos (trimestres). Logo, no produto $k \times m$ considera-se unicamente a parte inteira (dois trimestres). O prazo restante (0,41 trimestre), por não completar um período de capitalização, não renderá juros.

Exemplo 3.5

Em quantos meses uma aplicação de \$ 4.000 a juros nominais de 12% a.s., capitalizados trimestralmente, tem um *rendimento mínimo* de \$ 2.000?

Dados: $P = \$4.000$, $S = \$6.000$, $j = 12\%$ a.s., $k = 2$, $m = ?$

$$\begin{aligned} S &= P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} \\ \$6.000 &= \$4.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2 \times m} \Rightarrow (1,06)^{2m} = 1,50 \end{aligned}$$

aplicando logaritmos: $m = \frac{\log 1,50}{2 \times \log 1,06} = 3,48$ semestres

Calculadora HP-12C	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
12 [ENTER] 2 (+) (i)	entra com a taxa de juros por período de capitalização
4.000 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
6.000 (FV)	calcula o montante
(n) → 7	calcula o prazo

O número de períodos de capitalização no prazo da aplicação é igual a 6,96 trimestres ($3,48 \times 2$). Contudo, como a quantidade de períodos de capitalização no prazo da aplicação deve ser representada por um número inteiro, consideram-se sete períodos de capitalização (7 trimestres = 21 meses) como prazo mínimo.

Exemplo 3.6

Um Certificado de Depósito Bancário (CDB) prefixado rende 95% da taxa *over* do Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI). Se em 60 dias de prazo da operação havia 48 dias úteis e a taxa média do CDI no período foi de 4,4% a.m., calcular o valor de resgate do CDB considerando que o valor aplicado foi de \$4.500.

Dados: $j = 0,95 \times 4,4\% = 4,18\%$ a.m., $k = 30$, $P = \$4.500$, $m = \frac{48}{30}$ meses, $S = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} = \$4.500 \times \left(1 + \frac{0,0418}{30}\right)^{30 \times \left(\frac{48}{30}\right)} = \$4.811,03$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
4.500 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
4,18 [ENTER] 30 (+) (i)	entra com a taxa de juros por período de capitalização
48 (n)	entra com o número de dias do prazo
(FV) → 4.811,03	calcula o montante

O prazo foi convertido à mesma unidade de tempo da taxa nominal $\left(m = \frac{48}{30}\right)$.

Exemplo 3.7

Calcular a taxa nominal a.a., capitalizada mensalmente, que produz um montante de \$1.933,15 a partir de um investimento de \$1.200 aplicado pelo prazo de 3 anos.

Dados: $S = \$1.933,15$, $P = \$1.200$, $m = 3$ anos, $k = 12$, $j = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$\$1.933,15 = \$1.200 \times \left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12 \times 3} \Rightarrow j = \left[\left(\frac{1.933,15}{1.200} \right)^{\frac{1}{36}} - 1 \right] \times 12 = 0,16 = 16\% \text{ a.a.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
1.200 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
1.933,15 (FV)	entra com o valor do montante
3 (g) (12x)	entra com o número de capitalizações do prazo
(i) (12x) → 16	calcula a taxa de juros

Exemplo 3.8

Um capital de \$15.000 é aplicado por 180 dias à taxa de 24% a.t. capitalizada mensalmente. Calcular o valor de resgate da aplicação.

Dados: $P = \$15.000$, $j = 24\%$ a.t., $k = 3$, $m = \frac{180}{90}$ trimestres, $S = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} = \$15.000 \times \left(1 + \frac{0,24}{3}\right)^{3 \times \left(\frac{180}{90}\right)} = \$23.803,12$$

Calculadora HP-12C

- | | |
|------------------------|--------------------------------------------------------|
| (f) (FIN) | apaga a memória financeira |
| 15.000 (CHS) (PV) | entra com o principal com sinal negativo |
| 24 [ENTER] 3 (+) (i) | entra com a taxa de juros por período de capitalização |
| 180 [ENTER] 30 (+) (n) | entra com o número de meses do prazo |
| (FV) → 23.803,12 | calcula o montante |

Exemplo 3.9

Uma aplicação de \$1.000 foi efetuada em 17/3/1995 para resgate em 24/6/1998. Para uma taxa de juros nominal de 12% a.m. com capitalização diária, calcular o valor de resgate. (Considerando ano civil.)

Dados: $j = 12\%$ a.m.; $k = 30$; $P = \$1.000$; $m = \frac{1.195}{30}$ (há 1.195 dias entre as duas datas); $S = ?$

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$= \$1.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{30}\right)^{30 \times \left(\frac{1.195}{30}\right)} = \$117.974,14$$

Calculadora HP-12C

- | | |
|--------------------------|--------------------------------------------------------|
| (f) (FIN) | apaga a memória financeira |
| 12 (ENTER) 30 (+) (i) | entra com a taxa de juros por período de capitalização |
| (g) (D.MY) | define o modo de entrada das datas (dia/mês/ano) |
| 17,031995 (ENTER) | entra com a data inicial |
| 24,061998 (g) (ΔDYS) (n) | data final e cálculo do número de dias |
| 1.000 (CHS) (PV) | entra com o principal com sinal negativo |
| (FV) → 117.974,14 | calcula o montante |

Na HP-12C o número exato de dias pode ser determinado utilizando-se as funções calendário. A calculadora pode manipular datas a partir de 15/10/1582 a 25/10/4046.

Exemplo 3.10

Uma aplicação de \$1.000 efetuada em 17/3/1995 rendeu juros de \$296,26. Considerando uma taxa de juros nominal de 12% a.m. com capitalização diária, determinar o prazo da aplicação em dias. Qual a data de vencimento da aplicação considerando ano civil?

Dados: $j = 12\% \text{ a.m.}$, $k = 30$, $P = \$1.000$, $m = ?$

juros = montante - aplicação

$$\$296,26 = \$1.000 \left(1 + \frac{0,12}{30}\right)^{30 \times \left(\frac{m}{30}\right)} - \$1.000$$

$$\Rightarrow (1,004)^m = 1,296260$$

$$\text{aplicando logaritmos: } m = \frac{\ln 1,296260}{\ln 1,004} = 65 \text{ dias}$$

Calculadora HP-12C

(f) (REG)	apaga todos os registros
(g) (D.MY)	define o modo de entrada das datas (dia/mês/ano)
17,031995 [ENTER]	entra com a data inicial
65 (n)	entra com o prazo da aplicação
(g) (DATE) → 21.05.1995 7	determina a data de vencimento (domingo)

Na HP-12C se a data a ser determinada for no passado, deve-se entrar com o número de dias com sinal negativo. No resultado fornecido, o último dígito do visor da calculadora indica o dia da semana (1 = segunda-feira, 2 = terça-feira, ..., 7 = domingo).

Podemos também usar a Tábua para Contagem de Dias entre Duas Datas (veja a Seção 1.3) para determinar a data de vencimento. Para tanto, deve-se subtrair do número de dias correspondente à data posterior o número que corresponde à data anterior:

$$\begin{array}{lcl} \text{número de dias da data posterior (?)} & & = + Y \\ \text{número de dias da data anterior (17 de março)} & = - 76 \\ & & \text{dias} = 65 \end{array}$$

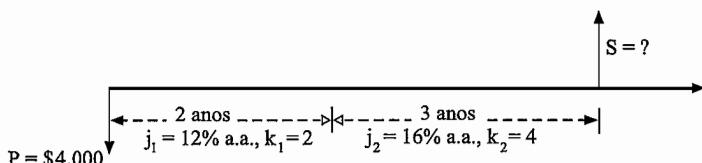
Como $Y = 65 + 76 = 141$, podemos observar na referida tábua que esse número corresponde ao dia 21 de maio.

Exemplo 3.11

Uma pessoa aplicou $\$4.000$ por dois anos a juros nominais de $12\% \text{ a.a.}$, capitalizados semestralmente. Ao término desse prazo, reaplicou o montante por três anos à taxa de juros de $16\% \text{ a.a.}$, capitalizados trimestralmente. Calcular o valor de resgate da aplicação.

Dados: $P = \$4.000$, $j_1 = 12\% \text{ a.a.}$, $k_1 = 2$, $j_2 = 16\% \text{ a.a.}$, $k_2 = 4$, $m_1 = 2 \text{ anos}$, $m_2 = 3 \text{ anos}$, $S = ?$

$$\begin{aligned} S &= \left[P \left(1 + \frac{j_1}{k_1}\right)^{k_1 \times m_1} \right] \times \left(1 + \frac{j_2}{k_2}\right)^{k_2 \times m_2} \\ &= \left[\$4.000 \times \left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{2 \times 2} \right] \times \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{4 \times 3} = \$8.085,07 \end{aligned}$$



Exemplo 3.12

Calcular o valor de um capital que, aplicado durante sete anos à taxa nominal de 84% a.a. com capitalização mensal, rendeu \$ 10.000 de juros.

Dados: $m = 7$ anos, juros = \$ 10.000, $j = 84\%$ a.a., $k = 12$, $P = ?$

juros = montante – aplicação

$$\begin{aligned} \$10.000 &= P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} - P \\ \$10.000 &= P \left[\left(1 + \frac{0,84}{12} \right)^{12 \times 7} - 1 \right] \Rightarrow P = \frac{\$10.000}{(1,07)^{84} - 1} = \$34,14 \end{aligned}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)

84 (g) (12 ÷)

7 (g) (12x)

1 (CHS) (PV)

(FV)

1 (-) (1/x)

10.000 (x) → .34,1384

apaga a memória financeira

entra com a taxa de juros por período de capitalização

entra com o número de capitalização do prazo

entra com o principal de valor unitário negativo

calcula o montante do principal unitário

subtrai um e a seguir inverte

multiplica pelo valor dos juros

Exemplo 3.13

Em quantos meses um capital de \$ 5.000, aplicado a juros nominais de 120% a.a. capitalizados mensalmente, produz um montante de \$ 11.789,75?

Dados: $P = \$5.000$, $S = \$11.789,75$, $j = 120\%$ a.a., $k = 12$, $m = ?$

$$\begin{aligned} S &= P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} \\ \$11.789,75 &= \$5.000 \left(1 + \frac{1,20}{12} \right)^{12 \times m} \\ \Rightarrow (1,10)^{12m} &= 2,35795 \end{aligned}$$

$$\text{aplicando logaritmos: } m = \frac{\log 2,35795}{12 \times \log 1,10} = 0,75 \text{ ano}$$

O prazo m encontrado está na mesma unidade de tempo da taxa nominal (ano). Entretanto, podemos transformá-lo em meses: $0,75 \text{ ano} \times 12 \text{ meses/ano} = 9 \text{ meses}$.

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)

5.000 (CHS) (PV)

11.789,75 (FV)

120 (g) (12 ÷)

(n) → 9

apaga a memória financeira

entra com o principal com valor negativo

entra com o montante com valor positivo

entra com a taxa de juros por período de capitalização

calcula o prazo

Exemplo 3.14

Um capital de \$ 40.000 aplicado por 270 dias a uma determinada taxa nominal a.a., capitalizada trimestralmente, rendeu de juros \$ 1.800. Determinar a taxa nominal.

Dados: $P = \$40.000$, $m = 270/360$ anos, juros = \$ 1.800, $k = 4$, $j = ?$

$$\text{juros} = \text{montante} - \text{aplicação}$$

$$\$1.800 = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} - P$$

$$\$1.800 = \$40.000 \left[\left(1 + \frac{J}{4}\right)^{4 \times \left(\frac{270}{360}\right)} - 1 \right]$$

$$\Rightarrow j = \left[\left(\frac{\$1.800}{\$40.000} + 1 \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] \times 4 = 5,91\% \text{ a.a.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
40.000 (CHS) (PV)
41.800 (FV)
3 (n)
(i) 4(x) → 5,91

apaga a memória financeira
entra com o principal com sinal negativo
entra com o montante
entra com o número de capitalizações do prazo
calcula a taxa por período de capitalização e multiplica por 4

3.3 Taxa de juros efetiva

A taxa nominal é uma *taxa declarada ou taxa cotada* que não incorpora capitalizações, sendo necessário o cálculo da taxa efetiva equivalente quando pretendemos efetuar cálculos e comparações no regime de juros compostos. A taxa efetiva pressupõe incidência de juros apenas uma única vez em cada período a que se refere a taxa; isto é, a unidade de referência de seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização, ou seja, a taxa efetiva é a taxa por período de capitalização. Os juros antecipados, os impostos, as comissões e os artifícios usados nos cálculos de juros fazem com que, tanto no regime de capitalização a juros simples quanto no regime de capitalização a juros compostos, as taxas efetivas e nominais difiram.

Como exemplos de taxas efetivas, temos as seguintes:

- operações de capital de giro;
- captação mediante venda de CDB;
- 12% a.m., capitalizados mensalmente;
- 47% a.t., capitalizados trimestralmente;
- 189% a.a., capitalizados anualmente.

Quando o período da taxa de juros coincide com a periodicidade com que os juros são capitalizados, a taxa declarada é a própria taxa efetiva. Assim, evitando redundâncias, nos últimos três casos diz-se somente 12% a.m., 47% a.t., 189% a.a., ficando subentendido o período de capitalização. Quando não se verifica essa coincidência entre os períodos, a taxa de juros costuma ser definida como taxa nominal.

3.3.1 Cálculo da taxa efetiva a partir da taxa nominal

Se a taxa de juros for nominal, a taxa proporcional por período de capitalização poderá ser determinada dividindo-se a taxa nominal pela freqüência de suas capitalizações:

$$i = \frac{J}{k}$$

O período da taxa obtida no passo anterior será o mesmo das capitalizações da taxa nominal. Por exemplo, se a taxa nominal de 24% a.a. capitalizada trimestralmente for dividida pela freqüência das capitalizações, a taxa resultante será uma taxa efetiva trimestral:

$$i_t = \frac{J}{k} = \frac{0,24\% \text{ a.a.}}{4} = 6\% \text{ a.t.}$$

Finalmente, aplicando-se o processo de capitalização composta podemos calcular a taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 24% a.a. capitalizada trimestralmente:

$$i_a = \left(1 + \frac{J}{k}\right)^{k \times m} - 1 = \left(1 + \frac{0,24}{4}\right)^{4 \times 1} - 1 = (1 + 0,06)^4 - 1 = 26,25\% \text{ a.a.}$$

Pode-se observar que a taxa efetiva ‘i’ para ‘n’ períodos de capitalização pode ser obtida a partir de uma taxa nominal ‘j’ capitalizada ‘k’ vezes, de acordo com a seguinte fórmula:

$$i = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^n - 1$$

Por exemplo, a taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 24% a.s., capitalizada mensalmente, é:

$$i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12} - 1 = 60,10\% \text{ a.a.}$$

$n = 12$ significa que em um ano há 12 capitalizações.

Se aplicarmos um capital ‘P’ durante ‘m’ anos a uma taxa efetiva anualizada ‘ i_a ’, o montante será:

$$S = P (1 + i_a)^m$$

Se o mesmo capital for aplicado pelo mesmo prazo a uma taxa nominal anual ‘j’ capitalizada ‘k’ vezes, o montante será:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

Para serem equivalentes as duas taxas (nominal e efetiva) devem resultar no mesmo montante. Igualando as expressões dos montantes, podemos destacar uma fórmula para o cálculo da taxa efetiva ao ano:

$$P(1+i_a)^m = P\left(1+\frac{j}{k}\right)^{k \times m} - 1 \Rightarrow i_a = \left(1+\frac{j}{k}\right)^k - 1$$

onde: i_a = taxa efetiva a.a.; j = taxa nominal a.a.; k = número de capitalizações no período da taxa nominal.

Para que o leitor perceba como é importante trabalhar apenas com as taxas efetivas, suponhamos que tenham sido pesquisadas e encontradas as três taxas a seguir:

- Banco A: 15% a.a. capitalizados diariamente
- Banco B: 15,5% a.a. capitalizados trimestralmente
- Banco C: 16% a.a. capitalizados anualmente

Qual dessas taxas será a melhor, caso você esteja pensando em abrir uma caderneta de poupança?

Para começar, calculamos a seguir as taxas efetivas anuais equivalentes a essas taxas nominais declaradas:

$$\begin{aligned} i_a &= \left(1+\frac{j}{k}\right)^k - 1 = \left(1+\frac{0,15}{360}\right)^{360} - 1 = 16,18\% \text{ a.a. (Banco A)} \\ &= \left(1+\frac{0,155}{4}\right)^4 - 1 = 16,42\% \text{ a.a. (Banco B)} \\ &= \left(1+\frac{0,16}{1}\right)^1 - 1 = 16,00\% \text{ a.a. (Banco C)} \end{aligned}$$

Esse exemplo ilustra duas coisas: primeiro, a taxa cotada mais alta (Banco C) não é necessariamente a melhor; segundo, o número de capitalizações durante o ano pode conduzir a uma diferença significativa entre a taxa nominal cotada e a taxa efetiva. Lembre-se de que é a taxa efetiva que você recebe ou paga.

A freqüência das capitalizações de uma taxa nominal afeta o montante de uma aplicação, pois, quanto maior for esta freqüência, maior será o montante final e maior será também a taxa efetiva ganha/paga na operação. Como ilustração, o quadro a seguir mostra, para diversas freqüências das capitalizações da taxa nominal, os montantes e as taxas efetivas para um capital de \$100 aplicado por dois anos a uma taxa nominal de 10% a.a.:

Capitalização	Montante: $S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$	Taxa efetiva a.a.: $i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k - 1$
anual ($k = 1$)	$\$100 \times \left(1 + \frac{0,1}{1}\right)^{1 \times 2} = \$121,00$	$\left(1 + \frac{0,1}{1}\right)^1 - 1 = 10,00\% \text{ a.a.}$
semestral ($k = 2$)	$\$100 \times \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^{2 \times 2} = \$121,55$	$\left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^2 - 1 = 10,25\% \text{ a.a.}$
mensal ($k = 12$)	$\$100 \times \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12 \times 2} = \$122,04$	$\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} - 1 = 10,47\% \text{ a.a.}$
diária ($k = 360$)	$\$100 \times \left(1 + \frac{0,1}{360}\right)^{360 \times 2} = \$122,14$	$\left(1 + \frac{0,1}{360}\right)^{360} - 1 = 10,52\% \text{ a.a.}$

Podemos observar que a taxa efetiva aumenta à medida que a freqüência das capitalizações da taxa nominal cresce. Igualmente, quanto maior for essa freqüência maior será a taxa efetiva implícita.

3.4 Equivalência entre taxas de juros

Pelo critério de juros simples, a taxa equivalente é a própria taxa proporcional. Assim, 2% a.t. é uma taxa proporcional (equivalente) a 8% a.a., pois: 4 trimestres \times 2% a.t. = 8% a.a.

A importância da equivalência entre taxas de juros volta-se para as operações que referenciam suas taxas em juros compostos. Assim, duas taxas são ditas equivalentes quando, incidindo sobre um mesmo capital durante certo prazo, produzem montantes iguais pelo regime de capitalização composta. Consideremos uma aplicação de \$ 1.000 aplicada pelo prazo de um ano. Se o capital for aplicado à taxa efetiva de 42,5761% a.a., ou à taxa efetiva de 3% a.m., o montante será o mesmo, dado que essas duas taxas são equivalentes.

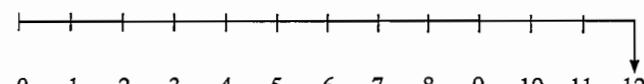
- Montante de um capital aplicado por um ano à taxa efetiva de 42,5761% a.a.:

$$i_a = 42,5761\% \text{ a.a.}$$

um ano

$$S = \$1.000 \times (1,425761)^1 = \$1.425,76$$

- Montante de um capital aplicado por 12 meses à taxa efetiva de 3% a.m.:



$$S = \$1.000 \times (1,03)^{12} = \$1.425,76$$

$$i_m = 3\% \text{ a.m.}$$

Constata-se que as taxas efetivas de 42,5761% a.a. e 3% a.m. são equivalentes, pois resultam no mesmo montante a partir do mesmo capital. Na ilustração anterior, ao se definir em 42,5761% a.a. o juro efetivo da operação, o percentual ao mês deverá, após os 12 períodos de capitalização no ano, produzir uma taxa acumulada (efetiva) de 42,5761%, ou seja:

Taxa mensal equivalente:

$$(1+i_m)^{12} = (1+i_a)$$

$$(1+i_m)^{12} = (1,425761) \quad \Rightarrow i_m = (1,425761)^{\frac{1}{12}} - 1 = 3\% \text{ a.m.}$$

Toda taxa de juros se encontra em determinado prazo. Entretanto, pode ser convertida para outro prazo qualquer sem alterar seu valor intrínseco, o que viabiliza o cálculo dos juros em operações e facilita comparações entre taxas de juros. Assim, considerando-se o ano comercial (360 dias), a seguinte identidade nos permite relacionar por equivalência algumas taxas efetivas:

$$(1+i_a) = (1+i_s)^2 = (1+i_t)^4 = (1+i_m)^{12} = (1+i_d)^{360}$$

Ao longo deste livro usaremos a seguinte convenção para as taxas de juros efetivas:

i_a = taxa efetiva anual (a.a.);

i_s = taxa efetiva semestral (a.s.);

i_t = taxa efetiva trimestral (a.t.);

i_b = taxa efetiva bimestral (a.b.);

i_m = taxa efetiva mensal (a.m.);

i_d = taxa efetiva diária (a.d.).

Ao passarmos de uma unidade de tempo menor para uma maior, como de mês para ano, devemos elevar a taxa de juros pelo número de períodos correspondente. Se for o contrário, como, por exemplo, de ano para mês, devemos elevar ao inverso do período. A seguir veja as conversões necessárias.

De a.m. para a.a. $\Rightarrow i_a = (1+i_m)^{12} - 1$

De a.d. para a.m. $\Rightarrow i_m = (1+i_d)^{\frac{1}{30}} - 1$

De a.d. para a.a. $\Rightarrow i_a = (1+i_d)^{360} - 1$

De a.a. para a.m. $\Rightarrow i_m = (1+i_a)^{\frac{1}{12}} - 1$

De a.m. para a.d. $\Rightarrow i_d = (1+i_m)^{\frac{1}{30}} - 1$

De a.a. para a.d. $\Rightarrow i_d = (1+i_a)^{\frac{1}{360}} - 1$

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.15

Calcular as taxas efetivas anuais para as seguintes taxas nominais: 24% a.a. capitalizada mensalmente; 48% a.s. capitalizada mensalmente; e 60% a.t. capitalizada diariamente.

- a) Cálculo da taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada mensalmente:

Em um ano a unidade de tempo da taxa nominal (a.a.) é contida uma única vez. Logo, m = 1.

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} \Rightarrow i_a = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12 \times 1} - 1 = 26,82\% \text{ a.a}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
24 (g) (12 ÷)
1 (g) (12×)
1 (CHS) (PV)
(FV)
1 (-) 100 (x) → 26,82

apaga a memória financeira
entra com a taxa de juros por período de capitalização
entra com o número de capitalização em um ano
entra com o principal unitário negativo
calcula o montante do principal unitário
subtrai 1 e multiplica por 100

b) Cálculo da taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 48% a.s., capitalizada mensalmente:

Em um ano a unidade de tempo da taxa nominal (a.s.) é contida duas vezes. Logo, m = 2.

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} \Rightarrow i_a = \left(1 + \frac{0,48}{6}\right)^{6 \times 2} - 1 = 151,82\% \text{ a.a.}$$

Calculadora HP-12C

48 [ENTER] 6 (÷) (i)
1 (g) (12×)
1 (CHS) (PV)
(FV)
1 (-) 100 (x) → 151,82

apaga a memória financeira
entra com a taxa de juros por período de capitalização
entra com o número de capitalizações em um ano
entra com o principal com valor unitário negativo
calcula o montante do principal unitário
subtrai 1 e multiplica por 100

c) Cálculo da taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 60% a.t., capitalizada diariamente:

Em um ano a unidade de tempo da taxa nominal (a.t.) é contida quatro vezes. Logo, m = 4.

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} \Rightarrow i_a = \left(1 + \frac{0,60}{90}\right)^{90 \times 4} - 1 = 993,57\% \text{ a.a.}$$

Calculadora HP-12C

60 [ENTER] 90 (÷) (i)
30 (g) (12×)
1 (CHS) (PV)
(FV)
1 (-) 100 (x) → 993,57

apaga a memória financeira
entra com a taxa de juros por período de capitalização
entra com o número de capitalizações em um ano
entra com o principal unitário negativo
calcula o montante desse principal unitário
subtrai 1 e multiplica por 100

Exemplo 3.16

Qual a taxa nominal anual capitalizada semestralmente, equivalente à taxa efetiva de 40% a.a.?

Dados: $i_a = 40\% \text{ a.a.}$, $k = 2$, $m = 1$, $j = ?$

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$1,40 = \left(1 + \frac{j}{2}\right)^{2 \times 1} \Rightarrow j = \left[(1,40)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \times 2 = 0,3664 = 36,64\% \text{ a.a.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
1 (CHS) (PV)
1,40 (FV)
2 (n)
(i) 2 (x) → 36,64

apaga a memória financeira
entra com o principal unitário negativo
define o montante desse principal
entra com o número de capitalizações em um ano
calcula a taxa por período de capitalização e multiplica por 2

Exemplo 3.17

Os juros reais da caderneta de poupança são de 6% a.a. com capitalizações mensais. Qual é a taxa efetiva ao ano?

Dados: $j = 6\%$ a.a., $k = 12$, $m = 1$, $i_a = ?$

$$i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} - 1 = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} - 1 = 0,06167781 = 6,167781\% \text{ a.a.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
6 (g) (12 ÷)
1 (g) (12 ×)
1 (CHS) (PV)
(FV)
1 (-) 100 (x) → 6,1678

apaga a memória financeira
entra com a taxa de juros por período de capitalização
entra com o número de capitalizações em um ano
define um principal unitário negativo
calcula o montante
subtrai 1 e multiplica por 100

Exemplo 3.18

Calcular a taxa nominal anual capitalizada trimestralmente, equivalente à taxa nominal de 120% a.a. capitalizada mensalmente.

Dados: $j = 120\%$ a.a., $k = 12 \equiv j = \% \text{ a.a.?$, $k = 4$, $m = 1$

a) Dividindo-se a taxa nominal de 120% a.a. pela freqüência das capitalizações (12 capitalizações) obtém-se a taxa efetiva mensal:

$$(1+i_m) = \left(1 + \frac{1,20}{12}\right) = 1,10$$

b) Dividindo-se a taxa nominal pedida, pela freqüência das capitalizações (4 capitalizações), obtém-se a taxa efetiva trimestral:

$$(1+i_t) = \left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

- c) Relacionando-se a taxa efetiva trimestral com a taxa efetiva mensal, pode-se destacar a taxa nominal pedida:

$$(1 + i_t)^3 = (1 + i_m)^3$$

$$\left(1 + \frac{j}{4}\right)^3 = (1,10)^3 \Rightarrow j = [(1,10)^3 - 1] \times 4 = 132,40\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 3.19

Verificar se a taxa nominal de 120% a.a. capitalizada mensalmente é equivalente à taxa efetiva de 213,84% a.a. Se ficar demonstrada a equivalência, provar que o montante produzido por uma aplicação financeira de \$ 1.000 durante dois anos a essas duas taxas é o mesmo.

Dados: $j = 120\%$ a.a., $k = 12 \equiv i_a = 213,84\%$ a.a., $m = 2$ anos, $P = \$ 1.000$, $S = ?$

- Taxa efetiva anual

$$i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{1,2}{12}\right)^{12} - 1 = 213,84\% \text{ a.a.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
120 (g) (12 ÷)
1 (g) (12×)
1 (CHS) (PV)
(FV)
1 (–) 100 (x) → 213,84

apaga a memória financeira
entra com a taxa de juros por período de capitalização
entra com o número de capitalizações em um ano
define um principal unitário negativo
calcula o montante desse principal unitário
subtrai 1 e multiplica por 100

- Montante à taxa nominal de 120% a.a. capitalizada mensalmente:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} = \$1.000 \times \left(1 + \frac{1,20}{12}\right)^{12 \times 2} = \$9.849,73$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
1.000 (CHS) (PV)
120 (g) (12 ÷)
2 (g) (12×)
(FV) → 9.849,73

apaga a memória financeira
entra com o principal com sinal negativo
entra com a taxa de juros por período de capitalização
entra com o número de capitalizações no prazo da operação
calcula o montante

- Montante à taxa efetiva de 213,84% a.a.:

$$S = P (1 + i_a)^m = \$1.000 \times (1 + 2,1384)^2 = \$9.849,73$$

Verifica-se que as duas taxas são equivalentes, pois resultam no mesmo montante.

Exemplo 3.20

Um investidor dispõe das seguintes alternativas de investimento: aplicar à taxa nominal de 48% a.a com capitalizações mensais ou à taxa de 50% a.a. com capitalizações semestrais. Qual alternativa representa a melhor aplicação?

Dados: $j = 48\% \text{ a.a.}$, $50\% \text{ a.a.}$, $k = 12, 2, m = 1, i_a = ?$

a) Taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de $48\% \text{ a.a.}$ capitalizada mensalmente ($m = 1; k = 12$):

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$i_a = \left(1 + \frac{0,48}{12}\right)^{12} - 1 = 60,10\% \text{ a.a.}$$

b) Taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de $50\% \text{ a.a.}$ capitalizada semestralmente ($m = 1; k = 2$):

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$i_a = \left(1 + \frac{0,50}{2}\right)^2 - 1 = 56,25\% \text{ a.a.}$$

A primeira alternativa representa a maior taxa efetiva anual. Portanto, deve ser a taxa escolhida.

Exemplo 3.21

Serão investidos \$ 1.000 por um ano à taxa nominal de $50\% \text{ a.a.}$. Determinar a periodicidade da capitalização dos juros que representa o maior montante e maior taxa afetiva anual.

Dados: $P = \$1.000$, $j = 50\% \text{ a.a.}$, $m = 1, 12, 360$, $i_a = ?$

Investimento P	Freqüência da capitalização K	Montante	Taxa efetiva anual
\$ 1.000	Anual ($k = 1$)	$\$1.000 (1 + 0,5)^{1 \times 1} = \1.500	$(1 + 0,5) - 1 = 50,00\% \text{ a.a.}$
\$ 1.000	Mensal ($k = 12$)	$\$1.000 \left(1 + \frac{0,5}{12}\right)^{12 \times 1} = \1.632	$\left(1 + \frac{0,5}{12}\right)^{12} - 1 = 63,21\% \text{ a.a.}$
\$ 1.000	Diária ($k = 360$)	$\$1.000 \left(1 + \frac{0,5}{360}\right)^{360 \times 1} = \1.648	$\left(1 + \frac{0,5}{360}\right)^{360} - 1 = 64,82\% \text{ a.a.}$

Esse quadro mostra que a capitalização diária produz o maior montante e a maior taxa efetiva anual; há um aumento destes com o aumento da freqüência das capitalizações da taxa nominal.

Exemplo 3.22

Calcular a taxa nominal ao ano equivalente a uma taxa efetiva de $10\% \text{ a.a.}$ nos seguintes casos de capitalização dos juros da taxa nominal: capitalização mensal, trimestral e semestral.

Dados: $i_a = 10\% \text{ a.a.}$, $k = 12, 4, 2$, $j = ?$

Capitalização dos juros K	Taxa nominal ao ano
Mensal ($k = 12$)	$j = \left[(1+i_a)^{\frac{1}{k}} - 1 \right] k$ $j = \left[(1+0,10)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] \times 12 = 9,57\% \text{ a.a.}$
Trimestral ($k = 4$)	$j = \left[(1+0,10)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \times 4 = 9,65\% \text{ a.a.}$
Semestral ($k = 2$)	$j = \left[(1+0,10)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \times 2 = 9,76\% \text{ a.a.}$

Exemplo 3.23

Calcular a taxa efetiva mensal, equivalente à taxa efetiva de 30% a.a. Verificar a equivalência.

Dados: $i_a = 30\% \text{ a.a.}; i_m = ?$

a) Taxa efetiva mensal:

$$(1+i_a) = (1+i_m)^{12}$$

$$(1+0,30) = (1+i_m)^{12} \Rightarrow i_m = (1,30)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,02210 = 2,21\% \text{ a.m.}$$

b) Montante devido a um capital de \$ 10.000 aplicado durante 12 meses à taxa efetiva de 2,21% a.m.

$$S = \$10.000 \times (1,0221)^{12} = \$13.000$$

c) Montante devido a um capital de \$ 10.000 aplicado durante um ano à taxa efetiva de 30% a.a.:

$$S = \$10.000 \times 1,30 = \$13.000$$

Por produzirem o mesmo montante no mesmo prazo, verifica-se que as duas taxas efetivas, 30% a.a. e 2,21% a.m., são equivalentes. Portanto, obteríamos o mesmo resultado financeiro se aplicássemos por um ano um capital a uma taxa efetiva de 2,21% a.m. ou a uma taxa efetiva de 30% a.a.

Exemplo 3.24

Uma aplicação de \$ 4.500 em CDB é resgatada por \$ 4.860 no prazo de dois meses. Calcular a taxa de juros efetiva anual ganha na aplicação.

Dados: $P = \$4.500, S = \$4.860, n = 2 \text{ meses}, i_a = ?$

- Fator de juros ao mês:

$$S = P(1+i_m)^n$$

$$\$4.860 = \$4.500 \times (1+i_m)^2 \Rightarrow (1+i_m) = \left(\frac{4.860}{4.500} \right)^{\frac{1}{2}} = (1,08)^{\frac{1}{2}}$$

- Capitalizando 12 vezes o fator de juros efetivos ao mês:

$$(1+i_a) = (1+i_m)^{12} \Rightarrow i_a = (1,08)^{\frac{12}{2}} - 1 = 58,69\% \text{ a.a}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
4.500 (CHS) (PV)
4.800 (FV)
(STO) (EEX)
2 [ENTER] 12 (÷) (n)
(i) → 58,6874

apaga a memória financeira
entra com o principal com sinal negativo
entra com o montante
permite cálculos com prazo fracionário
define o prazo em anos
calcula a taxa efetiva a.a.

As teclas (STO) (EEX) permitem cálculos com prazo fracionário $\left(\frac{2}{12} \text{ anos}\right)$. Quando são pressionadas, a letra 'c' é exibida no visor. Para apagá-la, basta pressioná-lo novamente.

Exemplo 3.25

Um banco cobra juros efetivos de 20% a.a.. Quanto cobrará em 150 dias?

Dados: $i_a = 20\%$ a.a., $i_{150d} = ?$

- Fator de juros efetivos ao dia:

$$(1+i_a) = (1+i_d)^{360}$$

$$(1,20) = (1+i_d)^{360} \Rightarrow (1+i_d) = (1,20)^{\frac{1}{360}}$$

Para calcular a taxa efetiva no período de 150 dias, capitalizamos 150 vezes o fator de juros ao dia:

$$(1+i_{150d}) = [1+i_d]^{150}$$

$$(1+i_{150d}) = \left[(1,20)^{\frac{1}{360}} \right]^{150} \Rightarrow i_{150d} = (1,20)^{\frac{150}{360}} - 1 = 0,07893 = 7,89\%$$

i_{150d} = taxa efetiva para 150 dias

Exemplo 3.26

A partir da taxa nominal de 40% a.a. capitalizada mensalmente, calcular a taxa efetiva anual e a taxa efetiva para um período de 43 dias.

Dados: $j = 40\%$ a.a., $k = 12$, $m = 1 \equiv i_a = ?, i_{43d} = ?$

- a) Cálculo da taxa efetiva anual:

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m}$$

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{0,40}{12}\right)^{12} \Rightarrow i_a = 48,21\% \text{ a.a.}$$

b) Cálculo da taxa efetiva no período de 43 dias:

$$\text{Fator efetivo mensal: } (1+i_m) = \left(1 + \frac{0,40}{12}\right)$$

Podemos destacar o fator de juros ao dia considerando que o fator mensal é igual ao fator diário capitalizado 30 vezes:

$$(1+i_d)^{30} = \left(1 + \frac{0,40}{12}\right) \Rightarrow (1+i_d) = \left(1 + \frac{0,40}{12}\right)^{\frac{1}{30}}$$

Para calcular a taxa efetiva em 43 dias, basta capitalizar 43 vezes o fator de juros ao dia:

$$(1+i_{43d}) = \left(1 + \frac{0,40}{12}\right)^{\frac{43}{30}} \Rightarrow i_{43d} = 4,81\% \text{ em 43 dias}$$

i_{43d} = taxa efetiva para 43 dias

Exemplo 3.27

Em 120 dias uma aplicação rendeu uma taxa efetiva de 124%. Calcular as taxas efetivas mensal e anual, equivalentes a esse rendimento.

Dados: $i_{120d} = 124\% \equiv i_m = ?, i_a = ?$

Fator de juros efetivos ao dia: $(1+i_{120d}) = (1+i_d)^{120}$

$$(1+1,24) = (1+i_d)^{120} \Rightarrow (1+i_d) = (2,24)^{\frac{1}{120}}$$

i_{120d} = taxa efetiva para 120 dias

a) Para calcular a taxa efetiva mensal, basta capitalizar 30 vezes o fator de juros ao dia:

$$(1+i_m) = [(1+i_d)]^{30} \Rightarrow i_m = \left[(2,24)^{\frac{1}{120}} \right]^{30} - 1 = (2,24)^{\frac{30}{120}} - 1 = 22,34\% \text{ a.m.}$$

b) Para calcular a taxa efetiva anual basta capitalizar 360 vezes o fator de juros ao dia:

$$(1+i_a) = (1+i_d)^{360} \Rightarrow i_a = \left[(2,24)^{\frac{1}{120}} \right]^{360} - 1 = (2,24)^{\frac{360}{120}} - 1 = 1.023,94\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 3.28

Um capital ganhou juros efetivos de 4,5% no prazo de 13 dias. Calcular a taxa nominal ao mês, capitalizada diariamente, equivalente à taxa efetiva ganha. Verificar a equivalência das taxas.

Dados: $i_{13d} = 4,5\%, m = \frac{13}{30} \text{ meses}, n = 13 \text{ dias}, k = 30, j = ? (\text{a.m.})$

- Fator de juros efetivos ao dia:

$$(1+i_d) = \left(1 + \frac{j}{30}\right)$$

A taxa efetiva em 13 dias pode ser calculada capitalizando-se 13 vezes o fator de juros efetivos ao dia:

$$(1+i_{13d}) = \left(1 + \frac{j}{30}\right)^{13}$$

$$(1+0,045) = \left(1 + \frac{j}{30}\right)^{13} \Rightarrow j = \left[(1,045)^{\frac{1}{13}} - 1 \right] \times 30 = 10,18\% \text{ a.m. capitalizada diariamente}$$

- Montante devido ao capital de \$ 1.000 aplicado durante 13 dias, à taxa efetiva de 4,5% no prazo:

$$S = \$1.000 \times (1,045) = \$1.045$$

- Montante devido ao capital de \$ 1.000 aplicado durante 13 dias à taxa nominal de 10,18% a.m. capitalizada diariamente:

$$S = \$1.000 \times \left(1 + \frac{0,1018}{30}\right)^{30 \times \left(\frac{13}{30}\right)} = \$1.045$$

Verifica-se que as duas taxas efetivas são equivalentes, dado que produzem o mesmo montante quando aplicadas sobre o mesmo capital no mesmo prazo.

Exemplo 3.29

Um capital de \$ 1.000 foi investido em renda fixa prefixada por 61 dias a uma taxa efetiva bruta de 28% a.a. Sabendo-se que a alíquota de IR é de 15% sobre os rendimentos, calcular o ganho líquido da aplicação e a taxa de rendimento líquida efetiva ao mês.

Dados: $P = \$1.000$, $i_a = 28\% \text{ a.a.}$, $IR = 15\%$, $i_m = ?$

- Rendimento efetivo em 61 dias:

rendimento efetivo = montante – aplicação – imposto de renda

$$= \$1.000(1,28)^{\frac{61}{360}} - \$1.000 - 0,15 \times \left[\$1.000(1,28)^{\frac{61}{360}} - \$1.000 \right] = \$36,31$$

- Taxa de rendimento efetivo ao mês:

$$i_m = \left(1 + \frac{\$36,31}{\$1.000}\right)^{\frac{30}{61}} - 1 = 1,7695\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 3.30

Determinar as seguintes equivalências entre taxas efetivas:

a) Taxa bimestral equivalente à taxa semestral de 35%:

$$(1 + i_b)^3 = (1 + i_s) \Rightarrow i_b = (1,35)^{\frac{1}{3}} - 1 = 10,52\% \text{ a.b.}$$

b) Taxa semestral equivalente à taxa mensal de 5%:

$$(1 + i_s) = (1 + i_m)^6 \Rightarrow i_s = (1,05)^6 - 1 = 34,01\% \text{ a.s.}$$

c) Taxa diária equivalente à taxa trimestral de 90%:

$$(1 + i_d)^{90} = (1 + i_t) \Rightarrow i_d = (1,90)^{\frac{1}{90}} - 1 = 0,7157\% \text{ a.d.}$$

d) Taxa anual equivalente à taxa diária de 0,5%:

$$(1 + i_a) = (1 + i_d)^{360} \Rightarrow i_a = (1,005)^{360} - 1 = 502,26\% \text{ a.a.}$$

e) Taxa bimestral equivalente à taxa de 35% em 45 dias:

$$(1 + i_d)^{45} = (1 + i_{45d}) \Rightarrow (1 + i_d) = (1,35)^{\frac{1}{45}}$$

$$(1 + i_b) = (1 + i_d)^{60} \Rightarrow i_b = (1,35)^{\frac{60}{45}} - 1 = 49,20\% \text{ a.b.}$$

Exemplo 3.31

Calcular a taxa efetiva anual equivalente a uma taxa nominal de 40% a.a., para as seguintes periodicidades de capitalização da taxa nominal: diária, mensal, semestral e anual.

Dados: $j = 40\%$ a.a., $m = 1$, $k = 360$, 12 , 4 , 2 , 1 , $i_a = ?$

Capitalização	Taxa efetiva anual: $i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k - 1$
Diária ($k = 360$)	$i_a = \left(1 + \frac{0,40}{360}\right)^{360} - 1 = 49,15\% \text{ a.a.}$
Mensal ($k = 12$)	$i_a = \left(1 + \frac{0,40}{12}\right)^{12} - 1 = 48,21\% \text{ a.a.}$
Semestral ($k = 2$)	$i_a = \left(1 + \frac{0,40}{2}\right)^2 - 1 = 44,00\% \text{ a.a.}$
Anual ($k = 1$)	$i_a = (1 + 0,40)^1 - 1 = 40,00\% \text{ a.a.}$

Como podemos observar no quadro, operações com pagamento de juros a intervalos mais curtos têm uma taxa efetiva mais elevada do que operações com pagamentos mais espaçados.

Exemplo 3.32

Um empréstimo de \$ 3.000 será liquidado por meio de um único pagamento de \$ 3.500 no prazo de 15 meses. Sabendo que no ato da contratação foi paga uma ‘comissão’ de 15% sobre o valor emprestado, determinar a taxa nominal e efetiva no prazo e a taxa efetiva mensal.

$$\begin{aligned} \text{taxa nominal} &= \frac{\text{juros pagos}}{\text{emprestimo nominal}} = \frac{\$ 3.500 - \$ 3.000}{\$ 3.000} = 16,67\% \text{ em 15 meses} \\ \text{taxa efetiva} &= \frac{\text{valores efetivamente pagos}}{\text{emprestimo efetivo}} = \frac{(\$ 3.500 - \$ 3.000) + 0,15 \times \$ 3.000}{\$ 3.000 - 0,15 \times \$ 3.000} \\ &= 37,26\% \text{ em 15 meses} \\ \text{taxa efetiva mensal: } i_m &= (1,3726)^{\frac{1}{15}} - 1 = 2,1336\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

Exemplo 3.33

Um empréstimo de \$ 23.000 será devolvido por meio de um único pagamento de \$ 28.000 no fim de três meses. O banco exige que 10% do valor do empréstimo seja mantido como saldo médio aplicado em CDBs que pagam juros efetivos de 12% a.m. Calcular a taxa nominal, a taxa efetiva no prazo da operação e a taxa efetiva mensal.

$$\begin{aligned} \text{taxa nominal} &= \frac{\text{juros nominais pagos}}{\text{emprestimo nominal}} = \frac{\$ 28.000 - \$ 23.000}{\$ 23.000} = 21,74\% \text{ em 3 meses} \\ \text{taxa efetiva} &= \frac{\text{custo líquido do empréstimo}}{\text{emprestimo efetivo}} \\ &= \frac{\text{juros nominais pagos} - \text{juros ganhos na aplicação exigida}}{\text{emprestimo} - \text{saldo médio exigido}} \\ &= \frac{(\$ 28.000 - \$ 23.000) - 0,10 \times \$ 23.000 \times [(1,12)^3 - 1]}{\$ 23.000 - 0,10 \times \$ 23.000} = 19,66\% \text{ em 3 meses} \end{aligned}$$

$$\text{taxa efetiva mensal: } i_m = (1,1966)^{\frac{1}{3}} - 1 = 6,1654\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 3.34

Determinar as seguintes equivalências entre taxas efetivas:

a) Taxa efetiva anual equivalente a uma taxa efetiva de 2% quinzenal:

$$(1+i_a) = (1+i_q)^{24} \Rightarrow i_a = (1+0,02)^{24} - 1 = 0,60844 = 60,84\% \text{ a.a}$$

ano comercial = 24 quinzenas

b) Taxa efetiva trimestral equivalente à taxa efetiva de 40% em dois anos:

$$(1+i_{2a}) = (1+i_t)^8 \Rightarrow i_t = (1,40)^{\frac{1}{8}} - 1 = 4,30\% \text{ a.t.}$$

2 anos comerciais = 8 trimestres

- c) Taxa efetiva para 21 dias equivalente à taxa efetiva de 17% a.t.:

Fator de juros efetivos ao dia: $(1+i_d)^{90} = (1+i_t) \Rightarrow (1+i_d) = (1,17)^{\frac{1}{90}}$

capitalizando por 21 dias o fator de juros ao dia:

$$(1+i_{21d}) = [(1+i_d)]^{21} \Rightarrow i_{21d} = \left[(1,17)^{\frac{1}{90}} \right]^{21} - 1 = (1,17)^{\frac{21}{90}} - 1 = 3,73\% \text{ em 21 dias}$$

Exemplo 3.35

Determine as seguintes equivalências entre taxas efetivas:

- a) Taxa efetiva para 11 meses equivalente à taxa nominal de 72% a.a. capitalizada mensalmente:

$$\text{Taxa efetiva mensal: } (1+i_m) = \left(1 + \frac{0,72}{12} \right)$$

A taxa efetiva para 11 meses é calculada capitalizando-se 11 vezes a taxa efetiva mensal:

$$1 + i_{11m} = (1,06)^{11} \Rightarrow i_{11m} = (1,06)^{11} - 1 = 0,898299 = 89,8299\% \text{ em 11 meses}$$

- b) Taxa efetiva para 270 dias, equivalente à taxa nominal de 48% a.a. capitalizada trimestralmente:

$$\text{Taxa efetiva trimestral: } (1+i_t) = \left(1 + \frac{0,48}{4} \right) = (1,12)$$

Para calcular a taxa efetiva em 270 dias, capitaliza-se a taxa efetiva trimestral três vezes:

$$1 + i_{270d} = (1,12)^3 \Rightarrow i_{270d} = (1,12)^3 - 1 = 40,49\% \text{ em 270 dias}$$

- c) Taxa nominal anual capitalizada semestralmente, equivalente à taxa efetiva de 12% em 540 dias:

$$\text{Taxa efetiva semestral: } (1+i_s) = \left(1 + \frac{j}{2} \right)$$

A taxa efetiva para 540 dias é igual à taxa efetiva semestral capitalizada três vezes:

$$1 + i_{540d} = \left(1 + \frac{j}{2} \right)^3$$

Substituindo a taxa efetiva semestral na expressão anterior, podemos destacar a taxa nominal:

$$1,12 = \left(1 + \frac{j}{2} \right)^3 \Rightarrow j = \left[(1,12)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] \times 2 = 7,70\% \text{ a.a. capitalizada semestralmente}$$

- d) Taxa nominal anual capitalizada mensalmente, equivalente à taxa efetiva de 19% a.t.:

$$\text{Taxa efetiva mensal: } (1+i_m) = \left(1 + \frac{j}{12} \right)$$

Por meio de uma relação de equivalência entre o fator trimestral e o fator mensal, podemos destacar a taxa nominal pedida:

$$(1+i_t) = (1+i_m)^3$$

$$(1+0,19) = \left(1+\frac{j}{12}\right)^3 \Rightarrow j = \left[\left(1,19\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \times 12 = 71,64\% \text{ a.a. capitalizada mensalmente}$$

e) Taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 32% a.a. capitalizada trimestralmente:

$$\text{Taxa efetiva trimestral: } (1+i_t) = \left(1 + \frac{0,32}{3}\right)$$

A taxa efetiva anual é calculada capitalizando-se quatro vezes a taxa efetiva trimestral:

$$1+i_a = (1,08)^4 \Rightarrow i_a = (1,08)^4 - 1 = 36,0489\% \text{ a.a.}$$

f) Taxa efetiva trimestral equivalente à taxa nominal de 18% a.s. capitalizada mensalmente:

$$\text{Taxa efetiva mensal: } (1+i_m) = \left(1 + \frac{0,18}{12}\right) = 1,03$$

$$\text{Taxa efetiva trimestral: } (1+i_t) = (1,03)^3 \Rightarrow i_t = 9,2727\% \text{ a.t.}$$

Exemplo 3.36

Dada a taxa de juros nominal de 24% a.a. capitalizada trimestralmente, determinar a taxa nominal anual capitalizada semestralmente equivalente.

Dividindo-se a taxa nominal de 24% a.a. pela freqüência das capitalizações (quatro) obtém-se a taxa efetiva trimestral:

$$(1+i_t) = \left(1 + \frac{0,24}{4}\right) = 1,06$$

Dividindo-se a taxa nominal anual pedida, pela freqüência das capitalizações (duas), obtém-se a taxa efetiva semestral:

$$(1+i_s) = \left(1 + \frac{j}{2}\right)$$

Relacionando-se a taxa efetiva semestral com a taxa efetiva trimestral, podemos destacar a taxa nominal pedida:

$$(1+i_s) = (1+i_t)^2$$

$$\left(1 + \frac{j}{2}\right) = (1,06)^2 \Rightarrow j = \left[(1,06)^2 - 1\right] \times 2 = 24,72\% \text{ a.a.}$$

3.5 Taxa over (taxa por dia útil)

A palavra *overnight* refere-se a operações realizadas no *open market* por prazo mínimo de um dia. O termo *open market*, no sentido amplo, é qualquer mercado sem local físico determinado e com livre acesso à negociação. No Brasil, porém, tal denominação se aplica ao

conjunto de transações realizadas com títulos de renda fixa, de emissão pública ou privada. A denominada *taxa over* é adotada geralmente nas operações financeiras nesse mercado, entretanto, seu valor não é usado nos cálculos por não representar uma taxa efetiva. A *taxa over* é uma taxa nominal, pois costuma ser expressa ao mês com capitalização diária, porém válida somente para dias úteis, ou seja, sua capitalização ocorre unicamente em dia de funcionamento do mercado financeiro. Caso se queira realizar uma operação com mais de um dia, utiliza-se o conceito de taxa nominal para converter a taxa over para um dia e, em seguida, utiliza-se o conceito de taxa efetiva para capitalizar (converter) a taxa de um dia para o prazo da operação. Assim, o montante de um capital aplicado à taxa over mensal por um determinado número de dias úteis é:

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du}$$

du = dias úteis no prazo da operação

3.5.1 Taxa de juros efetiva equivalente à taxa over

O montante de um capital aplicado à taxa over durante dc/dias corridos correspondentes a du/dias úteis é:

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du}$$

O montante do mesmo capital aplicado durante dc/dias corridos a uma taxa efetiva i é:

$$S = P(1+i)^{dc/n} \quad n = \text{período (dias) da taxa } i$$

A seguir podemos igualar os dois montantes de modo que possamos destacar a taxa efetiva equivalente à taxa over:

$$\left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du} = (1+i)^{dc/n} \quad \Rightarrow \quad i = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{\frac{du \times n}{dc}} - 1$$

onde: i = taxa efetiva em n dias; dc = dias corridos; du = dias úteis.

O número de *dias corridos/dc* é obtido pela simples diferença entre as duas datas. O número de *dias úteis/du* é obtido da diferença entre as duas datas descontando-se o número de feriados regulares, sábados e domingos e o número de feriados especiais entre essas datas.

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.37

Uma operação com duração de 30 dias corridos foi fechada a uma taxa over de 2% a.m., sendo computados 22 dias úteis nesse mês. Determinar a taxa efetiva para o prazo da operação que é de 30 dias corridos (taxa mensal).

Dados: taxa over = 2% a.m., dias corridos (dc) = 30 dias, dias úteis (du) = 22, n = 30, i = ?

$$i = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{\frac{du \times n}{dc}} - 1 = \left(1 + \frac{0,02}{30}\right)^{\frac{22 \times 30}{30}} - 1 = 1,4770\% \text{ a.m.}$$

Ou seja, a taxa efetiva de juros é igual a 1,4770% aos 22 dias úteis ou aos 30 dias corridos, ambas as medidas ao mesmo prazo da operação.

Exemplo 3.38

Uma operação com duração de 35 dias corridos foi contratada a uma taxa over de 1,8% a.m. Se durante esse prazo houve 25 dias úteis, calcular a taxa efetiva mensal e o montante ao término do prazo considerando-se que foi aplicado \$ 100.000.

Dados: taxa over = 1,8% a.m., dias corridos (dc) = 35 dias, dias úteis (du) = 25, n = 30, P = \$ 100.000, S = ?

- Taxa efetiva mensal:

$$i = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{\frac{du \times n}{dc}} - 1 = \left(1 + \frac{0,018}{30}\right)^{\frac{25 \times 30}{35}} - 1 = 0,012936 = 1,2936\% \text{ a.m.}$$

- Montante:

$$S = P \times (1+i)^{\frac{dc}{n}} = \$100.000 \times (1,012936)^{\frac{35}{30}} = \$101.510,85$$

Exemplo 3.39

Em uma aplicação de \$ 120.000 pelo prazo de 38 dias corridos correspondentes a 32 dias úteis, foram resgatados \$ 126.500. Determinar o valor da taxa over mensal.

Dados: P = \$ 120.000, S = \$ 126.500, dias corridos (dc) = 38 dias, dias úteis (du) = 32, taxa over = ?

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{\frac{du}{n}}$$

$$\$126.500 = \$100.000 \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{\frac{32}{38}} \Rightarrow \text{taxa over} = \left[\left(\frac{126.500}{100.000}\right)^{\frac{1}{32}} - 1\right] \times 30 = 22,12\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 3.40

Por cada \$ 1.000 aplicados foram recebidos \$ 1.016,12. Considerando que a operação foi contratada a uma taxa over de 2% a.m, calcular o número de dias úteis.

Dados: P = \$ 1.000, S = \$ 1.016,12, taxa over = 2% a.m.?, dias úteis (du) = ?

$$S = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du}$$

$$\$1.016,12 = \$1.000 \left(1 + \frac{0,02}{30}\right)^{du} \Rightarrow du = \frac{\ln\left(\frac{1.016,12}{1.000}\right)}{\ln\left(1 + \frac{0,02}{30}\right)} = 24$$

Exemplo 3.41

Uma operação, com duração de 45 dias corridos correspondentes a 39 dias úteis, apresentou uma taxa over de 2% a.m. Calcular a taxa de juros efetiva mensal (para 30 dias).

Dados: dias corridos (dc) = 45, dias úteis (du) = 39, n = 30, taxa over = 2% a.m., $i_m = ?$

$$i = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{\frac{du \times n}{dc}} - 1 = \left(1 + \frac{0,02}{30}\right)^{\frac{39 \times 30}{45}} - 1 = 1,7479\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 3.42

Uma aplicação em 63 dias corridos correspondentes a 52 dias úteis teve um rendimento efetivo de 1,5% a.m. Calcular a taxa over mensal equivalente.

Dados: dias corridos (dc) = 63, dias úteis (du) = 52, i = 1,5% a.m., n = 30, taxa over = ?

$$(1+i) = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{\frac{du \times n}{dc}} \Rightarrow \text{taxa over} = \left[(1+i)^{\frac{dc}{du \times n}} - 1 \right] \times 30$$

$$= \left[(1,015)^{\frac{63}{52 \times 30}} - 1 \right] \times 30 = 1,8044\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 3.43

Um CDB está pagando a taxa bruta de 19% a.a. A alíquota de IR é de 20%, incidente sobre os rendimentos totais por ocasião do resgate da operação. Determinar a taxa over equivalente à taxa de remuneração líquida, considerando que há 21 dias úteis no período.

Dados: Impostos = 20%, dias corridos (dc) = 30, dias úteis (du) = 21, n = 30, taxa over = ?

taxa bruta = 19% a.a.

taxa líquida anual = $19\% \times (1 - 0,20) = 15,20\% \text{ a.a.}$

taxa líquida mensal (i) = $(1,1520)^{1/12} - 1 = 1,1861\% \text{ a.m.}$

$$\text{taxa over} = \left[(1+i)^{\frac{dc}{du \times n}} - 1 \right] \times 30 = \left[(1,01861)^{\frac{30}{21 \times 30}} - 1 \right] \times 30 = 1,6850\% \text{ a.m.}$$

n: período da taxa $i = 30$ (mensal)

3.5.2 Certificado de Depósito Interfinanceiro (CDI)

Os CDIs são títulos que lastreiam as operações do mercado interfinanceiro. As transações são realizadas eletronicamente entre as instituições financeiras e repassadas aos terminais da Central de Custódia e de Liquidação Financeira de Títulos Privados (Cetip), que controla todo o sistema de operações. Os CDIs são isentos de impostos (IR e IOF) e os juros, definidos pela taxa over.

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.44

Uma operação interbancária é realizada por três dias. As taxas over em cada dia são: 1,9% a.m., 1,87% a.m. e 1,84% a.m. Calcular a taxa efetiva no período e a taxa over média da operação.

$$\text{taxa over}_1 = \frac{1,9}{30} = 0,06333\% \text{ a.d.}$$

$$\text{taxa over}_2 = \frac{1,87}{30} = 0,06233\% \text{ a.d.}$$

$$\text{taxa over}_3 = \frac{1,84}{30} = 0,06123\% \text{ a.d.}$$

- Taxa efetiva no período: $(1,0006333) \times (1,0006233) \times (1,0006123) - 1 = 0,1871\%$
- Taxa média diária: $(1,001871)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,06233\% \text{ ao dia}$

Exemplo 3.45

Um capital de \$ 10.000 foi aplicado em 12/12/95 para ser resgatado em 18/12/95. Se a aplicação ganhar 100% da taxa DI, determinar o valor de resgate.

O quadro a seguir mostra o valor de resgate para cada dia útil usando-se as taxas nominais dos CDI – Certificados de Depósito Interbancário, ou seja, as taxas referentes aos DI – Depósitos Interfinanceiros. Essas taxas devem ser aplicadas por dia útil, obtidas a partir das taxas nominais de DI – Over mensais publicadas pela CETIP – Central de Custódia e Liquidação de Títulos Privados e pela ANDIMA – Associação Nacional das Instituições de Mercado Aberto:

Data (dia útil)	Valor de Resgate	Taxa Diária	Taxa CDI Fonte: ANDIMA % a.m.
12-Dez-95	10.013,47	0,1347%	4,04
13-Dez-95	10.026,95	0,1347%	4,04
14-Dez-95	10.040,89	0,1390%	4,17
15-Dez-95	10.054,88	0,1393%	4,18
18-Dez-95	10.068,86	0,1390%	4,17

Valor de resgate em 12/12/95: $\$10.000 (1 + 0,1347 / 100) = \$10.013,47$

: :

Valor de resgate em 18/12/95: $\$10.054,88 (1 + 0,1390 / 100) = \$10.068,86$

3.6 Taxa de juros aparente e taxa de juros real

A taxa aparente (chamada nominal nas transações financeiras e comerciais) é aquela que vigora nas operações correntes. A taxa real é calculada depois de serem expurgados os efeitos inflacionários.

As taxas aparente e real relacionam-se da seguinte forma¹:

$$(1 + i) = (1 + i_r) \times (1 + I)$$

onde: i = taxa aparente; i_r = taxa real; I = taxa de inflação.

Por exemplo, o custo real de um empréstimo contratado a uma taxa efetiva aparente de 20%, considerando uma inflação para o mesmo período de 15%, é:

$$i_r = \frac{(1+i)}{(1+I)} - 1 = \frac{1,20}{1,15} - 1 = 0,043478 = 4,3478\%$$

Exemplos de aplicação

Exemplo 3.46

Uma aplicação financeira rende juros nominais de 6% a.a. capitalizados mensalmente. Considerando uma taxa de inflação de 5,5% a.a., calcular as taxas de juros aparente e real ganhas pela aplicação.

Dados: $j = 6\%$ a.a., $K = 12$, $I = 5,5\%$ a.a., $i_a = ?$, $i_r = ?$

a) Taxa efetiva aparente:

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k$$

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} \Rightarrow i_a = 6,17\% \text{ a.a.}$$

b) Taxa efetiva real:

$$i_r = \frac{1 + i_a}{1 + I} - 1 = \frac{1,0617}{1,055} - 1 = 0,6351\% \text{ a.a.}$$

¹ A expressão é conhecida como “efeito Fisher”, pois foi proposta por I. Fisher no livro *The theory of interest*, Nova York, Ed. MacMillan, 1930.

Exemplo 3.47

Um capital aplicado durante dois anos à taxa nominal aparente de 18% a.a. capitalizada mensalmente rendeu \$ 1.500 de juros. Considerando uma inflação anual de 12% a.a., calcular o capital e as taxas de rentabilidade aparente e real da aplicação.

Dados: $m = 2$ anos, $I = 12\%$ a.a., juros = \$ 1.500, $j = 18\%$ a.a., $k = 12$, $P = ?$, $i_r = ?$

a) Cálculo do capital aplicado

$$\text{juros} = \text{montante} - \text{aplicação}$$

$$\$1.500 = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} - P$$

$$\$1.500 = P \left[\left(1 + \frac{0,18}{12} \right)^{12 \times 2} - 1 \right] \Rightarrow P = \frac{\$1.500}{(1,015)^{24} - 1} = \$3.492,41$$

b) Rentabilidade aparente

$$\frac{\text{juros nominais (aparentes)}}{\text{aplicação não corrigida}} = \frac{\$1.500}{\$3.492,41} = 42,95\% \text{ em 2 anos} \Rightarrow (1,4295)^{\frac{1}{2}} - 1 = 19,56\% \text{ a.a.}$$

$$\text{ou: } (1 + i_a) = \left(1 + \frac{0,18}{12} \right)^{12} \Rightarrow i_a = (1,015)^{12} - 1 = 19,56\% \text{ a.a.}$$

c) Rentabilidade real

$$\begin{aligned} i_r &= \frac{\text{rendimento real}}{\text{aplicação corrigida}} = \frac{\text{montante} - \text{aplicação corrigida}}{\text{aplicação corrigida}} \\ &= \frac{(\$1.500 + \$3.492,41) - \$3.492,41 \times (1,12)^2}{\$3.492,41 \times (1,12)^2} = 0,1396 \text{ em 2 anos} \end{aligned}$$

$$\text{taxa real ao ano: } i_r = (1,1396)^{\frac{1}{2}} - 1 = 6,75\% \text{ a.a.}$$

$$\text{ou: } i_r = \frac{1 + \text{taxa de rentabilidade aparente}}{1 + \text{taxa de inflação}} - 1 = \frac{1 + 0,1956}{1 + 0,12} - 1 = 6,75\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 3.48

Um investidor aplicou pelo prazo de 31 dias, \$ 400.000 em um CDB prefixado que rende juros efetivos de 16% a.a. mais TR. Considerando uma inflação de 2% a.m., calcular o rendimento real e outros parâmetros importantes da operação.

a) Taxa relativa ao período da aplicação:

$$i_{31d} = (1 + 0,16)^{\frac{31}{360}} - 1$$

$$i_{31d} = 0,012862632 = 1,2863\% \text{ para 31 dias}$$

b) Rendimento bruto aparente no período da aplicação:

$$R_b = 0,012863 \times \$400.000 = \$5.145,05$$

c) Ganho pela variação da TR (1,5%):

$$\begin{aligned} &= \text{variação da TR no período} \times \text{aplicação} \\ &= 0,015 \times \$400.000 = \$6.000 \end{aligned}$$

d) Impostos (8% sobre o ganho da operação):

$$0,08 \times (\$5.145,06 + \$6.000) = \$891,60$$

e) Valor de resgate líquido:

$$\$400.000 + \$11.145,06 - \$891,60 = \$410.253,46$$

f) Rentabilidade aparente da aplicação:

$$i = (\$410.253,46 + \$400.000) - 1 = 0,025634 = 2,5634\% \text{ para 31 dias.}$$

taxa mensal equivalente:

$$i_m = (1,025634)^{\frac{30}{31}} - 1 = 0,024797 = 2,4797\% \text{ a.m.}$$

g) Rentabilidade real da aplicação:

$$i_r = \frac{1+i_m}{1+I} - 1 = \frac{1,024797}{1,02} - 1 = 0,004703 \approx 0,47\% \text{ a.m.}$$

3.7 Exercícios propostos

Atenção:

Na resolução dos exercícios considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias.

- Dada a taxa efetiva de 48% a.a., determinar a taxa equivalente ao mês, ao trimestre e ao semestre.
- Calcular as taxas de juros efetivas mensal, trimestral e semestral, equivalentes à taxa nominal de 60% a.a. capitalizada mensalmente.
- Determinar a taxa efetiva anual equivalente a uma taxa nominal de 60% a.a. nas seguintes hipóteses de capitalização dos juros da taxa nominal: diária, mensal, trimestral e semestral.
- Calcular a taxa nominal anual equivalente à taxa efetiva de 40% a.a. nas seguintes hipóteses de capitalização dos juros da taxa nominal: mensal, trimestral e semestral.
- A que taxa nominal anual capitalizada mensalmente uma aplicação de \$13.000 resulta em um montante de \$23.000 em sete meses?
- Se uma aplicação de \$18.000 à taxa nominal de 180% a.a. capitalizada mensalmente resultou em um montante de \$36.204,48, quantos meses o capital ficou aplicado?
- Determinar:
 - a taxa efetiva para dois meses equivalente à taxa nominal de 120% a.a., capitalizada mensalmente;

- b) a taxa efetiva para 18 meses equivalente à taxa nominal de 120% a.a., capitalizada semestralmente;
- c) a taxa nominal anual capitalizada mensalmente equivalente à taxa efetiva de 10% em 60 dias;
- d) a taxa nominal anual capitalizada trimestralmente equivalente à taxa efetiva de 15% em seis meses;
- e) a taxa efetiva para 41 dias equivalente à taxa nominal de 24% a.a., capitalizada diariamente;
- f) a taxa efetiva para 41 dias equivalente à taxa nominal de 24% a.s., capitalizada diariamente.
8. Um capital foi aplicado à taxa nominal de 90% a.a. capitalizada mensalmente. Calcular a taxa efetiva equivalente para os seguintes prazos: 180 dias, 3 meses, 5 trimestres e 7 semestres.
9. Uma aplicação de \$ 18.000 rendeu juros efetivos de \$ 4.200 em quatro meses. Qual seria o rendimento em 11 meses?
10. Quanto devemos aplicar em um CDB que paga uma taxa nominal de 84% a.a. capitalizada mensalmente de modo que obtenhamos um montante de \$ 76.000 após quatro meses?
11. Calcular o montante para um capital de \$ 2.000 aplicado conforme as hipóteses a seguir:

Prazo	Taxa nominal	Capitalização
a) 3 meses	48% a.s.	mensal
b) 2 anos	18% a.a.	mensal
c) 17 dias	35% a.m.	diária

12. A juros nominais de 48% a.a. capitalizados mensalmente, determinar em quantos meses um capital de \$ 10.000 rende juros de \$ 3.685,69.
13. Para os seguintes prazos, calcular as taxas efetivas equivalentes à taxa efetiva de 48% a.a.: a) 8 meses; b) 11 meses; c) 18 dias; d) 3 meses; e) 420 dias; f) 7 meses e 12 dias.
14. Qual é a melhor alternativa: investir à taxa nominal de 240% a.a. capitalizada mensalmente ou a 264% a.a. capitalizada bimestralmente?
15. Qual deve ser a freqüência da capitalização dos juros de uma taxa nominal de 565,98% a.a. de modo que seja equivalente à taxa nominal de 480% a.a. capitalizada bimestralmente?
16. Em quanto tempo dobrará um capital aplicado à taxa nominal de 227,05% a.a. capitalizada mensalmente?
17. Em 14 meses uma aplicação de \$ 12.000 rendeu juros brutos de \$ 2.300. Considerando a cobrança de imposto de 2% sobre os rendimentos, calcular a taxa efetiva mensal ganha pela aplicação.
18. Calcular o rendimento de \$ 17.800 aplicados por sete meses à taxa efetiva de 45% a.a.
19. Um capital de \$ 24.000 aplicado à taxa nominal de 120% a.a. capitalizada mensalmente rendeu \$ 5.040. Determinar o prazo da operação.

20. Em sete meses um investimento de \$ 15.000 teve um rendimento bruto de \$ 4.000. Considerando um imposto de 3% sobre o rendimento e uma comissão de 1,5% sobre o valor aplicado, calcular a taxa de juros efetiva mensal ganha na aplicação.
21. Um investimento rende juros nominais de 6% a.a. capitalizados mensalmente. Calcular a taxa efetiva anual.
22. Em operações de crédito, o Banco A cobra uma taxa efetiva de 30% a.a. e o Banco B cobra juros nominais de 27% a.a. capitalizados mensalmente. Qual é a melhor taxa para o cliente?
23. Uma aplicação a juros nominais de 24% a.a. capitalizados semestralmente resultou em um montante de \$ 10.000. Se a taxa fosse de 48% a.a. capitalizada trimestralmente, o montante seria de \$ 15.735,19. Calcular o capital e o prazo da aplicação em anos.
24. Em que prazo um capital de \$ 75.000 aplicado à taxa nominal de 22% a.a. capitalizada semestralmente resulta em um montante de \$ 155.712?
25. Dois capitais foram aplicados, o primeiro de \$ 8.000 à taxa nominal de 20% a.a. capitalizada trimestralmente e o segundo de \$ 33.800,80 à taxa nominal de 10% a.a. capitalizada semestralmente. Em quantos anos os dois capitais produzirão o mesmo rendimento?
26. Um capital de \$ 12.600 foi aplicado por três anos à taxa nominal de 22% a.a. Calcular o montante considerando que no primeiro ano os juros foram capitalizados semestralmente, no segundo, trimestralmente e no terceiro, bimestralmente.
27. Um capital de \$ 12.500 aplicado à taxa nominal de 24% a.a. capitalizada semestralmente rendeu juros de \$ 12.172,78. Calcular o prazo da aplicação.
28. Três quartos de um capital foram aplicados à taxa nominal de 20% a.a. capitalizada semestralmente e o restante, a 12% a.s. capitalizada trimestralmente. Considerando o prazo da aplicação de quatro anos e sabendo-se que o rendimento de juros da primeira parcela foi \$ 4.726,04 maior que o rendimento da segunda, calcular o capital.
29. Um capital aplicado à taxa nominal de 24% a.a. capitalizada semestralmente rendeu \$ 9.738,23. Se a taxa fosse de 48% a.a. capitalizada trimestralmente, o rendimento seria de \$ 28.959,76. Determinar o prazo da aplicação em anos e calcular o valor do capital.
30. Um capital aplicado durante quatro anos à taxa nominal de 12% a.a. capitalizada mensalmente rendeu de juros \$ 12.252 a mais do que teria rendido se a capitalização fosse semestral. Calcular o valor do capital.
31. Dividir a importância de \$ 2.832.774 em três partes de tal modo que, aplicadas à taxa nominal de 20% a.a. capitalizada semestralmente, produzam, respectivamente, montantes iguais em dois, três e cinco anos.
32. Dois capitais foram aplicados pelo prazo de dois anos. O primeiro à taxa nominal de 20% a.a. capitalizada semestralmente e o segundo, a 18% a.a. capitalizada trimestralmente. Considerando que os juros do primeiro excederam em \$ 6.741 os juros do segundo e o primeiro capital é \$ 10.000 maior que o segundo, calcular os dois capitais.
33. Um capital foi aplicado durante cinco anos à taxa nominal de 5,5% a.a. capitalizada semestralmente e, a seguir, seu montante foi colocado a juros efetivos de 4% a.a. durante dez anos. A que taxa efetiva anual única poderia ser aplicado durante todo esse tempo de modo que resultasse no mesmo montante?

34. Uma pessoa precisa de \$10.000 por 2 anos. Oferecere-lhe o dinheiro nas seguintes condições: a) a juros nominais de 5% a.a. capitalizados trimestralmente; b) à taxa nominal de 5,375% a.a. capitalizada semestralmente; c) a juros simples de 5,5% a.a. Qual é a melhor oferta?
35. Uma pessoa aplicou um capital de \$20.000 durante quatro anos à taxa nominal de 18% a.a. capitalizada semestralmente. Ao término desse período, somente os juros ganhos foram reaplicados por mais 15 meses à taxa nominal de 12% a.a. capitalizada trimestralmente. Calcular o rendimento dessa última aplicação.
36. Um banco oferece uma rentabilidade efetiva de 40% a.a. Considerando que o investidor tem condições de ganhar juros efetivos de 9% a.t. em outro banco, qual deve ser a alternativa escolhida?
37. Um investidor aplicou \$25.000 na Bolsa de Valores esperando ganhar uma rentabilidade efetiva de 100% a.a. Caso tal rentabilidade ocorresse, calcular os juros ganhos ao fim de 20 meses.
38. Um capital aplicado à taxa nominal de 24% a.a. capitalizada semestralmente rendeu \$2.294,08. Se a taxa fosse de 48% a.a. capitalizada trimestralmente, o montante seria de \$9.903,85. Calcular o capital e o prazo da aplicação.
39. O Produto Interno Bruto (PIB) de um país cresceu 200% em dez anos. Qual foi a taxa de crescimento anual média?
40. Em 12/10/1997 um capital de \$2.300 foi aplicado à taxa nominal de 36% a.a capitalizada diariamente. Calcular os juros acumulados em 24/11/1999 (trabalhar com o ano civil).
41. Em 31/12/1990 uma pessoa aplicou \$10.000 à taxa nominal de 24% a.a. capitalizada diariamente. Considerando que a partir de 1/1/1996 a taxa nominal passou a ser de 20% a.a., calcular o valor de resgate da aplicação no dia 30/6/1999 (trabalhar com o ano civil).
42. Um capital foi aplicado dividido em duas parcelas. A primeira por quatro anos à taxa nominal de 28% a.a. com capitalização trimestral e a segunda por dois anos à taxa nominal de 12% a.s. com capitalização mensal. Considerando que a primeira parcela excede em \$100 à segunda e a diferença dos juros ganhos pelas duas é de \$1.404,57, calcular o valor do capital.
43. Um capital de \$4.000 foi aplicado por 11 meses. Nos primeiros três meses à taxa de 24% a.a. capitalizada mensalmente e nos oito últimos meses à taxa de 36% a.s. capitalizada trimestralmente. Calcular o rendimento da aplicação.
44. Um capital de \$6.000 foi aplicado por 27 meses. Nos primeiros 11 meses à taxa de 48% a.a. capitalizada mensalmente, nos seguintes 13 meses à taxa de 40% a.s. capitalizada trimestralmente e nos últimos 3 meses à taxa de 36% a.a. capitalizada bimestralmente. Calcular o montante final.
45. Dois terços de um capital foram aplicados por dois anos à taxa de 18% a.s. capitalizada bimestralmente e o restante do capital foi aplicado por um determinado prazo à taxa de 18% a.t. capitalizada mensalmente. Considerando que o valor do capital é de \$12.000 e o rendimento da primeira parcela é \$4.048,79 maior que o rendimento da segunda, calcular o prazo em anos da segunda parcela.
46. Um capital foi aplicado por 18 meses a juros nominais de 24% a.a. capitalizados mensalmente. Se as capitalizações da taxa nominal forem semestrais, o rendimento será \$1.000 menor. Calcular o valor do capital.

47. Calcular o prazo em que um capital dobra quando aplicado a juros nominais de 120,17% a.a. capitalizados diariamente.
48. A que prazo devemos aplicar um capital a juros nominais de 20% a.a. capitalizados trimestralmente de modo que proporcione o mesmo rendimento obtido aplicando-o durante oito anos a juros efetivos de 5% a.a.?
49. Um investidor teria o mesmo rendimento se aplicasse um capital em qualquer uma de duas opções de investimento. A primeira opção permite aplicá-lo durante quatro anos à taxa efetiva composta de 8% a.a. e a segunda, durante dois anos a uma determinada taxa nominal anual capitalizada semestralmente. Qual é a taxa nominal?
50. Em que data um capital de \$ 10.000 aplicado em 20/9/2000 a juros efetivos de 40% ao ano resultará em um montante de \$ 17.037,38? (Trabalhar com o ano civil.)
51. Um capital foi aplicado em uma conta remunerada que paga uma taxa de 24% a.a. capitalizada trimestralmente. Após um ano a taxa baixou para 20% a.a., o que motivou o saque de 50% do capital originalmente aplicado. Se transcorridos seis meses desta segunda operação a conta foi encerrada, resgatando-se o saldo total de \$ 20.000, calcular o capital inicialmente aplicado.
52. Calcular o valor dos juros pagos por um financiamento de capital de giro \$ 1.500 por 5 dias contratado à taxa de 36% a.a. capitalizada mensalmente.
53. Calcular a taxa nominal anual capitalizada trimestralmente equivalente à taxa efetiva de 12% a.a.

3.8 Respostas dos exercícios propostos

1. 3,320970% a.m.; 10,297439% a.t.;
21,655251% a.s.
2. 5% a.m.; 15,76% a.t.; 34,01% a.s.
3. 82,12% a.a.; 79,59% a.a.;
74,90% a.a.; 69% a.a.
4. 34,12% a.a.; 35,10% a.a.;
36,64% a.a.
5. 101,90% a.a.
6. 5 meses
7. a) 21%; b) 309,60%; c) 58,57%;
d) 28,95%; e) 2,77%; f) 5,6150%
8. 54,33%; 24,23%; 195,89%; 1.985,24%
9. \$ 14.043,78
10. \$ 57.980,04
11. a) \$ 2.519,42; b) \$ 2.859,01;
c) \$ 2.435,94
12. 8 meses
13. a) 29,87%; b) 43,24%; c) 1,9796%;
d) 10,30%; e) 57,99%; f) 27,35%
14. As duas são equivalentes
15. Trimestral
16. 4 meses
17. 1,2371% a.m.
18. \$ 4.308,10
19. 2 meses
20. 3,1642% a.m.
21. 6,1678% a.a.
22. Banco A
23. \$ 6.355,18; 2 anos
24. 42 meses
25. 12 anos
26. \$ 23.870,48
27. 3 anos
28. \$ 10.000
29. 3 anos; \$ 10.000
30. \$ 666.666,56
31. \$ 1.184.804,91; \$ 979.177,61;
\$ 668.791,48
32. \$ 60.000,73; \$ 50.000,73
33. 4,5226% a.a.
34. oferta A
35. \$ 3.161,79
36. 9% a.t.
37. \$ 54.370,05
38. \$ 4.000; 2 anos

- | | |
|--------------------------|-----------------------------------------|
| 39. 11,6123% a.a. | 47. 208 dias |
| 40. \$ 2.628,05 | 48. 2 anos |
| 41. \$ 66.852,67 | 49. 16% a.a. |
| 42. \$ 1.900 | 50. Em 21/4/2002 (após 578 dias) |
| 43. \$ 5.910,50 | 51. \$ 23.791,66 |
| 44. \$ 20.302,47 | 52. \$ 7.407933 |
| 45. 1 ano | 53. 11,49493789% a.a. |
| 46. 42.884,87 | |

OPERAÇÕES DE CURTO PRAZO

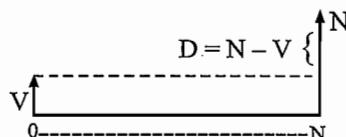
CAPÍTULO



- Desconto simples
- Desconto composto
- Factoring
- Hot Money
- Commercial papers
- Export note
- Conta garantida

4.1 Desconto

Desconto é a denominação dada a um abatimento que se faz quando um título de crédito é resgatado antes de seu vencimento. É uma operação tradicional no mercado financeiro e no setor comercial, em que o portador de títulos de crédito, tais como letras de câmbio, notas promissórias etc., pode levantar fundos em um banco descontando o título antes da data de vencimento. O banco, naturalmente, libera uma quantia menor do que o valor inscrito no título, dito nominal. A diferença entre o valor nominal (N) e o valor líquido (V) pago ao portador do título é o que se denomina desconto (D). O seguinte diagrama ilustra o processo:



Pela sistemática da capitalização simples, o desconto pode ser classificado em duas modalidades: desconto racional simples (também chamado *desconto por dentro*) e desconto comercial simples (também chamado *desconto por fora*). Por outro lado, os bancos fazem uso da sistemática de cálculo efetiva (capitalização exponencial) para conversão da taxa de juros (custo do *funding* acrescido de margem) em taxa de desconto e posterior cálculo das variáveis do desconto. Nessa sistemática, o desconto também pode ser de dois tipos: desconto racional (chamado financeiro) e desconto comercial. É racional (financeiro) quando a taxa de desconto é estimada com base em uma *taxa de juros composta antecipada* e comercial quando é calculada com base a uma *taxa de juros composta postecipada*.

4.1.1 Desconto simples

Pela sistemática de capitalização simples, os valores do desconto são obtidos por meio de cálculos lineares. O desconto é estudado sob duas modalidades: desconto racional simples e desconto comercial simples.

4.1.1.1 Desconto racional simples

Nesta modalidade de desconto também chamada *desconto por dentro*, o valor do desconto é a diferença entre o valor futuro (valor nominal ou de resgate) e o valor atual (valor líquido liberado na data do desconto) calculado a juros simples:

$$D_r = N - V_r = N - \frac{N}{1+i \times n} \Rightarrow D_r = \frac{N \times i \times n}{1+i \times n}$$

'i' representa a taxa de juros simples, 'n' é o prazo a decorrer até o vencimento do título e 'V_r' é o valor líquido liberado na data do desconto. No desconto racional simples o valor do desconto pode ser interpretado como o juro aplicado a um valor futuro ($N \times i \times n$), trazido para valor presente ao dividi-lo por $(1 + i \times n)$. O uso da equação anterior exige observar a regra de proporcionalidade entre as dimensões da taxa de juros e o prazo da operação.

Equivalência entre desconto racional simples e juros simples

Na equação a seguir comprova-se a equivalência entre desconto racional simples e o regime de juros simples:

$$D_r = \frac{N \times i \times n}{1+i \times n} = \frac{P(1+i \times n) \times i \times n}{1+i \times n} = P \times i \times n$$

Dessa maneira, os juros simples calculados sobre o valor presente e o valor do desconto racional simples calculado sobre o valor nominal produzem o mesmo resultado quando calculados para o mesmo prazo e à mesma taxa. Essa modalidade de desconto incorpora os cálculos e conceitos básicos de juros simples, porém não passa de uma aplicação particular de juros simples sobre o valor atual do título. Não apresenta praticamente nenhuma aplicação relevante nas operações bancárias ou comerciais. Assim sendo, muitos autores argumentam que não se justifica a apresentação do desconto racional simples como um critério de cálculo com características específicas. Neste livro, o desconto racional simples é apresentado em virtude de eventuais necessidades do leitor e por razões meramente didáticas de modo que esclareça as diferenças com relação ao desconto comercial simples que será tratado a seguir.

4.1.1.2 Desconto comercial simples

Nesta modalidade, também chamada *desconto por fora*, o valor do desconto é obtido multiplicando-se o valor nominal do título pela taxa de desconto fornecida pelo banco e pelo prazo a decorrer até o vencimento do título:

$$D_c = N \times d \times n$$

'd' representa a taxa de desconto comercial também chamada *taxa por fora*, 'n' é o prazo e 'N' é o valor nominal (valor de resgate, valor futuro ou valor de fase) do título.

Como a taxa de desconto é linear para o prazo da operação, a taxa 'd' mensal pode ser calculada a partir de uma determinada taxa de juros simples 'i' da seguinte forma:

$$d = \left(\frac{i}{h} \right) 30$$

onde 'i' é a taxa de juros simples e 'h' seu período referencial ($h = 30$ para taxa i mensal e $h = 360$ para taxa i anual).

Alternativamente, observando a regra de proporcionalidade entre as dimensões de 'i' e 'n', o valor do desconto comercial pode também ser expresso em função da taxa de juros 'i':

$$D_c = N \times d \times n = N \times \left(\frac{i}{h} \right) 30 \times \left(\frac{n}{30} \right) = N \times i \times \left(\frac{n}{h} \right)$$

Comparando-se a equação do valor do desconto comercial $D_c = N \times i \times \left(\frac{n}{h} \right)$ com a equação

do valor do desconto racional $D_r = P \times i \times n$ conclui-se que o primeiro nada mais é do que o juro simples calculado sobre o valor nominal (N) e o segundo, sobre o valor presente do título (P).

Uma expressão para o valor liberado (valor descontado ou valor atual) pode ser obtida considerando-se que o valor do desconto é sempre igual à diferença entre o valor nominal e o valor liberado pelo título:

$$D_c = N - V_c$$

$$N \times d \times n = N - V_c \quad \Rightarrow \quad V_c = N \times (1 - d \times n)$$

O *desconto bancário* pode ser considerado uma extensão do desconto comercial, basta acrescentar a taxa de serviço bancário 's' que comumente incide sobre o valor nominal. Logo, as expressões para o valor do desconto e para o valor liberado passam a ser as seguintes:

$$D_c = N \times (s + d \times n)$$

$$V_c = N \times (1 - s - d \times n)$$

Considerando que a taxa de desconto é o juro pago sobre o valor nominal do título, podemos expressar a taxa mensal de desconto em função do valor do desconto (D_c) e do valor nominal do título (N):

$$d = \left(\frac{D_c}{N} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right)$$

n = prazo em dias

A modalidade de desconto comercial simples apresenta ampla aplicação nas operações bancárias ou comerciais de curto prazo, porém na prática a taxa de desconto é calculada pelos

bancos usando sistemática exponencial. Logo, fornecida a taxa de desconto, uma empresa pode calcular o valor do desconto multiplicando aquela taxa pelo valor nominal e pelo prazo do título.

4.1.1.3 Considerações entre a taxa 'i' e a taxa 'd'

A taxa de juros 'i' e a taxa de desconto 'd' servem para calcular o rendimento de uma unidade monetária por unidade de tempo em diferentes momentos do horizonte temporal. Enquanto a taxa 'i' é aplicada sobre um valor presente 'V', a taxa 'd' é aplicada sobre um valor futuro 'N', originando um valor de desconto comercial maior que o valor do desconto racional. Quando as taxas são baixas, a diferença entre os descontos racional e comercial não é relevante, porém, quando são altas, a diferença pode ser considerável. Por exemplo, se o valor nominal for de \$10.000 e o prazo de 90 dias, os valores dos descontos nas duas modalidades para taxas de 5% a.a. e 60% a.a. serão:

$$\left| \begin{array}{l} 5\% \text{ a.a.} \\ D_r = \frac{N \times i \times n}{1+i \times n} = \frac{\$10.000 \times 0,05 \times \left(\frac{90}{360} \right)}{1+0,05 \times \left(\frac{90}{360} \right)} = \$123,46 \\ D_c = N \times d \times n = \$10.000 \times 0,05 \times \left(\frac{90}{360} \right) = \$125 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 60\% \text{ a.a.} \\ D_r = \frac{N \times i \times n}{1+i \times n} = \frac{\$10.000 \times 0,60 \times \left(\frac{90}{360} \right)}{1+0,60 \times \left(\frac{90}{360} \right)} = \$1.304,35 \\ D_c = N \times d \times n = \$10.000 \times 0,60 \times \left(\frac{90}{360} \right) = \$1.500 \end{array} \right.$$

Observa-se que, para uma taxa baixa (5% a.a.), a diferença entre os valores dos descontos é relativamente pouca (\$1,54). Entretanto, para uma taxa maior (60% a.a.), a diferença é considerável (\$195,65).

Veja a seguir o significado das diferentes variáveis nas equações de desconto racional e comercial simples:

N = valor nominal do título (valor de resgate ou valor de face do título);

V_c = valor líquido liberado no desconto comercial (valor descontado);

D_c = valor do desconto comercial ou bancário (juros pagos na data do desconto);

s = taxa de serviço bancário;

d = taxa de desconto comercial simples (*taxa por fora*);

i = taxa de juros;

D_r = valor do desconto racional (juros pagos na data do desconto);

V_r = valor líquido liberado no desconto racional (valor descontado);

n = prazo da operação (dias a decorrer até o vencimento do título);

h = período referencial da taxa i (h = 30 para taxa i mensal e h = 360 para taxa i anual).

4.1.1.4 Taxa de desconto efetiva linear

A taxa efetiva de desconto, também chamada custo efetivo do cliente ou rendimento de quem realiza o desconto (o banco), é aquela que é realmente cobrada na operação de desconto. Esta taxa, quando aplicada sobre o valor liberado (valor descontado), gera no período considerado (prazo da operação) um montante igual ao valor nominal do título (isto é, gera juros iguais ao valor do desconto).

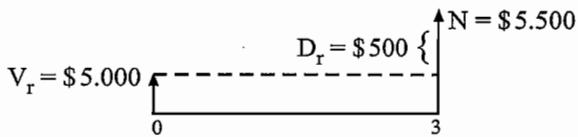
Para melhor entendimento do que vem a ser a taxa efetiva de desconto, consideremos uma duplicata com valor nominal de \$ 5.500 descontada 90 dias antes do vencimento à taxa simples de 40% a.a.

Se a modalidade de desconto for o desconto racional, teremos:

$$D_r = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n} = \frac{\$5.500 \times 0,40 \times \left(\frac{90}{360}\right)}{1 + 0,40 \times \left(\frac{90}{360}\right)} = \$500$$

$$V_r = N - D_r = \$5.500 - \$500 = \$5.000$$

graficamente:



Como em três meses o banco ganha \$ 500 sobre um valor liberado de \$ 5.000, então temos a seguinte taxa efetiva de desconto:

$$d_e = \frac{D_r}{V_r} = \frac{\$500}{\$5.000} = 10\% \text{ a.t. (40\% a.a.)}$$

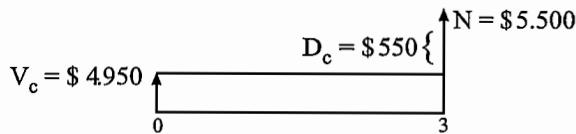
conclui-se que no desconto racional a taxa efetiva de desconto é a própria taxa de desconto fornecida pelo banco ($d_e = i = 40\% \text{ a.a.}$).

Entretanto, se o desconto for comercial, temos:

$$D_c = N \times d \times n = \$5.500 \times 0,40 \times \left(\frac{90}{360}\right) = \$550$$

$$V_c = N - D_c = \$5.500 - \$550 = \$4.950$$

graficamente:



Se aplicarmos o valor liberado (\$4.950) à taxa de 40% a.a., durante o prazo da operação (90 dias), teremos o seguinte montante:

$$\$ 4.950 \times \left[1 + 0,40 \times \left(\frac{90}{360} \right) \right] = \$ 5.445$$

Repare que o montante obtido é menor que o valor nominal do título. Logo, no desconto comercial, a taxa de desconto fornecida pelo banco não é capaz de produzir o valor nominal a partir do valor liberado, sendo necessário, portanto, distinguir entre taxa de desconto fornecida pelo banco (taxa contratada) e taxa de desconto efetiva da operação.

A taxa efetiva pode ser calculada considerando que, em três meses, o banco ganha \$ 550 sobre um valor liberado de \$ 4.950:

$$d_e = \frac{D_c}{V_c} = \frac{\$ 550}{\$ 4.950} = 0,1111 \text{ ao trimestre (44,44% a.a.)}$$

Agora podemos verificar que, se aplicarmos o valor liberado à taxa de desconto efetiva, durante o prazo da operação, obteremos um montante igual ao valor nominal:

$$\begin{aligned} V_c \times (1 + d_e \times n) &= N \\ \$ 4.950 \times [1 + 0,1111 \times 1] &= \$ 5.500 \end{aligned}$$

No desconto comercial, a taxa efetiva de desconto é maior que a taxa de desconto fornecida (44,44% a.a. > 40% a.a.) e o valor liberado é menor que no desconto racional ($\$ 4.950 < \$ 5.000$). Isso ocorre porque no desconto comercial os juros são pagos antecipadamente e, consequentemente, podem ser reaplicados pelo banco, o qual obtém uma rentabilidade maior do que os 40% a.a. Isso explica, em parte, o maior uso do desconto comercial, dado que representa maior lucro ao banco que é, em última análise, quem detém o maior poder de barganha.

Uma expressão para a taxa efetiva linear pode ser obtida se considerarmos que o valor liberado, quando aplicado a essa taxa, durante o prazo da operação, resulta em um montante igual ao valor nominal:

$$\begin{aligned} V_c \times (1 + d_e \times n) &= N \\ N (1 - d \times n) \times (1 + d_e \times n) &= N \quad \Rightarrow \boxed{d_e = \frac{d}{1 - d \times n}} \end{aligned}$$

Alternativamente, considerando que a taxa de desconto efetiva é o juro pago sobre o valor liberado, podemos expressar a taxa efetiva linear em função do valor do desconto e do valor liberado:

Em base mensal:

$$d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right)$$

n = prazo em dias

Em base anual:

$$d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{360}{n} \right)$$

Aplicando as equações aos valores do exemplo:

$$d_e = \frac{d}{1-d \times n} = \frac{0,40}{1 - 0,40 \times \left(\frac{90}{360} \right)} = 0,4444 = 44,44\% \text{ a.a.}$$

$$\text{ou } d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{360}{n} \right) = \left(\frac{\$550}{\$4.950} \right) \times \left(\frac{360}{90} \right) = 44,44\% \text{ a.a.}$$

Veja a seguir o cálculo do valor do desconto racional usando a taxa efetiva de desconto calculada:

$$D_r = \frac{N \times d_e \times n}{1 + d_e \times n} = \frac{\$5.500 \times 0,4444 \times \left(\frac{90}{360} \right)}{1 + 0,4444 \times \left(\frac{90}{360} \right)} = \$550$$

Observa-se que se a taxa efetiva for usada para o cálculo do valor do desconto racional, obtém-se um valor igual ao valor do desconto comercial (\$550). Consequentemente, a taxa efetiva de desconto será aquela que conduz, pelo desconto racional, ao mesmo valor calculado pelo desconto comercial.

No desconto bancário é comum os bancos cobrarem uma taxa de serviço incidente sobre o valor nominal do título, além do encargo proveniente do Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) de responsabilidade do financiado. Podemos incorporar essas taxas ao cálculo da taxa efetiva:

$$V_c \times (1 + d_e \times n) = N$$

$$N (1 - d \times n - s - IOF \times n) \times (1 + d_e \times n) = N \Rightarrow d_e = \left(\frac{d \times n + s + IOF \times n}{1 - d \times n - s - IOF \times n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)$$

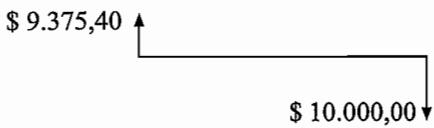
onde: d_e = taxa de desconto efetiva linear; s = taxa de serviço bancário (TSB); IOF = Imposto sobre Operações Financeiras.

No uso das equações apresentadas nas seções anteriores é muito importante observar a regra de proporcionalidade entre as dimensões da taxa de desconto e o prazo da operação.

4.1.1.5 Taxa de desconto efetiva exponencial

O cálculo da taxa efetiva linear não incorpora o real comportamento exponencial dos juros. Foi apresentada na seção anterior por motivos meramente didáticos e em virtude de eventuais necessidades do leitor. De modo que esclareçamos o conceito de taxa efetiva exponencial, admitamos que um título com valor nominal de \$ 100.000 seja descontado em um banco 60 dias (2 meses) antes de seu vencimento a uma taxa de desconto de 2% a.m. e com IOF de 0,0041% a.d. incidente sobre a operação. O banco cobra, ainda, Taxa de Serviço Bancário (TSB) de 2% sobre o valor nominal do título paga no ato da liberação dos recursos:

Valor nominal do título	\$ 10.000,00
Valor do desconto: $\$ 10.000 \times 0,02 \times 2$	- 400,00
IOF: $\$ 10.000 \times 0,000041 \times 60$ dias	- 24,60
TSB: $\$ 10.000 \times 0,02$	- 200,00
Valor líquido liberado	\$ 9.375,40



Custo efetivo da operação:

$$i = (10.000 / 9.375,40) - 1 = 6,6621\% \text{ em 2 meses}$$

$$i_m = (1,066621)^{\frac{1}{2}} - 1 = 3,2774\% \text{ a.m.}$$

$$i_a = (1,066621)^6 - 1 = 47,2520\% \text{ a.a.}$$

Ou seja, a taxa efetiva de desconto da operação é de 3,2774% a.m., maior que os 2% a.m., que é a taxa de desconto contratada.

Podemos obter uma expressão para o cálculo direto da taxa efetiva exponencial considerando que, se essa taxa for aplicada sobre o valor liberado, durante o prazo da operação, resultará em um montante igual ao valor nominal do título:

$$V_c \times (1 + d_e)^{\frac{n}{h}} = N \Rightarrow d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1$$

Com os dados do exemplo:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$ 10.000}{\$ 9.375,40} \right)^{\frac{30}{60}} - 1 = 3,2774\% \text{ a.m.}$$

n é o prazo da operação e h, o período referencial da taxa efetiva (h = 30 para taxa mensal e h = 360 para taxa anual). A taxa de desconto efetiva exponencial tem cálculos mais rigorosos do que a taxa efetiva linear, pois incorpora o real comportamento exponencial dos juros. Conseqüentemente, é a forma mais apropriada de calcular o verdadeiro custo de uma operação.

Exemplos de aplicação

Exemplo 4.1

Uma duplicata com vencimento em 15 de dezembro é descontada por \$ 2.000 em 1º de setembro do mesmo ano a uma taxa simples de 6% a.m. Nas modalidades de desconto comercial e racional simples, calcular o valor de resgate (valor nominal) do título e a taxa de desconto efetiva linear.

Dados: $d = i = 6\%$ a.m., $V_r = V_c = \$ 2.000$, $n = ?$, $N = ?$, $d_e = ?$

a) Desconto comercial simples:

- Prazo da operação

Utilizamos a Tábua para Contagem de Dias entre Duas Datas do ano civil (veja a Seção 1.3 do Capítulo 1):

número de dias da data posterior (15 de dezembro) = + 349

número de dias da data anterior (1º de setembro) = - 244

prazo da operação em dias (n) = 105

- Cálculo do valor de resgate do título

$$V_c = N \times [1 - d \times n]$$

$$\$ 2.000 = N \times \left[1 - 0,06 \times \left(\frac{105}{30} \right) \right] \Rightarrow N = \$ 2.531,65$$

- Taxa de desconto efetiva linear $d_e = \frac{d}{1-d \times n} = \frac{0,06}{1-0,06 \times \left(\frac{105}{30} \right)} = 7,5949\%$ a.m.

$$\text{ou } d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$ 2.531,65 - \$ 2.000}{\$ 2.000} \right) \times \left(\frac{30}{105} \right) = 7,5949\% \text{ a.m.}$$

Verifica-se que, no desconto comercial, a taxa efetiva de desconto é maior que a taxa de desconto fornecida pelo banco ($d_e > d$).

b) Desconto racional simples:

- Cálculo do valor de resgate do título

$$V_r = \frac{N}{1+i \times n}$$

$$\$ 2.000 = \frac{N}{1+0,06 \times \left(\frac{105}{30} \right)} \Rightarrow N = \$ 2.420$$

- Taxa de desconto efetiva linear

$$d_e = \left(\frac{D_r}{V_r} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$ 420}{\$ 2.000} \right) \times \left(\frac{30}{105} \right) = 6\% \text{ a.m.}$$

Verifica-se que, no desconto racional, a taxa efetiva de desconto é a própria taxa de juros ($d_e = i$).

Exemplo 4.2

Uma empresa descontou em um banco um borderô de duplicatas à taxa de desconto de 15% a.m. Considerando uma taxa de serviço bancário de 2%, calcular o valor liberado do borderô segundo as regras do desconto bancário.

Borderô de Duplicatas

Sacado	Valor de Resgate (N)	Prazo (n)	Valor Liberado $V_c = N \times \left[1 - s - d \times \frac{n}{30} \right]$
A	\$ 5.000	10 dias	\$ 5.000 $\left[1 - 0,02 - 0,15 \times \frac{10}{30} \right] = \$ 4.650$
B	\$ 7.000	15 dias	\$ 7.000 $\left[1 - 0,02 - 0,15 \times \frac{15}{30} \right] = \$ 6.335$
C	\$ 4.000	12 dias	\$ 4.000 $\left[1 - 0,02 - 0,15 \times \frac{12}{30} \right] = \$ 3.680$
D	\$ 2.000	20 dias	\$ 2.000 $\left[1 - 0,02 - 0,15 \times \frac{20}{30} \right] = \$ 1.760$
			Valor liberado total: \$ 16.425

Exemplo 4.3

Um banco realiza suas operações de desconto aplicando uma taxa de desconto de 2% a.m., porém exige um saldo médio de 30% do valor da operação a título de reciprocidade bancária. Uma empresa descontou uma nota promissória de \$ 100.000 três meses antes do vencimento. Calcular o valor liberado à empresa e a taxa de desconto efetiva linear, supondo exigência e não-exigência de saldo médio. Suponha, por simplicidade, que não haja remuneração sobre o saldo médio nem taxas de serviços bancários.

Dados: $N = \$ 100.000$, $d = 2\%$ a.m., $n = 90$ dias, $V_c = ?$, $d_e = ?$

a) Sem necessidade de saldo médio:

- Valor liberado

$$V_c = N (1 - d \times n) = \$ 100.000 \times (1 - 0,02 \times 3) = \$ 94.000$$

- Taxa efetiva linear

$$d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$ 100.000 - \$ 94.000}{\$ 94.000} \right) \times \left(\frac{30}{90} \right) = 2,1288\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou } d_e = \frac{d}{1 - d \times n} = \frac{0,02}{1 - 0,02 \times \left(\frac{90}{30} \right)} = 0,021288 = 2,1288\% \text{ a.m.}$$

b) Com necessidade de saldo médio:

- Valor liberado

$$V_c = \$94.000 - \$30.000 = \$64.000$$

O saldo médio exigido é \$30.000 ($0,3 \times \100.000). Na prática, tudo se passa como se o banco, por ocasião da liberação dos recursos, fizesse uma retenção de \$30.000. Esses \$30.000 ficarão parados no banco por três meses. Na liquidação da operação (fim do 3º mês), a empresa precisará desembolsar apenas \$70.000 ($\$100.000 - \30.000), pois o banco já dispõe dos \$30.000 retidos como saldo médio.

- Taxa efetiva linear

$$d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$100.000 - \$94.000}{\$64.000} \right) \times \left(\frac{30}{90} \right) = 3,125\% \text{ a.m.}$$

Nota-se que a exigência de saldo médio encarece a operação, que passa de um custo efetivo de 2,1288% a.m. para 3,125% a.m.

Exemplo 4.4

Um título de \$90.000 é descontado por \$63.000 pelas regras do desconto comercial. Considerando uma taxa de desconto efetiva linear de 6,1224% a.m., determinar a taxa de desconto e o prazo da operação

Dados: $d_e = 6,1224\% \text{ a.m.}$, $V_c = \$63.000$, $N = \$90.000$, $n = ?$, $d = ?$

a) Cálculo da taxa de desconto:

$$D_c = N \times d \times n$$

$$\$27.000 = \$90.000 \times d \times n \Rightarrow d \times n = 0,3$$

substituindo $d \times n = 0,3$ na expressão da taxa efetiva linear e destacando d :

$$d_e = \frac{d}{1 - d \times n}$$

$$0,061224 = \frac{d}{1 - 0,3} \Rightarrow d = 4,2857\% \text{ a.m.}$$

b) Cálculo do prazo da operação:

$$D_c = N \times d \times n$$

$$\$27.000 = \$90.000 \times 0,042857 \times n \Rightarrow n = 7 \text{ meses}$$

Exemplo 4.5

Uma duplicata de \$6.000 foi descontada comercialmente resultando em um crédito de \$5.100 na conta do cliente. Considerando taxa de desconto de 5% a.m., calcular o prazo ao vencimento do título, a taxa de desconto efetiva linear e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Dados: $N = \$6.000$, $V_c = \$5.100$, $d = 5\% \text{ a.m.}$, $h = 30$, $n = ?$, $d_e = ?$

a) Prazo do título:

$$D_c = N \times d \times n$$

$$\$ 6.000 - \$ 5.100 = \$ 6.000 \times 0,05 \times \left(\frac{n}{30} \right) \Rightarrow n = 90 \text{ dias}$$

b) Taxa de desconto efetiva linear:

$$d_e = \frac{d}{1-d \times n} = \frac{0,05}{1-0,05 \times \left(\frac{90}{30} \right)} = 0,0588 = 5,88\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou } d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$ 6.000 - \$ 5.100}{\$ 5.100} \right) \times \left(\frac{30}{90} \right) = 5,88\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$ 6.000}{\$ 5.100} \right)^{\frac{30}{90}} - 1 = 5,5667\% \text{ a.m.}$$

O banco cobra antecipadamente \$ 900 sobre um valor liberado de \$ 5.100 para uma operação com prazo de 90 dias; portanto, a taxa de desconto efetivamente cobrada é de 5,5667% a.m. A taxa de desconto efetiva exponencial é o verdadeiro custo da operação, pois incorpora o real comportamento exponencial dos juros.

Exemplo 4.6

Um título de crédito com valor nominal de \$ 200.000 foi descontado 63 dias antes de seu vencimento à taxa simples de desconto de 13% a.m. Considerando a cobrança de IOF de 1% e uma TSB de 2,5%, calcular o valor do desconto comercial, o valor liberado, a taxa de desconto efetiva linear e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Dados: $N = \$ 200.000$, $n = 63$ dias, $d = 13\% \text{ a.m.}$, $\text{IOF} = 1\%$, $s = 2,5\%$, $h = 30$, $D_c = ?$, $V_c = ?$, $d_e = ?$

a) Valor do desconto (incluindo TSB e IOF):

$$D_c = N \times (s + d \times n + \text{IOF} \times n) = \$ 200.000 \times \left[0,025 + 0,13 \times \left(\frac{63}{30} \right) + 0,01 \times \left(\frac{63}{30} \right) \right] = \$ 63.800$$

b) Valor liberado:

$$V_c = N - D_c = \$ 200.000 - \$ 63.800 = \$ 136.200$$

c) Taxa de desconto efetiva linear:

$$d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$63.800}{\$136.200} \right) \times \left(\frac{30}{63} \right) = 22,31\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou } d_e = \left(\frac{d \times n + s + IOF \times n}{1 - d \times n - s - IOF \times n} \right) \times \left(\frac{1}{n} \right) = \left(\frac{0,13 \times \left(\frac{63}{30} \right) + 0,025 + 0,01 \times \left(\frac{63}{30} \right)}{1 - 0,13 \times \left(\frac{63}{30} \right) - 0,025 - 0,01 \times \left(\frac{63}{30} \right)} \right) \times \left(\frac{1}{\frac{63}{30}} \right) \\ = 22,31\% \text{ a.m.}$$

d) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$200.000}{\$136.200} \right)^{\frac{30}{63}} - 1 = 20,08\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.7

Uma nota promissória com valor de fase de \$ 100.000 teve um valor líquido liberado de \$ 91.600 pelas regras do desconto bancário a uma taxa de desconto de 5% a.m. Considerando-se que foi cobrado IOF de 1% a.m., determinar o prazo da operação e as taxas de desconto efetivas linear e exponencial.

Dados: N = \$ 100.000, V_c = \$ 91.600, d = 5% a.m., IOF = 1% a.m., h = 30, n = ?, d_e = ?

a) Cálculo do prazo da operação:

$$V_c = N \times (1 - d \times n - IOF \times n)$$

$$\$91.600 = \$100.000 \times (1 - 0,05 \times n - 0,01 \times n) \Rightarrow n = 1,4 \text{ mês} = 42 \text{ dias}$$

b) Taxa de desconto efetiva linear:

$$d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$100.000 - \$91.600}{\$91.600} \right) \times \left(\frac{30}{42} \right) = 6,5502\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou } d_e = \left(\frac{d + IOF}{1 - (d + IOF) \times n} \right) = \frac{0,05 + 0,01}{1 - (0,05 + 0,01) \times \left(\frac{42}{30} \right)} = 6,5502\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$100.000}{\$91.600} \right)^{\frac{30}{42}} - 1 = 6,4676\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.8

Uma empresa descontou comercialmente, 45 dias antes de seu vencimento, uma duplicata de \$ 140.000. Considerando um valor líquido liberado de \$ 110.000, calcular a taxa mensal de desconto fornecida pelo banco e a taxa de desconto efetiva linear e exponencial.

Dados: $N = \$ 140.000$, $V_c = \$ 110.000$, $n = 45$ dias, $h = 30$, $d = ?$, $d_e = ?$

a) Taxa mensal de desconto:

$$d = \left(\frac{D_c}{N} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$140.000 - \$110.000}{\$140.000} \right) \times \left(\frac{30}{45} \right) = 14,29\% \text{ a.m.}$$

b) Taxa de desconto efetiva linear:

$$d_e = \left(\frac{D_c}{V_c} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$30.000}{\$110.000} \right) \times \left(\frac{30}{45} \right) = 18,18\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou } d_e = \frac{d}{1-d \times n} = \frac{0,1429}{1 - 0,1429 \times \left(\frac{45}{30} \right)} = 18,18\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$140.000}{\$110.000} \right)^{\frac{30}{45}} - 1 = 17,44\% \text{ a.m.}$$

O banco cobra antecipadamente \$ 30.000 sobre um valor liberado de \$ 110.000 para uma operação de 45 dias; portanto, a taxa efetivamente cobrada é de 17,44% a.m.

4.2 Títulos públicos

Os governos federal, estadual e municipal captam recursos no mercado por meio da emissão de títulos representativos da dívida pública. Essencialmente, os títulos públicos emitidos pelo Tesouro Nacional estão voltados para a execução da política fiscal, antecipando receitas ou financiando déficits fiscais. Os títulos emitidos pelo Banco Central têm por objetivo principal a implementação e execução da política monetária do governo. Diversos títulos federais têm sido utilizados com essa finalidade, tais como: Letra do Tesouro Nacional (LTN), Letra Financeira do Tesouro (LFT) e Nota do Tesouro Nacional (NTN). Entre os títulos emitidos pelo Banco Central, temos: Letra do Banco Central (LBC), Bônus do Banco Central (BBC) e Nota do Banco Central (NBC).

As operações com títulos públicos seguem a mecânica do desconto comercial. Logo, se a taxa de desconto fornecida estiver em base anual e, considerando um ano comercial de 360 dias, o valor da operação (valor de compra das letras) pode ser calculado por meio da seguinte expressão:

$$V_c = N \left[1 - d \times \left(\frac{n}{360} \right) \right] = N \times PU$$

onde: d é a taxa anual de desconto; n é o prazo em dias e N , o valor de face das letras. O fator $\left[1-d \times \left(\frac{n}{360}\right)\right]$ denomina-se 'PU', que significa preço unitário, isto é, o valor líquido comercial de uma unidade monetária ($N = \$1$). Por exemplo, uma letra com um PU = 0,95 significa que o valor de compra da letra será de \$0,95 para cada \$1 de valor nominal. A unidade, que neste caso é igual a \$1, poderia ser \$10, \$100, \$1.000 ou qualquer outro valor. O valor de compra das letras pode ser calculado multiplicando-se o valor nominal das letras pelo seu respectivo PU.

A taxa efetiva linear, ou taxa de rentabilidade efetiva linear da operação, pode ser calculada dividindo-se a taxa de desconto pelo PU das letras:

$$d_e = \frac{d}{\left[1-d \times \left(\frac{n}{360}\right)\right]} = \frac{d}{PU}$$

Taxa efetiva exponencial anualizada:

$$d_e = \left(\frac{1}{PU}\right)^{\frac{360}{n}} - 1$$

No uso das fórmulas é muito importante observar a regra de proporcionalidade entre as dimensões da taxa de desconto e o prazo da operação.

Exemplos de aplicação

Exemplo 4.9

Uma operação com LTN que tem 119 dias a decorrer até o seu vencimento está sendo negociada a uma taxa de desconto de 18,9% a.a. Calcular o PU do título.

Dados: $n = 119$ dias, $d = 18,9\%$ a.a., $PU = ?$

$$PU = \left[1-d \times \left(\frac{n}{360}\right)\right] = \left[1 - 0,189 \times \left(\frac{119}{360}\right)\right] = 0,937525$$

PU = 0,937525 significa que o valor de compra da letra é de \$0,937525 para cada \$1 de valor nominal ou valor de face.

Exemplo 4.10

Uma operação com LTN que tem 39 dias a decorrer até o seu vencimento está sendo negociada a uma rentabilidade efetiva linear de 24% a.a. Calcular a taxa de desconto contratada.

Dados: $n = 39$ dias, $d_e = 24\%$ a.a., $d = ?$

$$d_e = \frac{d}{\left[1 - d \times \left(\frac{n}{360}\right)\right]}$$

$$0,24 = \frac{d}{\left[1 - d \times \left(\frac{39}{360}\right)\right]} \Rightarrow d = 23,39\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 4.11

Um lote de LBC com valor nominal de \$ 3.000.000 e prazo de vencimento de 90 dias é adquirido no leilão do Banco Central. Considerando que a operação foi fechada a uma taxa simples de desconto de 48% a.a., calcular o PU da letra, o valor da operação (preço de compra) e a rentabilidade efetiva linear da operação.

Dados: N = \$ 3.000.000, n = 90 dias, d = 48% a.a., PU = ?, V_c = ?, d_e = ?

a) Cálculo do PU:

$$PU = \left[1 - d \times \left(\frac{n}{360}\right)\right] = \left[1 - 0,48 \times \left(\frac{90}{360}\right)\right] = 0,88000$$

b) Valor da operação:

$$V_c = N \times (PU) = \$ 3.000.000 \times 0,88000 = \$ 2.640.000$$

c) Rentabilidade efetiva linear da operação:

$$d_e = \frac{d}{PU} = \frac{0,48}{0,88000} = 54,55\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 4.12

Considerando que determinado banco deseja uma rentabilidade efetiva linear de 36% a.a. em operações de compra de letras com prazo de 60 dias, determinar o PU sobre o qual deve negociar em termos de desconto comercial.

Dados: d_e = 36% a.a., n = 60 dias, PU = ?

a) Cálculo da taxa de desconto:

A taxa de desconto pode ser calculada a partir da fórmula da rentabilidade efetiva linear:

$$d_e = \frac{d}{\left[1 - d \times \left(\frac{n}{360}\right)\right]}$$

$$0,36 = \frac{d}{\left[1 - d \times \left(\frac{60}{360}\right)\right]} \Rightarrow d = 33,96\% \text{ a.a.}$$

b) Cálculo do PU:

O PU que proporciona a rentabilidade desejada pelo banco pode ser calculado da seguinte forma:

$$\text{PU} = \left[1 - d \times \left(\frac{n}{360} \right) \right] = \left[1 - 0,3396 \times \frac{60}{360} \right] = 0,9434$$

Um PU de 0,9434 significa que, para o banco obter uma rentabilidade efetiva linear de 36% a.a., deve pagar pelas letras um máximo de \$ 94,34 para cada \$ 1 de valor nominal.

Exemplo 4.13

Considerando que determinado banco deseja uma rentabilidade efetiva exponencial de 36% a.a. em operações de compra de LTN com prazo de 60 dias, determinar o fator PU sobre o qual deve negociar em termos de desconto comercial.

Dados: $d_e = 36\%$ a.a., $n = 60$ dias, $\text{PU} = ?$

$$\begin{aligned} d_e &= \left(\frac{1}{\text{PU}} \right)^{\frac{360}{n}} - 1 \\ 0,36 &= \left(\frac{1}{\text{PU}} \right)^{\frac{360}{60}} - 1 \Rightarrow \text{PU} = (1,36)^{-\frac{1}{6}} = 0,95004 \end{aligned}$$

Exemplo 4.14

Em 18/3/1996 a mesa de open de uma determinada corretora recebeu uma consulta para vender parte do seu lote de LTN com vencimento em 17/9/1996. Considerando que o valor da operação deve ser em torno de \$ 4.000.000 e a operação foi fechada com uma taxa de desconto de 18,3% a.a., pede-se: a) efetuar todos os cálculos para a montagem da operação, admitindo-se que o valor nominal das LTNs seja múltiplo de \$ 5.000; b) calcular as rentabilidades linear e exponencial da operação.

Dados: $N = \$ 4.000.000$, $d = 18,3\%$ a.a., $\text{PU} = ?, d_e = ?$

a) Prazo da operação:

Utilizamos a Tábua para Contagem de Dias entre as Duas Datas do ano civil (veja a Seção 1.3 do Capítulo 1):

número de dias da data posterior (17/9/1996) = + 260

número de dias da data anterior (8/9/1996) = - 177

prazo da operação em dias (n) = 183

- Cálculo do PU: $\text{PU} = \left[1 - d \times \left(\frac{n}{360} \right) \right] = \left[1 - 0,183 \times \left(\frac{183}{360} \right) \right] = 0,906975$

• Cálculo do valor nominal do lote de letras

O valor nominal (valor de fase) correspondente a uma aplicação de \$ 4.000.000 é o seguinte:

$$V_c = N \times (\text{PU})$$

$$\$ 4.000.000 = N \times 0,906975 \Rightarrow N = \$ 3.999.759,75$$

b) Valor da operação:

Admitindo-se que o valor das LTNs sejam múltiplos de \$ 5.000, podemos arredondar para \$ 4.410.000 o valor nominal previamente calculado. Logo, o valor da aplicação é:

$$V_c = \$ 4.410.000 \times \$ 0,906975 = \$ 3.999.759,75$$

c) Cálculo das rentabilidades efetivas linear e exponencial da operação:

- Linear: $d_e = \frac{d}{PU} = \frac{0,183}{0,906975} = 20,18\% \text{ a.a.}$

- Exponencial: $d_e = \left(\frac{1}{PU} \right)^{\frac{360}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{0,906975} \right)^{\frac{360}{183}} - 1 = 21,18\% \text{ a.a.}$

- A operação será montada da seguinte forma:

Vencimento: 17/9/1996

Valor nominal: \$ 4.410.000

PU: 0,906975

Valor da operação: \$ 3.999.759,75

Rentabilidade efetiva: 21,18% a.a.

4.3 Desconto composto

Na prática, os bancos fazem uso da sistemática de cálculo efetiva (capitalização exponencial ou composta) para conversão da taxa de juros em taxa de desconto que fornecerão aos clientes que efetuam operações de desconto. Na sistemática exponencial ou regime composto, o desconto pode também ser tratado sob duas modalidades: desconto racional composto (desconto financeiro) e desconto comercial composto. É financeiro quando o valor do desconto é calculado usando-se uma *taxa de juros composta antecipada* e comercial quando o cálculo é realizado usando-se uma *taxa de juros composta posticipada*.

Os recursos (*funding*) para as operações de desconto são, em geral, realizados pelos bancos mediante venda de CDB, que possui taxa de juros anualizada. Assim, a taxa de desconto é formada pelo custo de captação acrescido dos custos operacionais, das despesas administrativas e da margem de lucro.

4.3.1 Desconto racional composto (desconto financeiro)

O desconto racional composto é também conhecido como desconto financeiro. Nesta modalidade de desconto, o valor do desconto é calculado multiplicando-se o valor nominal pela *taxa de juros composta antecipada*.

Valor do desconto racional composto

O valor do desconto é a diferença entre o valor futuro (valor nominal ou de resgate) e o valor atual (valor líquido liberado) calculado a juros compostos:

$$D_f = N - \frac{N}{\frac{(1+i)^h}{(1+i)^n}}$$

$$D_f = N \left[\frac{\frac{n}{(1+i)^h} - 1}{\frac{n}{(1+i)^h}} \right]$$

onde: ‘ D_f ’ é o valor do desconto financeiro; ‘ i ’ é a taxa de juros efetiva usada pelo banco no cálculo dos *fatores de desconto*; ‘ n ’ é o prazo da operação e ‘ h ’ é o período referencial da taxa ‘ i ’ ($h = 30$ para taxa i mensal; $h = 360$ para taxa i anual). O termo entre colchetes denomina-se *taxa de juros composta antecipada*, pois aplica-se sobre o valor nominal do título. No sistema financeiro essa taxa é conhecida como *fator de desconto*, que é calculado pelos bancos para todos os dias do ano a partir da taxa de juros. Assim, o valor do desconto de um título pode ser calculado multiplicando-se seu valor nominal pelo *fator de desconto* correspondente ao período do desconto (dias que faltam ao vencimento).

Valor liberado (valor descontado)

No desconto racional composto, o valor liberado pode ser calculado atualizando-se (à data do desconto) o valor nominal do título mediante a aplicação da taxa de juros para o prazo do desconto:

$$V_f = \frac{N}{\frac{n}{(1+i)^h}}$$

O cálculo anterior é simplesmente o valor atual (na data do desconto) no regime de juros compostos.

Taxa mensal de desconto financeiro composto

Tradicionalmente a taxa de desconto fornecida pelos bancos é mensal e linear para o prazo da operação. Logo, a taxa mensal de desconto fornecida aos clientes é determinada a partir da *taxa de juros composta antecipada ou fator de desconto*:

$$d_f = \left[\frac{\frac{n}{(1+i)^h} - 1}{\frac{n}{(1+i)^h}} \right] \times \left(\frac{30}{n} \right)$$

Ou seja, para calcular a taxa de desconto que será fornecida ao cliente, o banco converte a taxa de juros efetiva para o prazo do desconto, a seguir antecipa essa taxa e, finalmente, transforma a *taxa de juros antecipada* em taxa de desconto ao mês.

Dado que no desconto financeiro composto a taxa de juros utilizada é uma *taxa composta antecipada* e os juros são cobrados também antecipadamente quando o título é descontado, a *taxa efetiva de desconto* é a própria taxa de juros usada pelo banco ($d_e = i$). A seguir verificamos essa afirmação:

$$\begin{aligned} V_f \times (1 + d_e)^{\frac{n}{h}} &= N \\ \left[\frac{N}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] \times (1 + d_e)^{\frac{n}{h}} &= N \Rightarrow (1 + d_e) = (1+i) \\ d_e &= i \end{aligned}$$

Veja a seguir o significado das variáveis nas expressões do desconto racional composto (desconto financeiro).

- N = valor nominal do título
- D_f = valor do desconto financeiro
- n = prazo da operação (dias)
- h = período referencial da taxa i
- d_f = taxa mensal de desconto financeiro
- V_f = valor liberado no desconto financeiro
- i = taxa de juros efetiva utilizada

Exemplos de aplicação

Exemplo 4.15

Uma duplicata de \$ 5.000 sofreu um desconto financeiro de \$ 500. Qual seria o valor do desconto se a duplicata fosse descontada em base ao desconto comercial? Calcular, também, as taxas de desconto efetivas exponenciais em ambas as modalidades de desconto.

Dados: $N = \$ 5.000$, $D_f = \$ 500$, $D_c = ?$, $d_e = ?$

a) Fator de desconto ou taxa composta antecipada:

$$\begin{aligned} D_f &= N \left[\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] \\ \$ 500 &= \$ 5.000 \left[\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] \Rightarrow \left[\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] = 0,10 \end{aligned}$$

- Fator de juros no período da operação

$$\left[\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] = 0,10 \Rightarrow (1+i)^{\frac{n}{h}} = 1,111111$$

- Valor do desconto comercial

$$D_c = N \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] = \$5.000 \times [1,111111 - 1] = \$555,56$$

- b)** Taxa de desconto efetiva no período (desconto comercial):

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right) - 1 = \left(\frac{\$5.000}{\$4.444,45} \right) - 1 = 12,50\% \text{ (no período)}$$

- c)** Taxa de desconto efetiva no período (desconto financeiro):

$$d_e = \left(\frac{N}{V_f} \right) - 1 = \left(\frac{\$5.000}{\$4.500} \right) - 1 = 11,11\% \text{ (no período)}$$

No desconto comercial, a taxa de desconto efetiva é maior que a taxa de desconto contratada. No desconto financeiro, a taxa de desconto efetiva é a própria taxa de juros.

Exemplo 4.16

Um banco utiliza uma taxa de juros de 25% a.a. em operações de desconto com prazo de 60 dias. Pede-se calcular: a) o fator de desconto ou taxa composta antecipada; b) a taxa de juros composta postecipada; c) a taxa mensal de desconto financeiro que será fornecida aos clientes.

Dados: $i = 25\%$ a.a., $n = 60$, $h = 360$, $d_f = ?$

- a)** Fator de desconto ou taxa composta antecipada:

$$\left[\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] = \left[\frac{(1,25)^{\frac{60}{360}} - 1}{(1,25)^{\frac{60}{360}}} \right] = \left[\frac{(1,25)^{\frac{1}{6}} - 1}{(1,25)^{\frac{1}{6}}} \right] = 3,65\% \text{ em 60 dias (1,81% a.m.)}$$

- b)** Taxa de juros composta postecipada:

$$\left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] = \left[(1,25)^{\frac{60}{360}} - 1 \right] = \left[(1,25)^{\frac{1}{6}} - 1 \right] = 3,79\% \text{ em 60 dias (1,8769% a.m.)}$$

- c) Taxa mensal de desconto financeiro fornecida aos clientes:

$$d_f = \left[\frac{\left(1+i\right)^h - 1}{\left(1+i\right)^h} \right] \left(\frac{30}{n} \right) = 0,0365 \times \left(\frac{30}{60} \right) = 1,83\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.17

No exemplo anterior, considerando que a taxa de juros utilizada pelo banco seja uma taxa nominal de 25% a.a. com capitalização mensal, calcular a taxa mensal de desconto que será fornecida pelo banco.

Dados: $j = 25\%$ a.a., $k = 12$, $n = 60$, $h = 60$, $d_f = ?$

- Taxa de juros efetiva anual embutida na operação

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k$$

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{12} \Rightarrow i_a = 0,280732 = 28,0732\% \text{ a.a.}$$

- Taxa mensal de desconto fornecida pelo banco

$$d_f = \left[\frac{\left(1+i\right)^h - 1}{\left(1+i\right)^h} \right] \left(\frac{30}{n} \right) = \left[\frac{\left(1,280731\right)^{\frac{60}{360}} - 1}{\left(1,280731\right)^{\frac{60}{360}}} \right] \times \left(\frac{30}{60} \right) = 0,0403998 \times 0,5 = 2,02\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.18

Um título com valor de resgate (valor nominal) de \$ 10.000 sofreu um desconto financeiro de \$ 440,52. Determinar o prazo da operação de modo que a taxa de juros efetiva embutida na operação seja de 50% a.a.

Dados: $N = \$ 10.000$, $D_f = \$ 440,52$, $i = 50\%$ a.a., $h = 360$, $n = ?$

- Cálculo do prazo da operação

Sabe-se que no desconto financeiro a taxa de desconto efetiva é a própria taxa de juros usada pelo banco ($d_e = i$):

$$d_e = \left(\frac{N}{V_f} \right)^{\frac{h}{n}} - 1$$

$$0,50 = \left(\frac{\$10.000,00}{\$9.559,48} \right)^{\frac{360}{h}} - 1 \Rightarrow 1,50 = \left(1,04608\right)^{\frac{360}{n}}$$

$$\text{Aplicando logaritmos: } \log 1,50 = \left(\frac{360}{n} \right) \times \log 1,004608 \Rightarrow n = \frac{360 \times \log 1,004608}{\log 1,5} = 40 \text{ dias}$$

Exemplo 4.19

Uma nota promissória com valor de resgate de \$ 2.000 está a 45 dias de seu vencimento e pode ser descontada financeiramente em um banco por \$ 1.500. Estimar a taxa mensal de desconto financeiro fornecida pelo banco e a taxa de desconto efetiva (ao mês). Verificar se no prazo da operação o valor liberado aplicado à taxa efetiva resulta no valor de resgate.

Dados: $N = \$2.000$, $V_f = \$1.500$, $n = 45$, $h = 30$, $d_f = ?$, $d_e = ?$

a) Taxa mensal de desconto financeiro:

$$d_f = \left(\frac{D_f}{N} \right) \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{N - V_f}{N} \right) \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$2.000 - \$1.500}{\$2.000} \right) \times \left(\frac{30}{45} \right) = 16,67\% \text{ a.m.}$$

b) Taxa de desconto efetiva:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_f} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$2.000}{\$1.500} \right)^{\frac{30}{45}} - 1 = 21,1414\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou: } d_e = \left(\frac{1}{1 - d_f \times \left(\frac{n}{30} \right)} \right)^{\frac{30}{45}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - 0,1667 \times \left(\frac{45}{30} \right)} \right)^{\frac{30}{45}} - 1 = 21,1414\% \text{ a.m.}$$

c) Verificação:

$$V_f \times (1 + d_e)^{\frac{n}{h}} = N$$

$$\$1.500 \times (1 + 21,1414)^{\frac{45}{30}} = \$2.000$$

Verifica-se que aplicando o valor liberado, à taxa efetiva de desconto, durante o prazo da operação, o montante obtido é igual ao valor nominal. Logo, no desconto financeiro, a taxa de desconto efetiva é a própria taxa de juros usada pelo banco no cálculo dos fatores de desconto ($d_e = i$).

Exemplo 4.20

Uma empresa antecipou em 120 dias o desconto de uma nota promissória de \$ 16.000, tendo um desconto financeiro de \$ 640. Determinar a taxa de juros efetiva (anual) usada na operação e a taxa de desconto efetiva.

Dados: $N = \$16.000$, $D_f = \$640$, $n = 120$, $h = 360$, $i = ?$, $d_e = ?$

a) Cálculo da taxa de juros efetiva (anual) embutida na operação:

$$D_f = N \left[\frac{\frac{n}{(1+i)^h} - 1}{\frac{n}{(1+i)^h}} \right]$$

$$\$640 = \$16.000 \times \left[\frac{\frac{120}{(1+i)^{360}} - 1}{\frac{120}{(1+i)^{360}}} \right] \Rightarrow (1+i)^3 = 1,0416667$$

$$i = (1,0416667)^3 - 1 = 13,03\% \text{ a.a.}$$

b) Taxa de desconto efetiva:

No desconto financeiro a taxa de desconto efetiva é a própria taxa de juros efetiva embutida na operação, isto é, $d_e = i = 13,03\% \text{ a.a.}$

Exemplo 4.21

Uma empresa pretende descontar 45 dias antes do vencimento uma duplicata de \$235.000. O Banco A oferece no desconto da duplicata uma taxa de desconto financeiro de 12% a.m., o Banco B oferece 9,5% a.m. e o Banco C, 10% a.m. Para cada uma das três alternativas de desconto, calcular o valor do desconto financeiro composto, o valor liberado e a taxa de desconto efetiva ao ano. Qual será a melhor alternativa do ponto de vista financeiro?

Dados: $N = \$235.000$, $n = 45$, $h = 360$, $\{d_f = 12\% \text{ a.m.}, d_f = 9,5\% \text{ a.m.}, d_f = 10\% \text{ a.m.}\}$, $D_f = ?, V_f = ?, d_e = ?$

Banco	Valor do Desconto Financeiro $D_f = N \times d_f \times \frac{n}{30}$	Valor Liberado $V_f = N \left[1 - d_f \times \frac{n}{30} \right]$	Taxa Efetiva Anual $d_e = \left(\frac{N}{V_f} \right)^{\frac{h}{n}} - 1$
A	$\$235.000 \times 0,12 \times \frac{45}{30} = \$42.300,00$	$\$235.000 \times \left(1 - 0,12 \times \frac{45}{30} \right) = \$192.700,00$	$\left(\frac{\$235.000}{\$192.700} \right)^{\frac{360}{45}} - 1 = 389\%$
B	$\$235.000 \times 0,095 \times \frac{45}{30} = \$33.487,50$	$\$235.000 \times \left(1 - 0,095 \times \frac{45}{30} \right) = \$201.512,50$	$\left(\frac{\$235.000}{\$201.512,50} \right)^{\frac{360}{45}} - 1 = 242\%$
C	$\$235.000 \times 0,10 \times \frac{45}{30} = \$35.250,00$	$\$235.000 \times \left(1 - 0,10 \times \frac{45}{30} \right) = \$199.750,00$	$\left(\frac{\$235.000}{\$199.750} \right)^{\frac{360}{45}} - 1 = 267\%$

Nesse quadro verifica-se que o Banco B apresenta o maior valor liberado e, consequentemente, a menor taxa de desconto efetiva. Portanto, representa a melhor opção para o desconto da duplicata.

Exemplo 4.22

Um banco capta recursos por meio de CDBs a uma taxa de juros efetiva de 4,81% a.m. Sabe-se que o banco em suas operações de desconto aplica um *spread* de 4% sobre a taxa de captação e cobra uma TSB de 2%. Para uma promissória com valor de resgate de \$35.000 a vencer no prazo de 180 dias, calcular o valor do desconto financeiro, a taxa mensal de desconto financeiro, o valor liberado e a taxa de desconto efetiva da operação.

Dados: $N = \$35.000$, $n = 180$, $i = 4,81\% + 0,04 \times 4,81\% = 5\%$ a.m., $h = 30$, $s = 0,02$, $D_f = ?$, $d_f = ?$, $V_f = ?$, $d_e = ?$

a) Valor do desconto financeiro:

$$D_f = N \left[\frac{\left(1+i\right)^{\frac{n}{h}} - 1}{\left(1+i\right)^{\frac{n}{h}}} \right] + (N \times s) = \$35.000 \times \left[\frac{\left(1,05\right)^{\frac{180}{30}} - 1}{\left(1,05\right)^{\frac{180}{30}}} \right] + (\$35.000 \times 0,02) = \$9.582,46$$

b) Taxa mensal de desconto financeiro (sem inclusão da taxa de serviço bancário):

$$d_f = \left(\frac{D_f - N \times s}{N} \right) \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$9.582,46 - \$35.000 \times 0,02}{\$35.000} \right) \times \left(\frac{30}{180} \right) = 4,2297\% \text{ a.m.}$$

c) Valor liberado:

$$V_f = N - D_f = \$35.000 - \$9.582,46 = \$25.417,54$$

d) Taxa de desconto efetiva:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_f} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$35.000}{\$25.417,54} \right)^{\frac{30}{180}} - 1 = 5,4764\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.23

Uma duplicata com valor de resgate de \$2.300 foi descontada 160 dias antes de seu vencimento pelas regras do desconto financeiro composto. Calcular o valor do desconto financeiro, a taxa mensal de desconto, o valor liberado e a taxa de desconto efetiva nas seguintes hipóteses sobre o tipo de taxa de juros aplicada na operação: a) juros efetivos de 24% a.a.; b) juros nominais de 24% a.a. capitalizados mensalmente.

Dados: $N = \$2.300$, $n = 160$, $i = 24\%$ a.a., $h = 360$, $j = 24\%$ a.a., $k = 12$, $D_f = ?$, $d_f = ?$, $V_f = ?$, $d_e = ?$

a) A juros efetivos de 24% a.a.:

- Valor do desconto financeiro

$$D_f = N \left[\frac{\left(1+i\right)^{\frac{n}{h}} - 1}{\left(1+i\right)^{\frac{n}{h}}} \right] = \$2.300 \times \left[\frac{\left(1,24\right)^{\frac{160}{360}} - 1}{\left(1,24\right)^{\frac{160}{360}}} \right] = \$209,71$$

- Taxa mensal de desconto financeiro

$$d_f = \left[\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] \left(\frac{30}{n} \right) = \left[\frac{(1,24)^{\frac{160}{360}} - 1}{(1,24)^{\frac{160}{360}}} \right] \times \left(\frac{30}{160} \right) = 1,71\% \text{ a.m.}$$

- Valor liberado

$$V_f = N - D_f = \$2.300 - \$209,71 = \$2.090,29$$

- Taxa de desconto efetiva

$$d_e = \left(\frac{N}{V_f} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$2.000}{\$2.090,29} \right)^{\frac{360}{160}} - 1 = 24\% \text{ a.a.}$$

Verifica-se que no desconto racional (financeiro) a taxa de desconto efetiva é a própria taxa de juros efetiva empregada pelo banco ($d_e = i = 24\% \text{ a.a.}$).

- b) A juros nominais de 24% a.a. capitalizados mensalmente:

- Taxa de juros efetiva anual

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{j}{k} \right)^k$$

$$(1+i_a) = \left(1 + \frac{0,24}{12} \right)^{12} \Rightarrow i_a = 0,268242 = 26,8242\% \text{ a.a.}$$

- Valor do desconto financeiro

$$D_f = N \left[\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] = \$2.300 \times \left[\frac{(1,268242)^{\frac{160}{360}} - 1}{(1,268242)^{\frac{160}{360}}} \right] = \$230,53$$

- Taxa mensal de desconto financeiro

$$d_f = \left[\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right] \left(\frac{30}{n} \right) = \left[\frac{(1,268242)^{\frac{160}{360}} - 1}{(1,268242)^{\frac{160}{360}}} \right] \times \left(\frac{30}{160} \right) = 1,8793\% \text{ a.m.}$$

- Valor liberado

$$V_f = N - D_f = \$2.300 - \$230,53 = \$2.069,48$$

$$\text{ou } V_f = \frac{N}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} = \frac{\$2.300}{(1,268242)^{\frac{160}{360}}} = \$2.069,48$$

- Taxa de desconto efetiva

$$d_e = \left(\frac{N}{V_f} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$2.300}{\$2.090,29} \right)^{\frac{360}{160}} - 1 = 26,82\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 4.24

Uma duplicata com valor de resgate de \$2.300 foi descontada pelas regras do desconto financeiro composto tendo um valor liberado de \$2.090,29. Considerando que a taxa de juros efetiva utilizada pelo banco é de 24% a.a., determinar o prazo da operação.

Dados: $N = \$2.300$, $V_f = \$2.090,29$, $i = d_e = 24\% \text{ a.a.}$, $h = 360$, $n = ?$

- Cálculo do prazo da operação

$$\begin{aligned} \left(\frac{N}{V_f} \right)^{\frac{h}{n}} &= 1 + d_e \\ \left(\frac{\$2.300}{\$2.090,29} \right)^{\frac{360}{n}} &= 1,24 \quad \Rightarrow \quad (1,1003258)^{\frac{360}{n}} = 1,24 \end{aligned}$$

Aplicando logaritmos: $\frac{360}{n} \times \log 1,1003258 = \log 1,24 \Rightarrow n = \frac{360 \times \log 1,1003258}{\log 1,24} = 160 \text{ dias}$

Exemplo 4.25

Admitamos que um lote de títulos públicos com valor de resgate de \$278.000 e prazo de 45 dias para o vencimento foi descontado pelas regras do desconto financeiro utilizando-se uma taxa de juros de 22% a.a. Pede-se calcular: a) o PU (preço unitário) dos títulos; b) a taxa mensal de desconto financeiro; c) o valor de compra do lote.

Dados: $i = 22\% \text{ a.a.}$, $N = \$278.000$, $n = 45$, $h = 360$, $PU = ?$, $d_f = ?$, $V_f = ?$

- Cálculo do PU das letras:

Sabe-se que no desconto financeiro a taxa de desconto efetiva é a própria taxa de juros empregada ($d_e = i = 22\% \text{ a.a.}$); portanto, podemos usar a fórmula da taxa efetiva de modo que calculemos o PU das letras:

$$\begin{aligned} d_e &= \left(\frac{1}{PU} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 \\ 0,22 &= \left(\frac{1}{PU} \right)^{\frac{360}{45}} - 1 \quad \Rightarrow \quad PU = \left(\frac{1}{1,22} \right)^{\frac{45}{360}} = 0,97545 \end{aligned}$$

b) Cálculo da taxa mensal de desconto financeiro:

$$\begin{aligned} PU &= 1 - d_f \times \left(\frac{n}{30} \right) \\ 0,97545 &= 1 - d_f \times \left(\frac{45}{30} \right) \Rightarrow d_f = 1,6367\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

c) Valor de compra do lote de letras:

$$V_f = N \times (PU) = \$ 278.000 \times 0,97545 = \$ 271.175$$

$$\text{ou } V_f = \frac{N}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} = \frac{\$ 278.000}{(1,22)^{\frac{45}{360}}} = \$ 271.175$$

Exemplo 4.26

Uma instituição financeira aplica uma taxa mensal de desconto de 7% a.m. em operações de desconto comercial com prazo de 90 dias. Qual taxa deve aplicar em operações de desconto financeiro composto?

Dados: $d_c = 7\% \text{ a.m.}$, $n = 90$, $d_f = ?$

- Cálculo da taxa mensal de desconto financeiro composto

$$\begin{aligned} d_c &= \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \left(\frac{30}{n} \right) \\ 0,07 &= \left[(1+i)^{\frac{90}{360}} - 1 \right] \left(\frac{30}{90} \right) \Rightarrow (1+i)^{\frac{90}{360}} = 1,21 \\ d_f &= \frac{d_c}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} = \frac{0,07}{1,21} = 5,7851\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

Exemplo 4.27

Uma duplicata de \$ 3.000 teve um desconto comercial de \$ 150. Considerando um desconto financeiro e com base em taxas de desconto comercial, pede-se calcular: a) o valor do desconto; b) a taxa de desconto; c) a taxa efetiva de desconto; d) a taxa de juros efetiva embutida.

Dados: $N = \$ 3.000$, $D_c = \$ 150$, $D_f = ?, d = ?, d_e = ?$

a) Cálculo do valor do desconto financeiro composto:

$$D_c = N \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right]$$

$$\$150 = \$3.000 \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \Rightarrow (1+i)^{\frac{n}{h}} = 1,05$$

$$D_f = \frac{D_c}{(1+i)^{n/h}} = \frac{\$150}{1,05} = \$142,86$$

b) Taxa de desconto financeiro:

$$d = \frac{D_f}{N} = \frac{\$142,86}{\$3.000} = 4,7620\% \text{ (no período)}$$

c) Taxa efetiva de desconto:

$$d_e = \left(\frac{1}{1 - \frac{D_f}{N}} \right) - 1 = \left(\frac{1}{1 - \frac{\$142,86}{\$3.000}} \right) - 1 = 5\% \text{ (no período)}$$

d) Taxa de juros efetiva embutida:

$$i = d_e = 5\% \text{ (no período)}$$

Exemplo 4.28

Pelas regras do desconto financeiro composto, determinar o PU de um título público a 46 dias do seu vencimento usando uma taxa de juros efetiva de 25% a.a.

Dados: $i = 28\% \text{ a.a.}$, $h = 360$, $n = 46$ dias, $PU = ?$

$$PU = 1 - [d_f] \left(\frac{n}{30} \right)$$

$$PU = 1 - \left[\left(\frac{(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1}{(1+i)^{\frac{n}{h}}} \right) \left(\frac{30}{n} \right) \right] \times \left(\frac{n}{30} \right) = 1 - \left(\frac{(1,28)^{\frac{46}{360}} - 1}{(1,28)^{\frac{46}{360}}} \right) = 0,96895$$

Exemplo 4.29

Um banco emprestou \$ 1.000 a juros compostos efetivos de 24% a.a. A que taxa mensal de desconto o banco deve efetuar o desconto comercial de um título com valor nominal de \$ 10.000 e com prazo de 60 dias ao vencimento de modo que obtenha o mesmo rendimento efetivo do empréstimo?

Dados: $i = 24\% \text{ a.a.}$, $h = 360$, $n = 60$ dias, $N = \$1.000$, $d_c = ?$

Se o banco emprestar \$1.000 pelo prazo de 60 dias a juros efetivos de 24% a.a. o rendimento será:

$$\text{Juros ganhos} = \text{Montante} - \text{Aplicação}$$

$$= \$1.000 (1,24)^{\frac{n}{h}} - \$1.000$$

$$= \$1.000 (1,24)^{\frac{60}{360}} - \$1.000 = \$36,50$$

Cálculo da taxa mensal de desconto que proporciona o mesmo rendimento efetivo:

$$\left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} = 1 + d_e \Rightarrow \left(\frac{\$10.000}{V_c} \right)^{\frac{360}{60}} = 1,24 \Rightarrow V_c = \$9.647,83$$

$$d_c = \left(\frac{D_c}{N} \right) \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$10.000 - \$9.647,83}{\$10.000} \right) \times \left(\frac{30}{60} \right) = 1,760842\% \text{ a.m.}$$

4.3.2 Desconto comercial composto

No desconto comercial composto os cálculos são realizados com base em uma *taxa de juros composta postecipada*.

Valor do desconto comercial composto

Na sistemática exponencial, o valor do desconto comercial resulta da multiplicação do valor nominal do título pela taxa de juros convertida para o prazo do desconto (*taxa de juros composta postecipada*):

$$D_c = N \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right]$$

onde: ‘i’ é a taxa de juros efetiva usada pelo banco; ‘n’ é o prazo da operação; ‘h’ é o período referencial da taxa ‘i’ (h = 30 para taxa i mensal e h = 360 para taxa i anual). O termo entre colchetes denomina-se *taxa de juros composta postecipada*.

Taxa mensal de desconto comercial composto

Para calcular a taxa de desconto, converte-se a taxa de juros para o prazo do desconto e transforma-se essa taxa de juros em taxa mensal de desconto:

$$d_c = \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \left(\frac{30}{n} \right)$$

Podemos também obter a mesma expressão se considerarmos que a taxa de desconto é o juro pago sobre o valor nominal do título:

$$d_c = \left(\frac{D_c}{N} \right) \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left[\frac{N \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right]}{N} \right] \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{n} \right)$$

Veja a seguir o significado das variáveis nas equações do desconto comercial segundo a sistemática exponencial:

- N = valor de resgate do título
- D_c = valor do desconto comercial
- V_c = valor liberado no desconto comercial
- n = prazo da operação (dias)
- d_c = taxa mensal de desconto comercial
- i = taxa efetiva de juros efetiva utilizada
- h = período referencial da taxa i

O desconto comercial composto não apresenta aplicação relevante nas operações bancárias ou comerciais. Foi tratado unicamente em virtude de eventuais necessidades do leitor.

Exemplos de aplicação

Para mostrar que no cálculo financeiro existem várias maneiras de chegar ao mesmo resultado, muitos dos exemplos a seguir serão resolvidos usando diversas formas alternativas de cálculo. Na resolução dos exercícios foi considerado um ano comercial de 360 dias.

Exemplo 4.30

Uma loja concede 3,6% a.m. de desconto comercial para pagamentos à vista em vendas com 90 dias de prazo. Quanto concederá para pagamentos à vista em vendas com 120 dias de prazo?

Dados: d_c = 3,6% a.m. (para n = 90), d_c = ? (para n = 120), h = 30

- Cálculo da taxa de juros para pagamentos à vista em vendas com 90 dias

$$d_c = \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{n} \right)$$

$$0,036 = \left[(1+i)^{\frac{90}{30}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{90} \right) \Rightarrow (1+i) = 1,0347766$$

- Taxa de desconto em vendas com 120 dias

$$d_c = \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{n} \right) = \left[(1,0347766)^{\frac{120}{30}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{120} \right) = 3,6633\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.31

Em 13 de setembro uma instituição financeira vendeu por \$ 4.000.000 um lote de LTN com valor nominal de \$ 4.200.000 e vencimento em 27 de novembro do mesmo ano. Calcular a rentabilidade efetiva anual exponencial ganha na operação.

Dados: $N = \$ 4.200.000$, $V_c = \$ 4.000.000$, $n = 75$, $h = 360$, $d_e = ?$

- Prazo da operação

Utilizamos a Tábua para Contagem de Dias entre as Duas Datas do ano civil (veja a Seção 1.3 do Capítulo 1):

número de dias da data posterior (27 de novembro) = + 331

número de dias da data anterior (13 de setembro) = - 256

prazo da operação em dias (n) = 75 dias

- Rentabilidade efetiva exponencial da operação

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$ 4.200.000}{\$ 4.000.000} \right)^{\frac{360}{75}} - 1 = 26,39\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 4.32

No desconto comercial de um título com 75 dias de prazo ao vencimento é aplicada uma taxa mensal de desconto de 6% a.m. Calcular a taxa de juros efetiva anual embutida na operação e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Dados: $d_c = 6\%$ a.m., $n = 75$ dias, $h = 360$, $i = ?$

a) Cálculo da taxa de juros efetiva anual:

$$\begin{aligned} d_c &= \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{n} \right) \\ 0,06 &= \left[(1+i)^{\frac{75}{360}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{75} \right) \Rightarrow (1+i) = \left[0,06 \times \left(\frac{75}{30} \right) + 1 \right]^{\frac{360}{75}} \\ i &= (1,15)^{\frac{360}{75}} - 1 = 95,59\% \text{ a.a.} \end{aligned}$$

b) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - d_c \times \left(\frac{n}{30} \right)} \right)^{\frac{360}{75}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - 0,06 \times \left(\frac{75}{30} \right)} \right)^{\frac{360}{75}} - 1 = 118,17\% \text{ a.a.}$$

No desconto comercial, como os juros são cobrados antecipadamente e a taxa de juros utilizada é uma *taxa posticipada*, a taxa de desconto efetiva é maior que a taxa de juros embutida na operação ($d_e > i$).

Exemplo 4.33

Uma promissória com vencimento em 90 dias é descontada pelo desconto comercial. Considerando que a taxa de juros utilizada no cálculo do desconto foi de 48% a.a., calcular a taxa mensal de desconto e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Dados: $i = 48\%$ a.a., $h = 360$, $n = 90$ dias, $d_c = ?$, $d_e = ?$

a) Taxa mensal de desconto comercial:

$$d_c = \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \left(\frac{30}{n} \right) = \left[(1,48)^{\frac{90}{360}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{90} \right) = 0,034325 = 3,4325\% \text{ a.m.}$$

b) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{1}{1 - d_c \times \left(\frac{n}{30} \right)} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - 0,034325 \times \frac{90}{30}} \right)^{\frac{360}{90}} - 1 = 54,45\% \text{ a.a.}$$

taxa efetiva mensal: $(1,5445)^{\frac{1}{12}} - 1 = 3,6888\% \text{ a.m.}$

Como era esperado, por se tratar de desconto comercial, verifica-se que a taxa de desconto efetiva é maior que a taxa de desconto fornecida pelo banco ($d_e = 3,6888\% \text{ a.m.} > (d_c = 3,4325\% \text{ a.m.})$).

Exemplo 4.34

Uma empresa recebeu uma nota promissória de \$ 20.000 com vencimento em 120 dias. Contudo, necessitando do dinheiro, procura descontá-la em um banco que, aplicando desconto comercial, propõe liberar \$ 16.000. Calcular a taxa de juros efetiva mensal exponencial usada pelo banco no cálculo do desconto, a taxa mensal de desconto e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Dados: $N = \$ 20.000$, $V_c = \$ 16.000$, $n = 120$, $h = 30$, $i = ?$, $d_c = ?$, $d_e = ?$

a) Cálculo da taxa de juros mensal embutida na operação:

$$D_c = N \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right]$$

$$\$ 4.000 = \$ 20.000 \left[(1+i)^{\frac{120}{30}} - 1 \right] \Rightarrow i = \left[1 + \left(\frac{4.000}{20.000} \right) \right]^{\frac{1}{4}} - 1 = 4,6635\% \text{ a.m.}$$

b) Taxa mensal de desconto comercial:

$$d_c = \left(\frac{D_c}{N} \right) \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$4.000}{\$20.000} \right) \times \left(\frac{30}{120} \right) = 5\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou } d_c = \left[\left(1+i \right)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \left(\frac{30}{n} \right) = \left[\left(1,046635 \right)^{\frac{120}{30}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{120} \right) = 5\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$20.000}{\$16.000} \right)^{\frac{30}{120}} - 1 = 5,7371\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou } d_e = \left(\frac{1}{1 - d_c \times \left(\frac{n}{30} \right)} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - 0,05 \times \left(\frac{120}{30} \right)} \right)^{\frac{30}{120}} - 1 = 5,7371\% \text{ a.m.}$$

Neste exemplo foram calculadas três taxas: d_c representa a taxa de desconto comercial contratada, d_e representa a taxa de desconto efetivamente paga e i , a taxa de juros embutida na operação:

$$(d_e = 5,7371\% \text{ a.m.}) > (d_c = 5,0000\% \text{ a.m.}) > (i = 4,6635\% \text{ a.m.})$$

Verifica-se que, no desconto comercial, a taxa de desconto efetiva é maior que a taxa de desconto contratada e, maior também, que a taxa de juros embutida na operação. Se o desconto fosse financeiro, a taxa efetiva de desconto seria a própria taxa de juros embutida ($d_e = i$).

Exemplo 4.35

Um banco aplica uma taxa mensal de desconto de 6% a.m. para operações de desconto bancário com prazo de 60 dias. Considerando que adicionalmente à taxa de desconto está sendo cobrado 1% a.m. de IOF, calcular a taxa de desconto efetiva (ao mês) exponencial.

Dados: $n = 60$ dias, $d_c = 6\% \text{ a.m.}$, $\text{IOF} = 1\% \text{ a.m.}$, $h = 30$, $d_e = ?$

Aplicar o valor liberado, à taxa de desconto efetiva, durante o prazo da operação resulta no valor nominal. Assim se d_e é a taxa efetiva mensal temos:

$$V_c (1 + d_e)^{\frac{n}{h}} = N$$

$$N \left(1 - d_c \times \frac{n}{30} - \text{IOF} \times \frac{n}{30} \right) (1 + d_e)^{\frac{n}{h}} = N$$

destacando a taxa efetiva mensal:

$$d_e = \left(\frac{1}{1 - (d_c + IOF) \times \left(\frac{n}{30} \right)} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - (0,06 + 0,01) \times \left(\frac{30}{30} \right)} \right)^{\frac{30}{60}} - 1 = 7,8328 \% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.36

Calcular o valor do desconto comercial, o valor liberado, a taxa mensal de desconto comercial e a taxa de desconto efetiva (ao ano), cobradas no desconto de uma duplicata com valor nominal de \$35.000 e prazo de 180 dias, sendo que o banco utiliza uma taxa de juros de 5% a.m. e cobra TSB de 2% sobre o valor nominal.

Dados: N = \$35.000, n = 180 dias, i = 5% a.m., h = 30, s = 2%, D_c = ?, d_c = ?, V_c = ?, d_e = ?

a) Valor do desconto comercial:

$$D_c = N \left[\left(1 + i \right)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] + (N \times s) = \$35.000 \times \left[\left(1,05 \right)^{\frac{180}{30}} - 1 \right] + (\$35.000 \times 0,02) = \$12.603,35$$

b) Valor liberado:

$$V_c = N - D_c = \$35.000 - \$12.603,35 = \$22.396,65$$

c) Taxa mensal de desconto comercial contratada (não inclui a TSB):

$$d_c = \left(\frac{D_c - N \times s}{N} \right) \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$12.603,35 - \$35.000 \times 0,02}{\$35.000} \right) \times \left(\frac{30}{180} \right) = 0,056683 = 5,6683 \% \text{ a.m.}$$

d) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$35.000,00}{\$22.396,65} \right)^{\frac{30}{180}} - 1 = 7,72 \% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.37

Um banco pretende uma rentabilidade efetiva exponencial de 36% a.a. em operações de desconto comercial com prazo de 180 dias. Se o banco costuma cobrar uma TSB de 1,5% sobre o valor nominal do título, qual deve ser a taxa mensal de desconto a ser aplicada?

Dados: d_e = 36% a.a., h = 360, n = 180, s = 1,5%, d_c = ?

$$d_e = \left(\frac{1}{1 - d_c \times \left(\frac{n}{30} \right) - s} \right)^{\frac{h}{n}} - 1$$

$$0,36 = \left(\frac{1}{1 - d_c \times \left(\frac{180}{30} \right) - 0,015} \right)^{\frac{360}{180}} - 1 \Rightarrow d_c = 2,1251\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.38

Na compra de um bem no valor de \$4.000, o cliente pode obter um desconto comercial de \$615 se antecipar o pagamento em 50 dias. Calcular a taxa de juros mensal utilizada no cálculo do desconto, a taxa mensal de desconto comercial e a taxa de desconto efetiva (ao mês) exponencial da operação.

Dados: $N = \$4.000$, $D_c = \$615$, $n = 50$ dias, $h = 30$, $i = ?$, $d_c = ?$, $d_e = ?$

a) Taxa de juros ao mês utilizada no cálculo do desconto:

$$D_c = N \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right]$$

$$\$615 = \$4.000 \times \left[(1+i)^{\frac{50}{30}} - 1 \right] \Rightarrow i = 8,96\% \text{ a.m.}$$

b) Taxa mensal de desconto comercial:

$$d_c = \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \left(\frac{30}{n} \right) = \left[(1,0896)^{\frac{50}{30}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{50} \right) = 0,092250 = 9,2250\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{1}{1 - d_c \times \left(\frac{n}{30} \right)} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - 0,09225 \times \left(\frac{50}{30} \right)} \right)^{\frac{30}{50}} - 1 = 10,54\% \text{ a.m.}$$

$$\text{ou } d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$4.000}{\$3.385} \right)^{\frac{30}{50}} - 1 = 10,54\% \text{ a.m.}$$

No desconto comercial verifica-se que: $(d_e = 10,54\% \text{ a.m.}) > (d_c = 9,23\% \text{ a.m.}) > (i = 8,96\% \text{ a.m.})$.

Exemplo 4.39

Um título com valor nominal de \$ 2.000 foi descontado comercialmente utilizando-se uma taxa de juros de 28% a.a. Considerando que o valor do desconto comercial foi de \$ 55,62, determinar o prazo da operação, a taxa mensal de desconto e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Dados: $N = \$2.000$, $D_c = \$55,62$, $i = 28\%$ a.a., $h = 360$, $n = ?$, $d_c = ?$, $d_e = ?$

a) Cálculo do prazo:

$$D_c = N \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right]$$

$$\$55,62 = \$2.000 \times \left[(1,28)^{\frac{n}{360}} - 1 \right] \Rightarrow (1,28)^{\frac{n}{360}} = \left(\frac{\$55,62}{\$2.000} + 1 \right)$$

$$(1,28)^{\frac{n}{360}} = 1,02781$$

Aplicando logaritmos:

$$\left(\frac{n}{360} \right) \times \log 1,28 = \log 1,02781 \Rightarrow n = \left(\frac{\log 1,02781}{\log 1,28} \right) \times 360 = 40 \text{ dias}$$

b) Taxa mensal de desconto comercial:

$$d_c = \left[(1+i)^{\frac{n}{h}} - 1 \right] \left(\frac{30}{n} \right) = \left[(1,28)^{\frac{40}{360}} - 1 \right] \times \left(\frac{30}{40} \right) = 0,0208564 = 2,086\% \text{ a.m.}$$

c) Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$2.000,00}{\$1.944,38} \right)^{\frac{360}{40}} - 1 \approx 28,8943\% \text{ a.a.}$$

$$\text{ou } d_e = \left(\frac{1}{1 - d_c \times \left(\frac{n}{30} \right)} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - 0,0208564 \times \left(\frac{40}{30} \right)} \right)^{\frac{360}{40}} - 1 \approx 28,8943\% \text{ a.a.}$$

$$\text{taxa efetiva mensal: } (1 + 0,288943)^{\frac{1}{12}} - 1 = 2,1377\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.40

Um banco emprestou \$ 1.000 a juros compostos efetivos de 24% a.a. A que taxa mensal de desconto comercial o banco deve descontar um título com valor nominal de \$ 1.500 e com prazo de 60 dias ao vencimento de modo que obtenha o mesmo rendimento efetivo do empréstimo?

Dados: $i = 24\%$ a.a., $h = 360$, $n = 60$ dias, $N = \$1.500$, $d_c = ?$

Se o banco emprestar \$1.000 pelo prazo de 60 dias a juros efetivos de 24% a.a. o rendimento será:

$$\begin{aligned} \text{juros ganhos} &= \text{montante} - \text{aplicação} \\ &= \$1.000 (1,24)^{\frac{n}{h}} - \$1.000 \\ &= \$1.000 (1,24)^{\frac{60}{360}} - \$1.000 = \$36,50 \end{aligned}$$

Como o valor do desconto é igual aos juros ganhos pelo empréstimo, a taxa mensal de desconto é:

$$d_c = \left(\frac{D_c}{N} \right) \left(\frac{30}{n} \right) = \left(\frac{\$1.500 - \frac{\$1.500}{(1,24)^{\frac{1}{6}}}}{\$1.500} \right) \times \left(\frac{30}{60} \right) = 1,760842\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.41

Determinar a taxa de desconto contratada para que uma operação de desconto comercial de um título com valor nominal de \$10.000 e prazo de 90 dias ao vencimento proporcione ao banco um rendimento igual ao obtido emprestando um capital de \$10.000 pelo mesmo prazo a juros efetivos de 48% a.a.

Dados: $N = \$10.000$, $i = 48\%$ a.a., $h = 360$, $n = 90$, $d_c = ?$

a) Cálculo do rendimento emprestando o capital:

Emprestando o dinheiro o banco ganha os juros respectivos:

$$\begin{aligned} \text{juros ganhos} &= \text{montante} - \text{aplicação} \\ &= \$10.000 \times (1,48)^{\frac{90}{360}} - \$10.000 = \$1.029,74 \end{aligned}$$

b) Cálculo do prazo da operação:

Podemos destacar a taxa de desconto contratada se considerarmos que o valor do desconto comercial deve ser igual aos juros ganhos pelo empréstimo:

$$D_c = \$1.029,74$$

$$N \times d_c \times n = \$1.029,74$$

$$\begin{aligned} \$10.000 \times d_c \times \frac{90}{30} &= \$1.029,74 \\ d_c &= \frac{\$1.029,74}{\$30.000} = 3,432467\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

Exemplo 4.42

Um lote de LBC com valor de resgate (valor nominal) de \$3.000.000 e vencimento para 90 dias foi negociado a uma taxa de desconto de 48% a.a. Calcular o PU das letras, o valor da operação (valor de compra) e a rentabilidade efetiva exponencial da operação.

Dados: $N = \$3.000.000$, $n = 90$ dias, $d = 48\%$ a.a., $h = 360$, $PU = ?$, $V_c = ?$, $d_e = ?$

a) Cálculo do PU: $PU = \left[1 - d \times \left(\frac{n}{h} \right) \right] = \left[1 - 0,48 \times \left(\frac{90}{360} \right) \right] = 0,88000$

b) Valor da operação: $V_c = N \times PU = \$3.000.000 \times 0,88000 = \$2.640.000$

c) Rentabilidade efetiva exponencial da operação:

$$d_e = \left(\frac{1}{PU} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{0,88000} \right)^{\frac{360}{90}} - 1 = 66,7513\% \text{ a.a.}$$

ou $d_e = \left(\frac{N}{V_c} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{\$3.000.000}{\$2.640.000} \right)^{\frac{360}{90}} - 1 = 66,7513\% \text{ a.a.}$

Exemplo 4.43

Em 20 de abril foi comprado um lote de LTN com vencimento em 20 de julho do mesmo ano. Considerando que a operação foi fechada à taxa de desconto de 36% a.a., calcular o PU e a rentabilidade efetiva exponencial da operação.

Dados: $d = 36\%$ a.a., $h = 360$, $d_e = ?$

- Prazo da operação

Usamos a Tábua para Contagem dos Dias entre as Duas Datas do ano civil (veja a Seção 1.3 do Capítulo 1):

número de dias da data posterior (20 de julho) = + 201

número de dias da data anterior (20 de abril) = - 110

número de dias (n) = 91

a) Cálculo do PU: $PU = \left[1 - d \times \left(\frac{n}{h} \right) \right] = \left[1 - 0,36 \times \left(\frac{91}{360} \right) \right] = 0,9090$

b) Rentabilidade efetiva da operação:

$$d_e = \left(\frac{1}{PU} \right)^{\frac{h}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{0,9090} \right)^{\frac{360}{91}} - 1 = 45,86\% \text{ a.a.}$$

4.4 Factoring

O *factoring* é voltado à prestação de serviços de pequenas e médias empresas, como, por exemplo, à gestão de caixa e estoques, controle de contas a pagar e a receber, negociações com fornecedores etc. As empresas de *factoring* adquirem em forma definitiva os direitos creditórios resultantes das atividades mercantis a prazo, assumindo todo o risco inerente ao crédito concedido pela empresa vendedora. Na *prática*, as operações de *factoring* são efetuadas no âmbito das pequenas e médias empresas para capital de giro, assemelhando-se ao desconto de duplicatas. Segundo a legislação brasileira, o *factoring* não é caracterizado como operação financeira, não estando sujeito à incidência de IOF e demais encargos das operações bancárias de empréstimo. Em contrapartida, é tributado pelo ISS sobre serviços prestados. O valor de aquisição dos títulos de crédito é apurado mediante a aplicação de um fator que inclui todos os custos incorridos pela empresa de *factoring*: despesas operacionais, impostos, custos de oportunidade do capital investido e margem de lucro esperada.

Exemplo 4.44

Admitamos que uma duplicata de \$ 100.000 com vencimento a um mês será negociada com uma empresa de *factoring* que aplica os seguintes parâmetros:

- Custo de oportunidade do capital (taxa efetiva): 3% a.m.
- Impostos (PIS, CPMF etc.): 1%
- Despesas fixas: 0,5%
- Despesas bancárias: 0,2%
- Margem de lucro desejada: 1,5%

- a) Cálculos pelo critério de juros por fora (comercial):

- Cálculo da taxa de desconto

$$d_e = \frac{d}{1-d \times n} \Rightarrow d = \frac{d_e}{1+d_e \times n} = \frac{0,03}{1+0,03 \times 1} = 0,029126$$

- Cálculo do fator do *factoring*

Taxa de desconto:	2,9126%
Despesas fixas:	0,5%
Despesas bancárias	0,2%
Margem de lucro:	1,5%
Fator antes dos impostos:	5,1126%
Fator após impostos:	$\frac{5,1126}{(1 - 0,01)} = 5,1642\% \text{ a.m.}$

Preço de compra = valor nominal $(1 - \text{fator após impostos} \times n)$

Preço de compra = \$ 100.000 $\times (1 - 0,051642 \times 1) = \$ 94.835,76$

- Custo efetivo da operação

$$\$94.835,76 = \frac{\$100.000}{(1+i_m)} \Rightarrow i_m = \left(\frac{\$100.000}{\$94.835,76} \right) - 1 = 5,4455\% \text{ a.m.}$$

- b) Cálculos pelo critério de juros por dentro (racional):

Preço de compra = valor nominal ÷ (1 + fator após impostos)

Preço de compra = \$100.000 ÷ (1 + 0,051642) = \$95.089,40

- Custo efetivo da operação

$$\$95.089,40 = \frac{\$100.000}{(1+i_m)} \Rightarrow i_m = \left(\frac{\$100.000}{\$95.089,40} \right) - 1 = 5,1642\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.45

Uma duplicata de \$100.000 com vencimento a 60 dias foi negociada comercialmente com uma empresa de *factoring*. Considerando uma taxa efetiva *exponencial* da operação de 10% a.m., calcular o valor pago liberado pela duplicata.

Dados: $d_e = 10\% \text{ a.m.}$, $h = 30$, $N = \$100.000$, $n = 60$ dias, $V_c = ?$

- a) Cálculo pelo critério de juros por fora (comercial):

$$d_e = \left[\frac{N}{V_c} \right]^{\frac{h}{n}} - 1 = \left[\frac{N}{N \left(1 - d \times \left(\frac{n}{30} \right) \right)} \right]^{\frac{h}{n}} - 1$$

$$d_e = \left[\frac{1}{1 - d \times \left(\frac{n}{30} \right)} \right]^{\frac{h}{n}} - 1$$

$$0,10 = \left[\frac{1}{1 - d \times \left(\frac{60}{30} \right)} \right]^{\frac{30}{60}} - 1 \Rightarrow d = 8,6777\% \text{ a.m.}$$

- Preço de compra

$$V_c = N - N \times d \times \left(\frac{n}{30} \right) = \$100.000 - \$100.000 \times 0,086777 \times \left(\frac{60}{30} \right) = \$82.664,63$$

b) Cálculo pelo critério de juros por dentro (racional):

$$V = \frac{N}{1+d \times n} = \frac{\$100.000}{1+0,086777 \times \left(\frac{60}{30}\right)} = \$85.211,25$$

4.5 Hot money

Hot money são operações de curtíssimo prazo com a finalidade de atender às necessidades imediatas de caixa das empresas. Este tipo de operação tem como referencial a taxa CDI, acrescida de um *spread* cobrado pela instituição financeira, IOF, PIS e Cofins. Os contratos de *hot money* são geralmente garantidos por nota promissória.

Exemplo 4.46

Uma operação de *hot money* por \$ 1.000.000 foi contratada por quatro dias úteis. As taxas over para cada dia são, respectivamente: 2,14%; 2,08%; 2,04%; 2,00%. O banco cobra um *spread* de 0,05% e o IOF é de 0,004% ao dia pago antecipadamente. Montar um quadro com os valores da operação e calcular seu custo efetivo.

O seguinte quadro mostra os valores envolvidos na operação de *hot money* e a sua evolução ao longo dos quatro dias.

Empréstimo contratado	\$ 1.000.000			
IOF	-160 (a)			
Valor liberado	\$ 999.840			
		1º dia	2º dia	3º dia
Saldo devedor ao início do dia	\$ 1.000.000	\$ 1.001.213	\$ 1.002.408	\$ 1.003.591
Juros + spread	1.213 (b)	1.195 (c)	1.183 (d)	1.171 (e)
Saldo devedor ao fim do dia	\$ 1.001.213	\$ 1.002.408	\$ 1.003.591	\$ 1.004.762

(a) $\$1.000.000 \times (0,00004 \times 4)$; (b) $\$1.000.000 \times \left(\frac{0,0214}{30} + 0,0005\right)$;

(c) $\$1.001.213 \times \left(\frac{0,0208}{30} + 0,0005\right)$; (d) $\$1.002.408 \times \left(\frac{0,0204}{30} + 0,0005\right)$;

(e) $\$1.003.591 \times \left(\frac{0,02}{30} + 0,0005\right)$.

- Custo efetivo da operação

$$\$999.840 = \frac{\$1.004.762}{(1+i_d)^4} \Rightarrow i_d = \left(\frac{\$1.004.762}{\$999.840} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,1228\% \text{ a.d.}$$

$$i_m = (1+i_d)^{30} - 1 = (1,001228)^{30} - 1 = 3,75\% \text{ a.m.}$$

4.6 Commercial papers

Commercial papers são títulos emitidos pelas sociedades por ações (S.A.) com a finalidade de captar capital de giro. São negociados no mercado por um valor descontado e recomprados pela empresa emitente pelo seu valor de fase (valor nominal). É um importante instrumento de captação de recursos para capital de giro, fora do sistema bancário, para as empresas de capital aberto. Podemos citar algumas características destes títulos:

- Não podem ser emitidos por instituições financeiras, sociedades corretoras e distribuidoras de valores mobiliários, sociedades de arrendamento mercantil (empresas de leasing).
- Podem ser transferidos de titularidade mediante endosso em preto.
- Não costumam oferecer maiores garantias de liquidação, sendo entendidos como uma promessa de pagamento vinculada ao desempenho financeiro do emitente do título. O risco da aplicação é de inteira responsabilidade do investidor.
- Na data de vencimento, o *commercial paper* deve ser resgatado pela empresa emissora. O resgate implica extinção do título, sendo vedada a sua manutenção em tesouraria.
- O prazo do papel não poderá ser inferior a 30 dias, nem superior a 180 dias, contados da data de emissão.
- Somente poderão emitir novos *commercial papers* as empresas autorizadas que possuam registro atualizado na Comissão de Valores Mobiliários (CVM) e que estejam em dia com as emissões anteriores.
- Os encargos pagos na colocação de *commercial paper* são geralmente um pouco inferiores àqueles cobrados por alternativas similares do financiamento a curto prazo, inclusive empréstimos bancários.
- Os juros são pagos aos investidores na forma de taxa de desconto, ou seja, o título apresenta um valor de fase definido para o momento de seu resgate, sendo negociado no mercado por meio de deságio (desconto comercial).

Exemplo 4.47

Uma empresa pretende captar capital de giro por meio de uma operação de lançamento de *commercial papers* no valor de \$ 10.000.000. O prazo é de 60 dias e a taxa de desconto oferecida é 2% no bimestre. Considerando que o custo de emissão representa 1% do valor de captação, determinar o custo efetivo da operação.

Valor da emissão	\$ 10.000.000
desconto ($0,02 \times 10.000.000$)	\$ 200.000
Valor descontado	\$ 9.800.000
custos de emissão ($0,01 \times 10.000.000$)	\$ 100.000
Valor liberado à empresa	\$ 9.700.000

- Custo efetivo da operação

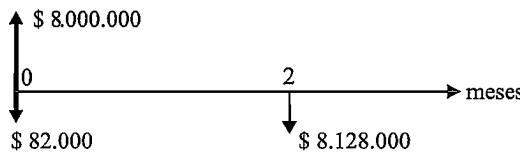
$$\$9.700.000 = \frac{\$10.000.000}{(1+i_m)^2} \Rightarrow i_m = \left(\frac{\$10.000.000}{\$9.700.000} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,5346\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 4.48

Uma empresa de capital aberto tem a necessidade de levantar \$ 8.000.000 para capital de giro nos próximos 60 dias. Ela pretende captar esse capital por meio da emissão de *commercial papers* nas seguintes condições:

- Valor: \$ 8.000.000
- Prazo: 60 dias
- Taxa de registro na CVM: 0,4%
- Despesas diversas com publicações e distribuição: \$ 50.000
- Custo de oportunidade para o investidor (comprador) do *commercial paper*: CDB com rendimento líquido de 1,5% a.m.

Para viabilizar a captação, a empresa deve oferecer uma remuneração (ao comprador) acima do custo de oportunidade, suponhamos 1,6% a.m. Veja no diagrama a seguir o fluxo da emissão.



- Custo efetivo da emissão

$$d_e = \left(\frac{N}{V_f} \right)^{\frac{30}{n}} - 1 = \left(\frac{\$8.128.000}{\$8.000.000 - \$82.000} \right)^{\frac{30}{60}} - 1 = 1,3174\% \text{ a.m.}$$

4.7 Export note

O *export note* é o título representativo de uma operação de cessão de créditos de exportação, que são lastreados em negociações de vendas a importadores estrangeiros. É negociado por meio de um desconto, incorrendo o investidor em IR na fonte. Empresas com passivos em moeda estrangeira podem fazer *hedge cambial* adquirindo *export notes* de modo que se protejam contra as oscilações no câmbio.

4.8 Conta garantida

As contas garantidas podem ser vistas como uma espécie de cheque especial para pessoas jurídicas. Normalmente é uma conta vinculada à conta da empresa. À medida que o saldo da conta corrente se torna devedor, a conta garantida vai suprindo de forma automática. Alguns bancos exigem aviso prévio para transferências de recursos da conta garantida para a conta corrente, dado que os recursos devem ficar disponíveis em *stand by* para atender às necessidades

da empresa. Muitas vezes os bancos exigem garantias para abertura de conta garantida e os saques são tributados pelo IOF.

4.9 Exercícios propostos

Desconto simples: racional e comercial

Atenção: Na resolução dos exercícios considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias.

1. Uma duplicata de \$ 180.000 é descontada quatro meses antes de seu vencimento. Considerando uma taxa simples de 60% ao semestre, calcular o valor do desconto e o valor liberado nas modalidades de desconto racional e desconto comercial.
2. Considerando que um banco aplica uma taxa simples de desconto de 15% a.m. e libera \$ 18.900 no desconto comercial de um título com vencimento para três meses, calcular o valor de resgate e a taxa de desconto efetiva linear.
3. Calcular o valor liberado de um título com valor nominal de \$ 120.000 e com vencimento para 180 dias descontado comercialmente a uma taxa simples de desconto de 40% a.a.
4. Calcular a taxa de desconto efetiva linear para uma operação de desconto comercial de um título de \$ 135.000, descontado por \$ 120.000 quatro meses antes de seu vencimento.
5. A diferença entre o valor do desconto comercial e o valor do desconto racional simples é de \$ 50.000. Considerando que o prazo de antecipação é de oito meses e que a taxa simples é de 30% a.a., calcular o valor de resgate do título.
6. Descontado racionalmente três meses antes de seu vencimento a uma taxa simples de 20% a.a., um título sofreu um desconto de \$ 15.000. Caso o título fosse descontado comercialmente, calcular o valor do desconto.
7. Um lote de LTN com valor de resgate de \$ 4.800.000 é adquirido por \$ 4.000.000. Considerando um prazo de vencimento de 120 dias, calcular a taxa simples de desconto (ao ano) e a rentabilidade efetiva linear da operação.
8. Um banco deseja uma rentabilidade efetiva linear de 180% a.a. em operações de compra de LBC. Considerando que o lote de letras tem vencimento para 90 dias, determinar o PU sobre o qual deve negociar em termos de desconto comercial e calcular a taxa simples de desconto que deverá ser exigida.
9. Uma duplicata de \$ 880.000 foi descontada comercialmente oito meses antes do vencimento. Considerando uma taxa de desconto efetiva linear da operação de 145% a.a., calcular o valor liberado pelo banco.
10. Uma promissória de \$ 450 foi descontada comercialmente tendo um desconto de \$ 54. Considerando uma taxa simples de desconto de 6% a.m., calcular o prazo da operação.
11. Um título de \$ 13.000 que vence em 120 dias foi descontado comercialmente por \$ 11.400. Calcular a taxa simples de desconto (ao ano) e a taxa de desconto efetiva linear.
12. Um título de \$ 240.000 foi descontado 43 dias antes do vencimento pelo desconto comercial simples aplicando-se uma determinada taxa de desconto. Considerando uma taxa de desconto efetiva linear da operação de 6% a.m., calcular o valor liberado.

13. Um banco cobra 2% sobre o valor nominal de TSB. Considerando uma taxa simples de desconto aplicada de 27% a.a. e os prazos da operação de um mês, três meses e seis meses, calcular as taxas de desconto efetivas lineares.
14. Uma duplicata de \$ 72.000 com vencimento para 5 meses foi descontada comercialmente a uma taxa simples de desconto de 2% a.m. Considerando que foi paga uma taxa de serviço bancário de 2,5% sobre o valor nominal do título, calcular o valor líquido liberado pelo banco e a taxa de desconto efetiva linear da operação.
15. A diferença entre os valores liberados (valores descontados) nas modalidades de desconto racional e comercial de um título é de \$ 1.232,14. Considerando que o prazo do título é de 44 dias e seu valor nominal (valor de resgate), de \$ 100.000, calcular a taxa simples e os valores dos descontos nas duas modalidades.
16. Duas letras, uma de \$ 10.000 e outra de \$ 8.000, foram descontadas pelo desconto comercial simples aplicando-se uma taxa simples de desconto de 36% a.a. Considerando que o valor do desconto total é de \$ 4.400 e o prazo da segunda letra excede em 10 dias o prazo da primeira, determinar os prazos e as taxas de desconto efetivas lineares das letras.
17. Duas letras pagáveis, respectivamente, em 150 e 120 dias, foram descontadas comercialmente a uma taxa simples de desconto de 5% a.m., e a soma dos valores dos descontos foi de \$ 53.000. Determinar os valores nominais dos títulos sabendo-se que, se essa operação fosse feita 20 dias mais tarde, a taxa simples de desconto seria de 8% a.m. e a soma dos valores dos descontos seria de \$ 72.000.
18. Dois títulos com prazos, respectivamente, de 60 e 90 dias foram descontados comercialmente à taxa simples de desconto de 6% a.m., produzindo os mesmos valores liberados para ambos os títulos. Considerando que a diferença entre o valor nominal (valor de resgate) do primeiro e o valor do desconto do segundo é de \$ 166.454,55, calcular os valores nominais dos títulos.
19. Dois títulos vencíveis, respectivamente, em 33 e 66 dias foram descontados comercialmente; o primeiro à taxa simples de desconto de 40% a.a. e o segundo à taxa simples de 38% a.a., totalizando um desconto de \$ 1.760. Considerando que o valor nominal do primeiro é a metade do valor nominal do segundo, calcular os valores nominais dos dois títulos.
20. Uma duplicata de \$ 20.000 foi descontada comercialmente 120 dias antes do vencimento. Considerando que o valor líquido liberado foi de \$ 18.000 e sabendo-se que foi cobrada uma comissão de 2% sobre o valor nominal da duplicata, calcular a taxa mensal de desconto e a taxa de desconto efetiva linear da operação.
21. Uma duplicata de \$ 55.900 descontada racionalmente 60 dias antes do vencimento teve um desconto de \$ 989. Qual seria o valor do desconto se a duplicata fosse descontada comercialmente?
22. Um título de \$ 500.000 foi descontado 40 dias antes de seu vencimento. Considerando que a diferença entre os valores líquidos liberados nas modalidades de desconto racional e desconto comercial é de \$ 799,31, calcular os valores dos descontos em ambas as modalidades. Qual a taxa mensal de desconto?
23. Duas letras pagáveis, respectivamente, em 186 dias e 90 dias foram descontadas comercialmente a uma taxa mensal de desconto de 5% a.m., e a soma dos valores dos descontos totalizou \$ 1.070. Se essa operação fosse feita dez dias mais tarde, a taxa mensal

de desconto seria de 6% a.m. e a soma dos descontos totalizaria \$1.184. Calcular os valores nominais dos títulos.

24. O possuidor de um título de \$20.000 com vencimento para três meses tem duas possibilidades: vendê-lo por \$19.500 a um particular ou descontá-lo comercialmente em um banco que aplica uma taxa mensal de desconto de 1% a.m. Determinar qual transação é mais vantajosa.
25. Dois títulos, o primeiro com vencimento para 60 dias e o segundo para 90 dias, foram descontados racionalmente à taxa simples de 6% a.m. Considerando que os dois tiveram o mesmo valor liberado e que a diferença entre o valor nominal do primeiro e o valor do desconto do segundo é de \$4.160,91, calcular os valores nominais dos títulos.
26. Dois títulos foram descontados comercialmente 60 dias antes do vencimento à taxa mensal de desconto de 4% a.m., totalizando um desconto de \$2.000. Considerando que o valor de resgate do segundo é o dobro do valor de resgate do primeiro, calcular os valores de resgate dos títulos.
27. A soma dos descontos comerciais e dos valores líquidos liberados de duas promissórias totalizaram, respectivamente, \$6.300 e \$143.700. O valor de resgate da segunda promissória é o dobro do valor de resgate da primeira e vence 30 dias depois. Considerando uma taxa mensal de desconto de 2,1% a.m., determinar os valores de resgate e os prazos dos títulos.
28. Duas letras com prazos, respectivamente, de 40 e 120 dias, foram descontadas comercialmente à taxa mensal de desconto de 6% a.m., e a soma dos valores dos descontos totalizou \$24.800. Se a operação fosse feita dez dias mais tarde, teria sido aplicada uma taxa mensal de desconto de 5% a.m., e a soma dos valores dos descontos comerciais totalizaria \$18.500. Determinar os valores nominais das letras.
29. Duas letras vencíveis, respectivamente, em 90 e 45 dias foram descontadas racionalmente a uma taxa simples de 2% a.m., e a soma dos valores dos descontos foi de \$300. Calcular o valor total liberado pelas duas letras, sabendo-se que, se essa operação se realizasse 30 dias mais tarde, a soma dos valores dos descontos teria sido de \$180.
30. Uma nota promissória de \$5.000 foi descontada racionalmente 60 dias antes do vencimento à taxa simples de 3% a.m. Calcular o valor líquido recebido pelo possuidor do título.
31. Uma loja concedeu um desconto comercial para pagamento à vista e recebeu \$3.600 por uma venda no valor de \$4.000. Caso o desconto fosse racional, quanto teria recebido a loja?
32. Uma loja concede 3,43% a.m. de desconto comercial para pagamento à vista em vendas com prazo de 90 dias. Considerando que a loja resolvesse aplicar desconto racional, determinar a taxa mensal de desconto que deveria ser praticada de modo que a loja obtivesse o mesmo resultado financeiro em ambas as modalidades de desconto.
33. Um título de \$50.000 teve um desconto comercial de \$4.000. Considerando uma taxa de desconto efetiva linear de 10,87% a.m., determinar o prazo da operação.

Desconto composto: racional (financeiro) e comercial

34. Calcular o valor do desconto, o valor liberado, a taxa mensal de desconto e a taxa de desconto efetiva exponencial (ao ano) para uma duplicata com valor de resgate de \$50.000, descontada comercialmente 65 dias antes do vencimento. O banco utiliza uma taxa de juros efetiva de 45% a.a. e cobra uma taxa de serviços bancários (TSB) de 3,5% sobre o valor nominal.

35. Uma promissória de \$22.000 teve um desconto comercial de \$1.205,84. Considerando uma taxa de juros embutida na operação de 48% a.a., calcular o prazo da operação, a taxa mensal de desconto e a taxa de desconto efetiva exponencial.
36. Um banco emprestou \$100.000 por 40 dias a juros efetivos compostos de 26% a.a. Considerando que o banco desconte comercialmente uma promissória com valor nominal de \$50.022,36 a uma taxa de desconto de 4% a.m., determinar o prazo do desconto de modo que as duas operações produzam o mesmo rendimento.
37. Duas letras, uma de \$15.000 e outra de \$8.400, foram descontadas pela modalidade de desconto comercial usando-se uma taxa de juros de 28% a.a., sendo o valor do desconto total igual a \$863,61. Considerando que o vencimento da segunda ocorre 20 dias antes do vencimento da primeira, determinar os prazos e as taxas mensais de desconto das letras.
38. Um banco pode emprestar \$25.000 a juros efetivos de 42% a.a. ou empregar esse capital em operações de desconto comercial com prazo de 90 dias. Qual deveria ser a taxa mensal de desconto aplicada a uma duplicata com valor nominal de \$20.000 de modo que o banco tenha um rendimento efetivo igual ao obtido no empréstimo?
39. Um título com \$400.000 de valor nominal foi descontado 60 dias antes do vencimento. Considerando uma diferença entre os valores dos descontos nas modalidades comercial e financeiro de \$369,38, calcular a taxa de juros ao ano embutida na operação e a taxa mensal de desconto comercial.
40. Duas letras, uma de \$15.000 e outra de \$8.000, foram descontadas pela modalidade de desconto financeiro aplicando-se uma taxa de juros de 36% a.a. Considerando que a soma dos valores dos descontos totalizou \$1.074,30 e o vencimento da segunda ocorre 20 dias antes do vencimento da primeira, determinar os prazos das letras.
41. Um título com valor nominal de \$240.000 foi descontado comercialmente 60 dias antes do vencimento a uma taxa mensal de desconto de 4% a.m. Calcular o valor líquido liberado ao seu portador e a taxa de desconto efetiva exponencial.
42. Uma empresa descontou comercialmente 100 dias antes do vencimento uma duplicata de \$20.000. Considerando que o valor líquido liberado foi de \$19.000, calcular a taxa mensal de desconto e a taxa de desconto efetiva exponencial.
43. A diferença entre os valores dos descontos comercial e financeiro de um título descontado 5 meses antes do vencimento é de \$153,90. Na modalidade de desconto comercial, calcular o valor nominal e a taxa efetiva exponencial de desconto, considerando que o banco utilizou uma taxa de juros efetiva de 60% a.a. no cálculo da taxa de desconto.
44. Calcular o valor nominal de uma nota promissória descontada comercialmente 100 dias antes do vencimento de modo que seu valor liberado seja igual à soma dos valores liberados por três duplicatas com valores nominais, respectivamente, de \$100, \$500 e \$700 descontadas pelo mesmo prazo e taxa de desconto da nota promissória. Considere que o banco utiliza uma taxa de juros efetiva de 25,44% em operações de desconto comercial.
45. Um investidor aplicou \$8.891,40 pelo prazo de 210 dias em CDBs a juros efetivos de 60% a.a. Se após certo tempo vende o CDB por \$10.000, quanto tempo antes do vencimento a transação foi realizada considerando a modalidade de desconto financeiro?
46. Um título de \$10.000 teve um desconto financeiro de \$148,43. Considerando uma taxa de juros efetiva utilizada pelo banco de 40% a.a., determinar o prazo da operação.

47. O quociente entre o valor nominal e o valor liberado por um título descontado financeiramente 90 dias antes do vencimento é 1,0573713. Calcular a taxa de juros efetiva anual utilizada pelo banco.
48. Um título com valor nominal de \$ 2.000 foi descontado comercialmente. Considerando que a taxa de desconto efetiva exponencial foi de 3% ao mês e que a antecipação foi de 2 meses, calcular a taxa mensal de desconto e o valor do desconto.
49. Um título com valor nominal de \$ 15.000 foi descontado comercialmente com 3 meses de antecedência. Considerando que a instituição financeira utilizou uma taxa de juros de 32,6260% a.a., calcular quanto recebeu o possuidor do título e determinar a taxa de desconto efetiva exponencial da operação.
50. Com base na taxa mensal de desconto comercial de 6% a.m., calcular a taxa de juros efetiva anualizada embutida em operações de 120 dias.
51. Determinar o prazo de uma operação de desconto comercial em que um título de \$ 1.500 teve um desconto de \$ 80,95. A taxa de juros efetiva utilizada pelo banco é de 46% a.a.

4.10 Respostas dos exercícios propostos

1. $D_r = \$ 51.428,57$; $D_c = \$ 72.000$
 $V_r = \$ 128.571,43$; $V_c = \$ 108.000$

2. $N = \$ 34.363,63$; $d_e = 27,27\%$ a.m.

3. \$ 96.000

4. $d_e = 3,13\%$ a.m.

5. $N = \$ 1.500.000$

6. $D_c = \$ 15.750$

7. $d = 50\%$ a.a.; $d_e = 60\%$ a.a.

8. $PU = 0,68966$; $d = 124,14\%$ a.a.

9. $V_c = \$ 447.457,63$

10. 2 meses

11. $d = 36,92\%$ a.a.; $d_e = 42,11\%$ a.a.

12. $V_c = \$ 220.994,48$

13. a) 53,26% a.a.; b) 38,36% a.a.
c) 36,69% a.a.

14. $V_c = \$ 63.000$; $d_e = 40,2211\%$ a.a.

15. $d = 8\%$ a.m.; $D_r = \$ 10.501,19$
 $D_c = \$ 11.733,33$

16. $n_1 = 240$ dias; $n_2 = 250$ dias;
 $d_{e1} = 47,37\%$ a.a.; $d_{e2} = 48\%$ a.a.

17. $N_1 = \$ 100.000$; $N_2 = \$ 140.000$

18. $N_1 = \$ 200.000$; $N_2 = \$ 186.363,64$

19. $N_1 = \$ 10.000$; $N_2 = \$ 20.000$

20. $d = 2\%$ a.m.; $d_e = 2,78\%$ a.m.

21. $D_c = \$ 1.006,81$

22. $D_r = \$ 19.595,68$; $D_c = \$ 20.394,99$;
 $d = 3,0593\%$ a.m.

23. \$ 2.000; \$ 3.000

24. A 1^a possibilidade
[\$ 500 < (D_c = \\$ 600)]

25. $N_1 = \$ 4.957,68$; $N_2 = \$ 5.223,27$

26. \$ 8.333,33; \$ 16.666,67

27. $N_1 = \$ 50.000$; $N_2 = \$ 100.000$;
 $n_1 = 40$ dias; $n_2 = 70$ dias

28. \$ 40.000; \$ 90.000

29. \$ 6.170,27

30. \$ 4.716,98

31. \$ 3.636,36

32. 3,8234% a.m.

33. 24 dias

34. $D_c = 5.219,47$; $V_c = \$ 44.780,53$;
 $d_c = 4,8180\%$ a.m.; $d_e = 84,1560\%$ a.a.

35. $n = 49$; $d_c = 3,3558\%$ a.m.;
 $d_e = 51,3080\%$ a.a. (3,5115% a.m.)

36. $n \equiv 39$ dias

37. $n_1 = 60$ dias; $n_2 = 40$ dias;
 $d_{c1} = 2,1\%$ a.m.; $d_{c2} = 2,0856\%$ a.m.

38. $d_c = 2,7977\%$ a.m.

39. $i_a = 20\%$ a.a.; $d_c = 1,5427\%$ a.m.

40. $n_1 = 63$ dias; $n_2 = 43$ dias

41. $V_c = \$220.800$; $d_e = 64,9199\%$ a.a.

42. $d_c = 1,5\%$ a.m.; $d_e = 20,2804\%$ a.a.

43. $N = \$4.000,10$; $d_e = 79,50\%$ a.a.

44. $N = \$1.300$

45. 120 dias

46. 16 dias

47. $i_a = 25\%$ a.a.

48. $d_c = 2,8702\%$ a.m.; $D_c = \$114,81$

49. $V_c = \$13.902,88$; $d_e = 35,50\%$ a.a.

50. $i_a = 90,66\%$ a.a.

51. 50 dias

SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES

CAPÍTULO

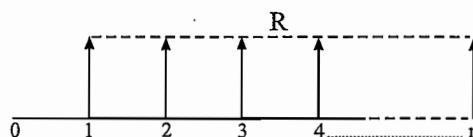
5

- Antecipadas, postecipadas e diferidas
- Cálculo das prestações do principal e do montante
- Taxa de juros em séries uniformes e mistas

As rendas certas ou também chamadas séries periódicas uniformes podem ser divididas em séries postecipadas, séries antecipadas e séries diferidas. As séries *postecipadas* são aquelas em que os pagamentos ocorrem no fim de cada período e não na origem, por exemplo, pagamentos de fatura de cartão de crédito. Nas séries *antecipadas*, os pagamentos são feitos no início de cada período respectivo, por exemplo, financiamentos com pagamento à vista. Nas séries *diferidas*, o período de carência constitui-se em um prazo que separa o início da operação do período de pagamento da primeira parcela, por exemplo, promoções do tipo “compre hoje e comece a pagar daqui a x dias”. Nas séries diferidas, quando o primeiro pagamento ocorre no início do primeiro período após o término da carência, chama-se série diferida antecipada; se for no final, chama-se série diferida postecipada.

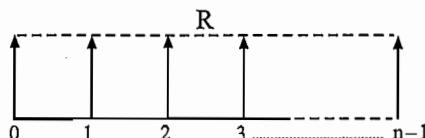
- Séries Uniformes Postecipadas

Na série postecipada, os pagamentos ocorrem no final de cada período:



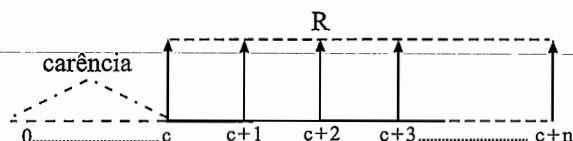
- Séries Uniformes Antecipadas

Na série antecipada, os pagamentos ocorrem no final de cada período:

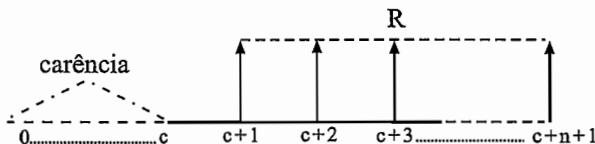


- Séries Uniformes Diferidas

Série diferida antecipada



Série diferida postecipada



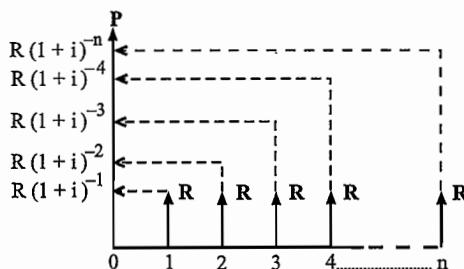
De acordo com a linha didática adotada neste livro, evitaremos neste capítulo o desenvolvimento desnecessário de equações de cálculo específicas para cada tipo de série uniforme. As equações das séries postecipadas, conjuntamente com o princípio de equivalência de capitais, nos permitirão resolver as diferentes situações relacionadas a séries uniformes. Ou seja, na resolução dos exemplos, preferimos explorar mais o lado intuitivo do que a simples utilização de equações de cálculo. Todos os casos particulares que ocorrem neste tópico da matemática financeira serão tratados por meio de exemplos ilustrativos.

5.1 Valor presente de séries periódicas uniformes

O valor presente representa a soma das parcelas atualizadas para a data inicial do fluxo (data 0), considerando a mesma taxa de juros. Quando a série é uniforme e postecipada (termos vencidos), o valor presente corresponde à soma dos valores atuais dos termos da série. O diagrama de fluxo a seguir mostra o processo de desconto:

Valor presente dos termos da série:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n} = R \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n} \right]$$



O somatório entre colchetes representa a soma dos termos de uma progressão geométrica finita. Utilizando a fórmula conhecida da soma das progressões geométricas, podemos desenvolver a seguinte expressão para o valor presente de uma série uniforme com n termos postecipados capitalizados à taxa efetiva i:

$$P = R \left[\frac{a_1 - a_n \times q}{1-q} \right]$$

onde: a_1 é o primeiro termo da série $= (1 + i)^{-1}$; a_n é o enésimo termo da série $= (1 + i)^{-n}$; q é a razão da série $= (1 + i)^{-1}$.

Substituindo as respectivas expressões, temos as seguintes fórmulas para o cálculo do principal e das prestações:

$$P = R \left[\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \times (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}} \right] \Rightarrow P = R \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] = R \times a_{\overline{n}|i\%}$$

$$R = \frac{P}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]} = \frac{P}{a_{\overline{n}|i\%}}$$

As fórmulas acima permitem calcular o valor presente (P) de séries uniformes postecipadas e o valor unitário dos termos da série (R). A expressão matemática entre colchetes é conhecida como fator de *valor presente de séries uniformes*. Internacionalmente, a expressão recebe o símbolo $a_{\overline{n}|i\%}$ onde 'n' representa o número de termos da série e 'i' a sua taxa de capitalização.

Exemplos de aplicação

Séries antecipadas e postecipadas

Exemplo 5.1

Um bem cujo preço à vista é de \$4.000 será pago em oito prestações mensais iguais pagas ao fim de cada mês. Considerando que o juro composto cobrado é de 5% a.m., calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$4.000$, $i = 5\%$ a.m., $n = 8$, $R = ?$

- Cálculo das prestações

$$R = \frac{P}{a_{\overline{8}|5\%}} = \frac{\$4.000}{\left[\frac{(1,05)^8 - 1}{(1,05)^8 \times 0,05} \right]} = \frac{\$4.000}{6,46321} = \$618,89$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
4.000 (CHS) (PV)
5 (i)
8 (n)
(PMT) → 618,89

apaga a memória financeira
entra com o principal com sinal negativo
entra com a taxa de juros efetiva
entra com o número de prestações
calcula o valor da prestação postecipada

O fator $a_{\overline{8}|5\%} = 6,46321$ pode ser calculado com auxílio de uma calculadora que possua a função

X^y ou observado nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro. Na HP-12C, PV é o principal

ou valor presente, que significa o valor que eu tenho na data 0; FV é o valor futuro, que será igual ao valor que terei no fim do fluxo, após juros, entradas e saídas; PMT é a prestação paga ou recebida. Na HP a diferença entre entradas e saídas será simbolizada pelo sinal negativo e positivo, conforme convenção do usuário. Se o principal (PV) entrasse com sinal positivo, as prestações (PMT) seriam calculadas com sinal negativo, ou vice-versa.

Exemplo 5.2

Calcular o fator de valor presente de séries uniformes para $n = 18$ e $i = 5\%$

$$a_{18|5\%} = \left[\frac{(1,05)^{18} - 1}{(1,05)^{18} \times 0,05} \right] = 11,68968690$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
1 (CHS) (PMT)	entra com a prestação unitária negativa
5 (i)	entra com a taxa de juros efetiva
18 (n)	entra com o número de termos da série uniforme
(PV) → 11,68968690	calcula o fator

Exemplo 5.3

No Exemplo 5.1, considerando que no ato da compra foi paga uma entrada de 20% sobre o valor à vista, calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$4.000$, $i = 5\%$ a.m., $n = 8$, entrada (E) = \$800 (20% de \$4.000), $R = ?$

As prestações são calculadas sobre o financiamento efetivo (valor à vista menos a entrada)

$$R = \frac{P - E}{a_{8|5\%}} = \frac{\$4.000 - \$800}{\left[\frac{(1,05)^8 - 1}{(1,05)^8 \times 0,05} \right]} = \frac{\$3.200}{6,46321} = \$495,11$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
3200 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
5 (i)	entra com a taxa de juros efetiva
8 (n)	entra com o número de prestações
(PMT) → 495,11	calcula o valor da prestação

Atenção: O principal (PV) entrou com sinal positivo para obtermos prestações (PMT) com sinal positivo.

Exemplo 5.4

No Exemplo 5.1, considerando que no ato da compra foi paga uma entrada de 20% juntamente com a primeira prestação (prestações antecipadas), calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$4.000$, $i = 5\%$ a.m., $n = 8$, entrada (E) = $R + \$800$, $R = ?$

As prestações são calculadas com base no financiamento efetivo (valor à vista menos a entrada e menos a primeira prestação, pagas no ato da compra):

$$R = \frac{\text{financiamento efetivo}}{a_{n-1|i\%}}$$

$$R = \frac{P - E - R}{a_{7|5\%}}$$

$$R = \frac{\$4.000 - \$800 - R}{\left[\frac{(1,05)^8 - 1}{(1,05)^7 \times 0,05} \right]}$$

$$R = \frac{\$3.200 - R}{5,78637} \Rightarrow R = \$471,53$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)

3200 (CHS) (PV)

5 (i)

8 (n)

(g) (BEG) (PMT) → 471,53

apaga a memória financeira
entra com o principal com sinal negativo
entra com a taxa de juros efetiva
entra com o número de prestações
calcula o valor da prestações *antecipada*

Observação: Neste caso, as prestações são antecipadas (pagas no início de cada mês), portanto, a calculadora financeira deve ser colocada no *modo antecipado* pressionando-se as teclas (g) (BEG). Quando esse modo está acionado, no visor da máquina aparece o termo 'BEGIN'. Para desativá-lo e voltar ao modo posticipado, basta pressionar as teclas (g) (END).

Exemplo 5.5

Uma pessoa pode abater \$7.500 se entregar seu carro usado na compra de um veículo novo, cujo valor à vista é de \$18.500. O saldo será pago por meio de uma determinada entrada, mais 18 prestações mensais posticipadas de \$350. Considerando que foram aplicados juros nominais de 72% a.a. capitalizados mensalmente, calcular o valor da entrada.

Dados: P = \$18.500, j = 72% a.a., k = 12, n = 18, R = \$350, entrada (E) = ?

- Taxa de juros efetiva mensal

$$(1+i_m) = \left(1 + \frac{0,72}{12}\right) \Rightarrow i_m = 6\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo das prestações

As prestações são calculadas sobre o financiamento efetivo (valor à vista menos o valor do carro usado menos a entrada):

$$R = \frac{\text{financiamento efetivo}}{a_{18|6\%}}$$

$$\$350 = \frac{\$18.500 - \$7.500 - E}{\left[\frac{(1,06)^{18} - 1}{(1,06)^{18} \times 0,06} \right]}$$

$$\$350 = \frac{\$11.000 - E}{10,82760} \Rightarrow E = \$7.210,34$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
350 (g) (END) (PMT)	entra com a prestação <i>postecipada</i>
72 (g) (12 ÷)	entra com a taxa de juros nominal capitalizada mensalmente
18 (n)	entra com o número de prestações
(PV) 11.000 (+) → 7.210,34	calcula o principal, e ao resultado é somado \$ 11.000

Observação: Dado que no exemplo anterior a calculadora foi colocada no modo antecipado pressionando-se as teclas (g) (BEG), neste exemplo foi necessário voltar ao modo postecipado pressionando-se as teclas (g) (END).

Exemplo 5.6

A juros nominais de 36% a.a. capitalizados mensalmente, determinar o tempo necessário para liquidar um financiamento de \$ 842,36 por meio de prestações mensais postecipadas de \$ 120.

Dados: $j = 36\%$ a.a., $k = 12$, $R = \$ 120$, $P = \$ 842,36$, $n = ?$

- Taxa de juros efetiva mensal

$$(1+i_m) = \left(1 + \frac{0,36}{12}\right) \Rightarrow i_m = 3\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo do número de períodos

$$P = R \times a_{\overline{n}|3\%}$$

$$\$842,36 = \$120 \times \left[\frac{(1,03)^n - 1}{(1,03)^n \times 0,03} \right] \Rightarrow (1,03)^n = 1,266770081$$

Aplicando logaritmos: $n \times \log 1,03 = \log 1,266770081$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 1,266770081}{\log 1,03} = 8 \text{ meses}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
842,36 (PV)	entra com o principal
3 (i)	entra com a taxa de juros efetiva
120 (CHS) (PMT)	entra com as prestações com sinal negativo
(n) → 8	calcula o número de prestações

Exemplo 5.7

Um equipamento cujo valor à vista é de \$ 5.000 é comprado em 26 de maio pagando-se uma entrada de \$ 2.000 e prestações de \$ 1.000 a cada 30 dias. Em que data será pago totalmente o equipamento considerando que o banco financiador cobra uma taxa efetiva de 5% a.a.?

$$P = R \times a_{\bar{n}|5\%} \Rightarrow \$3.000 = \$1.000 \times \left[\frac{(1,05)^n - 1}{(1,05)^n \times 0,05} \right] \Rightarrow (1,05)^n = 1,176470588$$

Aplicando logaritmos: $n = \frac{\log 1,176470588}{\log 1,05} = 3,3309773$ meses $\times 30 = 99,9293$ dias

A máquina estará totalmente paga em 100 dias por meio de 3 pagamentos de \$ 1.000 a cada 30 dias e um pagamento residual (q) de \$ 325,63 no 100º dia:

$$\$3.000 = \$1.000 \times \left[\frac{(1,05)^3 - 1}{(1,05)^3 \times 0,05} \right] + \frac{q}{\frac{100}{(1,05)^{30}}} \Rightarrow q = \$325,63$$

Usando a tábua do Capítulo 1 pode-se determinar a data em que o equipamento estará totalmente pago:

$$\text{número de dias da data posterior (?)} = + Y$$

$$\text{número de dias da data anterior (16 de junho)} = -146$$

$$\text{prazo} = 100$$

Logo, $Y = 146 + 100 = 246$, que na tábua corresponde ao dia 3 de setembro.

Observação: A máquina HP-12c arredonda para 4 o número de prestações. Portanto, quando o prazo é fracionário, a incógnita deve ser resolvida usando logaritmos, tal como mostrado neste exemplo.

Exemplo 5.8

Quanto se deve aplicar hoje em um investimento de forma que se possa retirar \$ 100.000 no fim de todo mês, durante os próximos 20 meses, considerando uma taxa de juros nominal ganha de 120% a.a. capitalizada mensalmente?

Dados: $R = \$100.000$, $n = 20$ meses, $j = 120\%$ a.a., $k = 12$, $P = ?$

- Taxa efetiva mensal

$$(1+i_m) = \left(1 + \frac{1,20}{12}\right) \Rightarrow i_m = 10\% \text{ a.m.}$$

- Valor da aplicação

$$P = R \times a_{\bar{20}|10\%}$$

$$= \$100.000 \times \left[\frac{(1,10)^{20} - 1}{(1,10)^{20} \times 0,10} \right] = \$851.356,37$$

Calculadora HP-12C

(F) (FIN)

apaga a memória financeira

100.000 (CHS) (PMT)

entra com a prestação com sinal negativo

120 (g) (12÷)

entra com a taxa de juros nominal capitalizada mensalmente

20 (n)

entra com o número de prestações

(PV) → 851.356,37

calcula o principal

Exemplo 5.9

Um empréstimo será liquidado em oito prestações de \$60.000 pagas todo fim de mês. Considerando uma taxa de juros efetiva de 15% a.m., determinar o valor do empréstimo.

Dados: $R = \$60.000$, $i = 15\%$ a.m., $n = 8$, $P = ?$

O valor do empréstimo deve ser igual ao valor atual das prestações:

$$\begin{aligned} P &= R \times a_{8|15\%} \\ &= \$60.000 \times \left[\frac{(1,15)^8 - 1}{(1,15)^8 \times 0,15} \right] \\ &= \$60.000 \times 4,4873215 = \$269.239,29 \end{aligned}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
60.000 (CHS) (PMT)
15 (i)
8 (n)
(PV) $\rightarrow 269.239,29$

apaga a memória financeira
entra com a prestação com sinal negativo
entra com a taxa de juros efetiva
entra com o número de prestações
calcula o principal

Exemplo 5.10

Um financiamento de \$450.000 foi contratado a juros efetivos de 20% a.a., devendo ser amortizado em 12 prestações mensais postecipadas iguais. Calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$450.000$, $i_a = 20\%$ a.a., $n = 12$ meses, $R = ?$

- Taxa de juros efetiva ao mês

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12} \Rightarrow i_m = (1,20)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,53095\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo do valor da prestação

$$R = \frac{P}{a_{12|1,53095\%}} = \frac{\$450.000}{\left[\frac{(1,0153095)^{12} - 1}{(1,0153095)^{12} \times 0,0153095} \right]} = \frac{\$450.000}{10,88651} = \$41.335,57$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
1,20 (ENTER) 12 (1/x) 1 (-) 100 (x) (i)
450000 (CHS) (PMT)
12 (n)
(PMT) $\rightarrow 41.335,57$

apaga a memória financeira
calcula e entra com a taxa de juros efetiva ao mês
entra com o principal com sinal negativo
entra com número de prestações
calcula o valor da prestação

Exemplo 5.11

Calcular o valor das prestações mensais postecipadas iguais e consecutivas que liquidam um débito de \$200.000 no prazo de seis meses, sendo a taxa de juros efetiva de 18% a.m. para os três primeiros meses e de 20% para os demais.

Dados: $P = 200.000$, $i_{1-3} = 18\% \text{ a.m.}$, $i_{4-6} = 20\% \text{ a.m.}$, $R = ?$

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{R \times a_{\bar{3}|18\%}}_{\substack{\text{valor presente} \\ \text{das 3 primeiras} \\ \text{prestações}}} + \underbrace{R \times a_{\bar{3}|20\%} \times \left[\frac{1}{(1,18)^3} \right]}_{\substack{\text{valor presente das 3 últimas} \\ \text{prestações}}} \\ \$200.000 &= R \times \left[\frac{(1,18)^3 - 1}{(1,18)^3 \times 0,18} \right] + R \times \left[\frac{(1,20)^3 - 1}{(1,20)^3 \times 0,20} \right] \times \left[\frac{1}{(1,18)^3} \right] \\ \$200.000 &= R \times 2,17427 + R \times 2,10648 \times \left(\frac{1}{1,64303} \right) \Rightarrow R = \$57.864,73 \end{aligned}$$

Exemplo 5.12

Um financiamento de \$20.000 será pago em oito prestações mensais postecipadas. Considerando que a taxa de juros efetiva cobrada pela financeira é de 8% a.m., calcular o valor de uma *comissão de abertura de crédito*, cobrada do cliente, que permita à financeira auferir uma rentabilidade de 10% a.m. na operação.

Dados: $P = \$20.000$, $n = 8$, $i = 8\% \text{ a.m.}$, rentabilidade = 10% a.m., comissão = ?

- **Prestações**

$$R = \frac{P}{a_{\bar{8}|8\%}} = \frac{\$20.000}{\left[\frac{(1,08)^8 - 1}{(1,08)^8 \times 0,08} \right]} = \frac{\$20.000}{5,74664} = \$3.480,29$$

- **Valor presente das prestações**

$$P = R \times a_{\bar{8}|10\%} = \$3.480,29 \times \left[\frac{(1,10)^8 - 1}{(1,10)^8 \times 0,10} \right] = \$3.480,29 \times 5,3349262 = \$18.567,12$$

- **Valor da comissão**

$$\text{comissão} = \$20.000 - \$18.567,12 = \$1.432,88$$

Exemplo 5.13

Em quantos meses uma pessoa consegue liquidar um empréstimo de \$1.895.395 pagando prestações mensais postecipadas de \$500.000 a juros efetivos de 10% a.m?

Dados: $P = \$1.895.395$, $R = \$500.000$, $i = 10\% \text{ a.m.}$, $n = ?$

$$\begin{aligned} P &= R \times a_{\bar{n}|10\%} \\ \$1.895.395 &= \$500.000 \times a_{\bar{n}|10\%} \Rightarrow a_{\bar{n}|10\%} = 3,79079 \end{aligned}$$

Nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro tem-se $a_{\bar{5}|10\%} = 3,79079$; consequentemente, o número de prestações mensais que liquidam o empréstimo é igual a cinco.

Matematicamente, o valor de n pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\alpha_{n|10\%} = 3,79079$$

$$\left[\frac{(1,10)^n - 1}{(1,10)^n \times 0,10} \right] = 3,79079 \Rightarrow (1,10)^n = 1,6105108$$

Aplicando logaritmos e destacando n:

$$n \times \ln 1,10 = \ln 1,6105108 \Rightarrow n = \frac{\ln 1,6105108}{\ln 1,10} = 5$$

Calculadora HP-12C	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
1.895.395 (CHS) (PV)	entra com o principal com sinal negativo
500.000 (PMT)	entra com o valor da prestação
10 (i)	entra com a taxa de juros efetiva
(n) → 5	calcula o número de prestações

Exemplo 5.14

Uma indústria financia suas vendas à prazo aplicando juros efetivos de 10% a.m. Determinar o valor das prestações postecipadas para uma venda de \$ 250.000, considerando que há duas alternativas de pagamento: a) em 12 prestações mensais; b) em 4 prestações trimestrais.

Dados: $i = 10\%$ a.m., $n = 12$ ou 4 , $P = \$250.000$, $R = ?$

a) Prestação mensal:

$$R = \frac{P}{\alpha_{12|10\%}} = \frac{\$250.000}{\left[\frac{(1,10)^{12} - 1}{(1,10)^{12} \times 0,10} \right]} = \frac{\$250.000}{6,81369} = \$36.690,83$$

b) Prestação trimestral:

- Táxa equivalente ao trimestre

$$(1+i_t) = (1+i_m)^3 \Rightarrow i_t = (1,10)^3 - 1 = 0,3310 = 33,10\% \text{ a.t.}$$

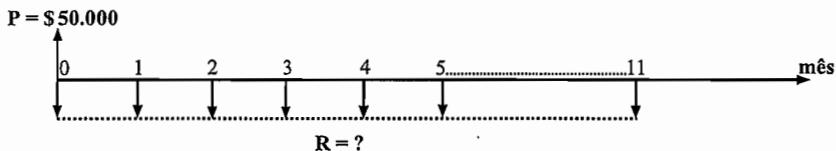
- Cálculo da prestação trimestral

$$R = \frac{P}{\alpha_{4|33,10\%}} = \frac{\$250.000}{\left[\frac{(1,3310)^4 - 1}{(1,3310)^4 \times 0,3310} \right]} = \frac{\$250.000}{2,05852} = \$121.446,64$$

Exemplo 5.15

Uma compra no valor de \$ 50.000 foi financiada em 12 prestações mensais antecipadas. Considerando que o credor aplica juros efetivos de 8% a.m., calcular o valor das prestações.

Dados: $P = \$50.000$, $n = 12$, $i = 8\%$ a.m., $R = ?$



- Cálculo das prestações

As prestações são calculadas sobre o financiamento efetivo ($\$50.000$ menos a prestação paga no ato):

$$R = \frac{\text{financiamento efetivo}}{\alpha_{n-1} i \%}$$

$$R = \frac{P - R}{\alpha_{12-1} 8 \%}$$

$$R = \frac{\$50.000 - R}{\left[\frac{(1,08)^{11} - 1}{(1,08)^{11} \times 0,08} \right]}$$

$$R = \frac{\$50.000 - R}{7,13896} \Rightarrow R = \$6.143,29$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
50.000 (CHS) (PV)
8 (i)
12 (n)
(g) (BEG) (PMT) → 6.143,25

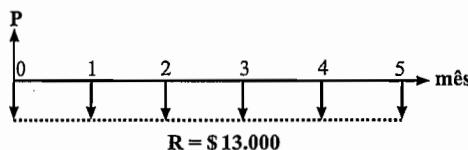
apaga a memória financeira
entra com o principal com sinal negativo
entra com a taxa de juros efetiva
entra com o número de prestações
calcula a prestação antecipada

Observação: As teclas (g) (BEG) foram pressionadas porque as prestações a serem calculadas são antecipadas (pagas no início de cada mês).

Exemplo 5.16

Uma pessoa deve pagar por um financiamento seis prestações mensais antecipadas de $\$13.000$ cada uma. Calcular o valor do financiamento efetivo se a taxa de juros cobrada for de 15% a.m.

Dados: $n = 6$, $R = \$13.000$, $i = 15\%$ a.m., financiamento efetivo = ?



$R = \$13.000$

- Cálculo do principal

$$P = \$13.000 + \$13.000 \times a_{n=1} \bar{1} 15\%$$

$$= \$13.000 + \$13.000 \times \left[\frac{(1,15)^5 - 1}{(1,15)^5 \times 0,15} \right] = \$13.000 + \$13.000 \times 3,35216 = \$56.578,02$$

- Cálculo do financiamento efetivo

O financiamento efetivo é igual a \$56.578,10 menos a primeira prestação paga no ato:
financiamento efetivo = \$56.578,02 - \$13.000 = \$43.578,02

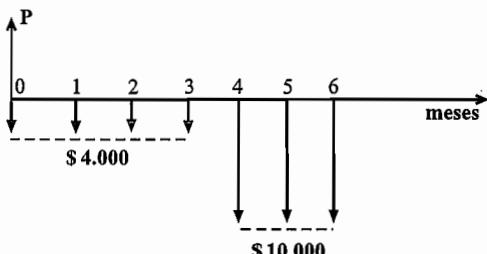
Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
13.000 (CHS) (g) (BEG) (PMT)	entra com a prestação <i>antecipada</i> com sinal negativo
15 (i)	entra com a taxa de juros efetiva
6 (n)	entra com o número de prestações
(PV) 13.000 (-) → 43.578,02	calcula o principal e subtrai 13.000

Exemplo 5.17

Uma concessionária de veículos aplica juros efetivos de 12% a.m. nas vendas à prazo e exige a amortização em sete prestações mensais antecipadas. Considerando que em uma determinada venda realizada o valor de cada uma das quatro primeiras prestações foi de \$4.000 e das três últimas \$10.000, calcular o valor do financiamento efetivo.

Dados: n = 7, R = \$4.000 e \$10.000; i = 12% a.m., financiamento efetivo = ?


Calculadora HP-12C

(f) (REG)	apaga todos os registros
12 (i)	entra com a taxa de juros efetiva
4.000 (g) (CF ₀)	entra com a primeira prestação
4.000 (g) (CF _j)	entra com a segunda prestação
3 (g) (N _j)	entra com três prestações iguais à segunda
10.000 (g) (CF _j)	entra com a quarta prestação
3 (g) (N _j)	entra com três prestações iguais à quarta
(f) (NPV) → 30.703,09	calcula o valor presente das prestações

- Cálculo do principal

$$P = \left\{ \$4.000 + \$4.000 \times a_{3|12\%} \right\} + \left\{ \$10.000 \times a_{3|12\%} \times (1,12)^{-3} \right\}$$

valor atual das 4 primeiras prestações valor atual das 3 últimas prestações

$$= \left\{ \$4.000 + \$4.000 \times \left[\frac{(1,12)^3 - 1}{(1,12)^3 \times 0,12} \right] \right\} + \left\{ \$10.000 \times \left[\frac{(1,12)^3 - 1}{(1,12)^3 \times 0,12} \right] \times \frac{1}{(1,12)^3} \right\}$$

$$= \{ \$4.000 + \$4.000 \times 2,40183 \} + \{ \$10.000 \times 2,40183 \times 0,71178 \} = \$30.703,09$$

- Financiamento efetivo

O financiamento efetivo é igual ao principal menos a primeira prestação paga no ato:

$$\text{financiamento efetivo} = P - \$4.000 = \$30.703,09 - \$4.000 = \$26.703,09$$

Exemplo 5.18

De modo a poder sacar \$800/mês uma pessoa aplica \$10.000 a juros efetivos de 2% a.m. Quantos saques mensais poderão ser efetuados se o primeiro inicia um mês depois da aplicação inicial?

Dados: $P = \$10.000$, $i = 2\%$ a.m., $R = 800$, $n = ?$

$$P = R \times a_{n|2\%}$$

$$\$10.000 = \$800 \times \left[\frac{(1,02)^n - 1}{(1,02)^n \times 0,02} \right] \Rightarrow (1,02)^n = 1,3333333333$$

$$\text{aplicando logaritmos: } n = \frac{\ln 1,3333333333}{\ln 1,02} = 14,52746991$$

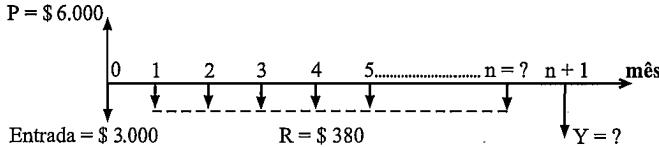
Podem ser efetuados 14 saques mensais de \$800 e um último saque de \$423,95 no 15º mês.

$$\$10.000 = \$800 \times \left[\frac{(1,02)^{14} - 1}{(1,02)^{14} \times 0,02} \right] + \frac{q}{(1,02)^{15}} \Rightarrow q = \$423,95$$

Exemplo 5.19

Um bem, cujo valor à vista é de \$6.000, será pago por meio de uma entrada de 50% e o saldo em tantas prestações mensais postecipadas de \$380 quantas forem necessárias, mais um pagamento final inferior ao valor da prestação, que deve ser efetuado um mês após a data do vencimento da última parcela. A juros efetivos de 4% a.m., determinar o número de prestações e o valor do pagamento final.

Dados: $P = \$6.000$, entrada (50%) = \$3.000, $R = \$380$, $i = 4\%$ a.m., $n = ?$, $Y = ?$



Pelo princípio de equivalência de capitais, podemos montar a equação de valor igualando o valor à vista ao valor presente do fluxo de pagamentos da alternativa *compra parcelada*:

$$\$6.000 = \$3.000 + \$380 \times a_{n|4\%} + \frac{Y}{(1,04)^{n+1}}$$

Uma solução direta não existe, dado que temos uma única equação e duas incógnitas, n e Y . Ignorando o pagamento final (Y), o valor presente das prestações é o seguinte:

$$\text{se o número de prestações for igual a nove (}n = 9\text{)} \Rightarrow \$380 \times a_{9|4\%} = \$380 \times 7,43533 = \$2.825,43$$

$$\text{se o número de prestações for igual a dez (}n = 10\text{)} \Rightarrow \$380 \times a_{10|4\%} = \$380 \times 8,11090 = \$3.082,14$$

Conseqüentemente, o número de prestações deve ser inferior a dez, caso contrário o valor presente das prestações excederia o valor do financiamento efetivo ($\$3.082,14 > \3.000). Logo,

o financiamento será liquidado em 9 prestações de \$380 mais um pagamento final no décimo mês. O valor desse pagamento final é o seguinte:

$$\begin{aligned} \$6.000 - \$3.000 &= \$380 \times a_{9|4\%} + \frac{Y}{(1,04)^{10}} \\ \$3.000 &= \$380 \times 7,43533 + \frac{Y}{1,4802443} \Rightarrow Y = \$258,41 \end{aligned}$$

Exemplo 5.20

Uma pessoa deseja comprar um microcomputador e dispõe de quatro alternativas de pagamento:

- a) pagamento à vista de \$2.300;
- b) pagamento de oito prestações mensais iguais de \$431,12 cada;
- c) pagamento de quatro prestações mensais iguais de \$965,75 cada, sendo a primeira paga daqui a quatro meses;
- d) um único pagamento de \$4.930,26 daqui a oito meses.

Considerando os juros efetivos de 10% a.m., qual será o melhor esquema de pagamento?

- Cálculo dos valores presentes dos planos de pagamento

a) $P = \$2.300$

b) $P = \$431,12 \times a_{8|10\%} = \$431,12 \times \left[\frac{(1,10)^8 - 1}{(1,10)^8 \times 0,10} \right] = \$431,12 \times 5,33493 = \2.300

c) $P = [\$965,75 \times a_{4|10\%}] \times (1,10)^{-3} = \$965,75 \times \left[\frac{(1,10)^4 - 1}{(1,10)^4 \times 0,10} \right] \times \left[\frac{1}{(1,10)^3} \right]$
 $= \$965,75 \times 3,16987 \times 0,75131 = \2.300

d) $P = \$4.930,26 \times \left[\frac{1}{(1,10)^8} \right] = \$4.930,26 \times 0,46651 = \2.300

As quatro alternativas são equivalentes, visto que, à taxa de juros de 10% a.m., os respectivos valores presentes são iguais (\$2.300). Assim, do ponto de vista financeiro, as quatro alternativas ou planos são equivalentes. A escolha do melhor plano poderá, então, ser feita considerando a situação particular da pessoa. Por exemplo, se ela dispõe dos recursos necessários (\$2.300) e não vislumbra alternativas para aplicar seu dinheiro no mercado financeiro, ganhando no mínimo juros de 10% a.m., nesse caso, talvez seja melhor comprar à vista.

Exemplo 5.21

Um financiamento de \$10.000 será pago em cinco prestações mensais postecipadas. Se as últimas três são de \$3.800 cada e a taxa de juros efetiva aplicada é de 5% a.m., determinar o valor de cada uma das duas primeiras prestações.

Dados: $P = \$10.000$, $n = 5$, $i = 5\% \text{ a.m.}$, $R = ?$

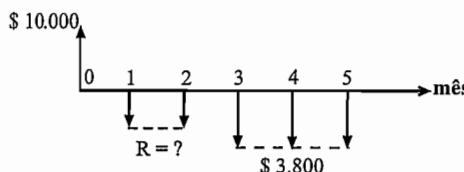
Escolhendo a data zero como data focal, pelo princípio de equivalência de capitais tem-se:

financiamento efetivo = valor presente das prestações

$$\$10.000 = R \times a_{\overline{2}5\%} + \frac{\$3.800 \times a_{\overline{3}5\%}}{(1,05)^2}$$

$$\$10.000 = R \times 1,85941 + \frac{\$3.800 \times 2,723248}{1,10250}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(\$10.000 - \$9.386,25)}{1,85941} = \$330,08$$



Exemplos de aplicação

Séries diferidas

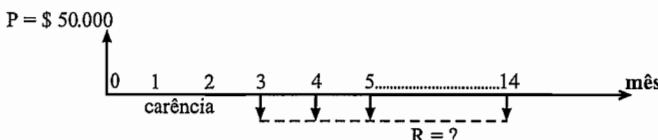
Exemplo 5.22

Um financiamento de $\$50.000$ será pago em 12 prestações mensais aplicando-se juros efetivos de $8\% \text{ a.m.}$. Considerando que foi estipulado um período de carência de três meses, calcular o valor das prestações antecipadas e postecipadas.

Dados: $P = \$50.000$, $n = 12$, $c = 3$, $i = 8\% \text{ a.m.}$, $R = ?$

a) Prestações antecipadas

No caso de as prestações serem antecipadas, a primeira parcela é paga no início do primeiro período que se segue ao término da carência:



Durante a carência os juros são capitalizados e incorporados ao principal, logo as prestações devem ser calculadas sobre o principal capitalizado ($c - 1$) períodos, onde c é a carência:

$$R = \frac{P(1+i)^{c-1}}{a_{\overline{12}8\%}} = \frac{\$50.000 \times (1,08)^2}{\left[\frac{(1,08)^{12} - 1}{(1,08)^{12} \times 0,08} \right]} = \frac{\$58.320}{7,53608} = \$7.738$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)

8 (i)

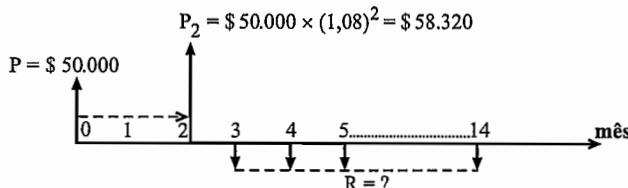
2 (n)

50000 (CHS) (PV) (FV)
(CHS) (PV)

12 (n) 0 (FV)

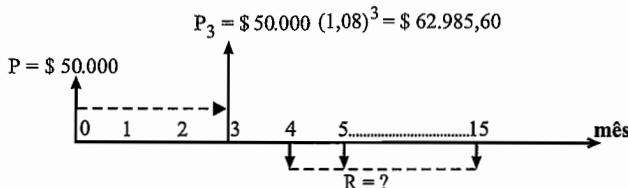
(PMT) → 7.738,77

apaga a memória financeira
 entra com a taxa de juros efetiva
 define como prazo de capitalização o período de carência menos um ($3 - 1 = 2$)
 entra com o principal com sinal negativo e calcula o seu montante no 2º mês
 troca o sinal do valor obtido no passo anterior e o define como principal
 entra com o número de prestações e apaga o registro do montante
 calcula o valor da prestação

**b) Prestações postecipadas**

No caso de as prestações serem postecipadas, o pagamento da primeira parcela ocorre no fim do primeiro período após o término da carência, logo as prestações devem ser calculadas sobre o principal capitalizado (c) períodos, onde c é a carência:

$$R = \frac{P_3}{a_{\overline{12}|8\%}} = \frac{\$ 62.985,60}{7,53608} = \$ 8.357,87$$

**Exemplo 5.23**

Um financiamento de \$ 40.000 será pago em oito prestações mensais de \$ 6.413,44. O início do pagamento das prestações será logo ao término de um determinado período de carência. Considerando juros efetivos de 3% a.m., determinar o período de carência.

Dados: $P = \$ 40.000$, $n = 8$, $i = 3\%$ a.m., $R = \$ 6.413,44$, $c = ?$

Dada a carência, as prestações antecipadas devem ser calculadas com base no principal capitalizado por $c-1$ meses:

$$R = \frac{P(1+i)^{c-1}}{a_{\bar{8}|3\%}}$$

$$\$ 6.413,44 = \frac{\$ 40.000 \times (1,03)^{c-1}}{\left[\frac{(1,03)^8 - 1}{(1,03)^8 \times 0,03} \right]}$$

$$\$ 6.413,44 = \frac{\$ 40.000 (1,03)^{c-1}}{7,019692} \Rightarrow (1,03)^{c-1} = 1,12550937$$

Aplicando logaritmos: $(c-1) \ln 1,03 = \ln 1,12550937 \Rightarrow c = \frac{\ln 1,12550937}{\ln 1,03} + 1 = 5$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
6.413,44 (g) (BEG) (PMT)
3 (i) 8 (n)
(PV)
(f) (FIN) (FV)
40.000 (PV)
3 (j)
(n) → 5

apaga a memória financeira
entra com a prestação antecipada
entra com a taxa de juros efetiva e número de prestações
calcula o principal na data "c"
apaga memória e atribui o valor de PV ao montante
entra como valor do principal
entra com a taxa de juros efetiva
calcula o prazo de carência

Exemplo 5.24

Um empréstimo de \$ 4.500 contratado em 15/8/2000 será pago por meio de 36 prestações mensais a juros efetivos de 6% a.m. Os juros são capitalizados e incorporados ao principal já a partir da data de contratação. Considerando que a primeira prestação deverá ser paga 45 dias depois e as restantes com intervalos de 30 dias, calcular o valor da prestação.

Dados: P = \$ 4.500, i = 6% a.m., n = 36, R = ?

$$R = \frac{\text{financiamento capitalizado 15 dias}}{a_{36|6\%}} = \frac{\$ 4.500 \times (1,06)^{30}}{a_{36|6\%}}$$

$$= \frac{\$ 4.633,03}{\left[\frac{(1,06)^{36} - 1}{(1,06)^{36} 0,06} \right]} = \frac{\$ 4.633,03}{14,62099} = \$ 316,88$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
4500 (PV) 6 (i)
(STO) (EEX) 0,5 (n)
(FV) (CHS) (PV)
0 (FV) 36 (n)
(PMT) → 316,88

apaga a memória financeira
entra com o principal e com a taxa de juros efetiva
entra com o prazo de capitalização fracionário
calcula o montante, troca o sinal e o define como principal
zera o registro do montante e entra com o número de prestações
calcula o valor da prestação

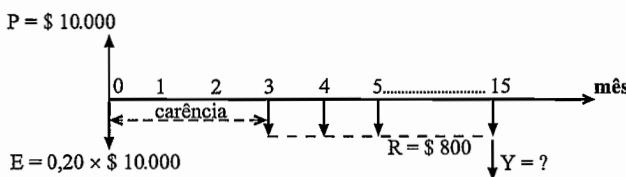
O empréstimo inicial foi capitalizado por 15 dias de modo que se obtivesse um fluxo de caixa com pagamentos postecipados e, dessa maneira, possibilitasse o cálculo das prestações aplicando a fórmula para fluxos postecipados. Foi considerado mês comercial de 30 dias.

Observação: Na HP-12C, quando o prazo de capitalização é fracionário, as teclas (STO) (EEX) devem ser pressionadas antes de o prazo ser inserido.

Exemplo 5.25

Um bem cujo valor à vista é de \$ 10.000 será pago por meio de uma entrada de 20% mais 13 prestações antecipadas mensais de \$ 800 cada e mais um pagamento final junto com a última prestação. Considerando que são aplicados juros efetivos de 4% a.m. e que há um período de carência de três meses, calcular o valor do pagamento final de modo que a dívida seja liquidada.

Dados: $P = \$10.000$, entrada (E) = \$ 2.000, $R = \$800$, $i = 4\%$ a.m., $Y = ?$



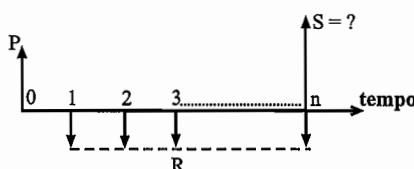
Como as prestações são antecipadas, seu pagamento começa no início do primeiro mês após o término da carência. Pelo princípio de equivalência de capitais, o valor à vista é igual ao valor presente do fluxo de pagamentos da alternativa *compra parcelada*. Logo:

$$\begin{aligned} \$10.000 &= \$2.000 + \frac{\$800 \times a_{13|4\%}}{(1,04)^2} + \frac{Y}{(1,04)^{15}} \\ \$8.000 &= \frac{\$800 \times 9,98565}{1,08160} + \frac{Y}{1,80094} \Rightarrow Y = \$1.106,08 \end{aligned}$$

5.2 Montante de séries periódicas uniformes

O valor futuro ou montante de uma série de pagamentos ou recebimentos uniformes postecipados será igual à soma dos montantes de cada prestação em uma determinada data futura, calculados pela mesma taxa de juros. Considerando uma série postecipada com n termos uniformes, o seu valor presente é:

$$P = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$



Uma expressão para o montante pode ser obtida se capitalizarmos por n períodos o valor presente da série:

$$S = P(1+i)^n$$

$$S = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] \times (1+i)^n \Rightarrow$$

$$S = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

$$= R \times s_{\overline{n}|i\%}$$

$$R = \frac{S}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]}$$

$$= \frac{S}{s_{\overline{n}|i\%}}$$

As fórmulas apresentadas permitem o cálculo do montante e do valor dos termos da série posticipada. A expressão entre colchetes é conhecida como *fator de valor futuro de séries uniformes*. Internacionalmente é representado pelo símbolo $s_{\overline{n}|i\%}$.

Para entendermos melhor o processo de capitalização implícito nas fórmulas de cálculo de séries de pagamentos uniformes, no quadro a seguir mostramos os cálculos necessários para chegarmos ao montante de cinco depósitos mensais iguais, aplicados a juros efetivos de 10% a.m.:

Mês	Depósito	Períodos de capitalização	Cálculo	Montante no 5º mês
1	360	4	$360(1,1)^4$	\$ 527,08
2	360	3	$360(1,1)^3$	\$ 479,16
3	360	2	$360(1,1)^2$	\$ 435,60
4	360	1	$360(1,1)^1$	\$ 396,00
5	360	0	$360(1,1)^0$	\$ 360,00
				Total: \$ 2.197,84

No quadro, cada depósito foi capitalizado até o quinto mês de modo que possamos calcular o montante nessa data. Podemos também usar diretamente a fórmula para o cálculo do montante dos cinco depósitos ao término do quinto mês:

$$S = R \times s_{\overline{n}|i\%} = \$360 \left[\frac{(1,10)^5 - 1}{0,10} \right] = \$360 \times 6,1051 = \$2.197,84$$

É claro que o modo mais simples é calcular diretamente por meio da fórmula de montante, mas esperamos que os cálculos do quadro ajudem o leitor a entender o mecanismo de capitalização implícito no cálculo direto.

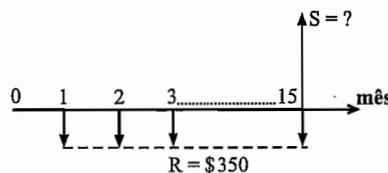
Exemplos de aplicação

Exemplo 5.26

Quanto uma pessoa acumularia no fim de 15 meses se depositasse todo final de mês \$350 em uma aplicação que paga juros efetivos de 5% ao mês?

Dados: $n = 15$ meses, $R = \$350$, $i = 5\% \text{ a.m.}$, $S = ?$

$$\begin{aligned} S &= R \times s_{15|5\%} \\ &= \$350 \times \left[\frac{(1+0,05)^{15} - 1}{0,05} \right] = \$350 \times 21,57856 = \$7.552,50 \end{aligned}$$



Exemplo 5.27

Calcular o fator de valor futuro (montante) de séries uniformes para $n = 18$ e $i = 5\%$.

$$s_{18|5\%} = \left[\frac{(1,05)^{18} - 1}{0,05} \right] = 28,13238467$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
1 (CHS) (PMT)	entra com a prestação unitária negativa
5 (i)	entra com a taxa de juros efetiva
18 (n)	entra com o número de termos da série uniforme
(FV) $\rightarrow 28,13238467$	calcula o fator

Exemplo 5.28

Calcular o capital formado *até o fim do quinto mês*, mediante cinco aplicações mensais e consecutivas de \$ 100 cada. Considere que os depósitos são realizados: a) o primeiro daqui a um mês; b) o primeiro hoje. Os juros são calculados à razão de 10% a.m.

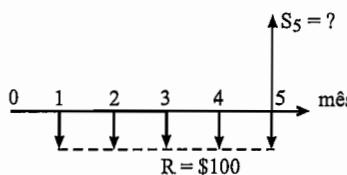
Dados: $R = \$100$, $n = 5$, $i = 10\%$, $S_5 = ?$

a) Primeiro pagamento daqui a um mês (postecipado):

$$\begin{aligned} S_5 &= R \times s_{5|10\%} \\ &= \$100 \times \left[\frac{(1,10)^5 - 1}{0,10} \right] = \$100 \times 6,10510 = \$610,51 \end{aligned}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	apaga a memória financeira
350 (g) (END) (CHS) (PMT)	entra com o depósito postecipado com sinal negativo
5 (n) 10 (i)	entra com o número de depósitos e taxa de juros efetiva
(FV) $\rightarrow 610,51$	calcula o montante



b) Primeiro pagamento no ato (antecipado):

$$\begin{aligned} S_5 &= [S_4] (1+i) = \left[\$100 \times s_{\overline{5}|10\%} \right] \times (1,10) = \$100 \times \left[\frac{(1,10)^5 - 1}{0,10} \right] \times (1,10) \\ &= \$100 \times 6,10510 \times (1,10) = \$671,56 \end{aligned}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
350 (g) (BEG) (CHS) (PMT)
5 (n) 10 (i)
(FV) → 671,56

apaga a memória financeira
entra com o depósito antecipado com sinal negativo
entra com o número de depósitos e taxa de juros efetiva
calcula o montante

Atenção:

Na série postecipada o produto do valor da prestação vezes o fator $s_{\overline{5}|10\%}$ representa o

montante da série ao fim do quinto mês (coincide com o período em que ocorre o último termo da série). No caso antecipado, esse produto representa o montante ao fim do quarto mês (coincide com o período em que ocorre o último termo da série), sendo necessário capitalizá-lo por mais um período (do quarto ao quinto mês), pois o exemplo pede calcular o montante no quinto mês.

O quadro a seguir mostra o valor do montante nos diversos anos para os casos postecipado e antecipado. Observe-se que no caso do fluxo antecipado os juros são auferidos desde o primeiro período, resultando em um montante maior que o da série postecipada:

Mês	Série postecipada			Série antecipada		
	Prestação	Juros	Montante	Prestação	Juros	Montante
1	\$ 100,00	\$ 0,00	\$ 100,00	\$ 100,00	\$ 10,00	\$ 110,00
2	\$ 100,00	\$ 10,00	\$ 210,00	\$ 100,00	\$ 21,00	\$ 231,00
3	\$ 100,00	\$ 21,00	\$ 331,00	\$ 100,00	\$ 33,10	\$ 364,10
4	\$ 100,00	\$ 33,10	\$ 464,10	\$ 100,00	\$ 46,41	\$ 510,51
5	\$ 100,00	\$ 46,41	\$ 610,51	\$ 100,00	\$ 61,05	\$ 671,56

Exemplo 5.29

Um financiamento de \$ 12.000 será pago em 15 prestações mensais consecutivas ao fim de cada mês. Considerando uma taxa de juros efetiva de 10% a.m., calcular o valor das prestações e o valor do montante ao fim do 15º mês.

Dados: P = \$ 12.000, n = 15, i = 10% a.m., R = ?, S = ?

- Cálculo das prestações

$$R = \frac{P}{a_{15|10\%}} = \frac{\$12.000}{\left[\frac{(1,10)^{15} - 1}{(1,10)^{15} \times 0,10} \right]} = \frac{\$12.000}{7,60608} = \$1.577,68$$

- Cálculo do montante

Podemos calcular o montante no 15º mês de duas formas:

- a) Capitalizando o financiamento:

$$S = \$12.000 \times (1,10)^{15} = \$12.000 \times 4,1725 = \$50.127$$

- b) Capitalizando as prestações:

$$S = \$1.577,68 \times s_{15|10\%} = \$1.577,68 \times \left[\frac{(1,10)^{15} - 1}{(1,10)^{15} \times 0,10} \right] = \$1.577,68 \times 31,77248 = \$50.127$$

Exemplo 5.30

Uma pessoa deseja comprar um bem cujo valor à vista é de \$ 3.840. Para tanto, resolve efetuar quatro depósitos trimestrais iguais em uma aplicação financeira que rende juros efetivos de 12,55% a.a. Considerando que a compra será efetuada um trimestre após o último depósito, calcular o valor das aplicações trimestrais de modo que seja possível efetuar a compra com o valor de resgate do investimento.

Dados: $S_4 = \$3.840$, $n = 4$, $i_a = 12,55\%$ a.a., $R = ?$

- Taxa de juros efetiva trimestral

$$(1+i_a) = (1+i_t)^4$$

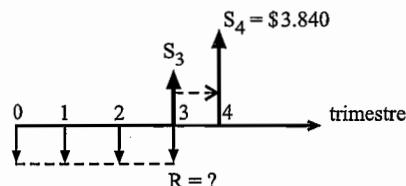
$$(1,1255) = (1+i_t)^4 \Rightarrow i_t = (1,1255)^{\frac{1}{4}} - 1 = 3\% \text{ a.t.}$$

- Cálculo das prestações

Podemos calcular o valor dos depósitos trimestrais considerando que o montante da aplicação ao fim do 4º trimestre (S_4) deve ser igual ao valor do bem:

$$S_4 = [S_3] \times (1+i)$$

$$\$3.840 = [R \times s_{4|3\%}] \times (1,03)$$



$$\$3.840 = \left[R \times \left(\frac{(1,03)^4 - 1}{0,03} \right) \right] \times (1,03) \Rightarrow R = \frac{\$3.840}{4,18363 \times 1,03} = \$891,13$$

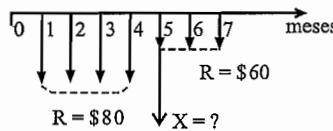
Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
3.840 (CHS) (FV)
4 (n) 3 (i)
(g) (BEG) (PMT) → 891,13

apaga a memória financeira
entra com o montante com sinal negativo
entra com o número de depósitos e taxa de juros efetiva
calcula a prestação antecipada

Exemplo 5.31

Inicialmente uma pessoa deveria pagar pela compra de um eletrodoméstico quatro prestações mensais de \$ 80 cada (a primeira para 30 dias), mais três prestações de \$ 60. Entretanto a loja oferece outro esquema de pagamento em que o cliente faria um único pagamento daqui a cinco meses. Considerando uma taxa de juros de 6% a.m., qual será o valor desse pagamento único?



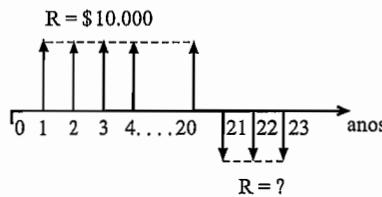
Para serem equivalentes, os dois planos devem ter o mesmo valor ao fim do quinto mês:

valor do pagamento único = valor do plano inicial ao fim do 5º mês

$$\begin{aligned} X &= \left\{ \$80 \times \left[\frac{(1,06)^4 - 1}{0,06} \right] \times 1,06 \right\} + \left\{ 60 + 60 \times \left[\frac{(1,06)^2 - 1}{(1,06)^2 \times 0,06} \right] \right\} \\ &= \left\{ \$80 \times s_{4|6\%} \times 1,06 \right\} + \left\{ \$60 + \$60 \times a_{2|6\%} \right\} \\ &= \{ \$80 \times 4,37462 \times 1,06 \} + \{ \$60 + \$60 \times 1,83339 \} = \$540,97 \end{aligned}$$

Exemplo 5.32

Uma pessoa pretende depositar todo final de ano, durante 20 anos, \$ 10.000 em um fundo que rende juros efetivos de 15% a.a. O montante acumulado deverá ser resgatado a partir do 21º ano por meio de três saques anuais iguais e consecutivos. Calcular o valor dos saques.



- Cálculo dos saques

No 20º mês o montante dos depósitos deve ser igual ao valor descontado dos três saques:

$$\begin{aligned} \$10.000 \times s_{20|15\%} &= R \times a_{3|15\%} \\ \$10.000 \times \left[\frac{(1,15)^{20} - 1}{0,15} \right] &= R \times \left[\frac{(1,15)^3 - 1}{(1,15)^3 \times 0,15} \right] \\ \$10.000 \times 102,44358 &= R \times 2,28323 \Rightarrow R = \$448.679,29 \end{aligned}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
10000 (CHS) (PMT)
20 (n) 15 (i)
(FV) (CHS) (PV)
0 (FV)
3 (n)
(PMT) → 448.678,29

apaga a memória financeira
entra com o valor do depósito com sinal negativo
entra com o número de depósitos e taxa de juros efetiva
calcula o montante e o define como principal
apaga o registro do montante
entra com o número de saques
calcula o valor dos saques

Exemplo 5.33

Em quantos meses uma pessoa acumula um capital de \$ 12.000 depositando \$ 549,44 todo fim de mês em uma aplicação financeira que rende juros efetivos de 2% a.m?

Dados: $R = \$560,43$, $S = \$12.000$, $i = 2\%$ a.m., $n = ?$

$$S = R \times s_{n|2\%}$$

$$\$12.000 = \$560,43 \Rightarrow s_{n|2\%} = \frac{\$12.000}{\$560,43} = 21,412512$$

Nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro verifica-se que $s_{18|2\%} = 21,412512$; consequentemente $n = 18$. Para calcular a incógnita n , procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s_{n|2\%} &= 21,412512 \\ \left[\frac{(1,02)^n - 1}{0,02} \right] &= 21,41512 \Rightarrow (1,02)^n = 1,42825 \end{aligned}$$

aplicando logaritmos:

$$n \log 1,02 = \log 142825 \Rightarrow n = 18$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
560,43 (CHS) (PMT)
12000 (FV)
2 (i)
(n) → 18

apaga a memória financeira
entra com o valor do depósito
entra com o valor do montante
entra com a taxa de juros
calcula o número de depósitos

Exemplo 5.34

Uma poupança que paga juros efetivos de 1% a.m. foi aberta com um depósito de \$ 6.500. Efetuando depósitos mensais de \$ 442,37, o primeiro 30 dias depois de aberta a poupança, em quantos meses acumula-se um montante de \$ 80.000?

Dados: $R = \$ 442,37$, $S = \$ 80.000$, depósito inicial = \$ 6.500, $i = 1\%$ a.m., $n = ?$

O montante acumulado deve ser igual ao depósito de abertura capitalizado n períodos mais o montante correspondente a n depósitos mensais:

$$S = \$ 6.500 \times (1 + i)^n + R \times s_{n|1\%}$$

$$\$ 80.000 = \$ 6.500 \times (1,01)^n + \$ 442,37 \times \left[\frac{(1,01)^n - 1}{0,01} \right]$$

$$\Rightarrow (1,01)^n = 2,4486469$$

aplicando logaritmos:

$$n = \frac{\log 2,4486469}{\log 1,01} = 90 \text{ depósitos}$$

Calculadora HP-12C	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
6500 (CHS) (PV)	entra com o depósito de abertura
442,37 (CHS) (g) (END) (PMT)	entra com o depósito mensal <i>postecipado</i>
80000 (FV)	entra com o valor do montante
1 (j)	entra com a taxa de juros efetiva
(n) → 90	calcula o número de depósitos

Exemplo 5.35

Um fundo de renda fixa paga juros nominais de 60% a.a., capitalizados mensalmente. Um investidor fez um depósito inicial de \$ 8.000 mais 22 depósitos mensais iguais e consecutivos, o primeiro iniciando um mês após o depósito de abertura. Considerando que no fim do período o fundo acusa um saldo de \$ 90.000, calcular o valor das aplicações mensais.

Dados: $S = \$ 90.000$, $j = 60\%$ a.a., $k = 12$, $n = 22$, $R = ?$

- Taxa de juros efetiva mensal $(1+i_m) = \left(1 + \frac{0,60}{12}\right) \Rightarrow i_m = 5\%$ a.m.
- Cálculo das aplicações:

$$\$ 90.000 = \$ 8.000 \times (1,05)^{22} + R \times s_{22|5\%}$$

$$\$ 90.000 = \$ 8.000 \times (1,05)^{22} + R \times \left[\frac{(1,05)^{22} - 1}{0,05} \right]$$

$$\$ 90.000 = \$ 8.000 \times 2,92526 + R \times 38,50521$$

$$\Rightarrow R = \frac{\$ 90.000 - \$ 8.000 \times 2,92526}{38,50521} = \$ 1.729,58$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
90.000 (FV)
60 (g) (12÷)
22 (n)
8.000 (CHS) (PV)
(PMT) → 1.729,58

apaga a memória financeira
entra com o valor do montante
entra com a taxa nominal ao ano capitalizada mensalmente
entra com o número de depósitos
entra com o depósito inicial com sinal negativo
calcula o valor das aplicações

Exemplo 5.36

Um empréstimo contratado a juros efetivos de 2% a.m. foi liquidado por meio de 13 prestações mensais postecipadas. Se os juros pagos no período totalizaram \$1.060, calcular o valor unitário das prestações.

Dados: $i = 2\%$ a.m., $n = 13$, juros ganhos = \$1.060, $R = ?$

- Cálculo das prestações mensais postecipadas

$$\text{juros pagos} = \text{soma das prestações} - \text{valor presente das prestações}$$

$$\$1.060 = R \times n - R \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

$$\$1.060 = R \times 13 - R \times \left[\frac{(1,02)^{13} - 1}{(1,02)^{13} \times 0,02} \right]$$

$$\$1.060 = R \times 13 - R \times 11,34837375 \Rightarrow R = \$641,79$$

Exemplo 5.37

Uma pessoa deposita trimestralmente \$120 em uma conta remunerada que paga juros nominais de 24,72% a.a., capitalizados semestralmente. Em quanto tempo acumulará um capital de \$1.187,70?

Dados: $j = 24,72\%$ a.a., $k = 2$, $R = \$120$, $S = \$1.187,70$, $n = ?$

- Cálculo da taxa de juros efetiva trimestral

$$\text{taxa efetiva semestral: } (1+i_s) = \left(1 + \frac{0,2472}{2}\right)$$

$$\text{taxa efetiva trimestral: } (1+i_t)^2 = \left(1 + \frac{0,2472}{2}\right) \Rightarrow i_t = \left(1 + \frac{0,2472}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 6\% \text{ a.t.}$$

- Cálculo do número de períodos

$$S = R \times \overline{s_n} | 6\%$$

$$\$1.187,70 = \$120 \times \left[\frac{(1,06)^n - 1}{0,06} \right] \Rightarrow (1,06)^n = 1,59385$$

Aplicando logaritmos:

$$n \times \log 1,06 = \log 1,59385 \Rightarrow n = \frac{\log 1,59385}{\log 1,06} = 8 \text{ trimestres}$$

Calculadora HP-12C
 (f) (FIN)
 1.187,7 (FV)
 120 (CHS) (PMT)
 6 (i)
 (n) → 8

apaga a memória financeira
 entra com o valor do montante
 entra com o depósito trimestral
 entra com a taxa de juros efetiva trimestral
 calcula o número de trimestres

Exemplo 5.38

Um empréstimo de \$ 5.000 contratado à taxa efetiva de 5% a.t. será devolvido dentro de um ano, pagando-se trimestralmente somente os juros. De maneira que possa ser devolvido o empréstimo, deseja-se acumular um fundo efetuando depósitos trimestrais iguais em um banco que paga juros efetivos de 4% a.t. Calcular a quota trimestral que permita acumular o fundo e pagar os juros trimestrais.

Cálculo do depósito trimestral que permite acumular o fundo:

$$R = \frac{\$ 5.000}{\left[\frac{(1,04)^4 - 1}{0,04} \right]} = \$1.177,45$$

importe necessário para pagar os juros trimestralmente = $5.000 \times 0,05 = \$250$

quota total trimestral = $\$1.177,45 + \$250 = \$1.427,45$

Exemplo 5.39

Uma pessoa deseja dispor de \$ 13.000 dentro de 6 meses. Para tal efeito, começa hoje a depositar todo início de mês em uma aplicação que paga juros efetivos de 4% a.m. Qual o valor de cada depósito antecipado de modo que disponha da quantia ao término do sexto mês? Qual o valor de cada depósito antecipado de modo que disponha da quantia ao início do sexto mês?

Dados: $i = 4\%$ a.m., $n = 6$, $S = 13.000$, $R = ?$

Ao término do 6º mês:

$$R = \frac{\$13.000}{\frac{(1+i)}{s_{6|4\%}}} = \frac{\$13.000}{\frac{1,04}{6,6329755}} = \$1.884,52 \quad R = \frac{\$13.000}{\frac{\$13.000}{s_{6|4\%}}} = \frac{\$13.000}{\frac{\$13.000}{6,6329755}} = \$1.959,91$$

Ao início do 6º mês:

Exemplo 5.40

A juros efetivos de 2% a.m., quantos depósitos mensais de \$ 400 serão necessários para acumular um capital de \$ 4.000?

Dados: $S = \$4.000$, $i = 2\%$ a.m., $R = 400$, $n = ?$

$$S = R \times s_{n|2\%}$$

$$\$4.000 = \$400 \times \left[\frac{(1,02)^n - 1}{0,02} \right] \Rightarrow (1,02)^n = 1,20$$

$$\text{Aplicando logaritmos: } n = \frac{\ln 1,20}{\ln 1,02} = 9,206938$$

Devem ser efetuados 9 depósitos mensais de \$400 e um último no 10º mês de valor inferior. Para calcular o depósito final considera-se que o valor deste depósito (q), mais o montante dos 9 depósitos capitalizados até o 10º mês, deve ser igual a \$4.000:

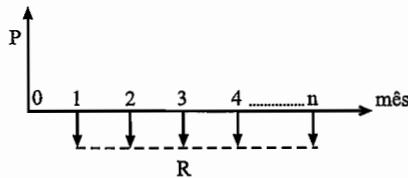
$$\$4.000 = q + \$400 \times \left[\frac{(1,02)^9 - 1}{0,02} \right] (1,02) \Rightarrow q = \$20,11$$

Observação: A HP-12C arredonda para 10 o número de depósitos. Portanto, é necessário aplicar logaritmos.

5.3 Cálculo da taxa de juros em séries periódicas uniformes

A taxa de juros (taxa interna de retorno) de um fluxo uniforme de n pagamentos ou recebimentos é a taxa que capitaliza os termos da série. O cálculo dessa taxa requer resolver para i^* a seguinte equação:

$$P - \frac{R}{(1+i^*)^1} - \frac{R}{(1+i^*)^2} - \frac{R}{(1+i^*)^3} - \dots - \frac{R}{(1+i^*)^n} = 0$$



No diagrama, P representa o valor inicial do fluxo de caixa e R , o valor unitário dos termos da série uniforme. O cálculo manual da taxa interna de retorno em fluxos multiperiódicos é um processo demorado e cansativo, entretanto, as calculadoras financeiras realizam esse cálculo de forma fácil e rápida. Na falta delas, pode-se obter um resultado aproximado por meio de tentativas ou por interpolação linear. As tentativas são, via de regra, penosas e as interpolações, imprecisas.

Vários métodos iterativos podem ser usados para calcular a taxa exata, tais como o Método de Aproximações de Newton-Raphson, Gauss-Cantelli, Método de Karpin, Método de Baily-Lenzi etc. O Método de Newton-Raphson permite uma convergência rápida, mas o processo é demorado e relativamente complexo.

O Método de Baily-Lenzi é simples de ser usado e dá resultados surpreendentemente exatos. Dependendo do número de termos da série uniforme postecipada, calcula-se a taxa de juros usando as seguintes equações:

para $n \times i \leq 3$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right]^{\frac{2}{n+1}}$$

para $3 < n \times i < 5,5$

$$i = \frac{12h - 6K - (n-1)h^2}{6 - (n-1)h}$$

onde: $h = \left(\frac{nR}{P} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1$ e $K = \left[\frac{nh}{1 - (1+h)^{-n}} \right]^{\frac{2}{n+1}} - 1$

P = principal (financiamento efetivo);

R = valor da prestação postecipada;

n = número de prestações.

A equação da esquerda é recomendada para baixos valores de i e n , gerando resultados mais precisos para $n \times i \leq 3$, e corresponde à maioria dos casos práticos. A equação da direita é indicada para altos valores de $n \times i$ ($3 < n \times i < 5,5$). A utilização da equação adequada, conforme as faixas de variação de $n \times i$, resulta em erros inferiores a 1%.

A seguir, ilustramos o uso das equações por meio do seguinte exemplo:

Dados: $P = \$92.712,37$, $R = \$14.000$, $n = 25$, i (resposta correta) = $0,146 = 14,6\%$ a.m.

$$h = \left(\frac{nR}{P} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 = 0,10759; \quad K = \left[\frac{nh}{1 - (1+h)^{-n}} \right]^{\frac{2}{n+1}} - 1 = 0,08582$$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right]^{\frac{2}{n+1}} = 0,14823 \text{ ao mês (erro de } 1,5\%)$$

$$i = \frac{12h - 6K - (n-1)h^2}{6 - (n-1)h} = 0,14581 \text{ ao mês (erro de } 0,1\%)$$

A segunda fórmula conduziu a um resultado melhor (menor erro), pois o problema enquadra-se na regra: $3 < n \times i < 5,5$

No Método de Baily-Lenzi, a taxa de juros pode também ser calculada em função do montante da série uniforme postecipada:

$$i = h \left[\frac{12 + (n+1)h}{12 + 2(n+1)h} \right]^{\frac{2}{n+1}}$$

onde: $h = \left(\frac{S}{nR} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1$

S representa o montante da série uniforme postecipada. Nas fórmulas, o erro com que se calcula i é muito baixo e inferior a 1%, enquanto n não superar um limite, n^* , dado em função de i na tabela a seguir:

i (%)	n^*
1	> 500
2	> 500
..	..
..	..
9	> 500
10	364
20	29
40	8
60	5
80	3
100	3
150	2
200	2

Por exemplo, se $i = 2\%$, a fórmula calcula i com erro inferior a 1% para valores de n inferiores a 500; se $i = 10\%$, $n^* \leq 364$ e assim por diante.

5.3.1 Taxa aproximada: interpolação linear

Muitas vezes não é possível o cálculo da taxa de juros exata implícita em uma série de n pagamentos/recebimentos, pois na maioria das vezes o cálculo requer a resolução de um polinômio de enésimo grau. Contudo, a taxa pode ser aproximada usando-se um processo de interpolação linear que fornece um valor aproximado. A mecânica do processo de interpolação linear é mostrada em vários dos exemplos a seguir.

Exemplos de aplicação

Exemplo 5.41

Um financiamento será pago em 18 prestações mensais de \$ 100.000. Considerando o valor do financiamento de \$ 875.563, calcular a taxa de juros efetiva cobrada.

Dados: $n = 18$, $R = \$ 100.000$, $P = \$ 875.563$, $i = ?$

- Destacamos o fator de valor presente de séries uniformes

$$P = R \times a_{\bar{n}|i\%}$$

$$\$ 875.563 = \$ 100.000 \times a_{\bar{18}|i\%} \Rightarrow a_{\bar{18}|i\%} = \frac{\$ 875.563}{\$ 100.000} = 8,75563$$

Nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro observa-se que $a_{\bar{18}|9\%} = 8,75563$ e, consequentemente, $i = 9\%$. As tabelas financeiras são um valioso auxílio didático, mas a sua utilidade

prática é limitada. Uma solução aproximada pode ser encontrada realizando uma interpolação linear, entretanto, o cálculo manual é quase sempre um trabalho demorado (veja o Exemplo 5.43 para uma ilustração desse processo) que pode ser evitado usando calculadoras financeiras.

Calculadora HP-12C	
(f) (FIN)	875.563 (PV)
100.000 (CHS) (PMT)	apaga a memória financeira e entra com o valor do financiamento
18 (n)	entra com a prestação com sinal negativo
(i) → 9	entra com o número de prestações
	calcula a taxa de juros

Exemplo 5.42

Um equipamento é vendido a prazo por meio de uma entrada de 20% mais nove prestações mensais de \$17.337,75. Considerando um valor à vista de \$120.000, calcular a taxa de juros efetiva cobrada.

Dados: $P = \$120.000$, entrada = \$24.000 (20% de \$120.000), $R = \$17.337,75$, $n = 9$, $i = ?$

Considerando que as prestações devem ser calculadas a partir do financiamento efetivo, podemos destacar o fator de valor atual de séries uniformes da seguinte forma:

$$R = \frac{\text{financiamento efetivo}}{a_{\bar{n}|i\%}} = \frac{P - \text{entrada}}{a_{\bar{n}|i\%}}$$

$$\$17.337,75 = \left(\frac{\$120.000 - \$24.000}{a_{\bar{9}|i\%}} \right) \Rightarrow a_{\bar{9}|i\%} = 5,53705$$

Verifica-se nas tabelas financeiras do Apêndice que, para $i = 11\%$, o valor do fator financeiro é $a_{\bar{9}|11\%} = 5,53705$.

Alternativamente, podemos usar o Método de Baily-Lenzi para calcular i :

$$\text{Como } n = 3: i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] = 0,1020284 \times \left(\frac{12 - 8 \times 0,1020284}{12 - 2 \times 8 \times 0,1020284} \right) = 11\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C	
(f) (FIN)	apaga a memória financeira
17337,75 (CHS) (PMT)	entra com a prestação com sinal negativo
96000 (PV)	entra com o financiamento efetivo
9 (n)	entra com o número de prestações
(i) → 11%	calcula a taxa efetiva

Exemplo 5.43

Calcular a taxa de juros mensal efetiva à qual foi tomado um financiamento de \$300.000 que será liquidado em 18 prestações mensais de \$37.758,88. Considere dois casos: a) prestações postecipadas; b) prestações antecipadas.

Dados: $P = \$300.000$, $n = 18$, $R = \$37.758,88$, $i_m = ?$

a) Prestações postecipadas:

- Fator de valor presente de séries uniformes

$$R = \frac{P}{a_{\bar{n}|i\%}}$$

$$\$37.758,88 = \frac{\$300.000}{a_{\bar{18}|i\%}} \Rightarrow a_{\bar{18}|i\%} = 7,94515$$

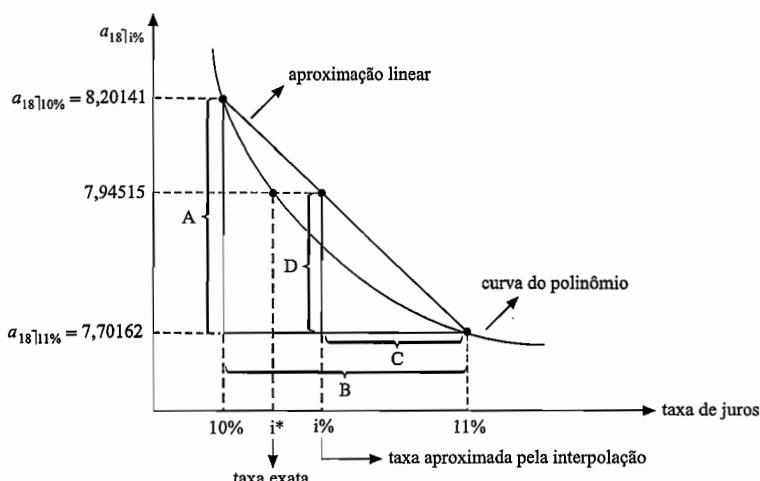
A seguir, o fator $a_{\bar{18}|i\%} = 7,94515$ será aproximado por meio de uma interpolação linear, de modo que seja estimada a incógnita i .

- Interpolação linear

Embora o fator $a_{\bar{18}|i\%}$ seja uma função exponencial, podemos admitir que, em intervalos pequenos, o comportamento desta função seja linear. Isso nos conduzirá a um erro desprezível, pois estamos trabalhando com cinco casas decimais em um intervalo pequeno. Podemos começar calculando o fator $a_{\bar{18}|i\%}$ para diversos valores de taxas de juros, e, a seguir, efetuar a interpolação linear:

$i\%$	$a_{\bar{18} i\%} = \frac{(1+i)^{18} - 1}{(1+i)^{18} \times i}$
9%	8,75563
10%	8,20141
11%	7,70162

A figura a seguir mostra graficamente o processo de interpolação linear:



A taxa exata satisfaz o polinômio $a_{18\bar{i}\%} = 7,94515$ representado pela curva, enquanto a taxa aproximada é o valor fornecido pela interpolação. Observando a figura podemos estabelecer a seguinte relação de proporcionalidade de triângulos:

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$$

$$\frac{8,20141 - 7,70162}{11-10} = \frac{7,94515 - 7,70162}{11-i}$$

$$\text{logo: } i = 11\% - \left[\frac{7,94515 - 7,70162}{8,20141 - 7,70162} \right] \times (11\% - 10\%) = 10,51\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo de i pelo Método de Baily-Lenzi

Como $n \times i < 3$:

$$h = \left(\frac{n R}{P} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 = \left(\frac{18 \times \$37.758,88}{\$300.000} \right)^{\frac{2}{19}} - 1 = 0,0898992$$

$$i = 0,0898992 \times \left(\frac{12 - 17 \times 0,0898992}{12 - 2 \times 17 \times 0,0898992} \right) = 10,53\% \text{ a.m.}$$

Podemos observar que a taxa estimada pelo Método de Baily-Lenzi (10,53% a.m.) aproxima-se bastante (com erro inferior a 0,29%) do resultado exato (10,50%).

b) Prestações antecipadas:

Sabendo que as prestações são calculadas com base no financiamento efetivo ($P - R$), podemos destacar o fator financeiro a ser interpolado:

$$R = \frac{P - R}{a_{n-1\bar{i}\%}}$$

$$\$37.758,88 = \frac{\$300.000 - \$37.758,88}{a_{17\bar{i}\%}} \Rightarrow a_{17\bar{i}\%} = 6,94515$$

- Interpolação linear

A seguir, o fator $a_{17\bar{i}\%} = 6,94515$ será aproximado por meio de uma interpolação linear, de forma que seja estimada a incógnita i .

- Taxa de juros aproximada:

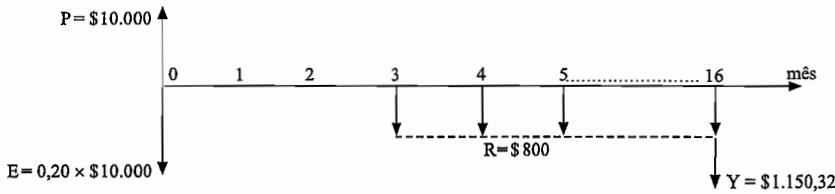
$i\%$	$a_{17 i\%} = \frac{(1+i)^{17}-1}{(1+i)^{17} \times i}$
11%	7,54879
12%	7,11963
13%	6,72909

$$i = 13\% - \left[\frac{6,94515 - 6,72909}{7,11963 - 6,72909} \right] \times (13\% - 12\%) = 12,45\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 5.44

Um bem cujo valor à vista é de \$10.000 será pago por meio de uma entrada de 20%, 13 prestações de \$800 cada mais um pagamento final de \$1.150,32 pago junto com a última prestação. Considerando que a primeira prestação será paga logo ao término de um período de carência de três meses, determinar o custo do financiamento.

Dados: $P = \$10.000$, entrada (E) = \$2.000, $R = \$800$, $Y = \$1.150,32$, $c = 3$, $n = 13$, $i = ?$



Por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo de pagamentos que liquida o financiamento:

$$\begin{aligned} \text{valor à vista} &= \text{entrada} + \text{VP das 13 prestações} + \text{VP do pagamento final} \\ \$10.000 &= \$2.000 + \frac{\$800 \times a_{13|i\%}}{(1+i)^2} + \frac{\$1.150,32}{(1+i)^{16}} \end{aligned}$$

onde: VP = valor presente

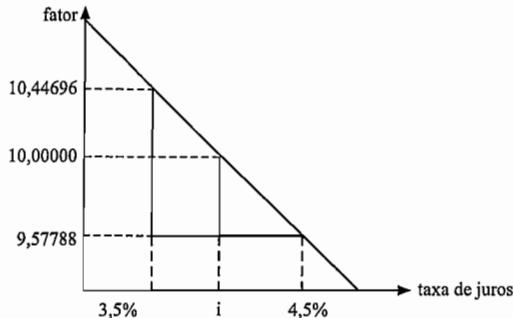
A partir da equação de valor anterior, podemos operar algebraicamente para destacar o fator financeiro que será interpolado de modo que possamos destacar a incógnita i :

$$\begin{aligned} \$8.000 &= \$800 \times \frac{\left[\frac{(1+i)^{13}-1}{(1+i)^{13} \times i} \right]}{(1+i)^2} + \frac{\$1.150,32}{(1+i)^{16}} \\ \$10 &= \left[\frac{(1+i)^{13}-1}{(1+i)^{15} \times i} \right] + 1,4379 \times \frac{1}{(1+i)^{16}} \end{aligned}$$

Destacando o fator financeiro necessário para a interpolação:

$$\text{fator} = \left[\frac{(1+i)^{14} + 0,4379i - 1}{(1+i)^{16} \times i} \right] = 10,00000$$

- Interpolação linear



relação de proporcionalidade:

$$\frac{10 - 9,57788}{4,5 - i} = \frac{10,44696 - 9,57788}{4,5 - 3,5}$$

$$i = 4,5\% - \left[\frac{10 - 9,57788}{10,44696 - 9,57788} \right] \times (4,5\% - 3,5\%) = 4,01\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 5.45

Depositando mensalmente \$ 4.000 durante 18 meses acumula-se um capital de \$ 124.136,67. Calcular a taxa de juros efetiva mensal ganha pelos depósitos.

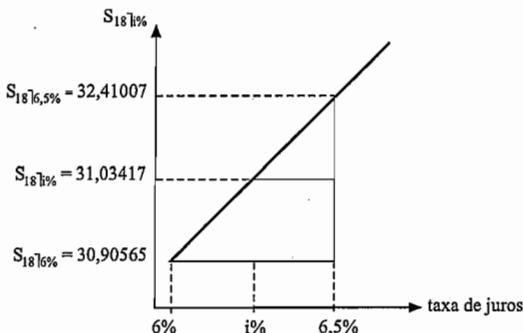
Dados: $n = 18$, $R = \$ 4.000$, $S = \$ 124.136,67$, $i = ?$

- Fator financeiro implícito

$$S = R \times s_{18|i\%}$$

$$\$ 124.136,67 = \$ 4.000 \times s_{18|i\%} \Rightarrow s_{18|i\%} = \frac{\$ 124.136,67}{\$ 4.000} = 31,03417$$

- Interpolação linear



Observando o digrama anterior, pode-se estabelecer a seguinte proporcionalidade de triângulos:

$$\frac{32,41007 - 30,90565}{6,5 - 6,0} = \frac{31,03417 - 30,90565}{i - 6,0}$$

$$i = 6,0\% + \left[\frac{31,03417 - 30,90565}{32,41007 - 30,90565} \right] \times (6,5\% - 6,0\%) = 6,043\% \text{ a.m.}$$

O cálculo pode ser feito também pelo Método de Baily-Lenzi em função do montante:

$$h = \left(\frac{S}{n \cdot R} \right)^{\frac{2}{n-1}} - 1 = \left(\frac{\$124.136,67}{18 \times \$4.000} \right)^{\frac{2}{18-1}} - 1 = 0,066182333$$

$$i = h \left[\frac{12 + (n+1)h}{12 + 2(n+1)h} \right] = 0,066182333 \times \left[\frac{12 + (18+1) \times 0,066182333}{12 + 2(18+1) \times 0,066182333} \right] = 0,0604488 = 6,045\%$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN) 4000 (CHS) (PMT) apaga a memória financeira e entra com valor das aplicações mensais
 18 (n) 124136,67 (FV) entra com o número de aplicações mensais e o valor do montante
 (i) → 6,04380 calcula a taxa de juros efetiva

Exemplo 5.46

Uma pessoa aplicou mensalmente \$ 501,55 durante 18 meses em um fundo de renda fixa. Considerando-se que o total dos juros ganhos até a data da última aplicação foi de \$ 1.060, calcular a taxa de juros mensal efetiva ganha no investimento.

Dados: n = 18, R = \$ 501,55, juros ganhos = \$ 1.060, i = ?

juros ganhos = montante – aplicação total

$$\$1.060 = \$501,55 \times s_{18|i\%} - \$501,55 \times 18 \Rightarrow s_{18|i\%} = 20,113448$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN) apaga a memória financeira
 1 (CHS) (PMT) entra com a prestação unitária com o sinal negativo
 20,113448 (FV) entra com o montante da prestação unitária
 18 (n) entra com o número de aplicações
 (i) → 1,2884 calcula a taxa de juros efetiva

A taxa de juros pode ser determinada por meio da interpolação do fator financeiro $s_{18|i\%} = 20,113448$, seguindo o procedimento mostrado no exercício anterior.

Exemplo 5.47

Nas vendas a prazo, uma loja aumenta em 20% o preço à vista. Esse valor majorado é dividido em três partes iguais, sendo a primeira paga no ato da compra. Calcular a taxa de juros cobrada usando os seguintes métodos: a) interpolação linear; b) resolução matemática; c) Método de Baily-Lenzi.

Dados: valor à vista = P, R = 0,4P, n = 3 prestações (a primeira paga no ato), i = ?

a) Processo de interpolação linear:

- Valor da prestação

$$\frac{1,2 \times P}{3} = 0,4P$$

- Fator financeiro a ser interpolado

O fator pode ser destacado considerando que o valor à vista deve ser igual ao valor presente das prestações:

$$P = R + R \times a_{\bar{2}|i\%}$$

$$P = 0,4P + 0,4P \times a_{\bar{2}|i\%} \Rightarrow a_{\bar{2}|i\%} = 1,50000$$

- Interpolação linear

Taxa de juros aproximada:

$i\%$	$a_{\bar{2} i\%} = \frac{(1+i)^2 - 1}{(1+i)^2 \times i}$
20%	1,52778
21%	1,50946
22%	1,49154

$$i = 22\% - \left[\frac{1,50000 - 1,49154}{1,50946 - 1,49154} \right] \times (22\% - 21\%) = 21,53\% \text{ a.m.}$$

A interpolação foi efetuada entre as taxas de 21% e 22%, pois o fator procurado ($a_{\bar{2}|i\%} = 1,50000$) pode ser obtido para alguma taxa de juros entre 21% e 22% (aproximadamente 21,5%).

b) Resolução matemática:

A taxa exata pode ser calculada resolvendo a equação de segundo grau resultante do fato de que, por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente das prestações:

$$P = 0,4P + \frac{0,4P}{1+i} + \frac{0,4P}{(1+i)^2} \Rightarrow (1+i)^2 - 0,6667(1+i) - 0,6667 = 0$$

Para resolver a equação, usamos a forma quadrática $aX^2 + bX + c = 0$, onde: $X = (1+i)$; $a = 1$; $b = -0,6667$; $c = -0,6667$.

$$\text{A solução tem a forma: } X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

substituindo os valores das variáveis:

$$(1+i) = \frac{-(-0,6667) \pm \sqrt{(-0,6667)^2 - 4 \times (1) \times (-0,6667)}}{2 \times 1}$$

$$(1+i) = \frac{0,6667 \pm 1,763830}{2} \Rightarrow i = 21,53\% \text{ a.m.}$$

c) Aplicando o Método de Baily-Lenzi:

Podemos, também, usar o Método de Baily-Lenzi para calcular o valor de i . Para tanto, primeiro necessitamos identificar os valores dos diversos parâmetros da fórmula:

$$P = 0,4P + \frac{0,4P}{1+i} + \frac{0,4P}{(1+i)^2}$$

$$P(1-0,4) = P \left(\frac{0,4}{1+i} + \frac{0,4}{(1+i)^2} \right)$$

$$0,6 = \left(\frac{0,4}{1+i} + \frac{0,4}{(1+i)^2} \right)$$

Logo, podemos identificar as seguintes variáveis: financiamento efetivo = 0,6; prestação (R) = 0,4; $n = 2$

Substituindo os valores no Método de Baily-Lenzi considerando que $n \times i < 3$:

$$h = \left(\frac{nR}{\text{financiamento efetivo}} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 = \left(\frac{2 \times 0,4}{0,6} \right)^{\frac{2}{2+1}} - 1 = 0,21141$$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] = 0,21141 \times \left(\frac{12 - 0,21141}{12 - 2 \times 0,21141} \right) = 21,53\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)	0,4 (CHS)	(g) (BEG) (PMT)	apaga a memória e entra com o valor da prestação antecipada
3 (n)	1 (PV)		entra com o número de prestações e principal unitário
(i) → 21,52504%			calcula a taxa de juros

Exemplo 5.48

A empresa TV Cabo Telecomunicações S.A. enviou a seus assinantes uma proposta com três opções de pagamento: pagamentos mensais, pagamentos semestrais e pagamentos anuais. No caso de optar pela primeira opção, o assinante pagará mensalmente parcelas fixas de \$49, sendo a primeira no ato da instalação. Se optar pela segunda, fará dois pagamentos semestrais de \$275, sendo a primeira no ato da instalação. Se optar pela terceira opção, fará um único pagamento de \$539 à vista. A empresa alega que, além de evitar *idas e vindas ao banco*, o assinante que optar pelos planos semestral ou anual estará sendo beneficiado por um *desconto promocional* no valor da mensalidade. Determinar a taxa de juros embutida nas alternativas de pagamento semestral e anual.

a) Opção de pagamento anual:

Por equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente dos pagamentos mensais:

$$\$539 = 49 + \$49 \times a_{n-1|i\%} \Rightarrow a_{11|i\%} = 10,00000 \Rightarrow i = 1,6231\% \text{ a.m.}$$

A primeira prestação mensal é paga no ato (modo antecipado).

Alternativamente, o cálculo da taxa de juros pode ser feito usando-se o Método de Baily-Lenzi:

como $n \times i < 3$:

$$h = \left(\frac{n R}{\text{Financiamento efetivo}} \right)^{\frac{2}{n+1}} - 1 = \left(\frac{11 \times \$49}{\$539 - \$49} \right)^{\frac{2}{11+1}} - 1 = 0,0160119$$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] = 0,0160119 \times \left(\frac{12 - 10 \times 0,0160119}{12 - 2 \times 10 \times 0,0160119} \right) = 0,016231 = 1,6231\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN) 49 (CHS) (g) (BEG) (PMT)
12 (n) 539 (PV)
(i) $\rightarrow 1,6231\%$

apaga a memória financeira e entra com o valor da prestação *antecipada*
entra com o número de prestações *antecipadas* e com o valor à vista
calcula a taxa de juros efetiva mensal

Ou seja, a taxa de juros embutida na opção de 12 pagamentos é de 1,6231% a.m.

b) opção de pagamento semestral:

Pelo princípio de equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente dos pagamentos semestrais:

$$\$539 = \$275 + \$275 \times a_{n-1|i\%}$$

$$a_{11|i\%} = 0,960000 \Rightarrow i = 4,1667\% \text{ a.s.}$$

$$(1,041667)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0,6827\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C

(f) (FIN) 272 (CHS) (g) (BEG) (PMT)
2 (n) 539 (PV)
(i) $\rightarrow 4,1667\%$

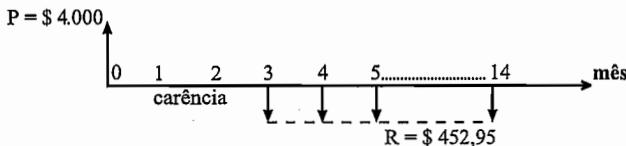
apaga a memória e entra com a prestação antecipada
entra com o número de prestações e valor à vista
calcula a taxa de juros semestral

A opção com dois pagamentos embute juros efetivos mensais menores que a opção com 12 pagamentos (0,6826% a.m. < 1,6231% a.m.). Logo, a decisão de pagar à vista ou em duas vezes dependerá basicamente da taxa de juros vigente para aplicações financeiras. Se essa taxa for superior a 0,6826% a.m., então valerá mais a pena manter o dinheiro aplicado ganhando essa taxa e pagar o contrato em duas vezes. Se esta taxa for inferior, a decisão mais adequada seria pagar à vista.

Exemplo 5.49

Um empréstimo de \$4.000 será liquidado em 14 parcelas antecipadas mensais de \$452,95 cada. Considerando que há um período de carência de três meses, calcular a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.

Dados: P = \$4.000, n = 14, c = 3, R = \$452,95, i = ?



- Fator financeiro para o processo de interpolação

O fator financeiro pode ser destacado se considerarmos que as prestações são calculadas com base no financiamento capitalizado por $c-1$ meses, onde c representa o término do período de carência:

$$R = \frac{P(1+i)^{c-1}}{\alpha_{n|}^{-1} i\%}$$

$$\$452,95 = \frac{\$4.000 \times (1+i)^{3-1}}{\left[\frac{(1+i)^{14}-1}{(1+i)^{16} \times i} \right]} \Rightarrow \left[\frac{(1+i)^{14}-1}{(1+i)^{16} \times i} \right] = 8,83100$$

- Interpolação linear

Taxa de juros aproximada:

$i\%$	$\frac{(1+i)^{14}-1}{(1+i)^{16} \times i}$
5,0%	8,97836
5,5%	8,61584

$$i = 5,5\% - \left[\frac{8,83100 - 8,61584}{8,97836 - 8,61584} \right] \times (5,5\% - 5,0\%) = 5,2033\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C

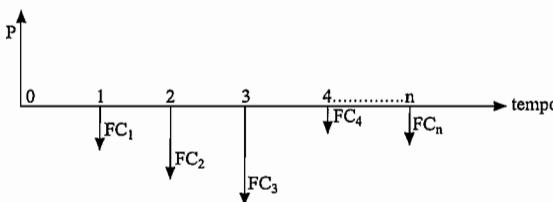
(f) (REG)
4.000 (g) (CF_0)
0 (g) (CF_J)
0 (g) (CF_J)
452,95 (CHS) (g) (CF_J)
14 (g) (N_J)
(f) (IRR) $\rightarrow 5,2\%$

apaga a memória financeira
entra com o valor do fluxo do mês 0
entra com o valor do fluxo do 1º mês
entra com o valor do fluxo do 2º mês
entra com o valor do fluxo do 3º mês
14 fluxos iguais ao do 3º mês
calcula a taxa de juros efetiva

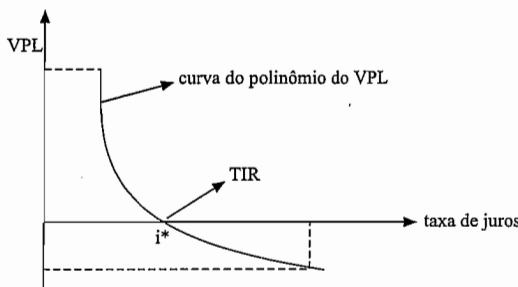
5.4 Taxa interna de retorno de séries mistas

O cálculo da Taxa Interna de Retorno (TIR) de séries mistas requer a resolução da seguinte equação para i^* :

$$VPL = P - \sum_{t=1}^n \frac{FC_t}{(1+i^*)^t} = 0$$



Por definição, a TIR é a taxa de juros que anula o Valor Presente Líquido (VPL) do fluxo de caixa. FC_t representa o fluxo de caixa no t -ésimo período, P é o fluxo inicial e \sum , símbolo de *somatório*, indica que deve ser realizada a soma da data 1 até a data n dos fluxos de caixa descontados ao período inicial ($t = 0$).



Não temos condições de desenvolver uma fórmula analítica única para o cálculo da TIR em fluxos mistos ou não-uniformes, portanto, o cálculo manual é usado para obtermos uma aproximação por meio de um processo relativamente demorado. As máquinas financeiras permitem o cálculo da TIR de fluxos mistos de forma fácil e rápida.

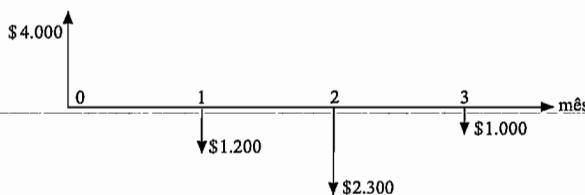
Exemplos de aplicação

Exemplo 5.50

Um financiamento de \$ 4.000 será pago em três parcelas postecipadas mensais consecutivas de \$ 1.200, \$ 2.300 e \$ 1.000, respectivamente. Calcular o custo efetivo do financiamento.

O custo efetivo do financiamento é a taxa interna de retorno do fluxo de caixa, ou seja, o valor de i^* que consegue anular o VPL:

$$VPL = \$4.000 - \frac{\$1.200}{(1+i^*)^1} - \frac{\$2.300}{(1+i^*)^2} - \frac{\$1.000}{(1+i^*)^3} = 0$$



O cálculo manual da TIR requer o cálculo de VPLs para diversas taxas de juros até provocar a mudança no sinal do VPL que permita realizar uma interpolação linear.

Taxa aproximada:

Taxa de juros	VPL
5%	- \$ 92,86
6%	- \$ 18,69
7%	+ \$ 53,30

$$\text{TIR } (i^*) = 6\% + \left(\frac{-18,69}{-18,69 - (+53,30)} \right) \times (7\% - 6\%) = 6,2596\%$$

A interpolação foi realizada entre as taxas de 6% e 7%, pois entre elas o VPL muda de sinal.

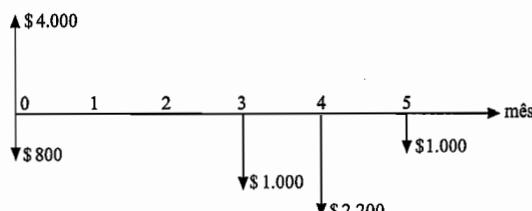
Calculadora HP-12C	
(f) (REG)	apaga a memória financeira
4.000 (g) (CF_0)	entra com o valor do fluxo no mês 0
1.200 (CHS) (g) (CF_1)	entra com o valor do fluxo no mês 1
2.300 (CHS) (g) (CF_2)	entra com o valor do fluxo no mês 2
1.000 (CHS) (g) (CF_3)	entra com o valor do fluxo no mês 3
(f) (IRR) $\rightarrow 6,2567$	calcula a TIR do fluxo

Exemplo 5.51

Uma compra cujo valor à vista é de \$4.000 pode ser paga com uma entrada de 20% mais três parcelas mensais antecipadas de \$1.000, \$2.200 e \$1.000, respectivamente. Considerando que existe um período de carência de três meses para início do pagamento das parcelas, calcular o custo efetivo do financiamento.

O custo efetivo do financiamento é a taxa i^* que satisfaz a seguinte equação:

$$VPL = \$4.000 - \$800 - \frac{\$1.000}{(1+i^*)^3} - \frac{\$2.200}{(1+i^*)^4} - \frac{\$1.000}{(1+i^*)^5} = 0$$



- Interpolação

Taxa de juros	VPL
7,0%	-\$ 7,65
7,5%	+\$ 51,12

$$\text{TIR} (i^*) = 7\% + \left[\frac{-7,65}{-7,65 - (+51,12)} \right] \times (7,5\% - 7\%) = 7,065\%$$

Calculadora HP-12C

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| (f) (REG) | apaga a memória financeira |
| 3.200 (g) (CF ₀) | entra com o valor do fluxo no mês 0 |
| 0 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 1 |
| 2 (g) (N _J) | o fluxo do mês 1 repete-se 2 vezes |
| 1.000 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 3 |
| 2.200 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 4 |
| 1.000 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 5 |
| (f) (IRR) → 7,064% | calcula a TIR do fluxo |

Exemplo 5.52

Um apartamento foi colocado à venda por \$ 107.800. A prazo pode ser pago com uma entrada de \$ 8.000 mais cinco prestações postecipadas mensais consecutivas, sendo as duas primeiras de \$ 18.000 e as três últimas de \$ 23.000. Considerando que o comprador tem a opção de aplicar seu capital em um fundo de renda fixa que renda juros efetivos de 1,4% a.m., qual será a melhor alternativa do ponto de vista financeiro, supondo-se que a pessoa tenha recursos para comprá-lo até mesmo à vista?

Pelo princípio de equivalência de capitais, o valor à vista deve ser igual ao valor presente do fluxo financeiro da alternativa de pagamento a prazo. Ou seja, o custo efetivo do financiamento é a taxa i^* que satisfaz a seguinte equação:

$$\text{VPL} = \$107.800 - \$8.000 - \frac{\$18.000}{(1+i^*)} - \frac{\$18.000}{(1+i^*)^2} - \frac{\$23.000}{(1+i^*)^3} - \frac{\$23.000}{(1+i^*)^4} - \frac{\$23.000}{(1+i^*)^5} = 0$$

Calculadora HP-12C

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (f) (REG) | apaga a memória financeira |
| 99.800 (g) (CF ₀) | entra com o valor do fluxo no mês 0 |
| 18.000 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 1 |
| 18.000 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 2 |
| 23.000 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 3 |
| 23.000 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 4 |
| 23.000 (CHS) (g) (CF _J) | entra com o valor do fluxo no mês 5 |
| (f) (IRR) → 1,6375% | calcula a TIR do fluxo |

O custo financeiro da alternativa de pagamento a prazo é de 1,6375% a.m., ou seja, é maior que a rentabilidade do capital que, neste caso, é de 1,4% a.m. Consequentemente, a melhor opção é comprar à vista.

5.5 Exercícios propostos

Atenção: Na resolução dos exercícios considerar, salvo menção em contrário, anos comerciais de 360 dias e fluxos postecipados (termos vencidos).

1. Um financiamento de \$132.000 será liquidado em 14 prestações mensais. Considerando uma taxa de juros efetiva de 3% a.m., calcular o valor da prestação na hipótese de serem pagas: a) postecipadamente (fim de cada mês); b) antecipadamente (início de cada mês).
2. Uma pessoa deposita \$2.450 todo fim de mês em um fundo de investimento que paga juros nominais de 120% a.a. capitalizados mensalmente. Calcular o montante da aplicação no fim do 16º mês.
3. Uma compra no valor de \$16.000 será paga por meio de uma entrada de 20% e um determinado número de prestações mensais de \$4.038,02, sendo a primeira, um mês após a compra. A juros efetivos de 10% a.m., calcular o número de prestações necessárias para liquidar a dívida.
4. Uma máquina é vendida em 12 prestações mensais de \$307. A juros efetivos de 10% a.m., qual deveria ser seu valor à vista?
5. Calcular o valor da aplicação mensal necessária que permita acumular ao fim de 16 meses um montante de \$2.300.000, considerando um rendimento efetivo de 6% a.m.
6. Por uma compra no valor de \$5.000 será paga uma entrada de 20% e prestações quinzenais durante dois anos. A juros efetivos de 26,9735% a.a., calcular o valor da prestação.
7. Um investidor aplicou mensalmente \$4.900 durante 14 meses. Considerando que no fim do 14º mês o saldo da aplicação foi de \$110.497,40, calcular a taxa de juros efetiva ganha.
8. Um bem de \$350 pode ser pago por meio de uma entrada mais quatro prestações bimestrais de \$100. A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor da entrada.
9. Considerando uma remuneração efetiva de 6% a.m., calcular a aplicação necessária a ser feita hoje que permita sacar mensalmente \$3.280 durante os próximos 19 meses. O primeiro saque ocorre daqui a 30 dias.
10. Uma pessoa financiou uma compra no valor de \$43.000 em 12 prestações mensais de \$7.932,64. Calcular a taxa de juros efetiva mensal cobrada pelo financiamento.
11. A juros efetivos de 8% a.m., em que prazo pode ser liquidado um financiamento de \$2.300 pagando-se prestações mensais de \$278,98?
12. Determinar a taxa de juros efetiva mensal cobrada por um empréstimo de \$132.000 que será reembolsado por meio de 13 prestações mensais de \$15.793,91.
13. Um eletrodoméstico de \$330 será pago por meio de uma entrada de 15% mais oito prestações mensais. A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor das prestações na hipótese de serem: a) postecipadas; b) antecipadas.
14. Pretende-se acumular um capital de \$400.000 depositando semanalmente \$9.651,05 em uma aplicação que rende juros efetivos de 36,05% a.m. Quantos depósitos serão necessários?
15. Por uma compra no valor de \$375 pagam-se 12 prestações mensais antecipadas (a primeira paga no ato da compra). A juros efetivos de 8% a.m., calcular o valor da prestação.

16. Um empréstimo de \$ 1.000.000 será pago com 11 prestações anuais de \$ 150.000 cada. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada, considerando que as prestações serão:
a) postecipadas; b) antecipadas.
17. Um bem é vendido à vista por \$ 15.000 ou a prazo em prestações mensais de \$ 885,71. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o número de prestações necessárias.
18. Na compra de um espectrômetro cujo valor à vista é de \$ 50.000, um laboratório farmacêutico deverá pagar uma entrada e seis prestações mensais de \$ 8.391,83. A juros efetivos de 7% a.m., calcular o valor da entrada.
19. Uma pessoa, ao comprar um carro cujo preço à vista é de \$ 14.000, teve o seu usado avaliado em \$ 6.000 e aceito como entrada. O saldo será pago em 20 parcelas mensais iguais a juros efetivos de 6% a.m. Calcular o valor da prestação mensal considerando que a primeira parcela será paga: a) um mês após a compra; b) na data da compra.
20. Por um equipamento, cujo valor à vista é de \$ 40.000, paga-se uma entrada de 20% mais 18 prestações mensais antecipadas com carência de três meses até o início da primeira. A juros efetivos de 3% a.m., determinar o valor das prestações.
21. Uma pessoa deposita mensalmente \$ 120 durante 13 meses em uma aplicação que rende juros efetivos de 4% a.m. Considerando que ela pretenda resgatar o capital por meio de três saques mensais iguais e consecutivos (o primeiro um mês depois do último depósito), calcular o valor de cada saque.
22. Por política de crédito nas vendas à prazo, uma loja aumenta em 25% o valor à vista. Desse valor aumentado, 20% é pago como entrada e o saldo restante é dividido em 6 parcelas mensais iguais. Determinar a taxa de juros efetiva mensal cobrada no financiamento.
23. Um financiamento será pago em oito prestações mensais de \$ 66.000 mais 14 prestações de \$ 13.500 nos meses subseqüentes. Considerando que as taxas de juros efetivas sejam de 10% a.m. para o primeiro ano e 15% a.m. para o segundo ano, respectivamente, e o vendedor proponha a possibilidade de o débito ser liquidado por meio de um pagamento único no quinto mês, qual o valor deste pagamento?
24. Um eletrodoméstico será pago por meio de uma entrada mais 12 prestações mensais iguais e consecutivas. Se cada prestação é igual a 10% do valor à vista, sendo a primeira paga logo ao término de um período de carência de quatro meses e considerando uma taxa de juros efetiva composta de 4% a.m., calcular o percentual sobre o valor à vista que deve ser pago como entrada.
25. Uma instituição financeira concede um período de carência para início dos reembolsos em operações de empréstimo. Um financiamento de \$ 380.000 será pago em sete prestações mensais antecipadas de \$ 159.748,88 cada. A juros efetivos de 15% a.m., determinar o período de carência concedido.
26. O seguro de um automóvel pode ser pago à vista por \$ 800, ou em oito prestações mensais de \$ 128,83. Considerando que está sendo cobrada uma taxa de juros nominal anualizada, calculá-la nas seguintes hipóteses sobre a capitalização dos juros: a) mensal; b) semestral; c) trimestral; d) bimestral; e) anual.
27. Uma pessoa deposita mensalmente \$ 280 em um fundo de investimento que paga juros efetivos de 5% a.m. No futuro pretende resgatar o investimento por meio de cinco saques semestrais de \$ 14.253,54, sendo o primeiro iniciado cinco meses após o último depósito. Quantos depósitos serão necessários?

28. Um equipamento cujo valor à vista é de \$ 33.000 pode ser pago por meio de uma entrada e 18 prestações mensais antecipadas de \$ 2.489,91 cada. Considerando um período de carência de três meses para início do pagamento das prestações, calcular o valor da entrada a juros efetivos de 5% a.m.
29. Um equipamento de \$ 6.000 será pago com uma entrada de 50% e tantas prestações mensais de \$ 880 quantas forem necessárias mais um pagamento residual inferior ao valor da prestação, que deve ser efetuado um mês após a data do vencimento da última parcela. Considerando que a primeira prestação vence três meses após a data da compra e uma taxa de juros efetiva cobrada de 7% a.m., determinar o número de prestações necessárias e o valor do pagamento residual.
30. Para liquidar um financiamento dispõe-se de duas formas de pagamento financeiramente equivalentes: na primeira são pagas 13 prestações mensais de \$ 834 e na segunda, 16 prestações de \$ 708 mais uma determinada quantia paga no fim do 17º mês. A juros efetivos de 7% a.m., calcular o valor da referida quantia.
31. Uma pessoa tornou um empréstimo de \$ 200.000 contratado a juros efetivos de 2% a.m. para ser liquidado em dez prestações mensais. Depois de serem pagas cinco prestações, ela resolve tomar \$ 80.000 adicionais, incorporando essa nova dívida ao saldo da primitiva em um só negócio. Considerando a mesma taxa de juros, calcular o valor da nova dívida e sua prestação para liquidação nos cinco meses restantes.
32. Um carro é vendido por \$ 10.000 à vista ou por meio de uma entrada de 10% mais um determinado número de prestações mensais de \$ 500. Deve-se pagar, além das prestações mensais, três parcelas semestrais de \$ 632,82. A juros efetivos de 2% a.m., determinar o número de prestações mensais necessárias.
33. Um mutuário deverá reembolsar um empréstimo por meio de 25 prestações mensais de \$ 20.000 cada. Querendo abreviar em um ano o prazo de quitação, o mutuário propõe efetuar um pagamento extraordinário juntamente com a sexta prestação. A juros efetivos de 1% a.m., determinar o valor desse pagamento.
34. Uma pessoa compra um apartamento de \$ 150.000 nas seguintes condições: entrada de \$ 50.000 mais um determinado número de prestações mensais antecipadas de \$ 1.338,99 cada, com um ano de carência para início dos pagamentos. Considerando uma taxa de juros efetiva contratada de 1% a.m., calcular o número de prestações.
35. Um bem será pago em quatro prestações trimestrais de \$ 135.000. Para suavizar os pagamentos, o comprador pediu a modificação do prazo para 15 prestações mensais. Considerando uma taxa de juros efetiva cobrada de 7% a.m., calcular o valor das prestações mensais.
36. Uma máquina é vendida em 18 prestações mensais postecipadas. As prestações de ordem ímpar são de \$ 2.000 e as de ordem par, de \$ 2.800. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o valor do financiamento.
37. Por um financiamento pagam-se cinco prestações mensais de \$ 1.500 começando ao término de um período de carência de cinco meses. Um mês após o pagamento da última prestação, inicia-se o pagamento de mais quatro parcelas mensais de \$ 1.000. A juros efetivos de 7% a.m., calcular o valor do financiamento.
38. Um funcionário prevendo sua aposentadoria resolve efetuar nos próximos dois anos depósitos mensais iguais em um fundo de pecúlio. O primeiro depósito é efetuado ao

término do primeiro mês e a totalidade do capital acumulado, resgatada por meio de dez retiradas semestrais de \$80.000, ocorrendo a primeira dois anos após o último depósito. Considerando um rendimento efetivo do fundo de 4% a.m., determinar o valor dos depósitos mensais.

39. Um capitalista comprou um prédio de apartamentos pagando \$825.000 de entrada e prometendo pagar \$180.000 de três em três meses, durante cinco anos. Considerando uma taxa de juros efetiva aplicada de 4,5% ao trimestre, pede-se: a) calcular o valor à vista do prédio; b) determinar de quanto deverá ser o pagamento a ser feito no vencimento da 13^a prestação para ficar em dia, caso deixe de efetuar os 12 primeiros pagamentos; c) determinar quanto deverá pagar depois de realizar oito pagamentos, caso deseje liquidar a dívida por meio de um único pagamento por ocasião do vencimento normal da 9^a prestação e quanto deverá pagar além da prestação então devida; d) determinar quanto deverá pagar no vencimento da 11^a prestação de modo que liquide a dívida, caso deixe de pagar as dez primeiras prestações.
40. Um financiamento será pago por meio de um determinado número de prestações mensais. Sabe-se que a razão entre o montante das prestações e o valor do financiamento é de 3,1721682. A juros efetivos de 8% a.m., determinar o número de prestações.
41. Um bem cujo valor à vista é de \$5.000 será pago por meio de uma entrada de 20%, 18 prestações mensais de \$310 mais uma quantia de \$905,44 paga junto com a última prestação. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.
42. Um automóvel cujo valor à vista é de \$20.000 será pago por meio de uma entrada de 10%, 24 prestações mensais de \$800 e quatro parcelas semestrais iguais. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o valor das parcelas semestrais.
43. Um bem cujo valor à vista é de \$8.000 será pago por meio de uma entrada de 25%, nove prestações mensais iguais e um pagamento final de \$400 um mês após a última prestação. Considerando que será concedida uma carência de três meses para início do pagamento das prestações, calcular o valor das prestações a juros efetivos de 3% a.m.
44. Um veículo cujo valor à vista é de \$10.000 será pago por meio de uma entrada de 20%. O saldo será pago em um determinado número de prestações mensais de \$530 mais uma quantia residual inferior a 20% do valor da prestação mensal, paga um mês depois da última prestação. A juros efetivos de 2% a.m., determinar o número de prestações e o valor da quantia residual.
45. Uma pessoa pretende depositar mensalmente uma determinada quantia fixa durante 17 meses a juros efetivos de 3% a.a.. Considerando que o primeiro depósito ocorre daqui a 30 dias, e deseja-se que os juros ganhos no período totalizem \$1.428,48, determinar o valor do depósito mensal.
46. Um equipamento que custa \$15.000 será pago em oito prestações mensais, a saber: as três primeiras de \$2.000, as três seguintes de \$800, a sétima de \$3.000 e a oitava de \$5.000. Determinar a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.
47. Um financiamento será pago em 15 prestações mensais antecipadas e consecutivas, iniciando logo ao término de um período de carência de seis meses. As primeiras cinco prestações serão de \$12.000, as cinco seguintes de \$14.000 e as cinco últimas de \$17.000. Se esse esquema de pagamentos for trocado por outro em que o mutuário pague 15 prestações mensais iguais, também iniciando logo após um período de carência de seis

meses, calcular o valor unitário dessas prestações considerando que a taxa de juros de 3% a.m. será a mesma para qualquer plano de pagamento.

48. Uma pessoa deseja comprar um automóvel de \$ 15.000. Como no momento não tem o dinheiro necessário, pretende efetuar depósitos mensais iguais em um banco que paga uma taxa nominal de 24% a.a. capitalizada mensalmente. Considerando que o primeiro depósito será efetuado daqui a um mês e a pessoa somente pode esperar três anos para comprar o automóvel, quanto deverá depositar mensalmente?
49. Um empréstimo tomado hoje será reembolsado em 12 prestações mensais de \$ 2.443,80 cada, a primeira para 30 dias. Se os juros a serem pagos durante o período totalizam \$ 5.000, determinar a taxa de juros efetiva mensal contratada.
50. Que taxa de juros efetiva ao ano transforma 36 prestações mensais de \$ 100,00 em 12 prestações trimestrais de \$ 309,09 cada?
51. Tendo comprado uma motocicleta em 24 prestações mensais de \$ 210, o cliente propõe sua substituição para 12 prestações bimestrais. Qual será o valor dessa nova prestação considerando uma taxa de juros de 2% a.m.?
52. Um empréstimo de \$ 20.000 contratado a juros efetivos de 2% ao mês será reembolsado em dois anos por meio de pagamentos a cada 90 dias. Se durante o primeiro ano deve ser amortizado 40% do empréstimo e o resto no segundo, calcular o valor do pagamento trimestral a ser efetuado em cada ano considerando-se que incidem juros sobre os saldos pendentes não amortizados.
53. Uma empresa tomou um empréstimo de \$ 10.000 contratado a juros efetivos de 2% ao mês para ser reembolsado em 16 pagamentos trimestrais iguais, o primeiro para 90 dias. Imediatamente após efetuar o décimo pagamento, a empresa decide liquidar o resto da dívida. Qual o importe a ser pago?
54. Uma pessoa pode comprar à vista por \$ 17.000 ou a crédito pagando 20 prestações trimestrais postecipadas de \$ 3.000 cada. Se a pessoa pode aplicar seus recursos ganhando uma taxa efetiva de 5% a.m., qual é a melhor alternativa?
55. Com o objetivo de retirar \$ 778,26 a cada 30 dias, aplica-se \$ 10.000 em um investimento que rende uma taxa efetiva de 2% a.m. Se o primeiro saque ocorre daqui a 1 mês, quantos saques serão possíveis?
56. Um equipamento cujo valor à vista é de \$ 8.000 é comprado em 2 de maio pagando-se uma entrada de \$ 4.000 e prestações de \$ 923,90 a cada 30 dias. Quantas prestações serão necessárias para liquidar totalmente o financiamento? Em que data será paga a última? Considere que o banco financiador cobra uma taxa efetiva de 5% a.m. Utilize a tábua do Capítulo 1.
57. Um empréstimo contratado à taxa efetiva de 4% a.m. foi liquidado por meio de 12 prestações mensais postecipadas de \$ 500 cada. Quanto totalizaram os juros pagos no período?
58. Um empréstimo contratado a juros efetivos de 3% a.m. foi liquidado por meio de 20 prestações mensais postecipadas. Se os juros pagos no período totalizaram \$ 1.024,51, determinar o valor da prestação.
59. Desejando dispor de \$10.000 dentro de 12 meses, uma pessoa começa hoje a depositar mensalmente em uma aplicação que rende juros efetivos de 2% a.m. Qual o valor de cada depósito antecipado de modo que disponha da quantia ao término do 12º mês?

60. No exercício anterior, se a quantia deve estar disponível no início do 12º mês, qual o valor do depósito mensal antecipado?
61. Com quantos depósitos trimestrais vencidos de \$300 pode ser acumulado um montante de \$3.000 a uma taxa efetiva de 3% a.t.? (A HP-12C arredonda o resultado. Usar logaritmos.)
62. A juros efetivos de 1% a.m., quantos depósitos mensais de \$150 serão necessários para acumular um capital de \$2.000? (A HP-12C arredonda o resultado. Usar logaritmos.)
63. De modo que possa sacar \$500/mês, uma pessoa aplicou \$12.000 à taxa efetiva de 3% a.m. Quantos saques mensais poderão ser efetuados se o primeiro inicia um mês depois da aplicação inicial? (A HP-12C arredonda o resultado. Usar logaritmos.)
64. Uma pessoa deve pagar 22 parcelas trimestrais postecipadas de \$350 cada. Se no vencimento da 15ª parcela decide liquidar a dívida, qual o valor a ser pago se a taxa efetiva aplicada for de 9% a.t.?
65. Substituir 4 prestações mensais postecipadas (vencidas) de \$500 por 9 prestações equivalentes antecipadas. A taxa efetiva é de 2% a.m.
66. Um financiamento contratado à taxa efetiva de 10% a.m. foi quitado por meio de cinco prestações mensais postecipadas. Considerando que os juros pagos no período totalizam \$3.189,87, calcular o valor da prestação mensal.
67. Um financiamento a juros efetivos de 2% a.m. foi quitado por meio de um determinado número de prestações mensais postecipadas de \$4.243,17 cada. Se os juros pagos no período totalizam \$1.215,84, determinar o número de prestações contratadas.
68. Uma pessoa aplicou mensalmente \$1.000 durante 36 meses em um fundo de renda fixa. Se na data da última aplicação o extrato do fundo mostra que foram ganhos ao todo \$15.994,37 de juros, calcular a taxa mensal ganha.

5.6 Respostas dos exercícios propostos

1. a) \$11.685,48; b) \$11.345,12	15. \$46,07
2. \$88.076,84	16. 9,4377% a.a.; 11,9291% a.a.
3. 4	17. 24
4. \$2.091,80	18. \$10.000
5. \$89.589,93	19. \$697,48; \$658
6. \$105,34	20. \$2.468,37
7. 7% a.m.	21. \$718,97
8. \$34,72	22. 8,8950% a.m.
9. \$36.598,62	23. \$633.988,17
10. 15% a.m.	24. 16,5670%
11. 14 meses	25. 5 meses
12. 7% a.m.	26. 72% a.a.; 83,70% a.a.; 76,41% a.a.; 74,16% a.a.; 101,22% a.a.
13. \$43,40; \$41,33	27. 40
14. 19	

- 28.** \$ 6.599,98 **50.** 42,58% a.a.
29. 4; \$ 636,69 **51.** \$ 424,20
30. \$ 890,96 **52.** 1º ano = \$ 2.315,12;
 2º ano = \$ 4.404,20
31. \$ 184.946,64; \$ 39.237,98 **53.** \$ 4.887,68
32. 18 **54.** \$ 17.000 < \$ 18.013,60 (melhor
 à vista)
33. \$ 209.956,28 **55.** 15
34. 180 **56.** 5 prestações – 29 de setembro
35. \$ 36.619,70 **57.** \$ 1.307,46
36. \$ 32.927,13 **58.** 200
37. \$ 6.534,45 **59.** \$ 730,98
38. \$ 3.446,34 **60.** \$ 745,60
39. \$ 3.166.428,56; \$ 3.088.784,39;
 \$ 1.535.205,05; \$ 3.799.794,47 **61.** 8 depósitos de \$ 300 e um 9º
 depósito de \$ 252,27
40. 15 **62.** 12 depósitos de \$ 150 e um
 13º depósito de \$ 78,60
41. 5% a.m. **63.** 43 saques de \$ 500 e um último
 de \$ 33,22
42. \$ 1.700,24 **64.** \$ 2.111,53
43. \$ 779.3061 **65.** \$ 228,68
44. 18; \$ 78,99 **66.** \$ 2.637,97
45. \$ 300 **67.** 5 prestações
46. 1,7577329475% a.m. **68.** 2% a.m.
47. \$ 14.089,11
48. \$ 288,49
49. 3% a.m.

SÉRIES VARIÁVEIS

CAPÍTULO

6

- Progressão aritmética
- Progressão geométrica
- Perpetuidades: custo capitalizado

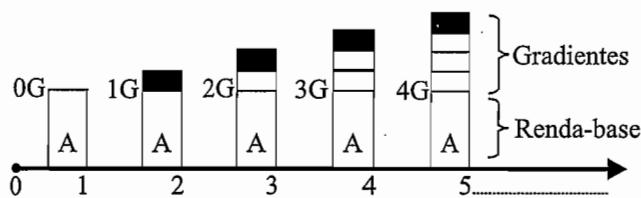
6.1 Séries variáveis

São comuns as situações em que as projeções dos fluxos de caixa das aplicações financeiras ou dos projetos de investimento são crescentes ou decrescentes ao longo do tempo. Neste capítulo veremos basicamente dois tipos desses fluxos: o primeiro é denominado séries variáveis em progressão aritmética e o segundo, séries variáveis em progressão geométrica.

No caso das séries variáveis em progressão aritmética, serão desenvolvidas e apresentadas fórmulas para o cálculo do valor atual e do montante. Para facilitar os cálculos e seguindo a didática adotada neste livro, todas essas equações serão obtidas a partir dos fatores das séries uniformes postecipadas, já estudadas no Capítulo 5. Finalizando o capítulo, calcularemos o valor atual de séries perpétuas que crescem a uma taxa constante e o custo capitalizado de ativos que devem ser mantidos permanentemente e que originam desembolsos que constituem uma renda perpétua.

6.2 Gradiientes uniformes

Em uma anuidade vencida cujos termos ou rendas variam de acordo com uma lei predeterminada, denomina-se gradiente a diferença entre duas rendas. O diagrama a seguir mostra uma anuidade postecipada com gradiente uniforme:

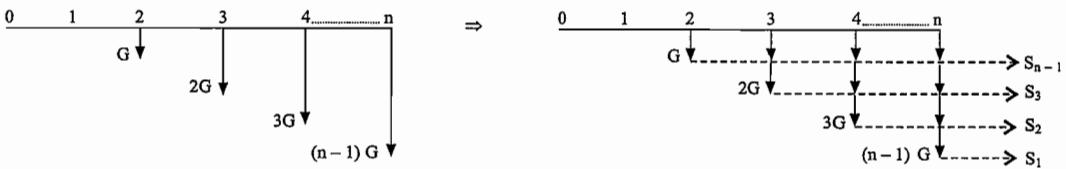


Cada termo da anuidade é constituído pela renda-base mais os gradientes acumulados, sendo a renda-base um importe igual à primeira anuidade. G representa o gradiente uniforme e A o valor da renda-base.

6.2.1 Séries em progressão aritmética crescente

6.2.1.1 Séries postecipadas

A seguir apresentam-se os diagramas da série dos gradientes (postecipada) e de sua decomposição em $n-1$ séries uniformes com termos iguais ao gradiente G:



- montante da série:

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} \\
 &= G \left\{ \frac{(1+i)-1}{i} + \frac{(1+i)^2 - 1}{i} + \frac{(1+i)^3 - 1}{i} + \dots + \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} \right\} \\
 &= \frac{G}{i} \left\{ (1+i) - 1 + (1+i)^2 - 1 + (1+i)^3 - 1 + \dots + (1+i)^{n-1} - 1 \right\} \\
 &= \frac{G}{i} \left\{ \left[(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1} \right] + (1-n) \right\}
 \end{aligned}$$

A expressão entre colchetes é a soma de uma progressão geométrica de $n - 1$ termos, em que o primeiro termo (a_1) é igual a 1 e a razão (q) igual a $1 + i$.

Utilizando a fórmula da soma das progressões geométricas:

$$S = \frac{G}{i} \left\{ \left[\frac{a_1 \times (q^{n-1} - 1)}{q - 1} \right] + (1-n) \right\} = \frac{G}{i} \left\{ \left[\frac{(1+i) \times ((1+i)^{n-1} - 1)}{(1+i) - 1} \right] + (1-n) \right\}$$

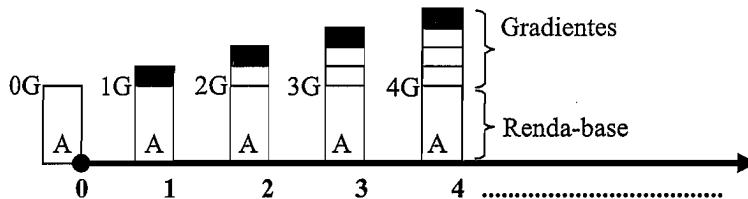
$$S = \frac{G}{i} \left\{ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - n \right\} = \frac{G}{i} (s_{n|i\%} - n)$$

O valor presente da série é igual ao montante descontado n períodos à taxa de juros efetiva i :

$$P = \frac{G}{i} \left\{ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - n \right\} \Rightarrow P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] = \frac{G}{i(1+i)^n} \left[s_{n|i\%} - n \right]$$

6.2.1.2 Séries antecipadas

O diagrama a seguir apresenta uma anuidade antecipada com gradiente uniforme:



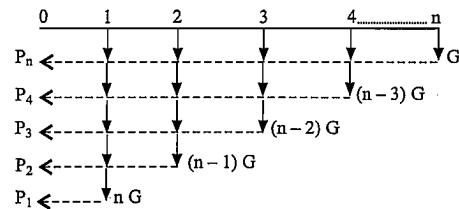
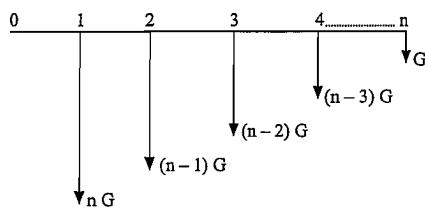
Seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, podemos obter as seguintes expressões para o montante e para o valor presente de séries antecipadas com gradiente uniforme:

$$\begin{aligned} S &= \frac{G}{i} \left[(1+i) \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right) - n \right] \\ &= \frac{G}{i} \left[(1+i) \times s_{n|i\%} - n \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{G}{i} \left[(1+i) \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right) - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \\ &= \frac{G}{i} \left[(1+i) \times a_{n|i\%} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \end{aligned}$$

6.2.2 Séries em progressão aritmética decrescente

A seguir apresenta-se uma série gradiente uniforme e a sua decomposição em $n - 1$ séries uniformes com termos iguais ao gradiente G :



O valor presente da série é igual à soma dos valores presentes das n séries uniformes:

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n \\
 &= G \left[\frac{(1+i)^1 - 1}{(1+i)^1 \times i} \right] + G \left[\frac{(1+i)^2 - 1}{(1+i)^2 \times i} \right] + G \left[\frac{(1+i)^3 - 1}{(1+i)^3 \times i} \right] + \dots + G \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]
 \end{aligned}$$

Tomando o mínimo múltiplo comum e simplificando algebraicamente:

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-1} \right] \right\}$$

O somatório entre colchetes é uma progressão geométrica com n termos, em que o primeiro termo é igual a $a_1 = 1$ e a razão, igual a $q = 1 + i$.

Utilizando a fórmula da soma das progressões geométricas:

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \right] \right\} = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{1 \times ((1+i)^n - 1)}{(1+i) - 1} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \right\} \\
 &= \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - s_{n|i\%} \right\}
 \end{aligned}$$

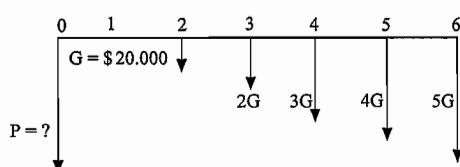
$$\begin{aligned}
 S &= \frac{G}{i} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \right\} \\
 &= \frac{G}{i} \left\{ n(1+i)^n - s_{n|i\%} \right\}
 \end{aligned}$$

Exemplos de aplicação

Exemplo 6.1

Quanto devemos aplicar hoje, a uma taxa de juros efetiva de 6% a.m., de modo que sejam possibilidos cinco saques consecutivos? O primeiro saque deverá ser de \$20.000 daqui a dois meses e os outros gradativamente crescentes, formando uma série gradiente uniforme igual a \$20.000, \$40.000, \$60.000, \$80.000 e \$100.000.

- Diagrama de fluxo da série



- Montante da série gradiente

$$S = \frac{G}{i} \left[s_{n|i\%} - n \right] = \frac{\$20.000}{0,06} \times \left(s_{6|6\%} - 6 \right) = \left(\frac{\$20.000}{0,06} \right) \times (6,97532 - 6) = \$325.106,64$$

- Valor presente da série

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = \frac{\$325.106,64}{1,41852} = \$229.187,23$$

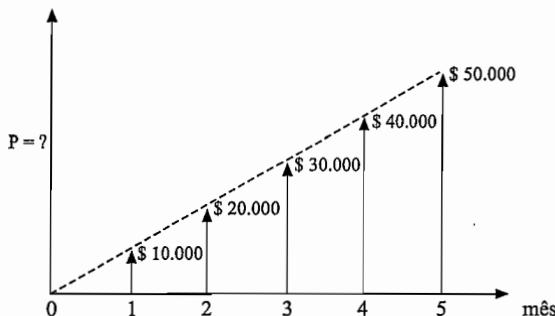
Podemos calcular o valor presente aplicando diretamente a fórmula das séries postecipadas:

$$P = \left(\frac{G}{i(1+i)^n} \right) \left(s_{n|i\%} - n \right) = \left(\frac{\$20.000}{0,06 \times (1,06)^6} \right) \times \left(s_{6|6\%} - 6 \right) = \left(\frac{\$20.000}{0,06 \times 1,41852} \right) \times (6,97532 - 6) \\ = \$229.187,23$$

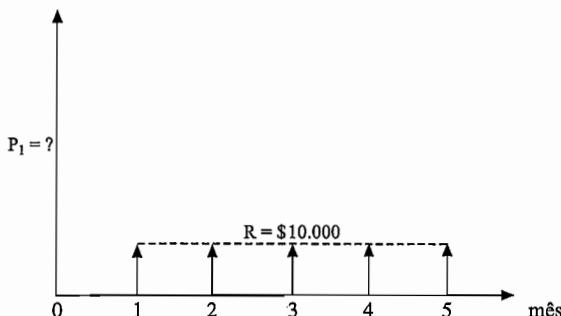
Exemplo 6.2

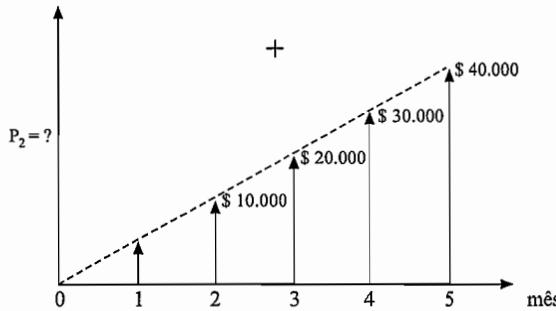
Uma máquina permite uma economia de custos de \$ 10.000 no 1º ano e gradativamente crescente até o 5º ano de sua vida útil. Considerando uma taxa de juros efetiva de 12% a.a., calcular o valor atual dessa economia de custos.

- Diagrama de fluxo da economia de custos



- O fluxo da economia de custos é igual à soma das duas seguintes séries





O valor presente da economia de custos será igual à soma dos valores presentes das duas séries:

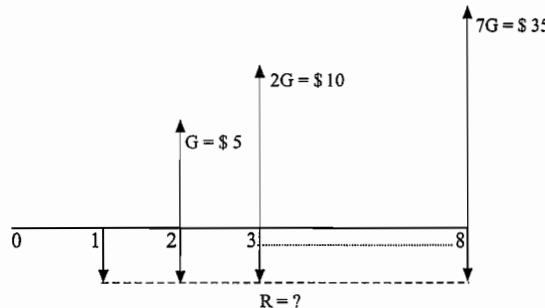
$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 \\
 &= R \times a_{\bar{n}|i\%} + \left(\frac{G}{i(1+i)^n} \right) (s_{\bar{n}|i\%} - n) \\
 &= \$10.000 \times a_{\bar{5}|12\%} + \left(\frac{\$10.000}{0,12 \times (1,12)^5} \right) \times (s_{\bar{5}|12\%} - 5) \\
 &= \$10.000 \times 3,60478 + \left(\frac{\$10.000}{0,12 \times 1,76234} \right) \times (6,35285 - 5) = \$100.018
 \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos realizar o cálculo usando a fórmula das séries antecipadas:

$$P = \frac{G}{i} \left[(1+i) \times a_{\bar{n}|i\%} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] = \frac{\$10.000}{0,12} \times \left[1,12 \times a_{\bar{5}|12\%} - \frac{5}{(1,12)^5} \right] = \$100.018$$

Exemplo 6.3

Quanto deverá ser aplicado de forma uniforme postecipada durante oito meses a uma taxa efetiva de 5% a.m. para que possamos efetuar, já a partir do término do segundo mês, uma série de sete saques gradativamente crescentes, em que o primeiro seja igual a $G = \$5$, formando com os outros uma série gradiente uniforme igual a $G, 2G, 3G, \dots, 7G$?



Podemos realizar o cálculo do montante usando a fórmula das séries postecipadas:

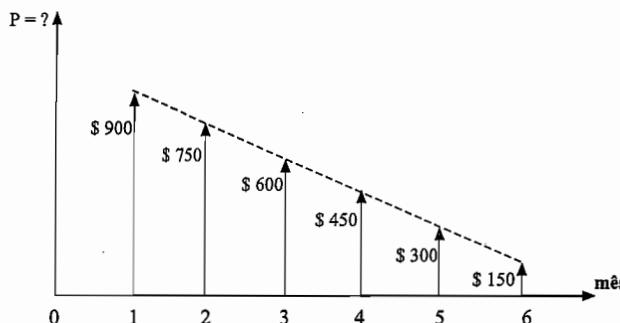
$$S = \frac{G}{i} \left[s_{n|i\%} - 1 \right] = \frac{\$5}{0,05} \times (s_{8|5\%} - 1) = \$100 \times (9,549109 - 1) = \$154,91$$

Cálculo do valor dos termos da série uniforme, equivalente à série gradiente:

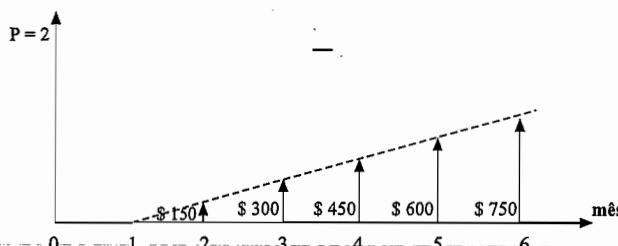
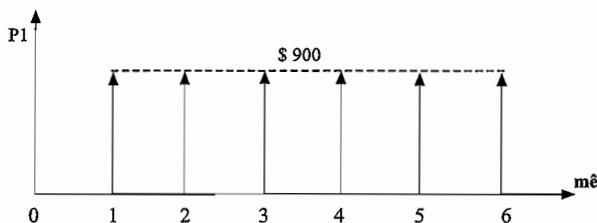
$$R = \frac{S}{s_{8|5\%}} = \frac{\$154,91}{9,549109} = \$16,22$$

Exemplo 6.4

Considerando uma taxa de juros efetiva de 10% a.m., calcular o valor presente e o montante da seguinte série gradiente uniforme decrescente com seis termos postecipados:



A série representada no diagrama acima é igual à diferença das seguintes duas séries:



logo:

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 - P_2 \\
 &= R \times a_{\bar{n}|i\%} - \frac{G}{i(1+i)^n} (s_{\bar{n}|i\%} - n) \\
 &= \$900 \times a_{\bar{6}|10\%} - \frac{\$150}{0,10 \times (1,10)^6} \times (s_{\bar{6}|10\%} - 6) \\
 &= \$900 \times 4,35526 - \frac{\$150}{0,10 \times 1,77156} \times (7,71561 - 6) = \$2.467,11
 \end{aligned}$$

Aplicando diretamente a fórmula do valor presente das séries decrescentes:

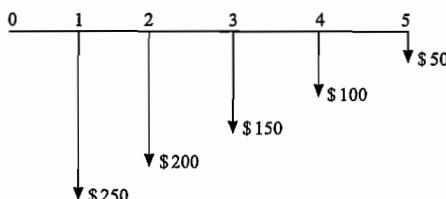
$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left[n(1+i)^n - s_{\bar{n}|i\%} \right] = \frac{\$150}{0,10 \times (1,10)^6} \times \left[6 \times (1,10)^6 - s_{\bar{6}|10\%} \right] = \$2.467,11$$

O montante pode ser encontrado capitalizando o principal por seis meses:

$$S = P(1+i)^n = \$2.467,11 \times (1,10)^6 = 4.370,63$$

Exemplo 6.5

Calcular a taxa de juros efetiva cobrada em um financiamento de \$692,78 que será pago em cinco prestações mensais segundo o esquema a seguir.



- Valor presente da série decrescente

$$P = \frac{G}{i(1+i)^n} \left\{ n(1+i)^n - \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \right\}$$

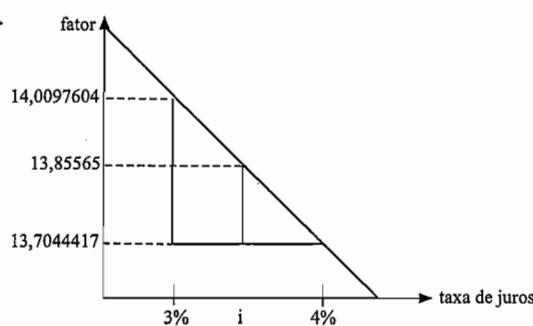
- Substituindo valores e interpolando a taxa:

$$692,78 = \frac{\$50}{i(1+i)^5} \left\{ 5(1+i)^5 - \left[\frac{(1+i)^5 - 1}{i} \right] \right\}$$

$$\frac{\$692,78}{\$50} = \frac{5}{i} - \left[\frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 i^2} \right]$$

$$13,85565 = \frac{1}{i} \left\{ 5 - \left[\frac{(1+i)^5 - 1}{(1+i)^5 i} \right] \right\}$$

$$13,85565 = \frac{1}{i} \left\{ 5 - a_{5|i\%} \right\} = \text{fator}$$



No diagrama, podemos fazer uma proporcionalidade:

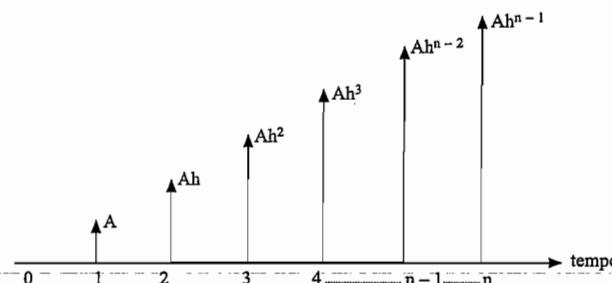
$$\frac{13,85565 - 13,7044417}{4 - i} = \frac{14,0097604 - 13,7044417}{4 - 3} \Rightarrow i = 3,5\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C
(f) (REG)
692,78 (CHS) (g) (CF ₀)
250 (g) (CF ₁)
200 (g) (CF ₂)
150 (g) (CF ₃)
100 (g) (CF ₄)
50 (g) (CF ₅)
(f) (IRR) → 3,5%

6.3 Séries variáveis em progressão geométrica – valor presente de perpetuidades crescentes

A seguir apresenta-se o diagrama de uma série de pagamentos em progressão geométrica e o cálculo de seu valor presente:

$$P = \frac{A}{(1+i)} + \frac{Ah}{(1+i)^2} + \frac{Ah^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{Ah^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{Ah^{n-1}}{(1+i)^n}$$



Observa-se que P é a soma de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{h}{(1+i)}$ e o primeiro termo é igual a $a_1 = \frac{A}{(1+i)}$.

Utilizando a fórmula da soma das progressões geométricas:

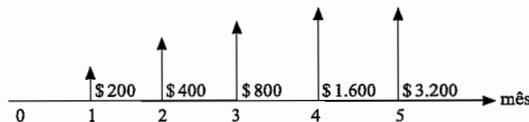
$$P = \left[\frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1} \right] = \left[\frac{\frac{A}{(1+i)} \times \left(\left(\frac{h}{1+i} \right)^n - 1 \right)}{\left(\frac{h}{1+i} \right) - 1} \right] \Rightarrow P = \frac{A}{(1+i)^n} \left[\frac{h^n - (1+i)^n}{h - (1+i)} \right]$$

A fórmula anterior serve tanto para o cálculo do valor presente de séries geométricas crescentes quanto para séries decrescentes, basta que a razão (h) seja calculada com '+c' para as séries crescentes e com '-c' para as decrescentes.

Exemplos de aplicação

Exemplo 6.6

A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor presente e o montante de uma série conforme o esquema a seguir:



onde: $c = 1$ (100%); $h = (1 + c) = 2$.

A razão de crescimento é obtida dividindo-se qualquer termo pelo anterior, por exemplo, $h = 800/400 = 2$.

a) Valor presente da série:

$$P = \frac{A}{(1+i)^n} \left[\frac{h^n - (1+i)^n}{h - (1+i)} \right] = \frac{\$200}{(1,05)^5} \times \left[\frac{(2)^5 - (1,05)^5}{2 - (1,05)} \right] = \$5.067,97$$

b) Montante da série:

$$S = 5.067,97 \times (1,05)^5 = \$6.468,15$$

Exemplo 6.7

Uma pessoa pagará mensalmente durante 18 meses uma série de prestações com reajuste mensal de 5%. Considerando que o primeiro pagamento de \$48.000 será efetuado no fim do primeiro mês, calcular o valor presente da série de prestações a juros efetivos de 7% a.m.

Dados: $A = \$48.000$, $c = 5\%$ a.m., $h = (1 + c) = 1 + 0,05 = 1,05$, $i = 7\%$ a.m., $n = 18$ meses, $P = ?$

$$P = \frac{A}{(1+i)^n} \left[\frac{h^n - (1+i)^n}{h - (1+i)} \right] = \frac{\$48.000}{(1,07)^{18}} \times \left[\frac{(1,05)^{18} - (1,07)^{18}}{1,05 - 1,07} \right] = \$691.123,70$$

Exemplo 6.8

A juros efetivos de 10% a.m., calcular o valor presente de uma série de 18 mensalidades que decrescem em progressão geométrica à razão de $\frac{1}{2}$, sendo a primeira mensalidade igual a \$150.000.

Dados: $c = 0,5$ (50%), $h = (1 - c) = 1 - 0,5 = 0,5$, $i = 10\%$ a.m., $n = 18$, $A = \$150.000$, $P = ?$

$$P = \frac{A}{(1+i)^n} \left[\frac{h^n - (1+i)^n}{h - (1+i)} \right] = \frac{\$150.000}{(1,10)^{18}} \times \left[\frac{(0,5)^{18} - (1,10)^{18}}{0,5 - 1,10} \right] = \$250.000$$

Exemplo 6.9

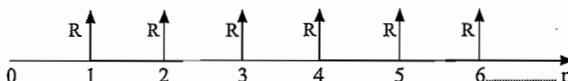
Se a taxa de juros vigente é de 4% a.a. e o valor do primeiro pagamento é igual a \$180.000, calcular o valor presente de uma série de dez pagamentos anuais que decrescem a uma taxa constante de 2% a.a.

Dados: $n = 10$, $i = 4\%$ a.a., $c = 2\%$ a.a., $h = (1 - c) = 1 - 0,02 = 0,98$, $A = \$180.000$, $P = ?$

$$P = \frac{A}{(1+i)^n} \left[\frac{h^n - (1+i)^n}{h - (1+i)} \right] = \frac{\$180.000}{(1,04)^{10}} \times \left[\frac{(0,98)^{10} - (1,04)^{10}}{0,98 - 1,04} \right] = \$1.344.044,67$$

6.4 Perpetuidades

O termo perpetuidade sugere fluxos de duração infinita sem limite. Entretanto, é mais apropriado dizer que uma perpetuidade se constitui de um conjunto de rendas cujo número não pode ser determinado exatamente, pois é muito grande e tende ao infinito, como sucede, por exemplo, com os dividendos pagos pelas empresas. Tal como as rendas temporais, as rendas perpétuas podem ser postecipadas, antecipadas e diferidas. O diagrama de fluxo de uma perpetuidade postecipada é apresentado a seguir:



Como ilustração, admitamos que uma pessoa invista \$1.000 em uma aplicação que paga juros efetivos de 2% a.m. Essa aplicação permite-lhe retirar indefinidamente uma renda mensal de \$20. Ao vencimento do primeiro mês, poderá retirar \$20, e o capital continuará sendo \$1.000, que produzirá ao término do segundo mês uma nova renda de \$20 e assim sucessivamente.

Considerando que o banco tem uma duração indefinida e que o capital inicialmente aplicado permanece constante, os juros ganhos mensalmente constituem-se em uma renda perpétua. Por exemplo, nos primeiros três meses da perpetuidade temos:

n (meses)	Capital inicial (P)	Montante S = P(1 + i)	Renda mensal (R)	Capital final
1	\$ 1.000	\$ 1.000 × (1,02) = \$ 1.020	\$ 20	\$ 1.000
2	\$ 1.000	\$ 1.000 × (1,02) = \$ 1.020	\$ 20	\$ 1.000
3	\$ 1.000	\$ 1.000 × (1,02) = \$ 1.020	\$ 20	\$ 1.000

Está subentendido, no presente caso, que ao fim de cada período o fluxo gerado por P não é reinvestido na mesma perpetuidade. Então, podemos inferir que uma renda uniforme perpétua postecipada é o fluxo efetivo produzido em um período de tempo por uma taxa de juros aplicada sobre um importe P, em que o número de períodos de capitalização é infinitamente grande e não determinado.

$$R = P \times i \quad \text{e} \quad P = R \times \left(\frac{1}{i} \right)$$

Se a perpetuidade postecipada cresce a uma taxa constante c, seu valor presente será dado por:

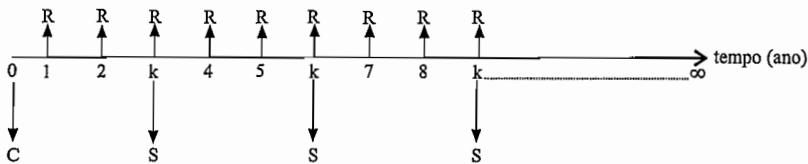
$$P = \frac{R}{i - c} \quad \text{para } i > c; \quad i = \text{taxa de juros efetiva}; \quad c = \text{taxa de crescimento}$$

No caso de a perpetuidade ser antecipada:

$$R = P \times i \\ R_a (1+i) = P \times i \Rightarrow R_a = P \times \left(\frac{i}{1+i} \right)$$

6.4.1 Custo capitalizado

Existem diversas atividades de produção ou serviços cujos ativos devem ser mantidos permanentemente, reformados ou substituídos periodicamente a cada certo número de anos. Essa reforma ou substituição origina desembolsos que constituem uma renda perpétua, tal como ocorre com a manutenção de estradas, pontes e com a substituição ou reforma de unidades de transporte público. As substituições que ocorrem indefinidamente podem ser representadas no seguinte diagrama de fluxo.



onde:

R = renda proporcionada pelo ativo durante a sua vida útil;

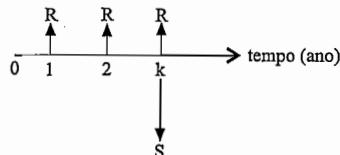
K = número de anos entre cada renovação de equipamentos (vida útil do ativo);

C = custo inicial (custo original do ativo);

S = custo de substituição ou reforma do ativo (deve ser igual ao montante acumulado pelas rendas proporcionadas pelo ativo durante a sua vida útil).

Durante a sua vida útil o ativo produz rendas que devem acumular um fundo (S) que servirá para amortizar os gastos de sua manutenção e para pagar a sua substituição ou reforma a cada k anos. Observando o primeiro intervalo de substituição, estima-se que o problema corresponde ao cálculo da renda postecipada, que permitirá acumular o montante S requerido que se repete indefinidamente.

$$R = \frac{S}{\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i} \right]} = S \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right]$$



$$\text{como } P = R \times \left(\frac{1}{i} \right) = S \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right] \times \left(\frac{1}{i} \right) = \left[\frac{S}{(1+i)^k - 1} \right]$$

O custo capitalizado de um ativo está constituído pelo seu custo inicial (custo original) mais o valor presente das infinitas substituições ou reformas a serem feitas de modo que ele seja mantido em operação indeterminadamente:

$$F = C + P = C + \left[\frac{S}{(1+i)^k - 1} \right]$$

Exemplos de aplicação

Exemplo 6.10

Uma ação promete pagar um dividendo de \$3,5/ação ao ano. Estimando-se que os dividendos cresçam a uma taxa constante de 5% a.a., calcular o valor da ação se o custo de oportunidade do capital for de 14% a.a. Considere os dividendos como uma perpetuidade.

Dados: $R = \$3,5/\text{ação}$, $i = 14\% \text{ a.a.}$, $c = 5\% \text{ a.a.}$, $P = ?$

O valor da ação é igual ao presente de uma perpetuidade postecipada crescente e ser calculado como se segue:

$$P = \left[\frac{R}{i - c} \right] = \frac{\$3,5}{0,14 - 0,05} = \$38,89/\text{ação}$$

Exemplo 6.11

Ao participar de um Programa de Demissão Voluntária (PDV), um trabalhador recebeu da empresa \$10.000. De modo que percebesse uma renda quinzenal indefinidamente, aplicou a importância em uma instituição financeira a juros efetivos de 1,5% a.m. Considerando que a taxa de juros não variará, calcular o valor da renda perpétua postecipada e antecipada.

Dados: $P = \$10.000$, $i = 1,5\% \text{ a.m.}$, $R = ?$, $R_a = ?$

Taxa de juros efetiva quinzenal: $(1,015)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,00747208$

a) Renda perpétua postecipada: $R = P \times i = \$10.000 \times 0,00747208 = \$74,72$

b) Renda perpétua antecipada: $R_a = P \times \left(\frac{i}{1+i} \right) = \$10.000 \times \left(\frac{0,00747208}{1+0,00747208} \right) = \$74,17$

Exemplo 6.12

O pedágio de uma rodovia estadual arrecada em média \$200.000/mês. Calcular o valor presente dessas rendas considerando um custo do capital de 2% a.m.

Dados: $R = \$10.000$, $i = 2\% \text{ a.m.}$, $P = ?$

$$P = R \times \left(\frac{1}{i} \right) = \$200.000 \times \left(\frac{1}{0,02} \right) = \$10.000.000$$

Exemplo 6.13

Uma universidade receberá uma doação à perpetuidade. O primeiro importe de \$50.000 será aplicado na compra de livros e os seguintes de \$10.000, a ser entregues no início de cada ano, serão usados na manutenção. A juros efetivos de 10% a.a, calcular o valor presente da doação.

Dados: $R_a = \$50.000$, $R = \$10.000$, $i = 2\% \text{ a.m.}$, $P = ?$

$$P = R_a + R \times \left(\frac{1}{i} \right) = +\$50.000 + \$10.000 \times \left(\frac{1}{0,02} \right) = \$550.000$$

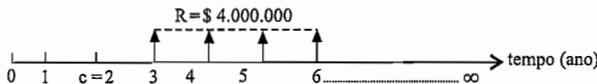
Exemplo 6.14

Uma jazida de ouro com reservas para exploração por mais de cem anos produz lucros médios de \$4.000.000/ano. Calcular o valor da mina, considerando que nos próximos dois anos a mina não operará por motivos de renovação de equipamentos. O custo de oportunidade do capital é de 15% a.a.

Dados: $R = \$4.000.000$, $i = 15\%$ a.a., $c = 2$, $P = ?$

Trata-se de uma perpetuidade diferida postecipada, em que a primeira renda (lucro) ocorre ao fim do primeiro ano após o término do período de carência:

$$P = \frac{R \times \left(\frac{1}{i}\right)}{(1+i)^c} = \frac{\$4.000.000 \times \left(\frac{1}{0,15}\right)}{(1,15)^2} = \$20.163.831$$



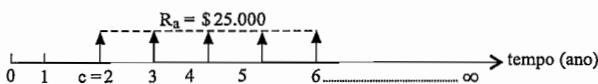
Exemplo 6.15

Uma sociedade de beneficência pública ganhou de um mecenas uma doação de \$25.000/ano em forma indefinida, recebidos no início de cada ano depois de transcorridos dois anos contados a partir da data da doação. A juros de 15% a.a., calcular o valor presente dessa doação.

Dados: $R_a = \$25.000$, $i = 15\%$ a.a., $c = 2$, $P = ?$

Trata-se de uma perpetuidade diferida antecipada, em que a primeira renda ocorre ao início do primeiro ano após o término do período de carência:

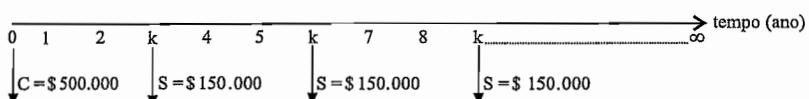
$$P = \frac{R_a \times \left(\frac{1}{i}\right)}{(1+i)^{c-1}} = \frac{\$25.000 \times \left(\frac{1}{0,15}\right)}{(1,15)^{2-1}} = \$144.927,54$$



Exemplo 6.16

Um canal de irrigação teve um custo inicial de \$500.000. O engenheiro hidráulico projetista da obra estima que, para estar permanentemente em condições operacionais, a cada três anos deve ser realizada uma reforma do canal a um custo aproximado de \$150.000. Pede-se: a) calcular a quantia que deve ser aplicada hoje a juros de 15% a.a., de modo que assegure a reforma perpétua do canal; b) determinar o custo capitalizado do canal admitindo-se um custo do capital de 15% ao ano.

Dados: $C = \$500.000$, $S = \$150.000$, $i = 15\%$ a.a., $k = 3$, $P = ?, F = ?$



a) Capital a ser aplicado hoje:

$$P = \left[\frac{S}{(1+i)^k - 1} \right] = \frac{\$ 150.000}{(1,15)^3 - 1} = \$ 287.976,96$$

Um capital de \$287.976,96 aplicado a juros de 15% a.a. transforma-se em três anos em um montante de \$437.976,96 [287.976,96 $(1,15)^3$], quantia que assegurará retirar \$150.000 indefinidamente para cobrir o custo da reforma, tal como se comprova no quadro a seguir:

Montante ao final do terceiro ano: $287.976,96 \times (1,15)^3$	\$437.976,96
Custo da reforma do canal ao final do terceiro ano	(\$150.000,00)
Saldo que gerará a cada 3 anos um novo montante de \$150.000	\$287.976,96

b) Custo capitalizado do canal de irrigação:

$$F = C + P = C + \left[\frac{S}{(1+i)^k - 1} \right] = \$500.000 + \frac{\$150.000}{(1,15)^3 - 1} = \$787.976,96$$

Os \$787.976,96 permitirão cobrir o custo inicial do canal de \$500.000. O saldo de \$287.976,96 aplicado durante três anos a juros de 15% a.a. transforma-se em \$437.976,96 [287.976,96 $(1,15)^3$], quantia que permitirá cobrir os \$150.000 do custo da reforma, deixando um remanescente de \$287.976,96 que possibilitará a geração indefinida de um novo capital para reformas posteriores.

a. Custo original	\$500.000,00
b. Saldo que gerará o capital para reformas posteriores	\$287.976,96
c. Custo capitalizado (a + b)	\$787.976,96
Montante gerado a cada 3 anos [287.976,96 $\times (1,15)^3$]	\$437.976,96
Custo das reformas a cada 3 anos	(\$150.000,00)
Saldo que gerará a cada 3 anos a perpetuidade de \$437.976,96	\$287.976,96

6.5 Exercícios propostos

- Qual a quantia a ser aplicada hoje em um investimento que rende juros efetivos de 10% a.m. de modo que possamos efetuar futuramente oito saques mensais? O primeiro saque de \$36.000 inicia daqui a dois meses, formando com os outros sete saques uma série crescente em *progressão aritmética*.
- Uma pessoa deve pagar 13 prestações mensais. A primeira prestação de \$8.310 inicia daqui a dois meses, formando com as restantes uma *progressão aritmética crescente*. Em uma proposta alternativa de pagamento, a pessoa pagaria cinco prestações mensais iguais, a primeira iniciando daqui a um mês. A juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor das prestações a pagar considerando que a proposta seja aceita.
- Uma pequena empresa deve gastar mensalmente, a partir do próximo mês, \$2.000 com sua folha de pagamento. Uma projeção indica que nos próximos 24 meses esses gastos devem diminuir em \$20 mensalmente. O gerente pretende aplicar hoje uma quantia em um investimento de tal forma que possa efetuar nos próximos 24 meses saques mensais que

permitam cobrir a folha. Considerando que o investimento rende juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor da quantia mínima a ser aplicada.

4. Os dividendos pagos por uma ação devem dobrar todo ano segundo uma *progressão geométrica*. Considerando que os dividendos são pagos ao término de cada ano, sendo o primeiro igual a \$10, calcular o valor presente dos dividendos dos próximos 24 anos a um custo de capital de 1% a.a.
5. Um capital foi financiado a juros efetivos de 5% a.m. para ser pago em 20 prestações mensais. A primeira prestação de \$12.000 vence um mês depois de contratado o financiamento e as outras são gradativamente crescentes formando uma *progressão aritmética*. Calcular o valor do financiamento.
6. Um financiamento de \$548,66 será pago em oito parcelas mensais; a primeira de \$20 vence um mês depois de ter sido tomado o financiamento e as restantes são gradativamente crescentes formando uma *progressão aritmética*. Calcular a taxa de juros efetiva cobrada no financiamento.
7. Um financiamento será pago em oito parcelas mensais; a primeira de \$20 vence um mês depois de ter sido contratado o financiamento e as outras são gradativamente crescentes formando uma *progressão aritmética*. Considerando que seja proposto um esquema alternativo de pagamento em que o mutuário se obriga a pagar dez prestações mensais iguais, calcular o valor dessas prestações a juros efetivos de 5% a.m.
8. A juros efetivos de 9% a.m., calcular o valor presente de uma perpetuidade postecipada de \$10.000 que cresce a uma taxa constante de 7% a.m.
9. Calcular o valor presente de quatro mensalidades postecipadas que decrescem a uma taxa constante de 3% a.m., considerando-se que a primeira é igual a \$13.000 e a taxa de juros efetiva é de 5% a.m.
10. Uma ação promete pagar a partir do próximo ano em perpetuidade um dividendo de \$2,00/ano. Considerando um crescimento projetado dos dividendos de 5% a.a. e um custo de oportunidade do capital de 12% a.a., determinar o preço unitário da ação.
11. Uma dívida de \$2.000 será paga em quatro prestações trimestrais. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o valor das quatro prestações sabendo-se que formam uma *progressão aritmética crescente* com razão igual ao valor da primeira prestação.
12. Calcular o primeiro termo de uma série de 20 anuidades crescentes geometricamente, cujo valor presente é \$5.000, a sua razão de crescimento é 1,04 e é capitalizada a juros efetivos de 5% a.a.
13. Calcular o valor presente de um empréstimo que será amortizado em 24 parcelas trimestrais vencidas a juros efetivos de 3% a.t., com a primeira parcela igual a \$500 que irá crescendo à taxa de 5% em relação à anterior.
14. Um empréstimo de \$5.000 será reembolsado em 8 parcelas mensais vencidas que experimentarão um crescimento aritmético em cada parcela. Se a primeira parcela é de \$500 e a taxa de juros efetiva é de 6% a.m., calcular o valor do gradiente.
15. Um empréstimo de \$5.000 será reembolsado em 8 parcelas mensais vencidas que experimentarão um crescimento aritmético de \$95,51 em cada parcela. A juros efetivos de 6% a.m., calcular o valor da primeira parcela.

16. Um empréstimo de \$ 5.000 será reembolsado em 10 parcelas mensais vencidas que experimentarão um crescimento geométrico de 2% em cada parcela. A juros efetivos de 4% a.m., calcular o valor da primeira parcela.
17. Um financiamento será reembolsado em 8 parcelas trimestrais vencidas crescendo à taxa de 2%. Se a primeira parcela é de \$ 1.500, a juros efetivos de 4% a.t., determinar o valor do financiamento.
18. Um financiamento de \$ 5.000 será reembolsado em 10 parcelas mensais vencidas que crescem geometricamente a uma determinada taxa. Se o valor da primeira parcela é de \$ 571,50 e a taxa de juros efetiva é de 5% a.m., calcular a taxa de crescimento das parcelas.
19. Um canal de irrigação tem um custo de construção de \$ 40.000. Para mantê-lo em condições operacionais deve ser efetuada uma reforma integral ao custo de \$ 8.000 a cada 5 anos indefinidamente. Calcular seu custo capitalizado a uma taxa efetiva de 8% a.a.
20. Uma ponte tem um custo de construção de \$ 30.000 e sua vida útil é de 10 anos. Depois desse tempo deve ser reformada a cada 10 anos indefinidamente a um custo de \$ 15.000. Calcular seu custo capitalizado a uma taxa efetiva de 1% ao mês.
21. A prefeitura de uma cidade recebeu 2 propostas para construir uma passarela para pedestres. A primeira propõe construí-la de madeira ao custo de \$ 10.000 com um custo de manutenção de \$ 4.000 a cada 3 anos indefinidamente. A segunda propõe construí-la de aço ao custo de \$ 20.000 com um custo de manutenção de \$ 6.000 a cada 6 anos. Considerando-se um custo do capital de 6% a.a., selecionar a melhor proposta.

6.6 Respostas dos exercícios propostos

- | | |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. \$ 699.172,29 | 13. \$ 7.209,26 |
| 2. \$ 108.549,38 | 14. G = 95,51 |
| 3. \$ 25.054,48 | 15. \$ 500 |
| 4. \$ 133.466.323,58 | 16. \$ 566,600976 |
| 5. \$ 1.331.407,49 | 17. \$ 10.790,99751 |
| 6. 5% a.m. | 18. 3% |
| 7. \$ 71,05 | 19. \$ 57.045,65 |
| 8. \$ 500.000 | 20. \$ 36.520,64 |
| 9. \$ 44.145,95 | 21. Custo capitalizado (madeira) =
\$ 30.940,65; Custo
capitalizado (aço) =
\$ 34.336,26 => selecionar de
madeira |
| 10. \$ 28,57 | |
| 11. \$ 259,91; \$ 519,83;
\$ 779,74; \$ 1.039,65 | |
| 12. \$ 287,04 | |

CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

CAPÍTULO

7

- Valor presente de capitais uniformemente distribuídos
Conversão entre fluxos discretos e uniformemente distribuídos

Nos capítulos anteriores, os capitais usados foram valores monetários concentrados em determinadas datas (capitais discretos). No regime de capitalização contínua, os valores monetários *fluem contínuamente e uniformemente* através do tempo segundo uma função matemática. É uma ferramenta muito usada em finanças na avaliação de opções, derivativos, projetos de investimento, geração de lucros da empresa, desgaste de equipamentos e outras situações em que os fluxos monetários se encontram distribuídos uniformemente no tempo. Na prática, muitas situações exigem o uso da capitalização contínua. As empresas recebem e fazem pagamentos muitas vezes durante um dia, padrão esse que está mais próximo da suposição de fluxos contínuos uniformemente distribuídos do que de fluxos discretos de fim de período. A computação contínua de juros é uma modalidade alternativa de cálculo de juros que permite resolver alguns problemas de matemática financeira e engenharia econômica que, de outro modo, têm soluções apenas aproximadas.

Um capital de \$ 100, aplicado por um ano à taxa nominal de 24% a.a., resulta nos seguintes montantes considerando-se diversas hipóteses de freqüências das capitalizações da taxa nominal:

Capitalização	Montante
Anual ($k = 1$)	$\$ 100 \times (1 + 0,24) = \$ 124,00$
Semestral ($k = 2$)	$\$ 100 \times (1 + 0,24/2)^2 = \$ 125,44$
Trimestral ($k = 4$)	$\$ 100 \times (1 + 0,24/4)^4 = \$ 126,25$
Mensal ($k = 12$)	$\$ 100 \times (1 + 0,24/12)^{12} = \$ 126,82$
Diária ($k = 365$)	$\$ 100 \times (1 + 0,24/365)^{365} = \$ 127,12$

Repare que o montante aumenta à medida que a freqüência das capitalizações aumenta. Se admitirmos uma capitalização horária, temos o seguinte montante ao fim do ano:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} = 100 \times \left(1 + \frac{0,24}{24 \times 365}\right)^{(365 \times 24) \times 1} = \$ 127,12$$

Atente ao fato de que o montante praticamente não cresce com a capitalização horária, tendendo para um valor-limite de \$ 127,12.

Tendo ficado claro que o montante de um capital tende a um limite quando a freqüência das capitalizações tende ao infinito, desenvolveremos a seguir uma expressão de cálculo que nos sirva como base da computação contínua de juros.

O montante de um capital aplicado pelo prazo m , a juros nominais j , capitalizados k vezes pode ser expresso do seguinte modo:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} = P \left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j}\right)^{k/j} \right\}^{j \times m}$$

Admitindo que a capitalização seja *infinitamente* grande, ou seja em intervalos *infinitesimais* tendendo ao infinito, no limite temos:

$$S = P \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j}\right)^{k/j} \right\}^{j \times m}$$

Pode-se demonstrar em cálculo que, quando $k \rightarrow \infty$, o limite do termo entre chaves da expressão anterior é um número irracional ($e = 2,718281828459\dots$) que serve de base dos logaritmos *neperianos* ou naturais e também que $j = \delta$. Logo, podemos calcular o montante de um capital na computação contínua de juros por meio da seguinte expressão:

$$S = P \times e^{\delta \times m}$$

onde δ é chamada taxa instantânea ou taxa contínua e a notação comumente adotada é a letra grega δ (delta). A expressão anterior é a base da computação contínua de juros. Basta fornecer o valor de δ , uma vez que k , por hipótese, tende ao infinito, condição para que a computação de juros seja contínua.

Um capital de \$ 200.000 aplicado por 18 meses à taxa de 3% a.m. resulta nos seguintes montantes na computação contínua e na capitalização discreta de juros:

$$S = P \times e^{\delta \times m} = \$ 200.000 \times e^{0,03 \times 18} = \$ 343.201,37$$

$$S = P(1 + i)^m = \$ 200.000 \times (1,03)^{18} = \$ 340.486,61$$

Como era de esperar, o montante é maior na capitalização contínua.

Sabe-se que o montante produzido por duas taxas de juros equivalentes deve ser o mesmo. Assim, igualando os montantes das computações contínua e discreta é possível obtermos uma relação de equivalência entre taxas de juros discretas e contínuas:

$$P \times e^{\delta \times m} = P (1+i)^m \Rightarrow \begin{cases} i = e^\delta - 1 & (\text{taxa efetiva}) \\ \delta = \ln(1+i) & (\text{taxa instantânea equivalente}) \end{cases}$$

Adotando-se uma taxa de juros efetiva i de uma capitalização discreta de juros, $\delta = \ln(1+i)$ é a taxa nominal equivalente para uma capitalização contínua.

Exemplo 7.1

Calcular o montante de um capital de \$ 1.000 aplicado por um ano à taxa instantânea de 50% a.a. capitalizada contínua ou instantaneamente.

Dados: $P = \$1.000$, $\delta = 50\%$ a.a., $m = 1$, $S = ?$

$$S = P \times e^{\delta \times m} = \$1.000 \times e^{0,50 \times 1} = \$1.648,72$$

Exemplo 7.2

Calcular a taxa instantânea equivalente à taxa nominal de 40% a.a. capitalizada mensalmente.

Dados: $j = 40\%$ a.a., $k = 12$, $m = 1$, $\delta = ?$

Para serem equivalentes, as duas taxas devem resultar no mesmo montante:

$$P \times e^{\delta \times m} = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \times m} \Rightarrow e^\delta = \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{12} = 1,48213$$

aplicando logaritmos: $\delta \times \ln e = \ln 1,48213 \Rightarrow \delta = 0,3935 = 39,35\%$ a.a.

Exemplo 7.3

Determinar a taxa efetiva trimestral equivalente a uma taxa instantânea de 35% a.a.

Dados: $\delta = 35\%$ a.a., $i_t = ?$

$$(1+i_a) = e^\delta$$

$$(1+i_t)^4 = e^{0,35} \Rightarrow i_t = e^{0,35/4} - 1 = 9,1442\% \text{ a.t.}$$

Exemplo 7.4

Pede-se: a) calcular a taxa efetiva ao ano equivalente a uma taxa instantânea de 90% a.a.; b) calcular a taxa instantânea equivalente a uma taxa efetiva de 80% a.a.

a) **Dados:** $\delta = 90\%$ a.a., $i_a = ?$

$$(1+i_a) = e^\delta \Rightarrow i_a = e^{0,90} - 1 = 1,459603 = 145,96\% \text{ a.a.}$$

b) **Dados:** $i_a = 80\%$ a.a., $\delta = ?$

$$\delta = \ln(1+i_a) = \ln 1,80 = 0,5877787 = 58,78\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 7.5

Pede-se: demonstrar que um capital de \$ 1.200 aplicado durante 20 meses resulta no mesmo montante à taxa efetiva de 5% a.m. ou à taxa instantânea de 4,879% a.m.; b) calcular o valor atual de um montante de \$ 1.000 que seria recebido daqui a cinco meses, à taxa instantânea de 6% a.m.

Dados: $P = \$1.200$, $i = 5\%$ a.m., $m = 20$, $\delta = 4,879\%$ a.m., $S = ?$

$$S = P \times e^{\delta \times m} = \$1.200 \times e^{0,04879 \times 20} = \$3.183,95$$

$$S = P(1+i)^m = \$1.200 \times (1,05)^{20} = \$3.183,95$$

O montante é o mesmo, dado que a taxa efetiva de 5% a.m. é equivalente à taxa contínua de 4,879% a.m. ($\delta = \ln 1,05 = 4,879\%$)

Dados: $S = \$1.000$, $\delta = 6\%$ a.m., $m = 5$, $P = ?$

$$P = S \times e^{-\delta \times m} = \$1.000 \times e^{-0,06 \times 5} = \$888,98$$

Exemplo 7.6

Uma plantação de eucaliptos para fabricação de celulose tem 80.000 m^3 de madeira. O preço atual da madeira é de $\$20/\text{m}^3$ e a taxa contínua de crescimento das árvores é de 20% a.a. Pede-se: a) calcular o valor da plantação após quatro anos; b) determinar em que prazo dobra o valor da plantação.

Dados: $P = 80.000 \text{ m}^3 \times \$20/\text{m}^3$, $\delta = 20\%$ a.a., $m = 4$, $S = ?$

a) $S = P \times e^{\delta \times m} = (80.000 \text{ m}^3 \times \$20/\text{m}^3) \times e^{0,20 \times 4} = \$3.560.865,49$

b) $S = P \times e^{\delta \times m}$

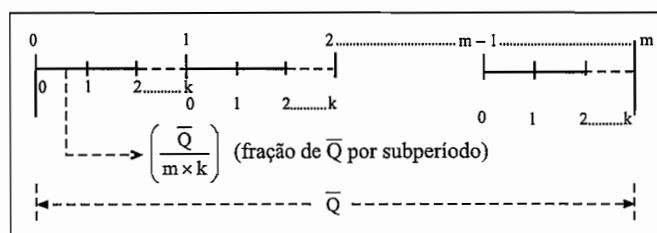
$$2P = e^{\delta \times m}$$

$$2 = e^{0,20 \times m} \Rightarrow m = \ln 2 / 0,20 = 3,47 \text{ anos}$$

7.1 Valor presente de valores uniformemente distribuídos

Em algumas situações encontradas na análise de investimentos, os fluxos monetários não são devidos ou recebidos em dado instante pontual, mas estão distribuídos ao longo de um determinado período de tempo. Como exemplo temos: o custo anual de manutenção dos equipamentos, a receita produzida por uma estação de bombeio operando a uma potência e desempenho constante durante um determinado período de tempo, a receita de um poço de petróleo produzindo a uma vazão constante durante um período de tempo, o fluxo de caixa de uma grande empresa etc.

O diagrama a seguir representa um capital \bar{Q} distribuído em fluxo uniforme ao longo de m períodos que, por sua vez, se dividem em k subperíodos:



Se a computação de juros for discreta e se as frações do capital forem deslocadas para o fim de seu respectivo período, o valor presente das $k \times m$ frações será:

$$P = \left(\frac{\bar{Q}}{k \times m} \right) \left[\frac{\left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} - 1}{\left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k \times m} \left(\frac{j}{k} \right)} \right] = \left(\frac{\bar{Q}}{j \times m} \right) \left[\frac{\left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right\}^{m \times j} - 1}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right\}^{m \times j}} \right]$$

A equação anterior é correta considerando-se que as $m \times k$ frações do capital \bar{Q} foram deslocadas arbitrariamente para o fim de seus respectivos períodos. Contudo, se considerarmos uma capitalização em intervalos infinitesimais, esse deslocamento torna-se irrelevante. Logo, aplicando-se o limite quando $k \rightarrow \infty$:

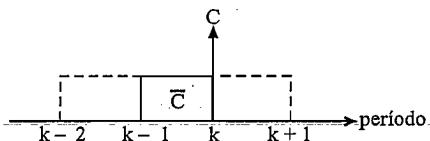
$$P = \bar{Q} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{j \times m} \right) \frac{\left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right\}^{m \times j} - 1}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{k/j} \right)^{k/j} \right\}^{m \times j}} \right] = \bar{Q} \left[\frac{1}{\delta \times m} \left(\frac{e^{m \times \delta} - 1}{e^{m \times \delta}} \right) \right]$$

Ou seja, quando $k \rightarrow \infty$ o limite dos termos entre chaves é a base dos logaritmos neperianos ($e = 2,718281828459\dots$) e $j = \delta$. Logo, a seguinte expressão permite calcular o valor presente de um capital \bar{Q} distribuído uniformemente durante m períodos:

$$P = \bar{Q} \left[\frac{1 - e^{-m \times \delta}}{\delta \times m} \right]$$

7.2 Conversão entre fluxos discretos e fluxos uniformemente distribuídos

Se considerarmos um subperíodo compreendido entre $k - 1$ e k , um capital pode ser aplicado de forma discreta, (C) no fim do subperíodo, ou de forma uniformemente distribuída, (\bar{C}) ao longo do subperíodo, tal como mostra o diagrama a seguir:



Na computação contínua de juros, se a aplicação do capital ocorre de forma discreta em k, seu valor em k-1 é o seguinte:

$$C \times e^{-\delta} \quad (\text{para } m = 1)$$

Aplicando a expressão do valor presente de um capital uniformemente distribuído da seção anterior, podemos calcular o valor em k-1 de um capital \bar{C} uniformemente distribuído entre k-1 e k:

$$\bar{C} \left[\frac{1-e^{-\delta}}{\delta} \right] \quad (\text{para } m = 1)$$

Como são equivalentes, então podemos igualar as duas últimas equações de modo que encontremos o valor discreto C a partir do valor uniformemente distribuído \bar{C} ou vice-versa:

$$\bar{C} \left[\frac{1-e^{-\delta}}{\delta} \right] = C \times e^{-\delta} \Rightarrow C = \bar{C} \times \frac{i}{\delta} \quad \text{e} \quad \bar{C} = C \times \frac{\delta}{i} \quad \text{onde } \delta = \ln(1+i)$$

Exemplo 7.7

Um projeto de irrigação proporcionará um lucro total de \$64 milhões em 20 anos de operação. Calcular o valor atual do lucro considerando uma taxa de juros efetiva de 8% a.a. e realização dos lucros em regime de fluxo uniforme.

Dados: $i = 8\%$ a.a., $m = 20$, $\bar{Q} = \$64$ milhões, $P = ?$

Taxa de juros instantânea equivalente:

$$\delta = \ln(1+i) = \ln 1,08 = 0,07696104 = 7,696104\% \text{ a.a.}$$

O valor presente do lucro de \$64 milhões realizado em fluxo uniforme ao longo de 20 anos pode ser obtido com a seguinte equação:

$$P = \bar{C} \left[\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right] = \$64 \times \left(\frac{1 - e^{-0,07696104 \times 20}}{0,07696104 \times 20} \right) = \$32,66 \text{ milhões}$$

Exemplo 7.8

Um estudo de engenharia indica que um poço produtor de petróleo proporcionará as seguintes receitas líquidas anuais durante os seis anos de sua vida útil em milhões de reais: \$4,4; \$3,8; \$2,9; \$1,3; \$0,7 e \$0,2. Considerando que as receitas são uniformemente distribuídas ao longo de seus respectivos perfodos, calcular seu valor presente usando uma taxa contínua equivalente à taxa discreta de 12% a.a.

- Taxa instantânea equivalente:

$$\delta = \ln(1+i) = \ln 1,12 = 0,11332869$$

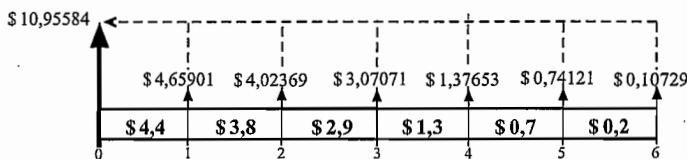
O quadro a seguir mostra os cálculos de conversão das receitas uniformes em discretas equivalentes e o cálculo do valor presente dessas receitas:

(em \$ 1.000.000)

Ano n	Receitas anuais uniformes	Receitas anuais discretas equivalentes	Valor presente das receitas discretas
	\bar{C}	$C = \bar{C} \left(\frac{i}{\delta} \right)$	$\frac{C}{(1+i)^n}$
1	\$4,4	$\$4,4 \times \frac{0,12}{0,11332869} = \$4,65901$	$\frac{\$4,65901}{(1,12)^1} = \$4,15983$
2	\$3,8	$\$3,8 \times \frac{0,12}{0,11332869} = \$4,02369$	$\frac{\$4,02369}{(1,12)^2} = \$3,20766$
3	\$2,9	$\$2,9 \times \frac{0,12}{0,11332869} = \$3,07071$	$\frac{\$3,07071}{(1,12)^3} = \$2,18567$
4	\$1,3	$\$1,3 \times \frac{0,12}{0,11332869} = \$1,37653$	$\frac{\$1,37653}{(1,12)^4} = \$0,87481$
5	\$0,7	$\$0,7 \times \frac{0,12}{0,11332869} = \$0,74121$	$\frac{\$0,74121}{(1,12)^5} = \$0,42058$
6	\$0,2	$\$0,2 \times \frac{0,12}{0,11332869} = \$0,10729$	$\frac{\$0,21177}{(1,12)^6} = \$0,10729$

Total = \$ 10,95584

Representação gráfica:

**Exemplo 7.9**

Um canal de irrigação tem um custo de manutenção de \$ 15.000/ano uniformemente distribuído ao longo do ano. Se o custo efetivo do dinheiro é de 9% a.a., calcular o valor presente dos custos de manutenção na hipótese que sejam constantes e na hipótese que cresçam 3% a.a. Considere os custos como perpetuidades e uma taxa contínua equivalente.

Dados: $i = 9\%$ a.a., $\bar{C} = \$15.000$, $c = 3\%$ a.a., $m = \infty$, $P = ?$

- Custos constantes

O valor presente de uma perpetuidade discreta constante postecipada pode ser calculado dividindo-se o valor da perpetuidade pela taxa de juros discreta (veja a Seção 6.4 deste capítulo):

$$P = \frac{C}{i} = \frac{\bar{C} \times \frac{i}{\delta}}{\frac{i}{\delta}} = \frac{\bar{C}}{\delta} = \frac{\$15.000}{\ln 1,09} = \$174.058,96$$

- Custos crescentes

$$P = \frac{C}{i - c} = \frac{\bar{C} \times \frac{i}{\delta}}{\frac{i - c}{\delta}} = \frac{\$15.000 \times \frac{0,09}{\ln 1,09}}{0,09 - 0,03} = \$261.088,44$$

Exemplo 7.10

Utilizando o exemplo anterior, calcular o valor presente dos custos de manutenção anual na hipótese de que sejam constantes, uniformemente distribuídos e a vida útil do canal de irrigação seja de 20 anos.

Dados: $i = 9\%$ a.a., $m = 20$, $\bar{C} = \$15.000$, $P = ?$

- Taxa instantânea

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1,09) = 0,0861777$$

- Custo discreto anual equivalente

$$C = \bar{C} \times \frac{1}{\delta} = \$15.000 \times \left(\frac{0,09}{0,0861777} \right) = \$15.665,31$$

- Valor presente dos 20 custos anuais discretos

$$P = C \times a_{20|9\%} = \$15.665,31 \times \left[\frac{(1,09)^{20} - 1}{(1,09)^{20} \times 0,09} \right] = \$15.665,31 \times 0,12855 = \$143.001,46$$

$a_{20|9\%}$ é o fator de valor presente para uma série discreta de 20 termos e juros efetivos de 9% (veja as séries uniformes no Capítulo 5).

Exemplo 7.11

Uma empresa industrial gastou, no período de dez meses, \$50.000 em lubrificantes para manutenção de seus equipamentos. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva discreta de 5% a.m., calcular o valor presente desses gastos considerando realização uniforme.

Dados: $i = 5\%$ a.m., $\bar{Q} = \$50.000$, $m = 10$, $P = ?$

- Taxa instantânea:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1,05) = 0,0487902$$

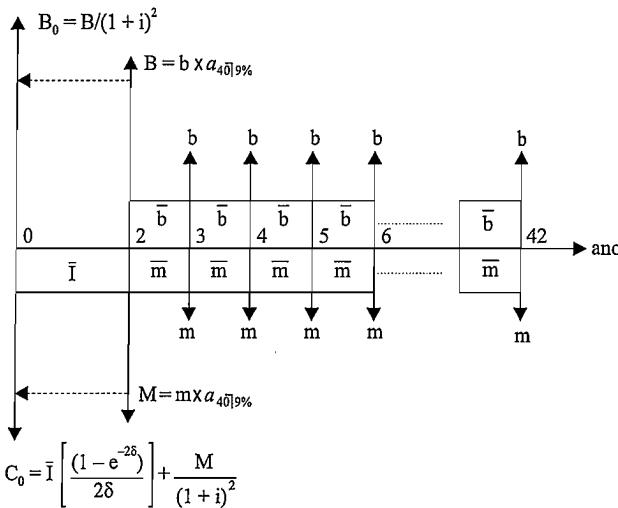
- Valor presente dos gastos

$$P = \bar{Q} \times \left(\frac{1 - e^{-\delta \times m}}{\delta \times m} \right) = \$50.000 \times \left(\frac{1 - e^{-0,0487902 \times 10}}{0,0487902 \times 10} \right) = \$39.566,04$$

Exemplo 7.12

A prefeitura de uma pequena cidade do interior do Ceará pretende instalar um sistema de tratamento de água potável, projetado para 40 anos, a um custo orçado em \$ 2.800.000 a ser despendido em dois anos. Atualmente o fornecimento de água é feito por caminhões-pipa, ao custo de \$ 310.000/ano, sem nenhuma arrecadação pelo serviço prestado. A prefeitura da cidade projeta faturar \$ 103.385/ano dos consumidores com a venda da água encanada. A manutenção do sistema deve custar \$ 65.000 por ano. Considerando que a obra será financiada com recursos da Caixa Econômica Federal, a juros efetivos de 9% a.a., e considerando que as receitas e despesas têm realização uniformemente distribuída, justifica-se o projeto, do ponto de vista econômico? Usar taxa contínua equivalente

Diagrama de fluxo dos benefícios e custos:



onde:

B_0 = valor presente dos benefícios;

C_0 = valor presente dos custos;

\bar{I} = investimento despendido uniformemente durante 2 anos = \$ 2.800.000;

\bar{b} = benefício anual realizado uniformemente = \$ 310.000 + \$ 103.385 = \$ 413.385;

b = benefício anual discreto equivalente;

\bar{m} = gasto de manutenção realizado uniformemente = \$ 65.000;

m = gasto de manutenção anual discreto equivalente;

i = taxa de juros efetiva;

δ = taxa de juros instantânea;

$a_{40|9\%}$ = fator de valor atual de uma série discreta uniforme de 40 anuidades a juros efetivos de 9% a.a.

$$= \left[\frac{(1,09)^{40} - 1}{(1,09)^{40} \times 0,09} \right] = 10,75736$$

- Taxa instantânea: $\delta = \ln(1+i) = \ln(1,09) = 0,0861777$

- Valor presente dos benefícios

$$B_o = \frac{B}{(1+i)^2} = \frac{b \times a_{40|9\%}}{(1+i)^2} = \frac{\bar{b} \left(\frac{i}{\delta} \right) \times a_{40|9\%}}{(1,09)^2} = \frac{\$413.385 \times \left(\frac{0,09}{0,0861777} \right) \times 0,75736}{1,1881} = \$3.908.904$$

- Valor presente dos custos

$$C_o = \bar{I} \times \left(\frac{1 - e^{-2 \times \delta}}{2 \times \delta} \right) + \frac{M}{(1+i)^2} = \bar{I} \times \left(\frac{1 - e^{-2 \times \delta}}{2 \times \delta} \right) + \frac{m \times a_{40|9\%}}{(1+i)^2} = \bar{I} \times \left(\frac{1 - e^{-2 \times \delta}}{2 \times \delta} \right) + \frac{\bar{m} \left(\frac{i}{\delta} \right) \times a_{40|9\%}}{(1+i)^2}$$

$$= \$2.800.000 \times \left(\frac{1 - e^{-2 \times 0,0861777}}{2 \times 0,0861777} \right) + \frac{\$65.000 \times \left(\frac{0,09}{0,0861777} \right) \times 10,75736}{(1,09)^2} = \$3.186.618$$

- Índice custo-benefício¹:

$$\frac{B_o}{C_o} = \frac{\$3.908.904}{\$3.186.618} = 1,23 > 1$$

O projeto se justifica economicamente, pois o índice custo-benefício é maior que 1 (um), significando que o valor presente dos benefícios é maior que o valor presente dos custos.

Exemplo 7.13

Um poço de gás natural tem dez anos de vida útil. A vazão inicial é de $1.000 \text{ m}^3/\text{dia}$, mas deve declinar exponencialmente à razão de $0,30/\text{ano}$. Considerando um preço constante de US\$9/m³ para o gás natural e um custo do capital de 8% a.a., calcular o valor presente da receita bruta gerada durante o tempo de vida útil do poço.

A seguir, desenvolvemos uma expressão que nos permita calcular o valor presente da receita bruta do poço.

Como a vazão assume valores declinantes, então, na época t , pode ser expressa pela seguinte equação:

$$v_t = v_0 e^{-\alpha \times t}$$

¹ Este método aplica-se de preferência às decisões econômicas relacionadas com obras públicas. Deriva-se do famoso United States Control Act, de 22 de junho de 1932, que estipulava que os benefícios, não importando a favor de quem, devem superar os custos em qualquer obra de controle de inundações. Posteriormente, o método generalizou-se para avaliação econômica de projetos de obras públicas.

onde “ v_0 ” é a vazão inicial do poço; e “ α ” uma fração chamada constante de declínio.

Se p_t é o preço do gás natural no instante t , a receita neste instante, cuja vazão é v_t , será:

$$R_t = p_t \times v_t$$

- Valor presente da receita instantânea R_t :

$$R_{t=0} = R_t e^{-\delta \times t} = (p_t \times v_t) e^{-\delta \times t} = (p_t \times v_0 e^{-\alpha \times t}) e^{-\delta \times t} = (p_t \times v_0) e^{\{\alpha - \delta\}t}$$

Se considerarmos p constante, o valor presente da receita total entre as épocas t_1 e t_2 será dado pela seguinte integral:

$$R_{t_1, t_2} = \int_{t_2}^{t_1} p \times v_0 e^{-(\alpha + \delta)t} dt = \frac{pv_0}{\alpha + \delta} \left(e^{-(\alpha + \delta)t_1} - e^{-(\alpha + \delta)t_2} \right)$$

- Valor atual da receita entre o início da produção e a época t :

$$R = \frac{p \times v_0}{\alpha + \delta} \left(1 - e^{-(\alpha + \delta)t} \right) \quad t_1 = 0 \text{ e } t_2 = t$$

α , δ e v_0 devem referir-se à mesma unidade de tempo.

Substituindo os dados na última equação, calculamos o valor atual da receita:

Dados: $\delta = \ln(1+i) = \ln 1,08 = 0,07696$ a.a., $\alpha = 0,30/\text{ano}$, $t = 10$ anos, $p = \text{US\$} 9/\text{m}^3$, $v_0 = 1.000 \text{ m}^3/\text{dia}$

$$\begin{aligned} R &= \frac{p \times v_0}{\alpha + \delta} \left(1 - e^{-(\alpha + \delta)t} \right) \\ &= \frac{9 \times 1.000 \times 365}{0,30 + 0,07696} \times \left(1 - e^{-(0,30 + 0,07696) \times 10} \right) = \text{US\$} 8,51 \text{ milhões} \end{aligned}$$

É usado ano de 365 dias, pois a produção é contínua.

7.3 Exercícios propostos

1. Determinar a taxa contínua (instantânea) ao ano equivalente à taxa efetiva de 15% a.a.
2. Calcular a taxa efetiva ao ano equivalente à taxa instantânea de 13,9762% a.a.
3. Qual a taxa instantânea equivalente a uma taxa nominal de 60% ao ano capitalizada trimestralmente?
4. Calcular a taxa nominal ao ano capitalizada mensalmente, equivalente à taxa instantânea de 24% a.a.
5. Calcular a taxa efetiva semestral equivalente a uma taxa instantânea de 20% a.a.
6. Determinar a taxa efetiva para o período de 41 dias equivalente a uma taxa instantânea de 30% a.a.

7. Calcular o montante de uma aplicação de \$ 1.000 por 15 meses à taxa instantânea de 4% a.m.
8. Qual o capital que resulta em um montante de \$ 1.000 quando aplicado por 18 meses à taxa instantânea de 6% a.m.?
9. Se um capital fosse aplicado por sete meses a uma determinada taxa instantânea, resultaria em um montante 50% maior ao obtido a juros efetivos de 4% a.m. Determinar a taxa instantânea.
10. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 10% a.a., calcular os valores uniformemente distribuídos, equivalentes às seguintes anuidades discretas: \$ 1.450; \$ 235.980; \$ 45.789.000.
11. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 15% a.a., calcular os valores das anuidades discretas, equivalentes às seguintes anuidades uniformemente distribuídas: \$ 2.000; \$ 324.000; \$ 1.289.000.
12. Uma mina de ouro durante a sua vida útil de oito anos proporcionou receitas operacionais líquidas de \$ 500.000/mês. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 42,5761% a.a., calcular o valor presente da receita total considerando-a realizada em regime de fluxo uniformemente distribuído.
13. Um equipamento tem uma vida útil de 15 anos e um custo de manutenção de \$ 4.500/ano. Considerando realização em fluxo uniformemente distribuído, estimar o valor presente desse custo a juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 10% a.a.
14. Um projeto em cada um dos seus seis anos de vida útil proporcionará os seguintes lucros líquidos em milhões: \$ 5; \$ 6; \$ 5; \$ 3; \$ 4; \$ 2. A uma taxa de juros contínua equivalente à taxa efetiva de 10% a.a., calcular o valor presente dos lucros considerando a sua realização em regime de fluxo uniforme.
15. Nos próximos dez anos, a evolução dos custos operacionais de uma estrada de ferro deve aumentar à razão de \$ 2 milhões por ano. Considerando que no primeiro ano o custo operacional é de \$ 3 milhões, a juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 12% a.a., calcular o valor presente desses custos supondo que sejam realizados em regime de fluxo uniforme.
16. O custo anual de manutenção de um trecho permanente de estrada é de US\$ 200.000. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 14% a.a., calcular o valor presente desses custos considerando-os perpetuidades constantes realizadas em regime de fluxo uniforme.
17. A receita operacional de um equipamento será de US\$ 120.000/ano. O equipamento tem uma vida útil de dez anos, não tem valor residual e custa US\$ 1 milhão. Calcular a relação *custo-benefício* considerando juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 20% a.a e receitas realizadas em regime de fluxo uniforme.
18. Ao longo de sua vida útil de 15 anos, um poço de gás natural rendeu lucros totais de \$ 25 milhões. A juros contínuos equivalentes à taxa efetiva de 20% a.a., calcular o valor presente desses lucros na hipótese de serem realizados em regime de fluxo uniforme.
19. Um projeto requer um investimento de \$ 25 milhões a ser despendido em três anos. Ao longo de sua vida útil de 25 anos, o projeto renderá \$ 2,8 milhões/ano já a partir do primeiro ano. Considerando uma taxa contínua equivalente à taxa efetiva de 20% a.a. e realização em regime de fluxo uniforme, avaliar economicamente o projeto usando o índice de *custo-benefício*.

7.4 Respostas dos exercícios propostos

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. 13,9762%</p> <p>2. 15%</p> <p>3. 55,91%</p> <p>4. 24,24%</p> <p>5. 10,5171%</p> <p>6. 3,4757% (em 41 dias)</p> <p>7. \$ 1.822,12</p> <p>8. \$ 339,60</p> <p>9. 9,7144% a.m.</p> <p>10. \$ 1.382; \$ 224.912,96;
\$ 43.641.578,23</p> | <p>11. \$ 2.146,51; \$ 347.734,15;
\$ 1.383.423,82</p> <p>12. \$ 15.924.809,34</p> <p>13. \$ 35.911,55</p> <p>14. \$ 19.853.472</p> <p>15. \$ 60.841.274</p> <p>16. US\$ 1.526.338,25</p> <p>17. custo-benefício = 0,551878 < 1</p> <p>18. \$ 8.548.034,08</p> <p>19. custo-benefício = 0,789178 < 1</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

PLANOS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

CAPÍTULO

8

- Sistema Price
- Sistema SAC
- Sistema americano
- Sistema Sacre
- Custo efetivo em sistemas de amortização

8.1 Reembolso de empréstimos e financiamentos

A amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga progressivamente por meio de parcelas de modo que ao término do prazo estipulado o débito seja liquidado. Essas parcelas ou prestações são a soma de duas partes: a amortização ou devolução do principal emprestado e os juros correspondentes aos saldos do empréstimo ainda não amortizados.

$$\text{PRESTAÇÃO} = \text{AMORTIZAÇÃO} + \text{JUROS}$$

Essa separação permite discriminar o que representa devolução do principal (amortização) do que representa serviço da dívida (juros). Ela é importante para as necessidades jurídico-contábeis e na análise de investimentos, em que os juros, por serem dedutíveis para efeitos tributáveis, têm um efeito fiscal.

O termo carência designa o período que vai desde a data de concessão do empréstimo até a data em que será paga a primeira prestação. Em geral, esse período é negociado entre o credor e o mutuário. Qualquer sistema de amortização pode ter, ou não, prazo de carência.

Entre os principais e mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos temos: Sistema de Amortização Francês (conhecido também como Sistema *Price*), Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Americano e o Sistema Misto, conhecido como Sistema de Amortização Crescente (Sacre). Muitas vezes os bancos e as instituições financeiras criam sistemas de amortização específicos, não-convencionais, adequados a determinadas situações ou características do mercado ou dos clientes.

Por questões didáticas evitaremos, no possível, o excesso de fórmulas e equações matemáticas, preferindo apresentar a mecânica de cálculo por meio das próprias planilhas auto-explicativas.

8.1.1 Sistema de Amortização Francês – Tabela Price

A denominação Sistema de Amortização Francês vem do fato de ter sido utilizado primeiramente na França, no século XIX. Esse sistema caracteriza-se por pagamentos do *principal* em prestações iguais, periódicas e sucessivas. É o mais utilizado pelas instituições financeiras e pelo comércio em geral. Como os juros incidem sobre o saldo devedor que, por sua vez, decresce à medida que as prestações são pagas, eles são decrescentes e, consequentemente, as amortizações do principal são crescentes.

O Sistema ou Tabela Price tem esse nome em homenagem ao economista inglês Richard Price, o qual incorporou a teoria do juro composto às amortizações de empréstimos, no século XVIII. Basicamente a Tabela Price é um caso particular do Sistema de Amortização Francês, em que a taxa de juros é dada em termos nominais (na prática é dada em termos anuais) e as prestações têm período menor que aquele a que se refere a taxa de juros (em geral, as amortizações são pagas em base mensal). Nesse sistema, o cálculo das prestações é feito usando-se a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação, calculada a partir da taxa nominal.

Exemplo 8.1

Um empréstimo de \$200.000 será pago pela Tabela Price em quatro prestações mensais postecipadas. A juros efetivos de 10% a.m., construir a planilha de amortização.

Para um determinado período, os juros são calculados sobre o saldo devedor do empréstimo ao início desse período; a amortização é a diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros respectivos; e o saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior menos a amortização do respectivo período. O quadro a seguir mostra os valores:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$ 200.000,00	-	-	-
1	\$ 156.906,00	\$ 43.094,00	\$ 20.000,00	\$ 63.094,00
2	\$ 109.502,60	\$ 47.403,40	\$ 15.690,60	\$ 63.094,00
3	\$ 57.358,86	\$ 52.143,74	\$ 10.950,26	\$ 63.094,00
4	-	\$ 57.358,86	\$ 5.735,89	\$ 63.094,00

A planilha é auto-explicativa. Entretanto, a seguir mostramos o procedimento utilizado no cálculo dos diversos valores:

1. Cálculo da prestação do t-ésimo período:

$$R_t = \frac{P}{a_{4|10\%}} \left[\frac{\$ 200.000}{(1,10)^4 - 1} \right] = \frac{\$ 200.000}{3,16987} = \$ 63.094$$

2. Cálculo dos juros do t-ésimo período:

$$J_t = i \times SD_{t-1}; \text{ por exemplo, para } t = 2: J_2 = i \times SD_1 = 0,10 \times \$156.906 = \$15.690,60$$

3. Cálculo da amortização do t-ésimo período:

$$A_t = R_t - J_t; \text{ para } t = 2: A_2 = R - J_2 = \$63.094 - \$15.690,60 = \$47.403,40$$

4. Cálculo do saldo devedor do t-ésimo período:

$$SD_t = SD_{t-1} - A_t; \text{ para } t = 2: SD_2 = SD_1 - A_2 = \$156.906 - \$47.403,40 = \$109.502,60$$

Exemplo 8.2

No Exemplo 8.1, considerando agora um período de carência de 3 meses em que serão pagos unicamente os juros devidos, construir a planilha de amortização.

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_{t-1} = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$ 200.000,00	-	-	
1	\$ 200.000,00	-	\$ 20.000,00	\$ 20.000,00
2	\$ 200.000,00	-	\$ 20.000,00	\$ 20.000,00
3	\$ 156.906,60	\$ 43.094,00	\$ 20.000,00	\$ 63.094,00
4	\$ 109.502,60	\$ 47.403,40	\$ 15.690,00	\$ 63.094,00
5	\$ 57.358,86	\$ 52.143,74	\$ 10.950,26	\$ 63.094,00
6	-	\$ 57.358,86	\$ 5.735,89	\$ 63.094,00

O procedimento seguido é igual ao do exemplo anterior, com a diferença de que nos meses do período de carência a dívida não é amortizada, mas os juros devidos sobre o saldo devedor são pagos. A primeira prestação é paga logo ao término da carência.

Exemplo 8.3

No Exemplo 8.1, considerando agora um período de carência de três meses em que os juros são capitalizados e incorporados ao principal, construir a planilha de amortização.

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$ 200.000,00	-	-	-
1	\$ 220.000,00	-	-	-
2	\$ 242.000,00	-	-	-
3	\$ 189.856,18	\$ 52.143,82	\$ 24.200,00	\$ 76.343,82
4	\$ 132.497,98	\$ 57.358,20	\$ 18.985,62	\$ 76.343,82
5	\$ 69.403,96	\$ 63.094,02	\$ 13.249,80	\$ 76.343,82
6	-	\$ 69.403,96	\$ 6.940,40	\$ 76.343,82

Durante o período de carência os juros são capitalizados e incorporados ao principal. Conseqüentemente, o cálculo das prestações deve ser realizado com base no financiamento inicial capitalizado por $c-1$ meses, onde c representa o período de carência:

$$\begin{aligned} R &= \frac{P(1+i)^{c-1}}{a_{\overline{4}|10\%}} \\ &= \frac{\$200.000 \times (1,10)^2}{\left[\frac{(1,10)^4 - 1}{(1,10)^4 \times 0,10} \right]} = \frac{\$242.000}{3,16987} = \$76.343,82 \end{aligned}$$

Exemplo 8.4

Um empréstimo de \$200.000 será pago em três prestações mensais iguais consecutivas. Considerando uma taxa de juros nominal de 180% a.a. com capitalização mensal, construir a tabela de amortização. Quanto totalizou os juros pagos nos três meses?

- Taxa de juros efetiva mensal

Sendo os juros de acordo com a Tabela Price, isto implica que a taxa de juros por período, no caso mês, seja a taxa efetiva mensal calculada a partir da taxa nominal. Portanto:

$$(1+i_m) = \left(1 + \frac{1,8}{12}\right) \Rightarrow i_m = 0,15 = 15\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo das prestações

$$R = \frac{P}{a_{\overline{3}|15\%}} = \frac{\$200.000,00}{2,28323} = \$87.595,21$$

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$200.000,00	-	-	-
1	\$142.404,79	\$57.595,21	\$30.000,00	\$87.595,21
2	\$76.170,30	\$66.234,49	\$21.360,72	\$87.595,21
3	-	\$76.170,30	\$11.425,55	\$87.595,21

Juros totais: \$62.786,27

Exemplo 8.5

Montar a planilha de amortização de um empréstimo com as seguintes características: valor do empréstimo de \$1.000.000; reembolso pela Tabela Price em cinco pagamentos trimestrais com carência de três trimestres; juros nominais de 28% a.a. capitalizados trimestralmente; e os juros serão capitalizados e incorporados ao principal durante o período de carência.

- Taxa de juros efetiva trimestral

$$(1+i_t) = \left(1 + \frac{0,28}{4}\right) \Rightarrow i_t = 0,07 = 7\% \text{ a.t}$$

- Prestação trimestral

Durante o período de carência, os juros são capitalizados e incorporados ao principal. Logo, as prestações devem ser calculadas com base no financiamento capitalizado por $c-1$ meses, onde c representa o período de carência:

$$\begin{aligned} R &= \frac{P(1+i)^{c-1}}{\alpha_{5|7\%}} \\ &= \frac{\$1.000.000 \times (1,07)^2}{\left[\frac{(1,07)^5 - 1}{(1,07)^5 \times 0,07} \right]} = \frac{\$1.144.900}{4,10020} = \$279.230,28 \end{aligned}$$

Trimestre (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$ 1.000.000,00	-	-	-
1	\$ 1.070.000,00	-	\$ 70.000,00	
2	\$ 1.144.900,00		\$ 74.900,00	
3	\$ 945.812,72	\$ 199.087,28	\$ 80.143,00	\$ 279.230,28
4	\$ 732.789,33	\$ 213.023,39	\$ 66.206,89	\$ 279.230,28
5	\$ 504.854,30	\$ 227.935,03	\$ 51.295,25	\$ 279.230,28
6	\$ 260.963,82	\$ 243.890,48	\$ 35.339,80	\$ 279.230,28
7	-	\$ 260.963,82	\$ 18.267,47	\$ 279.230,28

8.1.1.1 Cálculo das variáveis em um período qualquer

No Sistema Price, muitas vezes é necessário o cálculo dos valores para algum determinado período qualquer, sem a necessidade de elaborar a planilha completa. Esses cálculos podem ser feitos do seguinte modo:

Saldo devedor

Supondo uma série de n prestações postecipadas, em um t -ésimo período qualquer, o número de prestações ainda não pagas será igual a ' $n - t$ '. Dessa maneira, o saldo devedor no t -ésimo período será igual ao valor presente das prestações ainda devidas:

$$\begin{aligned} SD_t &= R \times a_{n-1|i\%} \\ &= R \left[\frac{(1+i)^{n-t} - 1}{(1+i)^{n-t} \times i} \right] \end{aligned}$$

substituindo a expressão de R, e simplificando:

$$SD_t = \frac{P}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]} \left[\frac{(1+i)^{n-t} - 1}{(1+i)^{n-t} \times i} \right] \Rightarrow SD_t = P \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Amortização

O valor da prestação em um t-ésimo período qualquer é igual à soma da amortização desse período mais os juros respectivos, calculados com base no saldo devedor do período anterior ($t-1$):

$$R = A_t + i \times SD_{t-1}$$

substituindo expressões e simplificando:

$$\frac{P}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]} = A_t + i \times P \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1} \right] \Rightarrow A_t = P \left[\frac{(1+i)^{t-1} \times i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Juros

O valor da prestação é a soma da amortização mais os juros:

$$R = A_t + J_t$$

substituindo expressões, simplificando e destacando J_t :

$$\frac{P}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]} = P \left[\frac{(1+i)^{t-1} \times i}{(1+i)^n - 1} \right] + J_t \Rightarrow J_t = P \times i \times \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Exemplo 8.6

Um financiamento de \$50.000 foi contratado para ser pago em 48 prestações mensais pela Tabela Price, a juros nominais de 12% a.a. capitalizados mensalmente. Calcular o juro a ser pago no 25º mês e o saldo devedor e a amortização do 30º mês.

- Taxa de juros efetiva mensal

$$(1+i_m) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)$$

$$(1+i_m) = \left(1 + \frac{0,12}{12}\right) \Rightarrow i_m = 0,01 = 1\% \text{ a.m.}$$

- Juro pago no 25º mês

$$J_t = P \times i \times \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^{t-1}}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$J_{25} = \$50.000 \times 0,01 \times \left[\frac{(1,01)^{48} - (1+i)^{24}}{(1+i)^{48} - 1} \right] = \$50.000 \times 0,01 \times 0,55942 = \$279,71$$

- Saldo devedor no 30º mês

$$SD_t = P \left[\frac{(1+i)^n - (1+i)^t}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$SD_{30} = \$50.000 \times \left[\frac{(1,01)^{48} - (1,01)^{30}}{(1,01)^{48} - 1} \right] = \$50.000 \times 0,43183 = \$21.591,47$$

- Amortização paga no 30º mês

$$A_t = P \left[\frac{(1+i)^{t-1} \times i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A_{30} = \$50.000 \times \left[\frac{(1,01)^{29} \times 0,01}{(1,01)^{48} - 1} \right] = \$50.000 \times 0,021798 = \$1.089,88$$

Exemplo 8.7

Para comprar um apartamento você faz um empréstimo bancário de \$40.000 a ser pago em 60 meses, a uma taxa nominal de 15% a.a. capitalizada mensalmente. Calcule o valor das prestações, dos juros e do total amortizado no primeiro, segundo e terceiro anos, separadamente. Use a calculadora HP-12C.

Pela HP 12-C:

	Visor:
Limpe as memórias: (f) (REG)	0,00
Entre com o empréstimo: 40.000 (PV)	40.000
Entre com o número de meses: 60 (n)	60,00
Entre com a taxa de juros: 15 (g) (12÷)	1,25
Calcule as prestações: (PMT)	-951,60
Calcule os juros no primeiro ano: 12 (f) (AMORT)	-5.611,46
Calcule o total amortizado no primeiro ano: (x y)	-5.807,70

Utilizando as teclas (f) (AMORT), obtemos o total dos juros pagos no período introduzido imediatamente antes. Note que o período tem de ser expresso na mesma unidade da taxa, no caso, mensal. A tecla (x y), quando pressionada após o cálculo dos juros, mostra o principal já amortizado.

Para calcularmos os juros e o principal amortizado referente ao segundo e terceiro anos, realizaremos o seguinte procedimento:

	Visor:
Calcule os juros do segundo ano: 12 (f) (AMORT)	-4.677,85
Calcule o total amortizado no segundo ano: (x y)	-6.741,32

Precisamos introduzir novamente o número 12 para a calculadora entender que queremos os juros dos próximos 12 meses. Veja que se somarmos o valor dos juros com a amortização do segundo ano teremos \$11.419,17, que, dividido por 12 meses, dará \$951,60. Essa foi a prestação calculada anteriormente. O mesmo acontece se somarmos os juros e as amortizações do primeiro ano, o que demonstra que neste sistema as prestações são iguais, mas a relação de juros é diferente. Calcularemos a seguir os juros e o principal referente ao terceiro ano:

	Visor:
Calcule os juros do terceiro ano: 12 (f) (AMORT)	-3.594,15
Calcule o total amortizado no terceiro ano: (x y)	-7.825,50

Caso você queira saber quanto falta ainda para ser amortizado:

	Visor:
(RCL) (PV)	19.625,93

ou, se você preferir: \$40.000 - \$5.807,70 - \$6.741,32 - \$7.825,05 = \$19.625,93

Exemplo 8.8

Uma pessoa comprou um carro de \$23.000 comprometendo-se a pagar 24 prestações mensais de \$1.170,60 cada. Logo após ter pago a décima prestação, a pessoa propõe encurtar o prazo do financiamento. Para tanto, deve pagar \$10.000 à vista e o saldo em 4 prestações mensais iguais à mesma taxa de juros do financiamento inicial. Ela quer saber: a taxa de juros do financiamento, quanto falta pagar ainda do principal logo após o pagamento da décima prestação, o valor de cada uma das quatro prestações finais, e o total de juros e amortização pagas nas 4 prestações.

Pela HP-12-C:

	Visor:
Limpe as memórias: (f) (REG)	0,00
Entre com o empréstimo: 23.000 (PV)	23.000,00
Entre com o número de meses: 24 (n)	24,00
Entre com as prestações: 1.170,60 (CHS) (PMT)	-1.170,00
Calcule a taxa de juros: (i)	1,6667
Calcule os juros nos 10 meses: 10 (f) (AMORT)	-3.215,82
Calcule o total amortizado nos 10 meses: (xy)	-8.490,18
Calcule o saldo devedor no 10º mês: (RCL) (PV)	14.509,82

Descontando os \$ 10.000 e introduzindo o restante como novo principal:

	Visor:
10.000 (-) (PV)	4.509,82

Cálculo do valor das novas prestações, considerando que o saldo restante será pago em quatro vezes

	Visor:
4 (n) (PMT)	-1.174,82

Total de juros das 4 últimas prestações

	Visor:
4 (n) (AMORT)	-189,46

Total amortizado nas 4 últimas prestações

	Visor:
(x y)	-4.509,82

8.1.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), o principal é reembolsado em quotas de amortização iguais. Dessa maneira, diferente da Tabela Price, em que as prestações são iguais, no Sistema SAC as prestações são decrescentes, já que os juros diminuem a cada prestação. A amortização é calculada dividindo-se o valor do principal pelo número de períodos de pagamento. Esse tipo de sistema às vezes é usado pelo Sistema Financeiro da Habitação (SFH), pelos bancos comerciais em seus financiamentos imobiliários e também, em certos casos, em empréstimos às empresas privadas através de entidades governamentais.

Exemplo 8.9

Elaborar a planilha de amortização para o seguinte financiamento:

- Valor do financiamento de \$ 200.000;

- Reembolso em quatro meses pelo Sistema SAC; e
- Taxa de juros efetiva de 10% a.m.

Cálculo das amortizações: $A_t = \frac{\text{financiamento}}{n} = \frac{\$ 200.000}{4} = \$ 50.000$

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)
0	\$ 200.000	-	-	-
1	\$ 150.000	\$ 50.000	\$ 20.000	\$ 70.000
2	\$ 100.000	\$ 50.000	\$ 15.000	\$ 65.000
3	\$ 50.000	\$ 50.000	\$ 10.000	\$ 60.000
4	-	\$ 50.000	\$ 5.000	\$ 55.000

Exemplo 8.10

Um empréstimo de \$ 200.000, contratado a juros efetivos de 10% a.m., será pago em três prestações mensais com carência de três meses. Construir a planilha de amortização.

Durante a carência os juros são capitalizados e incorporados ao principal. Logo, a amortização deve ser calculada com base no financiamento capitalizado por dois meses ($c - 1$ meses, onde $c = 3$):

$$A_t = \frac{P \times (1+i)^{c-1}}{3} = \frac{\$ 200.000 \times (1,10)^{3-1}}{3} = \$ 80.666,67$$

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)
0	\$ 200.000,00	-	-	-
1	\$ 220.000,00	-	\$ 20.000,00	-
2	\$ 242.000,00	-	\$ 22.000,00	-
3	\$ 161.333,33	\$ 80.666,67	\$ 24.200,00	\$ 104.866,67
4	\$ 80.666,67	\$ 80.666,67	\$ 16.133,33	\$ 96.800,00
5	-	\$ 80.666,67	\$ 8.066,67	\$ 88.733,33

8.1.2.1 Cálculo das variáveis em um período qualquer

O cálculo dos valores para um determinado período pode ser feito do seguinte modo:

Amortização

As quotas de amortização são constantes e calculadas dividindo-se o valor do principal inicial pelo número de períodos de pagamento:

$$A = \frac{P}{n}$$

Saldo devedor

O saldo devedor em um determinado período é igual ao principal inicial menos a soma das amortizações já pagas:

$$\begin{aligned} D_t &= P - t \times A \\ &= P - t \times \frac{P}{n} \quad \Rightarrow \quad SD_t = P \left(1 - \frac{t}{n} \right) \end{aligned}$$

Juros

Os juros em t são calculados sobre o saldo devedor em $t - 1$:

$$J_t = i \times SD_{t-1}$$

substituindo expressões, simplificando e destacando J_t :

$$J_t = i \times P \left(1 - \frac{t-1}{n} \right) \quad \Rightarrow \quad J_t = i \times P \left[1 - \frac{(t-1)}{n} \right]$$

Exemplo 8.11

Um financiamento de \$ 50.000 foi contratado a juros efetivos de 12% a.a. e será pago em 48 prestações mensais pelo SAC. Calcular o juro a ser pago no 25º mês e o saldo devedor e a amortização do 30º mês.

- Taxa de juros efetiva ao mensal

$$\begin{aligned} (1+i_a) &= (1+i_m)^{12} \\ (1+0,12) &= (1+i_m)^{12} \quad \Rightarrow \quad i_m = (1,12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,00948879 = 0,948879\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

- Juros do 25º mês:

$$J_t = i \times P \left[1 - \frac{(t-1)}{n} \right] \quad \Rightarrow \quad J_{25} = 0,00948879 \times \$50.000 \times \left[1 - \frac{(25-1)}{48} \right] = \$237,22$$

- Saldo devedor no 30º mês

$$SD_t = P \left(1 - \frac{t}{n} \right) \Rightarrow SD_{30} = \$50.000 \times \left[1 - \frac{30}{48} \right] = \$18.750$$

- Amortização do 30º mês

$$A = \frac{P}{n} \Rightarrow A_{30} = \frac{\$50.000}{48} = \$1.041,67$$

8.1.3 Sistema de Amortização Crescente (Sacre)

O Sistema de Amortização Crescente (Sacre) foi adotado recentemente pelo SFH na liquidação de financiamentos da casa própria. O Sacre é baseado no SAC e no Sistema Price, já que a prestação é igual à média aritmética calculada entre as prestações desses dois sistemas, nas mesmas condições de juros e prazos. Aproximadamente até a metade do período de financiamento, as amortizações são maiores que as do Sistema Price. Como decorrência disso, a queda do saldo devedor é mais acentuada e são menores as chances de ter resíduo ao final do contrato, como pode ocorrer no Sistema Price. Uma das desvantagens do Sacre é que suas prestações iniciais são ligeiramente mais altas que as do Price. Contudo, após a metade do período, o mutuário sentirá uma queda substancial no comprometimento de sua renda com o pagamento das prestações.

No Sacre, conhecido também como Sistema Misto, as prestações decrescem de acordo com uma determinada progressão aritmética e podem ser calculadas usando-se as seguintes expressões:

- Valor da 1ª prestação

$$R_1 = \frac{P(1-q)}{a_{n|} i\%} + q \left(\frac{1}{n} + i \right) P$$

- Valor da razão da progressão aritmética (corresponde ao decréscimo das prestações)

$$r = q \times \frac{i \times P}{n}$$

- Valor das prestações no período t ($t > 1$)

$$R_{t+1} = R_t - r$$

onde:

P = valor do principal;

R_1 = valor da primeira prestação;

q = coeficiente variável por tipo de plano;

r = razão da progressão (correspondente ao decréscimo do valor das prestações sucessivas).

Dependendo do valor de q , o sistema de reembolso pode resultar no Sistema Price (para $q = 0$) ou no SAC (no caso de $q = 1$). O denominado Sacre é um caso particular em que $q = 0,5$. Nesse sistema, devido à ponderação 0,5, o valor das prestações, amortizações, juros e saldos devedores correspondem à média aritmética dos valores dos Sistema Price e SAC.

Exemplo 8.12

Calcular as prestações de um empréstimo de \$200.000 a ser pago em quatro prestações mensais a juros efetivos de 10% a.m., fazendo a variável q assumir os valores 0 (Sistema Price), 0,5 (Sacre) e 1 (SAC). Apresentar, também, a planilha completa do Sistema Sacre.

- Cálculo da primeira prestação e da razão de decréscimo

- a) Para $q = 0$ (Sistema Price):

primeira prestação:

$$R_1 = \frac{P(1-q)}{a_{n|i\%}} + q \left(\frac{1}{n} + i \right) P = \frac{\$200.000}{a_{4|10\%}} = \frac{\$200.000}{3,16987} = \$63.094$$

razão de decréscimo das prestações:

$$r = q \frac{i \times P}{n} = 0 \Rightarrow \text{as prestações são constantes}$$

- b) Para $q = 0,5$ (Sacre):

primeira prestação:

$$R_1 = \frac{\$200.000 \times (1-0,5)}{a_{4|10\%}} + 0,5 \times \left(\frac{1}{4} + 0,10 \right) \times \$200.000 = \$66.547$$

razão de decréscimo das prestações:

$$r = 0,5 \times \frac{0,10 \times \$200.000}{4} = \$2.500 \Rightarrow \text{as prestações diminuem em } \$2.500 \text{ ao mês}$$

- c) Para $q = 1,0$ (SAC)

primeira prestação:

$$R_1 = \frac{\$200.000 \times (1-1)}{a_{4|10\%}} + 1,0 \times \left(\frac{1}{4} + 0,10 \right) \times \$200.000 = \$70.000$$

- razão de decréscimo das prestações:

$$r = 1,0 \times \frac{0,10 \times \$200.000}{4} = \$5.000 \Rightarrow \text{as prestações diminuem em } \$5.000 \text{ ao mês}$$

- Valor das prestações para $q = 0; 0,5; 1,0$

Mês	Sistema Price $q = 0; r = 0$	Sacre $q = 0,5 ; r = 2.500$	SAC $q = 1,0; r = 5.000$
1	\$ 63.094	\$ 66.547	\$ 70.000
2	\$ 63.094	\$ 64.047	\$ 65.000
3	\$ 63.094	\$ 61.547	\$ 60.000
4	\$ 63.094	(*) \$ 59.047	(*) \$ 55.000

(*) Observe-se que as prestações decrescem na razão r respectiva.

No quadro anterior, para $q = 0$, as prestações correspondem às do Sistema Price (veja o Exemplo 8.1). Para $q = 1,0$, correspondem às do SAC (veja o Exemplo 8.9) e para $q = 0,5$, correspondem às do Sacre.

A planilha completa no Sacre é mostrada a seguir:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização ($A_t = R_t - J_t$)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_t)
0	\$ 200.000,00	—	—	—
1	\$ 153.453,00	\$ 46.547,00	\$ 20.000,00	\$ 66.547
2	\$ 104.751,30	\$ 48.701,70	\$ 15.345,30	\$ 64.047
3	\$ 53.679,43	\$ 51.071,87	\$ 10.475,13	\$ 61.547
4	—	\$ 53.679,43	\$ 5.367,94	\$ 59.047

Atente ao fato de que essa planilha é simplesmente uma média aritmética das planilhas dos Sistema Price e SAC (planilhas dos Exemplos 8.1 e 8.9).

O seguinte quadro apresenta, para efeitos comparativos, os esquemas de reembolso pelo Sistema Price e Sacre para um financiamento de \$ 2.000 amortizado em 24 meses a juros efetivos de 1% a.m.:

Sistema Price					Sistema Sacre			
Mês	Saldo devedor	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	\$ 2.000,00				\$ 2.000,00			
1	1.925,85	\$ 20,00	\$ 74,15	\$ 94,15	1.921,26	\$ 20,00	\$ 78,74	\$ 98,74
2	1.850,96	19,26	74,89	94,15	1.842,15	19,21	79,11	98,32
3	1.775,33	18,51	75,64	94,15	1.762,66	18,42	79,49	97,91
4	1.698,93	17,75	76,39	94,15	1.682,80	17,63	79,86	97,49
5	1.621,78	16,99	77,16	94,15	1.602,55	16,83	80,25	97,07
6	1.543,85	16,22	77,93	94,15	1.521,92	16,03	80,63	96,66
7	1.465,14	15,44	78,71	94,15	1.440,90	15,22	81,02	96,24
8	1.385,64	14,65	79,50	94,15	1.359,49	14,41	81,41	95,82
9	1.305,35	13,86	80,29	94,15	1.277,68	13,59	81,81	95,41
10	1.224,26	13,05	81,09	94,15	1.195,46	12,78	82,21	94,99
11	1.142,35	12,24	81,90	94,15	1.112,84	11,95	82,62	94,57
12	1.059,63	11,42	82,72	94,15	1.029,82	11,13	83,03	94,16
13	976,08	10,60	83,55	94,15	946,37	10,30	83,44	93,74
14	891,69	9,76	84,39	94,15	862,51	9,46	83,86	93,32
15	806,46	8,92	85,23	94,15	778,23	8,63	84,28	92,91
16	720,38	8,06	86,08	94,15	693,52	7,78	84,71	92,49
17	633,44	7,20	86,94	94,15	608,39	6,94	85,14	92,07
18	545,63	6,33	87,81	94,15	522,81	6,08	85,57	91,66
19	456,94	5,46	88,69	94,15	436,80	5,23	86,01	91,24
20	367,36	4,57	89,58	94,15	350,35	4,37	86,46	90,82
21	276,88	3,67	90,47	94,15	263,44	3,50	86,90	90,41
22	185,51	2,77	91,38	94,15	176,09	2,63	87,36	89,99
23	93,21	1,86	92,29	94,15	88,27	1,76	87,81	89,57
24	0,00	0,93	93,21	94,15	0,00	0,88	88,27	89,16

Observe que no Sacre, até a metade do período de financiamento, as amortizações são maiores que as do Sistema Price. Isso resulta na queda do saldo devedor ser mais acentuada que no Sistema Price, com menores chances de ter resíduo ao fim do contrato. As prestações iniciais são ligeiramente mais altas que as do Price. Porém, depois da metade do período, passam a ser menores, comprometendo uma parcela menor da renda do mutuário.

8.1.4 Sistema de Amortização Americano

Neste esquema de amortização o principal é restituído por meio de uma parcela única ao fim da operação. Os juros podem ser pagos periodicamente (mais comum) ou capitalizados e pagos juntamente com o principal no fim do prazo acertado.

O devedor pode constituir um fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*), no qual deposita periodicamente as quotas de amortização. Essas quotas, por sua vez, devem render juros de tal modo que, na data de pagamento do principal, o saldo desse fundo de amortização seja igual ao capital a pagar, liquidando, dessa maneira, o empréstimo.

Se a taxa de aplicação do *sinking fund* (i_s) for menor que a taxa à qual o financiamento foi contratado (i), o dispêndio total feito pelo devedor em cada período será maior que a prestação calculada no Sistema Price. Isto é, o custo financeiro do Sistema de Amortização Americano será maior que o custo financeiro do Sistema Price.

Exemplo 8.13

Elaborar a planilha de amortização de um empréstimo que será reembolsado de acordo com Sistema de Amortização Americano, nos três seguintes casos: a) os juros são pagos periodicamente e não é aberto fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*); b) os juros são capitalizados e pagos no fim da operação juntamente com o principal e não é constituído *sinking fund*; c) pagamento periódico dos juros e criação de *sinking fund*; d) comparado com o Sistema Price, o custo financeiro do Sistema de Amortização Americano será maior ou menor?

Dados: valor da operação = \$ 200.000; prazo da operação = 3 meses; taxa de juros contratada no financiamento (i) = 10% a.m.; taxa de juros ganha pelo fundo de amortização (i_s) = 8% a.m.

a) Juros pagos periodicamente:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)
0	\$ 200.000	-	-	-
1	\$ 200.000	-	\$ 20.000	\$ 20.000
2	\$ 200.000	-	\$ 20.000	\$ 20.000
3	-	\$ 200.000	\$ 20.000	\$ 220.000

b) Juros capitalizados e pagos no fim da operação:

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)
0	\$ 200.000	-	-	-
1	\$ 220.000	-	-	-
2	\$ 242.000	-	-	-
3	-	\$ 200.000	\$ 66.200 (*)	\$ 266.200

(*) $\$ 200.000 \times (1,10) - \$ 200.000 = \$ 66.200$

- c) Com a criação do fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*):

Mês (t)	Juros pagos (J = i × P)	Quota do fundo de amortização (QA)	Desencaixe total (D = J + QA)	Saldo devedor do empréstimo	Valor do sinking fund
0	-	-	-	-	-
1	\$ 20.000,00	\$ 61.606,70	\$ 81.606,70	\$ 200.000,00	\$ 66.535,24 (*)
2	\$ 20.000,00	\$ 61.606,70	\$ 81.606,70	\$ 200.000,00	\$ 128.141,94 (**)
3	\$ 20.000,00	\$ 61.606,70	\$ 81.606,70	\$ 200.000,00	\$ 200.000,00 (***)

$$(*) \$ 61.606 \times (1,05) = \$ 66.535,24 \quad (**) \$ 61.606 \times S_{2|8\%} = \$ 128.141,94 \quad (***) \$ 61.606 \times S_{3|8\%} = \$ 200.000$$

- Cálculo da quota do fundo de amortização do empréstimo (QA)

Ao fim da operação, o valor do fundo de amortização (*sinking fund*) deve ser igual ao valor do empréstimo concedido de modo que o empréstimo possa ser liquidado. Logo, trata-se de calcular, a juros efetivos (i_s) de 8% a.m., o valor da quota do fundo de amortização (QA) de modo que acumule, no prazo da operação, um montante igual ao valor do empréstimo. Assim, o valor da quota será:

$$QA = \frac{S}{S_{n|i_s\%}} = \frac{\$ 200.000,00}{S_{3|8\%}} = \frac{\$ 200.000,00}{\left[\frac{(1,08)^3 - 1}{0,08} \right]} = \$ 61.606,70$$

As quotas do fundo de amortização do empréstimo mais os juros que elas proporcionam constituem o fundo de amortização (*sinking fund*) que, ao fim da operação, deve ter um valor igual ao valor do empréstimo. Pode-se observar nas duas últimas colunas da planilha que, no fim da operação, o saldo devedor do empréstimo é igual ao valor do fundo de amortização. Conseqüentemente, o valor do fundo liquidará o empréstimo.

- Juros pagos

Os juros são constantes e pagos periodicamente, calculados sobre o principal inicial à taxa de juros contratada:

$$J = i \times P = 0,10 \times \$ 200.000 = \$ 20.000$$

- Desencaixe total

O mutuário está obrigado, periodicamente, a pagar o juro (J) e depositar a quota do fundo de amortização (QA). Logo, o desencaixe periódico total é o seguinte:

$$D = J + QA = \$ 20.000 + \$ 61.606,70 = \$ 81.606,70$$

- d) Como ($i_s = 8\%$ a.m.) < ($i = 10\%$ a.m.), o custo financeiro no Sistema Price é menor que no Sistema de Amortização Americano.

8.2 Custo efetivo (taxa interna de retorno) de sistemas de amortização

Normalmente sobre os financiamentos incide uma série de custos adicionais, tais como IOF, comissões, aval etc. Devido a esses encargos, o custo do financiamento é maior que a taxa contratada, tornando-se indispensável a sua inclusão na planilha de amortização para o posterior cálculo do custo efetivo do empréstimo (taxa interna de retorno).

Exemplo 8.14

Uma empresa tomou um financiamento de \$ 2.000 sob as seguintes condições: taxa de juros efetiva de 10% a.m.; reembolso do principal em quatro meses, sem período de carência, pelo Sistema Price; encargos de 2% sobre o valor das prestações. Pede-se montar a planilha de amortização e fluxo de caixa e calcular o custo efetivo do financiamento.

- Planilha de amortização e fluxo de caixa

Mês (t)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_t$)	Amortização (A_t)	Juros ($J_t = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_t = A_t + J_t$)	Encargos	Fluxo de caixa
0	\$ 2.000,00					\$ 2.000,00
1	\$ 1.569,06	\$ 430,94	\$ 200,00	\$ 630,94	\$ 12,62	(\$ 643,56)
2	\$ 1.095,03	\$ 474,05	\$ 156,91	\$ 630,94	\$ 12,62	(\$ 643,56)
3	\$ 573,59	\$ 521,44	\$ 109,50	\$ 630,94	\$ 12,62	(\$ 643,56)
4	\$ 00,00	\$ 573,59	\$ 57,36	\$ 630,94	\$ 12,62	(\$ 643,56)

O custo efetivo do financiamento é a taxa interna de retorno (TIR) do fluxo de caixa, ou seja, é a taxa que anula o VPL na seguinte expressão:

$$VPL = \$ 2.000 - \frac{\$ 643,56}{(1+TIR)} - \frac{\$ 643,56}{(1+TIR)^2} - \frac{\$ 643,56}{(1+TIR)^3} - \frac{\$ 643,56}{(1+TIR)^4} = 0$$

- Taxa aproximada

Para estimar manualmente o valor da TIR, podemos começar calculando o VPL para diversas taxas de juros até conseguir mudança no sinal do VPL e, a seguir, efetuar uma interpolação linear:

$$TIR = 10\% + \left[\frac{-39,99861}{-39,99861 - (+3,39005)} \right] \times (11\% - 10\%) = 10,92\%$$

Taxa de juros	VPL
9%	-\$ 84,95412
10%	-\$ 39,99861
11%	+\$ 3,39005

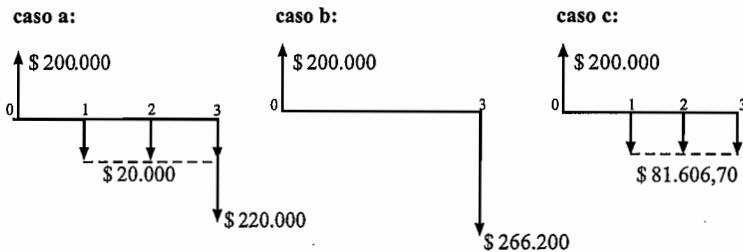
Calculadora HP-12C
 (f) (FIN)
 643,56 (CHS) (PMT)
 4 (n) 2.000 (PV)
 (i) → 10,92%

apaga a memória financeira
 entra com o valor dos pagamentos mensais com sinal negativo
 entra com o número de pagamentos e com o valor do financiamento
 calcula a taxa de juros

Exemplo 8.15

Com os valores obtidos no Exemplo 8.13, calcular e comparar o custo efetivo do financiamento a ser reembolsado pelo Sistema de Amortização Americano, nos três seguintes casos: a) os juros são pagos periodicamente; b) juros capitalizados e pagos no fim da operação juntamente com o principal; c) pagamento periódico dos juros e constituição do fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*).

Com os valores previamente calculados no Exemplo 8.13, podemos representar os fluxos de caixa dos três casos:



- Cálculo da TIR

caso A

$$-\$200.000 - \frac{\$20.000}{(1+i_A)} - \frac{\$20.000}{(1+i_A)^2} - \frac{\$220.000}{(1+i_A)^3} = 0 \Rightarrow i_A = 10,00\% \text{ a.m.}$$

caso B

$$\$200.000 - \frac{\$266.200}{(1+i_B)^3} = 0 \Rightarrow i_B = 10,00\% \text{ a.m.}$$

caso C

$$\$200.000,00 - \frac{\$81.606,70}{(1+i_C)} - \frac{\$81.606,70}{(1+i_C)^2} - \frac{\$81.606,70}{(1+i_C)^3} = 0 \Rightarrow i_C = 10,83\% \text{ a.m.}$$

caso a

Calculadora HP-12C:
 (f) (FIN) 20.000 (CHS) (PMT)
 3 (n) 200.000 (PV)
 (200.000) (CHS) (FV)
 (i) → 10,00

caso b

Calculadora HP-12C:
 (f) (FIN)
 3 (n) 200.000 (PV)
 (266.200) (CHS) (FV)
 (i) → 10,00

caso c

Calculadora HP-12C:
 (f) (FIN)
 81.606,70 (CHS) (PMT)
 3 (n) 200.000 (PV)
 (i) → -10,83

8.3 Exercícios propostos

1. Uma indústria tomou emprestado \$2.000.000 concordando em saldar o débito em oito pagamentos anuais postecipados a juros efetivos de 36% a.a. pela Tabela Price. Pede-se calcular: a) a prestação anual; b) o saldo devedor logo após o sexto pagamento; c) a amortização do quarto ano.
2. Uma dívida de \$1.500.000 contratada a juros nominais de 36% a.a., capitalizados trimestralmente, será amortizada pela Tabela Price em oito anos por meio de pagamentos trimestrais. Pede-se determinar: a) o saldo devedor ao fim do 3º ano; b) o saldo devedor ao término do 14º trimestre; c) a distribuição do 20º pagamento em juros e amortização da dívida; d) o total de juros pagos no período.
3. Um financiamento de \$100.000 será pago pela Tabela Price em oito parcelas mensais a juros nominais de 72% a.a. com capitalização mensal. Calcular os juros embutidos na 6ª prestação.
4. Um financiamento de \$2.000.000 será pago pela Tabela Price em 18 parcelas mensais a juros efetivos de 10% a.m. Pede-se calcular: a) o valor da prestação; b) a soma das amortizações dos três primeiros meses; c) a amortização introduzida pela 13ª prestação.
5. Um empréstimo de \$2.000.000 será saldado pela Tabela Price em dez parcelas semestrais a juros efetivos de 9% a.s. Calcular o valor do saldo devedor do empréstimo logo após a 3ª prestação.
6. Um financiamento de \$10.000 será pago pela Tabela Price em cinco parcelas mensais a juros nominais de 120% a.a., capitalizados mensalmente. Pede-se calcular: a) a amortização do 4º mês; b) a soma dos juros pagos no 2º e 3º meses; c) o saldo devedor logo após o pagamento da 3ª prestação.
7. Um financiamento de \$500.000 será pago pela Tabela Price em cinco parcelas mensais a juros efetivos de 4% a.m. Pede-se calcular: a) a amortização do 4º mês; b) a soma dos juros pagos no 2º e 3º meses; c) o saldo devedor logo após o pagamento da 3ª prestação.
8. Um financiamento de \$500.000 será pago pelo Sistema SAC em cinco parcelas mensais a juros efetivos de 4% a.m. Pede-se calcular: a) a amortização do 4º mês; b) a soma dos juros pagos no 2º e 3º meses; c) o saldo devedor logo após o pagamento da 3ª prestação.
9. Um financiamento de \$500.000 será pago pelo Sistema Misto (Sacre) em cinco parcelas mensais a juros efetivos de 4% a.m. Pede-se calcular: a) a amortização do 4º mês; b) a soma dos juros pagos no 2º e 3º meses; c) o saldo devedor logo após o pagamento da 3ª prestação; d) o valor da prestação do 4º mês; e) a soma de todas as prestações pagas; f) a soma de todos os juros pagos.
10. Um capital de \$400.000 será pago de acordo com o Sistema de Amortização Americano em 15 meses a juros efetivos de 8% a.t. Os juros serão pagos periodicamente e será constituído um fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*) efetuando depósitos trimestrais remunerados à taxa efetiva de 6% a.t. Pede-se calcular: a) a quota trimestral do fundo de amortização do empréstimo; b) o total de juros pagos; c) o desencaixe periódico; d) o valor do fundo de amortização do empréstimo no fim do 4º trimestre; e) o custo efetivo do financiamento (TIR).
11. Um empréstimo de \$400.000 contratado à taxa efetiva de 16% a.a. será pago em 12 parcelas mensais postecipadas de acordo com o Sistema de Amortização Americano.

Elaborar as planilhas considerando que o fundo de amortização do empréstimo (*sinking fund*) terá depósitos mensais remunerados à taxa efetiva de 12% a.a. e calcular a TIR (custo efetivo do financiamento).

12. Um empréstimo de \$ 100.000 foi contratado a juros efetivos de 24% a.a. para ser pago em seis parcelas mensais postecipadas de acordo com o Sistema de Amortização Americano. O fundo de amortização do empréstimo terá depósitos mensais remunerados a juros efetivos de 20% a.a. Pede-se calcular: a) os juros; b) as quotas do fundo de amortização; c) os desencaixes; d) o saldo do fundo de amortização após o sexto desencaixe; e) os juros acumulados após o sexto desencaixe; f) os desencaixes acumulados após o sexto termo; g) a TIR (custo efetivo do financiamento).
13. Uma empresa contratou a juros efetivos de 5% a.m. um financiamento de \$ 600.000 que será amortizado por meio de seis prestações mensais postecipadas (termos vencidos). Pede-se: a) no Sistema de Amortização Constante (SAC), determinar a soma dos valores das prestações dos três primeiros meses; b) Tabela Price, calcular a soma dos valores das amortizações do 1º e 2º meses; c) no Sistema Misto (Sacre), calcular o valor da prestação do segundo mês; d) na Tabela Price, calcular a soma dos valores das seis prestações.
14. Uma empresa contratou a juros efetivos de 5% a.m. um financiamento de \$ 6.000 que será amortizado por meio de seis prestações mensais postecipadas. No Sistema de Amortização Constante, determinar a soma dos valores das prestações dos três primeiros meses e, na Tabela Price, calcular a soma dos valores das amortizações do 1º e 2º meses.

8.4 Respostas dos exercícios propostos

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. a) \$ 787.268,48; b) \$ 1.004.516,44;
c) \$ 169.210,89</p> <p>2. a) \$ 1.315.827,63; b) \$ 1.267.073,27;
c) \$ 97.127,49; 47.016,75;
d) \$ 3.112.616,93</p> <p>3. \$ 2.582,71</p> <p>4. a) \$ 243.860,44; b) \$ 145.178,07;
c) \$ 137.652,86</p> <p>5. \$ 1.568.740,33</p> <p>6. a) \$ 2.180,14; b) \$ 1.492,23;
c) \$ 4.578,30</p> <p>7. a) \$ 103.840,20; b) \$ 28.774,67;
c) \$ 211.833,99</p> <p>8. a) \$ 100.000; b) \$ 28.000; c) \$ 200.000</p> | <p>9. a) \$ 101.920,10; b) \$ 28.387,34;
c) \$ 205.917; d) \$ 110.156,78;
e) \$ 560.783,90; f) \$ 60.783,89</p> <p>10. a) \$ 70.958,56; b) \$ 160.000;
c) \$ 102.958,56; d) \$ 310.416,45;
e) 9,0456% a.t.</p> <p>11. TIR = 19,16% a.a.</p> <p>12. a) \$ 1.808,76; b) \$ 16.040,08;
c) \$ 17.848,84; d) \$ 100.000;
e) \$ 10.852,55; f) \$ 107.093,02;
g) 26,73%</p> <p>13. a) \$ 375.000; b) \$ 180.831,49;
c) \$ 121.605,24; d) \$ 709.262,89</p> <p>14. \$ 3.750; \$ 1.808,31</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

CÁLCULO FINANCEIRO EM CONTEXTO INFLACIONÁRIO

CAPÍTULO

9

Índices de preços

Representatividade dos valores financeiros em ambientes inflacionários

Taxa de juros aparente e taxa de juros real

Taxa efetiva em moeda nacional e em moeda estrangeira

Em contextos inflacionários, deve-se ficar atento para a denominada ilusão monetária ou rendimento aparente das aplicações e investimentos. Nessa situação, é importante determinar a taxa real de juros e o custo ou rendimento real de um financiamento ou aplicação. No processo de cálculo da taxa real, é necessário homogeneizar os valores das séries financeiras de forma que se retirem os efeitos corrosivos da inflação dos valores aplicados ou recebidos em cada data. Assim, esses valores devem ser traduzidos a um mesmo padrão monetário de referência em uma determinada época, ou seja, é necessário “datar” a moeda; dizer, por exemplo, moeda de 1994, moeda de 1995 etc.

No processo de homogeneização dos valores monetários, são utilizados índices de preços a fim de deflacionar ou inflacionar as séries de valores nominais. Os índices de preços permitem formar deflatores, ou seja, operadores que, quando multiplicados pelos valores nominais das diversas épocas, produzem valores correspondentes ao nível de preços da data de referência. Deflacionar um fluxo monetário significa reduzir todos os valores da série a uma base comum de referência situada no início da série. Inversamente, inflacionar um fluxo monetário significa colocar todos os valores da série em uma base comum de referência situada no fim da série; isto é, inflacionar significa transformar os valores nominais de cada época em valores compatíveis com a capacidade de compra verificada em uma data posterior.

Em contextos inflacionários são muito usadas as expressões “em preços correntes” e “em preços constantes”. Quando o fluxo de valores monetários está em preços correntes, significa que cada termo da série se encontra expresso em poder aquisitivo da data respectiva do termo, enquanto que, quando o fluxo está em preços constantes, todos os termos da série estão expressos em poder aquisitivo de uma única data.

9.1 Índices de preços

Um índice de preços procura medir a mudança que ocorre nos níveis de preços de um período para outro. No Brasil, a maioria dos cálculos de índices de preços está a cargo da Fundação Getúlio Vargas (FGV) do Rio de Janeiro, que publica mensalmente na revista *Conjuntura Econômica* os índices nacionais e regionais. Outras instituições que elaboram índices

de preços são: o IBGE, a Fipe e o Dieese em São Paulo, a Fundare em Recife e o Ipead-UFMG em Belo Horizonte.

O índice mais geral disponível é o Índice Geral de Preços – disponibilidade interna da FGV (IGP-di). Ele é indicado para inflacionar ou deflacionar valores monetários cujas causas foram devidas a muitos fatores, pois esse índice mede a inflação do País. Contudo, para comparações específicas e obtenção de taxas reais de crescimento e reajustes de valores, diversos setores, como, por exemplo, construção civil, produtos agropecuários, entre outros, utilizam índices de preços específicos do próprio setor.

O processo de inflacionar ou deflacionar uma série de valores monetários para uma determinada data de referência deve ser interpretado como uma comparação entre a evolução dos valores monetários e o comportamento dos preços dos produtos agrupados no índice escolhido. Assim, se um investimento teve um rendimento de 15% real, tomando-se como referência um determinado índice de preços, isso significa que esse rendimento superou em 15% a evolução do índice escolhido, ou seja, a evolução média dos preços dos bens e serviços que compõem o índice.

9.2 Representatividade dos valores financeiros em ambientes inflacionários

O processo inflacionário obriga a quem faz cálculo financeiro ou toma decisões de investimento ou financiamento a prestar especial atenção ao significado econômico dos lucros e contas nominais apresentadas pelas empresas, ao impacto da inflação na avaliação dos investimentos e, sobretudo, a como o processo decisório é afetado.

Como resultado da inflação, o significado das medidas contábeis e econômicas de rentabilidade (lucros e custos) diverge e essa divergência é maior à medida que a inflação se acelera. No Brasil, diversos mecanismos foram desenvolvidos para atenuar o impacto da inflação nas peças contábeis das empresas (correção monetária do Balanço Patrimonial, Correção Integral etc.). Mas são mecanismos imperfeitos que aliviam, mas não curam o mal. Enquanto a inflação estiver presente na economia, o tomador de decisões deve saber lidar com ela. Deve-se compreender o significado dos valores nominais, taxas de juros aparentes e reais, custo efetivo aparente e real dos financiamentos, rentabilidade efetiva e real das aplicações, taxas de crescimento nominal e real, atualização monetária e cambial etc. Ao longo deste capítulo e seguindo a didática adotada no livro, utilizaremos exemplos didáticos para introduzir os conceitos e técnicas comumente usados em contextos inflacionários.

Exemplo 9.1

No último trimestre do ano, o salário nominal de um operário, recebido no último dia de cada mês, foi o seguinte: outubro = \$ 12.000; novembro = \$ 13.800; dezembro = \$ 16.560. Calcular a taxa de crescimento real do salário considerando que o índice de preços escolhido teve as seguintes variações: novembro = 19%, dezembro = 22%.

Mês	Salário em valores nominais (1)	Variação do índice (2)	Deflator (base outubro) (3)	Salário deflacionado (preços de outubro) (1)/(3)	Crescimento real (% a.m.)	Crescimento aparente (% a.m.)
Out.	\$ 12.000	-	1,0000	\$ 12.000,00	-	-
Nov.	\$ 13.800	19%	1,1900	\$ 11.596,64	-3,36%	15%
Dez.	\$ 16.560	22%	1,4518	\$ 11.406,53	-1,64%	20%

Para *deflacionar* (colocar os salários em moeda de outubro), usamos um *deflator* que assume o valor 1,0000 em outubro. Em novembro seu valor será de $1,0000 \times 1,19 = 1,1900$ e em dezembro, de $1,1900 \times 1,22 = 1,4518$.

Com os salários dos três meses colocados em moeda do mês de outubro (moeda constante de outubro), podemos, agora, calcular o crescimento real no mês de novembro:

$$C_r = \frac{\$11.596,64}{\$12.000,00} - 1 = -0,0336 = -3,36\%$$

- Crescimento real em dezembro

$$C_r = \frac{\$11.406,53}{\$11.596,64} - 1 = -0,0164 = -1,64\%$$

Em novembro houve em termos reais uma perda de $-3,36\%$ em relação ao mês de outubro e, em dezembro, houve uma perda real de $-1,64\%$ em relação ao mês anterior. No período considerado, a perda real total foi de $-4,95\%$ na capacidade geral de compra do salário:

$$C_r = \frac{\$11.406,53}{\$12.000,00} - 1 = -0,0495 = -4,95\%$$

Por outro lado, o crescimento nominal ou aparente mostra taxas positivas de 15% e 20% para os meses de novembro e dezembro, respectivamente. Este exemplo ilustra a importância de estimar o crescimento real dos fluxos e valores financeiros.

9.3 Taxa de juros aparente e taxa de juros real

A taxa aparente (chamada nominal nas transações financeiras e comerciais) é aquela que vigora nas operações correntes. Neste capítulo, usaremos a expressão “taxa aparente” para diferenciá-la da taxa nominal (taxa com mais de uma capitalização por período referencial), apresentada no Capítulo 3. A taxa real é o rendimento ou custo de uma operação, seja de aplicação ou captação, calculado depois de serem expurgados os efeitos inflacionários. A taxa aparente embute uma expectativa inflacionária.

As taxas aparente e real relacionam-se da seguinte forma¹:

$$(1 + i) = (1 + i_r) \times (1 + I)$$

onde: i = taxa aparente; i_r = taxa real; I = taxa de inflação.

9.4 Taxa efetiva em moeda nacional para operações em moeda estrangeira

A rentabilidade ou perda de um depósito em moeda estrangeira estará em função da taxa de juros contratada e da desvalorização ou revalorização da moeda nacional com respeito à moeda estrangeira. Assim, o cálculo da taxa efetiva em moeda nacional de um depósito em moeda estrangeira é feito com base na taxa efetiva em moeda estrangeira e na taxa de desvalorização da moeda nacional por meio da seguinte fórmula:

$$i_{mn} = (1 + i_{me}) \times (1 + i_{td}) - 1$$

onde: i_{mn} = taxa efetiva nacional; i_{me} = taxa efetiva estrangeira; i_{td} = taxa de desvalorização da moeda nacional.

Exemplos de aplicação

Exemplo 9.2

Calcular o custo real de um empréstimo contratado a uma taxa efetiva de 20%, considerando uma inflação para o mesmo período de 15% para o período.

Dados: $I = 15\%$, $i = 20\%$, $i_r = ?$

$$i_r = \frac{(1+i)}{(1+I)} - 1 = \frac{1,20}{1,15} - 1 = 0,043478 = 4,3478\%$$

Exemplo 9.3

Calcular o custo efetivo anual em moeda nacional de um empréstimo em moeda estrangeira contratado a juros nominais de 8% a.a., com capitalização mensal, considerando uma desvalorização da moeda nacional de 2% a.m.

Dados: $i_{me} = 8\%$ a.a., $i_{td} = 2\%$ a.m., $i_{mn} = ?$

$$i_{mn} = (1 + i_{me}) \times (1 + i_{td}) - 1 = \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12} \times (1,02)^{12} - 1 = 0,3735 = 37,35$$

¹ A expressão é conhecida como “efeito Fisher”, pois foi proposta por I. Fisher no livro *The theory of interest*, Nova York, Ed. MacMillan, 1930.

Exemplo 9.4

Uma aplicação de \$100 teve um rendimento aparente de \$35. Considerando uma inflação durante o período de investimento de 30%, calcular a rentabilidade aparente e real da operação.

Dados: $P = \$100$, $I = 30\%$, rendimento = \$35, $i_r = ?$, $i = ?$

- Rentabilidade aparente

$$i = \frac{\text{Rendimento aparente}}{\text{Aplicação}} = \frac{\$35}{\$100} = 35\%$$

- Rentabilidade real

$$(1+i) = (1+i_r) \times (1+I) \Rightarrow \frac{(1+i)}{(1+I)} - 1 = \frac{1,35}{1,30} - 1 = 0,0385 = 3,85\%$$

detalhadamente:

$$\begin{aligned} i_r &= \frac{\text{rendimento real}}{\text{aplicação atualizada}} = \frac{(\text{montante}) - (\text{aplicação atualizada})}{\text{aplicação atualizada}} \\ &= \frac{(P + \text{rendimento}) - P(1+I)}{P(1+I)} \\ &= \frac{(\$100 + \$35) - \$100 \times 1,30}{\$100 \times 1,30} = \frac{\$5}{\$130} = 3,85\% \end{aligned}$$

Exemplo 9.5

Um investimento de \$180 rendeu juros e atualização monetária pela inflação. Considerando que o rendimento aparente total foi de \$45 e os juros recebidos foram de \$20, calcular as taxas de rentabilidade aparente e real. Igualmente, determinar a inflação do período.

Dados: $P = \$180$, $S = \$180 + \45 , $J = \$20$, $i = ?$, $i_r = ?$, $I = ?$

- Taxa de rentabilidade aparente

$$i = \frac{\text{rendimento aparente}}{\text{investimento}} = \frac{\$45}{\$180} = 25\%$$

- Taxa de rentabilidade real

$$\begin{aligned} i_r &= \frac{\text{rendimento real}}{\text{investimento atualizado}} = \frac{\text{montante} - \text{investimento atualizado}}{\text{investimento atualizado}} \\ &= \frac{(\text{investimento} + \text{atualização monetária} + \text{juros}) - \text{investimento atualizado}}{\text{investimento atualizado}} \\ &= \frac{\text{juros}}{\text{investimento atualizado}} = \frac{J}{P(1+I)} = \frac{\$20}{\$180(1+I)} \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões da taxa real, podemos, a seguir, destacar a taxa de inflação I:

$$\frac{1+i}{1+I} - 1 = \frac{J}{P(1+I)}$$

$$\frac{1,25}{1+I} - 1 = \frac{\$20}{\$180(1+I)} \Rightarrow I = 13,89\%$$

A rentabilidade real será:

$$i_r = \frac{J}{P(1+I)} = \frac{\$20}{\$180 \times 1,1389} = 9,76\%$$

$$\text{ou: } i_r = \frac{1+i}{1+I} - 1 = \frac{1,25}{1,1389} - 1 = 9,76\%$$

Exemplo 9.6

Uma pessoa comprou no início de um determinado ano um terreno por \$ 140.000, vendendo-o no fim do mesmo ano por \$ 220.000. Considerando uma inflação anual de 40%, estimar o ganho real da operação.

Dados: P = \$ 140.000, S = \$ 220.000, I = 40% a.a., i_r = ?

Valor de venda do terreno no fim do ano: \$ 220.000

Valor de compra do terreno no início do ano: \$ (140.000)

Ganho aparente (nominal) \$ 80.000

Atualização monetária (\$ 140.000 × 0,40) \$ (56.000)

Ganho real \$ 24.000

- Rentabilidade aparente

$$i = \frac{\text{ganho aparente}}{\text{investimento}} = \frac{\$80.000}{\$140.000} = 57,14\%$$

- Rentabilidade real

$$i_r = \frac{\text{ganho real}}{\text{investimento atualizado}} = \frac{\$24.000}{\$140.000 \times 1,40} = 12,25\%$$

$$\text{ou: } (1+i) = (1+i_r) \times (1+I) \Rightarrow i_r = \frac{1+i}{1+I} - 1 = \frac{1,5714}{1,40} - 1 = 12,25\%$$

O ganho aparente de \$ 80.000 (\$ 220.000 – \$ 140.000) representa uma rentabilidade aparente (nominal) de 57,14% (\$ 80.000/\$ 140.000), enquanto o ganho real de \$ 24.000 (\$ 220.0000 – \$ 140.000 × 1,40) representa uma rentabilidade real de 12,25% (\$ 24.000/\$ 196.000). Se a inflação nesse ano foi de 40%, é evidente que a pessoa não deverá entender os 57,14% como rentabilidade real da operação. A inflação do período terá consumido parte considerável do

ganho aparente, reduzindo-o a um ganho real de \$24.000 (\$80.000 – \$56.000) e a rentabilidade real, para 12,25%.

Dessa maneira, é incorreto afirmar que o rendimento aparente (nominal) de 57,14% tenha produzido um ganho real de 17,14% (57,14% – 40%). O comportamento das taxas é exponencial (e não linear), em concordância com o próprio comportamento da taxa de inflação considerada.

Exemplo 9.7

Um capital de \$2.000 aplicado por dois anos rende juros de 5% a.a. mais atualização monetária calculada com base nas variações do IGP-di. Considerando uma variação do IGP-di de 40% e 50% para o primeiro e segundo anos, respectivamente, calcular a rentabilidade real da operação e o montante ao fim do 2º ano.

Dados: $P = \$2.000$, $I_1 = 40\%$ a.a., $I_2 = 50\%$ a.a., $i_r = 5\%$ a.a., $S_2 = ?$, $i_r = ?$

- Taxa aparente ganha no período de 2 anos

$$i = (1+i_r)^2 \times (1+I_1) \times (1+I_2) - 1 = (1,05)^2 \times (1,40) \times (1,50) - 1 = 131,53\%$$

- Montante ao fim do 2º ano

$$S_2 = P(1+i) = \$2.000 \times 2,3153 = \$4.630,50$$

- Rentabilidade real ganha nos 2 anos

$$i_r = \frac{(1+i)}{(1+I_1) \times (1+I_2)} - 1 = \frac{2,3153}{(1,40) \times (1,50)} - 1 = 10,25\%$$

Pode-se mostrar, de maneira mais detalhada, o ganho nominal e real da operação:

Ao fim do 1º ano, tem-se:

- Principal ou aplicação (P) \$ 2.000
- Atualização monetária do principal
(AM₁: \$2.000 × 0,40) \$ 800
- Juros sobre o principal atualizado
(J₁: (\$2.000 + \$800) × 0,05) \$ 140
- Montante ao fim do 1º ano (S₁) \$ 2.940
- Rendimento aparente do 1º ano

$$i = \frac{S_1}{P} - 1 = \frac{\$2.940,00}{\$2.000,00} - 1 = 47\% \text{ a.a.}$$

- Rendimento real do 1º ano

$$i_r = \frac{J_1}{(P + AM_1)} = \frac{\$140,00}{(\$2.000 + \$800,00)} = 5\% \text{ a.a.}$$

Ao fim do 2º ano, tem-se:

- Principal (igual a S_1) \$2.940,00
- Atualização monetária do principal
(AM_2 : $\$2.940 \times 0,50$) \$1.470,00
- Juros sobre o principal atualizado
(J_2 : $(\$2.940 + \$1.470) \times 0,05$) \$ 220,50
- Montante ao fim do 2º ano (S_2) \$4.630,50
- Rendimento aparente do 2º ano

$$i = \frac{S_2}{S_1} - 1 = \frac{\$4.630,00}{\$2.940,00} - 1 = 57,5\% \text{ a.a.}$$

- Rendimento real do 2º ano

$$i_r = \frac{J_2}{(S_1 + AM_2)} = \frac{\$220,50}{(\$2.940,00 + \$1.470,00)} = 5\% \text{ a.a.}$$

No segundo ano, a taxa de rendimento aparente e a taxa real atingem, cumulativamente:

- Taxa aparente

$$i = \frac{S_2}{P} - 1 = \frac{\$4.630,50}{\$2.000} - 1 = 131,53\%; \quad \text{ou} \quad i = (1,47) \times (1,575) - 1 = 131,53\%$$

- Taxa real

$$r = \frac{J_1 \times (1+I_1) + J_2}{P \times (1+I_1) \times (1+I_2)} = \frac{\$140 \times (1+0,50) + \$220,50}{\$2.000 \times (1,40) \times (1,50)} = 10,25\%$$

$$\begin{aligned} \text{ou: } i_r &= (1 + \text{rendimento real do 1º ano}) \times (1 + \text{rendimento real do 2º ano}) - 1 \\ &= (1 + 0,05) \times (1 + 0,05) - 1 = 10,25\% \end{aligned}$$

Exemplo 9.8

Uma pessoa fez um investimento de \$15.000 e dois meses depois resgatou \$18.150. Considerando uma inflação no período de 15%, calcular a taxa de rendimento aparente e real.

Dados: $P = \$15.000$, $n = 2$ meses, $S = \$18.150$, $I = 15\%$, $i_r = ?$

- Rendimento aparente no período

$$S = P(1+i) \Rightarrow i = \frac{S}{P} - 1 = \frac{\$18.150,00}{\$15.000,00} - 1 = 0,21 = 21\%$$

- Rendimento real no período

$$(1+i) = (1+i_r) \times (1+I) \Rightarrow i_r = \frac{1+i}{1+I} - 1 = \frac{1,21}{1,15} - 1 = 5,22\%$$

- Rendimento real ao mês

$$(1+i_r)^2 = 1,0522 \Rightarrow i_r = (1,0522)^{\frac{1}{2}} - 1 = 2,58\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 9.9

Um equipamento de \$ 40.000 será pago em três prestações mensais corrigidas pelo Índice Geral de Preços de Mercado (IGPM). Considerando um juro real aplicado de 5% a.m., pede-se calcular: a) o valor das prestações supondo uma variação de 20% a.m. para o IGPM; b) o custo efetivo aparente do financiamento; c) o custo efetivo real.

Dados: $P = \$40.000$, $n = 3$, $\text{IGPM} = 20\% \text{ a.m.}$, $i_r = 5\% \text{ a.m.}$, $i^* = ?$, $i_r^* = ?$

- a) Valor das prestações

Cálculo das prestações a juros reais de 5% a.m.:

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}|i_r\%}} = \frac{\$40.000}{a_{\overline{3}|5\%}} = \frac{\$40.000}{2,72325} = \$14.688,34$$

No quadro a seguir, as prestações são atualizadas pelo IGPM:

Fim do Mês	Prestação (1)	Variação do IGPM (2)	Inflator (3)	Prestação atualizada (4) = (1) x (3)
1º	\$ 14.688,34	20%	1,200	\$ 17.626,01
2º	\$ 14.688,34	20%	1,440	\$ 21.151,21
3º	\$ 14.688,34	20%	1,728	\$ 25.381,46

$$\text{Inflator do mês } 0 = 1,000$$

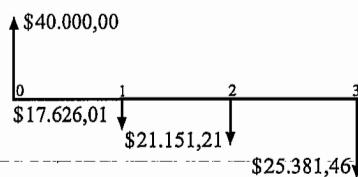
$$\text{Inflator do mês } 1 = 1,000 \times 1,2 = 1,200$$

$$\text{Inflator do mês } 2 = 1,200 \times 1,2 = 1,440$$

$$\text{Inflator do mês } 3 = 1,440 \times 1,2 = 1,728$$

- b) Custo efetivo aparente do financiamento

O fluxo de caixa do financiamento pode ser representado esquematicamente:



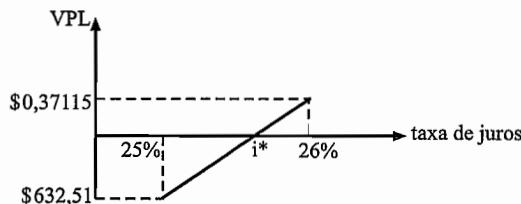
O custo efetivo pode ser determinado manualmente. O processo inicia calculando o VPL do fluxo de caixa usando a taxa de 25%, pois é a taxa de juros aparente cobrada no financiamento:

$$VPL(25\%) = \$40.000 - \frac{\$17.626,01}{(1,25)} - \frac{\$21.151,21}{(1,25)^2} - \frac{\$25.381,46}{(1,25)^3} = -\$632,51$$

para $i = 26\%$:

$$VPL(26\%) = \$40.000 - \frac{\$17.626,01}{(1,26)} - \frac{\$21.151,21}{(1,26)^2} - \frac{\$25.381,46}{(1,26)^3} = +\$0,37115$$

Com um valor negativo e outro positivo para o VPL, podemos, a seguir, efetuar uma interpolação linear e encontrar um valor aproximado para i^* .



Por proporcionalidade de triângulos no diagrama:

$$\frac{632,51}{i^* - 25\%} = \frac{0,37115}{26\% - i^*} \Rightarrow i^* = \frac{632,51 \times 26 + 0,37115 \times 25}{0,37115 + 632,51} = 25,99\%$$

O cálculo manual da taxa de juros na maioria das vezes é um trabalho demorado; entretanto, as calculadoras financeiras o realizam de forma rápida e eficiente.

Calculadora HP-12C

(f) (REG)
40.000 (g) (CF0)
17.626 (CHS) (g) (CF1)
21.151 (CHS) (g) (CF2)
25.381 (CHS) (g) (CF3)
(f) (IRR) $\rightarrow 25,9994\%$

apaga todos os registros
entra com o valor do fluxo do período 0
entra com o valor do fluxo do período 1 com sinal negativo
entra com o valor do fluxo do período 2 com sinal negativo
entra com o valor do fluxo do período 3 com sinal negativo
calcula a TIR do fluxo

c) Custo efetivo real do financiamento

$$(1+i^*) = (1+i_r^*) \times (1+I) \Rightarrow i_r^* = \frac{1+i^*}{1+I} - 1 = \frac{1,2599}{1,20} - 1 = 5,0\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 9.10

Um equipamento é vendido à vista por \$40.000, ou em três prestações mensais fixas. Calcular o valor das prestações fixas considerando uma taxa de juros real aplicada de 5% a.m. e inflação projetada de 20% a.m.

Dados: $P = \$40.000$, $i_r = 5\%$ a.m., $I = 20\%$ a.m., $n = 3$, $R = ?$

- Cálculo da taxa de juros aparente prefixada

$$(1+i) = (1+i_r) \times (1+I) \Rightarrow i = (1,05) \times (1,20) - 1 = 0,26 = 26\% \text{ a.m.}$$

- Cálculo do valor das prestações nominais usando-se a taxa de juros aparente

$$R = \frac{P}{a_{\overline{n}}|i\%} = \frac{\$40.000}{a_{\overline{3}}|26\%} = \frac{\$40.000}{1,92344} = \$20.796,09$$

As prestações nominais fixas de \$20.796,09 embutem uma variação inflacionária projetada da ordem de 20% a.m., além dos juros reais de 5% a.m.

Exemplo 9.11

Um capital de \$130.000 aplicado por 15 meses rendeu juros reais de 5% a.m. mais atualização monetária correspondente à inflação do período; considerando no período da aplicação uma inflação de 94,30%, calcular o valor de resgate.

Dados: $P = \$130.000$, $i_r = 5\%$ a.m., $I = 94,3\%$ (no período de 15 meses), $S = ?$

- Taxa aparente ganha no período de 15 meses

$$(1+i) = (1+i_r)^{15} \times (1+I) \Rightarrow i = (1,05)^{15} \times (1,9430) - 1 = 3,0394 = 303,94\%$$

- Valor de resgate

$$S = P(1+i) = \$130.000 \times (1+3,0394) = \$525.122$$

Exemplo 9.12

A taxa aparente ganha por uma aplicação financeira é de 28% a.m. Qual será o rendimento real se a inflação for de: a) 24% a.m.; b) 27% a.m.; c) 30% a.m.?

a) $(1+i) = (1+i_r) \times (1+I) \Rightarrow i_r = \frac{1,28}{1,24} - 1 = 0,0323 = 3,23\% \text{ a.m.}$

b) $i_r = \frac{1,28}{1,27} - 1 = 0,00787 = 0,787\% \text{ a.m.}$

c) $i_r = \frac{1,28}{1,30} - 1 = -0,0154 = -1,54\% \text{ a.m.}$

No caso c, a taxa de juros real é negativa, ou seja, o rendimento proporcionado pelo banco (28%) não protege totalmente o investimento dos efeitos corrosivos da inflação. Haverá descapitalização do valor aplicado.

Exemplo 9.13

Uma aplicação de \$12 rendeu juros de \$3,8 mais atualização monetária pela inflação. Calcular a taxa de rendimento aparente e real considerando uma inflação no período de 20%.

Dados: $P = \$12$, $J = \$3,8$, $I = 20\%$, $i = ?$, $i_r = ?$

- Taxa de rendimento aparente

$$\begin{aligned} i &= \frac{\text{rendimento aparente}}{\text{aplicação}} = \frac{\text{montante} - \text{aplicação}}{\text{aplicação}} \\ &= \frac{(\text{aplicação} + \text{juros} + \text{atualização monetária}) - \text{aplicação}}{\text{aplicação}} \\ &= \frac{\text{juros} + \text{atualização monetária}}{\text{aplicação}} = \frac{(J + I \times P)}{P} = \frac{\$3,8 + 0,2 \times \$12}{\$12} = 51,67\% \end{aligned}$$

- Taxa de rendimento real

$$i_r = \frac{1+i}{1+I} - 1 = \frac{1,5167}{1,20} - 1 = 26,39\%$$

detalhadamente:

$$\begin{aligned} i_r &= \frac{\text{rendimento real}}{\text{aplicação atualizada}} = \frac{\text{montante} - \text{aplicação atualizada}}{\text{aplicação atualizada}} \\ &= \frac{(\text{aplicação} + \text{juros} + \text{atualização monetária}) - (\text{aplicação} + \text{atualização monetária})}{\text{aplicação atualizada}} \\ &= \frac{\text{juros}}{\text{aplicação atualizada}} = \frac{J}{P(1+I)} = \frac{\$3,8}{\$12 \times 1,20} = 26,39\% \end{aligned}$$

Exemplo 9.14

Durante um certo período, uma aplicação ganhou de juros e atualização monetária um total de \$40. Considerando no período uma inflação de 20% e uma taxa de juros real de 10%, calcular o valor dos juros ganhos e o valor da atualização monetária.

Dados: Rendimento = \$40, I = 20%, $i_r = 10\%$, J = ?, $P \times I = ?$, P = ?

- Cálculo do capital aplicado

$$\begin{aligned} (1+i) &= (1+i_r) \times (1+I) \\ \left(1 + \frac{\$40}{P}\right) &= (1,10) \times (1,20) \quad \Rightarrow P = \$125 \end{aligned}$$

- Juros ganhos

$$J = P(1+I) \times i_r = \$125 \times 1,2 \times 0,1 = \$15$$

- Atualização monetária

$$AM = P \times I = \$125 \times 0,20 = \$25$$

Exemplo 9.15

Um investimento teve uma atualização monetária de \$15. Considerando que as rentabilidades aparente e real foram de 20% e 4,35%, respectivamente, calcular o capital aplicado.

Dados: $I \times P = \$15$, $i = 20\%$, $i_r = 4,35\%$, $P = ?$

$$\frac{\text{rendimento aparente}}{\text{aplicação}} = \frac{\text{juros} + \text{atualização monetária}}{\text{aplicação}}$$

$$0,20 = \frac{P \times (1+I) \times i_r + I \times P}{P}$$

$$0,20 = \frac{P \times \left(1 + \frac{\$15}{P}\right) \times 0,0435 + \$15}{P} \Rightarrow P = \$100,02$$

Exemplo 9.16

Um investimento de \$48.000 foi aplicado durante oito meses a juros reais de 3% a.m. mais atualização monetária correspondente à inflação do período. Considerando uma inflação constante e igual a 12% a.m., calcular o valor resgatado.

Dados: $P = 48.000$, $n = 8$ meses, $i_r = 3\%$ a.m., $I = 12\%$ a.m., $S = ?$

- Taxa aparente ganha

$$(1+i) = (1+i_r) \times (1+I) \Rightarrow i = 1,03 \times 1,12 - 1 = 0,1536 = 15,36\% \text{ a.m}$$

- Valor resgatado

$$S = P(1+i)^8 = \$48.000 \times (1,1536)^8 = \$48.000 \times 3,13648 = \$150.551$$

Exemplo 9.17

Uma máquina cujo valor à vista é de \$34.000 será paga em oito prestações mensais fixas de \$7.576,91. Considerando uma taxa real de juros na praça de 2% a.m., encontrar a taxa de inflação projetada, embutida no cálculo das prestações.

Dados: $P = 34.000$, $n = 8$, $R = \$7.576,91$, $i_r = 2\%$ a.m., $I = ?$

O fator financeiro que nos permite determinar a taxa de juros aparente pode ser encontrado considerando que o valor à vista é igual ao valor presente das prestações:

$$P = R \times a_{\bar{8}|i\%} \Rightarrow a_{\bar{8}|i\%} = \frac{\$34.000}{\$7.576,91} = 4,48732$$

Nas tabelas financeiras do Apêndice deste livro podemos observar que esse fator corresponde a uma taxa de juros de 15%, dado que $a_{\bar{8}|15\%} = 4,48732$.

Calculadora HP-12C

(f) (FIN)
7.576,91 (CHS) (PMT)
8 (n)
34.000 (PV)
(i) → 15%

apaga a memória financeira
entra com o valor das prestações com sinal negativo
entra com o número de prestações
entra com o valor do financiamento
calcula a taxa de juros

- Taxa de inflação projetada

$$(1+i) = (1+i_r) \times (1+I) \Rightarrow I = \frac{1+i}{1+i_r} - 1 = \frac{1,15}{1,02} - 1 = 0,1275 = 12,75\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 9.18

Um produto é vendido a prazo em duas parcelas mensais de \$13.000. Qual deve ser o preço à vista, considerando uma taxa de juros real de 2% a.m. e uma inflação prevista de 12% e 14% para o primeiro e segundo meses, respectivamente?

Dados: $R = \$13.000$, $n = 2$, $I_1 = 12\%$, $I_2 = 14\%$, $i_r = 2\%$ a.m., $P = ?$

- Taxa de juros aparente para o primeiro mês

$$i_1 = (1+i_r) \times (1+I_1) - 1 = 1,02 \times 1,12 - 1 = 14,24\%$$

- Taxa de juros aparente para os dois meses

$$i_2 = (1+i_r)^2 \times (1+I_1) \times (1+I_2) - 1 = (1,02)^2 \times 1,12 \times 1,14 - 1 = 32,84\%$$

- Valor à vista

$$P = \frac{\$13.000}{1,1424} + \frac{\$13.000}{1,3284} = \$21.165,89$$

Exemplo 9.19

Uma pessoa pretende comprar daqui a seis meses um apartamento cujo valor à vista é de \$44.000. Para tanto, abre uma poupança que rende juros reais efetivos de 0,5% a.m. mais atualização monetária pela inflação. Calcular o valor da aplicação necessária de modo que ela possa comprar o apartamento exclusivamente com os rendimentos da poupança. Considere que o preço do apartamento aumenta a uma taxa de 6% a.m. e que a inflação do período é de 40%.

Dados: $I = 40\%$, $i_r = 0,5\%$ a.m., $P = ?$

- Taxa de rentabilidade aparente (nominal) no período de seis meses

$$i = (1+I) \times (1+i_r) - 1 = (1,40) \times (1,005)^6 - 1 = 44,25\%$$

- Rendimento aparente no período de seis meses

$$\begin{aligned} \text{rendimento} &= P(1+i) - P \\ &= i \times P \\ &= 0,4425P \end{aligned}$$

Considerando que o rendimento aparente da poupança deve ser igual ao preço do apartamento na época da compra, tem-se:

$$0,4425P = \$44.000 \times (1,06)^6 \Rightarrow P = \$141.040,49$$

Exemplo 9.20

Um investidor aplicou um determinado capital pelo prazo de dois meses em uma conta remunerada que paga juros reais de 5% a.m. mais atualização monetária pela inflação do período. Considerando que ao término do prazo obteve um rendimento aparente (nominal) de \$ 212,75 e que a inflação, durante os dois meses, totalizou 10%, calcular o capital e o rendimento real no período.

Dados: rendimento = \$ 212,75, $I = 10\%$, $i_r = 5\%$ a.m., $J = ?$

- Cálculo do capital aplicado

$$(1+i) = (1+i_r)^2 \times (1+I)$$

$$\left(1 + \frac{\$212,75}{P}\right) = (1,05)^2 \times (1,10) \quad \Rightarrow \quad P = \$1.000$$

- Rendimento real ganho no período

$$J = P(1+I) \times [(1+i_r)^2 - 1] = \$1.000 \times (1,10) \times [(1,05)^2 - 1] = \$112,75$$

Exemplo 9.21

Uma empresa teve, nos últimos quatro anos, os seguintes demonstrativos de resultados em valores nominais:

(Em valores nominais de 31 de dezembro)

	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano
Receitas	\$ 2.300	\$ 3.200	\$ 3.850	\$ 4.620
- Despesas operacionais	(700)	(790)	(860)	(960)
- Despesas administrativas	(100)	(180)	(240)	(270)
- Despesas financeiras	(200)	(270)	(370)	(410)
Lucro tributável	1.300	1.960	2.380	2.980
IR (35%)	(455)	(686)	(833)	(1.043)
Lucro líquido	\$ 845	\$ 1.274	\$ 1.547	\$ 1.937
Valor do IGP-di em 31 de dezembro de cada ano	4.230	5.499	7.700	10.624

Pede-se: a) expressar as peças contábeis em valores do primeiro ano (preços constantes do 1º ano) e em valores do quarto ano (preços constantes do 4º ano); b) Calcular o crescimento real dos lucros ao longo do período.

a)

(Em valores de 31/12/20X1)

	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano
Receitas	$2.300 \times D1 = 2.300$	$3.200 \times D2 = 2461,5$	$3.850 \times D3 = 2115,0$	$4.620 \times D4 = 1.839,5$
- Despesas operacionais	$(700) \times D1 = 700$	$(790) \times D2 = 607,7$	$(860) \times D3 = 472,4$	$(960) \times D4 = 382,2$
- Despesas administrativas	$(100) \times D1 = 100$	$(180) \times D2 = 138,5$	$(240) \times D3 = 131,8$	$(270) \times D4 = 107,5$
- Despesas financeiras	$(200) \times D1 = 200$	$(270) \times D2 = 207,7$	$(370) \times D3 = 203,3$	$(410) \times D4 = 163,2$
Lucro tributável	$1.300 \times D1 = 1.300$	$1.960 \times D2 = 1.507,7$	$2.380 \times D3 = 1.307,5$	$2.980 \times D4 = 1.186,5$
- IR (35%)	$(455) \times D1 = 455$	$(686) \times D2 = 527,7$	$(833) \times D3 = 457,6$	$(1.043) \times D4 = 415,3$
Lucro líquido	$845 \times D1 = 845$	$1.274 \times D2 = 980,0$	$1.547 \times D3 = 849,8$	$1.937 \times D4 = 771,2$
Deflator	$D1 = \frac{4.230}{4.230}$	$D2 = \frac{4.230}{5.499}$	$D3 = \frac{4.230}{7.700}$	$D4 = \frac{4.230}{10.624}$

(Em valores de 31/12/20X4)

	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano
Receitas	$2.300 \times I1 = 5.776,6$	$3.200 \times I2 = 6.182,4$	$3.850 \times I3 = 5.312,0$	$4.620 \times I4 = 4.620$
- Despesas operacionais	$(700) \times I1 = 1.758,1$	$(790) \times I2 = 1.526,3$	$(860) \times I3 = 1.186,6$	$(960) \times I4 = 960$
- Despesas administrativas	$(100) \times I1 = 251,2$	$(180) \times I2 = 347,8$	$(240) \times I3 = 331,1$	$(270) \times I4 = 270$
- Despesas financeiras	$(200) \times I1 = 502,3$	$(270) \times I2 = 521,6$	$(370) \times I3 = 510,5$	$(410) \times I4 = 410$
Lucro tributável	$1.300 \times I1 = 3.265,1$	$1.960 \times I2 = 3.786,7$	$2.380 \times I3 = 3.283,8$	$2.980 \times I4 = 2.980$
- IR (35%)	$(455) \times I1 = 1.142,8$	$(686) \times I2 = 1.325,3$	$(833) \times I3 = 1.149,3$	$(1.043) \times I4 = 1.043$
Lucro líquido	$845 \times I1 = 2.122,3$	$1.274 \times I2 = 2.461,4$	$1.547 \times I3 = 2.134,5$	$1.937 \times I4 = 1.937$
Inflator	$I1 = \frac{10.624}{4.230}$	$I2 = \frac{10.624}{5.499}$	$I3 = \frac{10.624}{7.700}$	$I4 = \frac{10.624}{10.624}$

b) Taxa de crescimento real dos lucros no período

$$1 + C_r = \frac{\text{lucros do 4º ano em valores do 4º ano}}{\text{lucros do 1º ano em valores do 4º ano}} = \frac{\$ 1.937}{\$ 2.122,30}$$

$$\Rightarrow C_r = \frac{\$ 1.937}{\$ 2.122} - 1 = -0,0873 = -8,73\%$$

Uma análise em valores nominais mostraria um crescimento de 129% $\left(\frac{\$1.937}{\$845} - 1 \right)$ nos lucros, enquanto a análise em valores reais mostra um decréscimo de -8,78% $\left(\frac{\$1.937}{\$2.122,30} - 1 \right)$. Esses resultados mostram a necessidade de trabalhar com fluxos em valores constantes, pois é a única forma de comparar valores de diferentes datas.

Muitas vezes dispomos das variações percentuais do índice que mede a inflação, e não do seu valor nominal. Para ilustrar esse caso, considere as seguintes variações percentuais do índice:

Ano	Variação do IGP-dí
1º	-
2º	30,00%
3º	40,025%
4º	37,974%

Quadro de cálculos:

Ano	Infiação	Índice inflator	Lucro	Lucro em valores do 4º ano
1º	-	1,000000	\$ 845	$\$845 \times 2,511575 / 1,000000 = \$2.122,28$
2º	30,00%	$1,000000 \times 1,30 = 1,300000$	\$ 1.274	$\$1.274 \times 2,511575 / 1,300000 = \$2.461,34$
3º	40,025%	$1,300000 \times 1,40025 = 1,820325$	\$ 1.547	$\$1.547 \times 2,511575 / 1,820325 = \$2.134,46$
4º	37,974%	$1,820325 \times 1,37974 = 2,511575$	\$ 1.937	$\$41.937 \times 2,511575 / 2,511575 = \$1.937,00$

- Taxa de crescimento real no período

$$1 + C_r = \frac{\text{Lucros do 4º ano em valores do 4º ano}}{\text{Lucros do 1º ano em valores do 4º ano}} = \frac{\$1.937}{\$2.122,30}$$

$$\Rightarrow C_r = \frac{\$1.937}{\$2.122,30} - 1 = -0,0873 = -8,73\%$$

Novamente, verifica-se um decréscimo real de -8,73% nos lucros da empresa no período considerado.

9.5 Custo real efetivo de empréstimos com atualização monetária e cambial

É comum nos financiamentos a cobrança de IOF, aval, comissões etc. Além disso, operações de repasse de financiamentos externos podem envolver um custo adicional de impostos sobre a remessa de juros para o exterior. Esses encargos adicionais aumentam a taxa de juros real para o devedor, tornando-se indispensável o cálculo da taxa efetiva de modo que sejam possíveis as comparações das diversas alternativas de financiamento. O cálculo da taxa efetiva é feito utilizando-se o conceito de Taxa Interna de Retorno (TIR). No seguinte exemplo, calcularemos o custo real efetivo de um financiamento com atualização monetária e cambial.

Exemplo 9.22

Um empréstimo de \$200.000 foi tomado em 1º de janeiro de 20X1 para ser amortizado em quatro prestações anuais pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). Considerando que o financiamento foi tomado a juros de 4% a.a mais atualização monetária, construir a planilha de amortização e calcular o custo efetivo real do financiamento. Para os cálculos de atualização monetária, considerar a variação do IGPM/FGV e do dólar.

Ano	Variação do IGPM	Valor nominal do dólar
0		\$ 200
1º	20,0000%	\$ 242
2º	20,3225%	\$ 290
3º	17,2924%	\$ 339
4º	14,8954%	\$ 383

- a) Empréstimo atualizado pelas variações do IGPM:

Planilha pelo SAC, sem atualização monetária:

Fim do Ano	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	\$ 200.000	-	-	-
1º	\$ 150.000	\$ 50.000	\$ 8.000	\$ 58.000
2º	\$ 100.000	\$ 50.000	\$ 6.000	\$ 56.000
3º	\$ 50.000	\$ 50.000	\$ 4.000	\$ 54.000
4º	-	\$ 50.000	\$ 2.000	\$ 52.000

Cálculo do índice (*inflator*) de atualização monetária para cada ano:

$$1^{\text{a}} \text{ ano: } 1,00000 \times 1,200000 = 1,200000 \quad 2^{\text{a}} \text{ ano: } 1,20000 \times 1,203225 = 1,44387$$

$$3^{\text{a}} \text{ ano: } 1,44387 \times 1,172924 = 1,69355 \quad 4^{\text{a}} \text{ ano: } 1,69355 \times 1,148954 = 1,94581$$

Para atualizar monetariamente os valores, basta multiplicar cada linha da planilha anterior pelo *inflator* do ano respectivo. Os valores atualizados são mostrados a seguir:

(Valores atualizados pelo IGP-M)

Ano	Inflator	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	1,00000	\$ 200.000,00	-	-	-
1^a	1,20000	\$ 180.000,00	\$ 60.000,00	\$ 9.600,00	\$ 69.600,00
2^a	1,44387	\$ 144.387,00	\$ 72.193,50	\$ 8.663,22	\$ 80.856,72
3^a	1,69355	\$ 84.677,50	\$ 84.677,50	\$ 6.774,20	\$ 91.451,70
4^a	1,94581	-	\$ 97.290,50	\$ 3.891,62	\$ 101.182,12

O custo efetivo do financiamento é a Taxa Interna de Retorno do fluxo de caixa, ou seja, o valor da TIR que satisfaz a seguinte expressão:

$$VPL = \$ 200.000 - \frac{\$ 69.600}{(1+TIR)} - \frac{\$ 80.856,72}{(1+TIR)^2} - \frac{\$ 91.451,70}{(1+TIR)^3} - \frac{\$ 101.182,12}{(1+TIR)^4} = 0$$

Calculadora HP-12C
(f) (REG)
200.000 (g) (CF ₀)
69.600 (CHS) (g) (CF ₁)
80.856,72 (CHS) (g) (CF ₂)
91.451,70 (CHS) (g) (CF ₃)
101.182,12 (CHS) (g) (CF ₄)
(f) (IRR) → 23,86%

- Custo real efetivo médio

Admitindo que o IGPM meça a inflação real, temos:

$$(1+i^*)^4 = (1+i_r)^4 \times (1+\text{inflação do período})$$

$$(1,2387)^4 = (1+i_r)^4 \times 1,94581 \Rightarrow i_r = \left[\frac{(1,2387)^4}{1,94581} \right]^{\frac{1}{4}} - 1 = 4,88\% \text{ a.a.}$$

b) Empréstimo atualizado pelas variações do dólar:

Ano	Prestação não atualizada (1)	Inflator pelo dólar (2)	Prestação atualizada (1) × (2)
0	-	200/200	-
1º	\$ 58.000	242/200	\$ 70.180
2º	\$ 56.000	290/200	\$ 81.200
3º	\$ 54.000	339/200	\$ 91.530
4º	\$ 52.000	383/200	\$ 99.580

- Custo aparente efetivo

$$\$ 200.000 - \frac{\$ 70.180}{(1+\text{TIR})} - \frac{\$ 81.200}{(1+\text{TIR})^2} - \frac{\$ 91.530}{(1+\text{TIR})^3} - \frac{\$ 99.580}{(1+\text{TIR})^4} = 0 \Rightarrow \text{TIR} = 23,88\%$$

Calculadora HP-12C	
(f) (REG)	apaga todos os registros
200.000 (g) (CF ₀)	fluxo do ano 0
70.180 (CHS) (g) (CF _J)	fluxo do ano 1
81.200 (CHS) (g) (CF _J)	fluxo do ano 2
91.530 (CHS) (g) (CF _J)	fluxo ao ano 3
99.580 (CHS) (g) (CF _J)	fluxo ao ano 4
(f) (IRR) → 23,88%	calcula a TIR do fluxo

- Custo real efetivo médio

$$(1+i^*)^4 = (1+i_r)^4 \times (1 + \text{inflação do período})$$

$$(1,2388)^4 = (1+i_r)^4 \times 1,94581 \Rightarrow i_r = \left[\frac{(1,2388)^4}{1,94581} \right]^{\frac{1}{4}} - 1 = 4,89\% \text{ a.a.}$$

9.6 Lucratividade real e aparente na compra de ações

No mercado de ações, a lucratividade depende da rentabilidade e da valorização dos títulos. Entende-se por rentabilidade apenas a parcela dos rendimentos relativa aos dividendos, bonificações ou direitos de subscrição. Valorização é o ganho decorrente da diferença dos preços de venda e compra. O exemplo a seguir ilustra o cálculo da lucratividade real e aparente de uma operação de compra de ações.

Exemplo 9.23

Em um determinado ano, um investidor comprou um lote de mil ações de uma empresa a \$ 1,0/ação. Em 30/4 do mesmo ano, a empresa aumentou o capital, distribuindo uma bonificação

de 40% (o acionista recebe ações como bonificação sem ter de pagar nada e permanece com elas até o fim do ano). Em 30/6, a empresa distribuiu um dividendo de \$ 0,15/ação e, em 31/10, chamou uma subscrição de ações de 50%. O acionista não exerceu o seu direito de subscrição, mas vendeu esses direitos no mercado que o estava comprando, em 31/10, a \$ 0,10/direito (significando que a cotação das ações nessa data foi de \$ 1,10/ação). Em 31/12, o investidor vendeu suas ações a um preço de \$ 1,8/ação. Considerando uma taxa de inflação desse ano de 70% a.a. (suponha uma taxa mensal constante ao longo do período), calcular a lucratividade aparente e real da operação.

- No momento da venda das ações, tem-se:

(em valores de 31/12)

1.400 ações (1.000 compradas + 400 recebidas como bonificação)	
1.400 ações × \$ 1,8/ação.....	\$ 2.520,00

Dividendos

1.400 ações × \$ 0,15/ação × $(1,70)^{\frac{6}{12}}$	\$ 273,81
------------------------------------------------------------	-----------

Venda dos direitos de subscrição

1.400 ações × 0,50 direitos/ação × \$ 0,10/direito × $(1,70)^{\frac{2}{12}}$	\$ 76,47
<hr/>	
	\$ 2.870,28

Aplicação atualizada monetariamente

1.000 ações × \$ 1,0/ação × (1,70)	\$ 1.700,00
------------------------------------------	-------------

- Lucratividade real do investimento

$$\text{lucratividade real} = \frac{\text{rendimento real}}{\text{aplicação em valores de 31/12}} = \frac{\$ 2.870,28 - \$ 1.700}{\$ 1.700} = 68,84\%$$

- Lucratividade aparente

$$\text{lucratividade aparente} = \frac{\text{rendimento aparente}}{\text{aplicação em valores de 1/1}} = \frac{\$ 2.870,28 - \$ 1.000}{\$ 1.000} = 187,03\%$$

ou: $(1 + i) = (1 + i_r) \times (1 + I) \Rightarrow i = (1,6884) \times (1,70) - 1 = 187,03\%$

9.7 Exercícios propostos

- Um financiamento de \$ 12.000 foi contratado sob as seguintes condições: prazo total de dois anos; carência de nove meses (durante este período serão pagos unicamente os juros); juros de 15% a.t.; IOF de 2% sobre o principal (pago no ato); comissão de abertura de crédito de 1% sobre o financiamento (paga no ato); pagamentos trimestrais segundo a

Tabela Price; variação do IGPM/FGV de 3% a.t. Pede-se: construir a planilha de pagamentos sem considerar a atualização monetária; calcular o custo efetivo real do financiamento.

2. No Exercício 1, supondo que durante o período de carência os juros sejam capitalizados e incorporados ao principal, determinar o saldo devedor ao fim da carência, sem considerar a atualização monetária.
3. No Exercício 1, calcular o valor das prestações admitindo que sejam atualizadas monetariamente segundo as variações do IGPM/FGV.
4. No Exercício 1, supondo que durante o período de carência os juros sejam capitalizados e incorporados ao principal, determinar: a) o valor das prestações sem atualização monetária; b) o valor das prestações atualizadas monetariamente segundo as variações do IGPM/FGV.
5. No Exercício 1, considerando a atualização monetária de acordo com as variações do IGPM/FGV, calcular o custo efetivo aparente do financiamento.
6. No Exercício 1, considerando a atualização monetária de acordo com as variações do IGPM/FGV, determinar o valor do saldo devedor do financiamento ao fim do sexto trimestre.
7. Considerando que nos últimos quatro meses os impostos arrecadados por uma prefeitura e o IGP-di evoluíram de acordo com a tabela a seguir, estimar o crescimento ou decréscimo real dos impostos no período considerado:

Mês	Imposto nominal	Valor do IGP-di
Set.	\$ 40.000	\$ 200,00
Out.	\$ 48.000	\$ 236,00
Nov.	\$ 59.040	\$ 287,92
Dez.	\$ 67.896	\$ 348,38

8. A quantia de \$ 81.600 foi financiada a juros de 5% a.m. a ser paga em quatro prestações mensais. Um imposto de 2% sobre o financiamento foi pago no ato do contrato. Considerando uma variação constante de 10% a.m. para a taxa de inflação, construir a planilha de pagamentos mostrando as prestações em valores atualizados monetariamente.
9. No exercício anterior, estimar o custo efetivo real e aparente (nominal) do financiamento.
10. Calcular a taxa de juros mensal aparente (nominal) que permita a uma financeira auferir juros reais de 4% a.m., considerando as seguintes hipóteses de inflação: a) 12% a.m.; b) 420% a.a.; c) 200% a.s.
11. Uma aplicação de \$ 430.000 rendeu \$ 22.500 no prazo de nove meses. Considerando uma taxa de inflação constante e igual a 3,8% a.m., qual a rentabilidade mensal aparente e real do investimento?
12. Um equipamento é vendido por \$ 250.000 à vista ou em 18 prestações mensais iguais com atualização monetária prefixada. Calcular o valor unitário das prestações considerando juros reais de 9% a.a. e uma variação projetada de 96% a.a. para o indexador das prestações.

13. Uma aplicação de \$ 132.000 ganha juros efetivos de 2% a.m. mais atualização monetária de acordo com as variações do IGPM/FGV. Considerando uma variação anual do IGPM de 300% a.a. (taxa mensal constante ao longo do período), qual será o montante recebido pelo investidor após 11 meses de aplicação?
14. João tomou um financiamento de \$ 140.000 a juros de 5% a.m. mais atualização monetária pela inflação do período e pretende pagar 30% da dívida daqui a 30 dias e o saldo, três meses depois. Qual será o valor desse segundo pagamento considerando uma inflação de 240% a.a. (taxa mensal constante ao longo do período)?
15. Um financiamento de \$ 180.000 será pago em dez prestações mensais fixas de \$ 29,294,16. Considerando uma inflação de 7% a.m., calcular a taxa de juros real paga pelo financiamento.
16. Uma pessoa aplicou \$ 200.000 em um plano de capitalização. Após oito meses resgatou o investimento cujo saldo bruto nessa época foi de \$ 280.000. Considerando que o banco cobra taxas administrativas de 4% sobre o valor resgatado e que foi pago um imposto de 3,5% sobre o rendimento da aplicação, calcular a rentabilidade efetiva aparente e real da aplicação a uma inflação no período de 26%.
17. Uma empresa tomou emprestado \$ 800.000 pelo prazo de nove meses a juros efetivos de 15% a.a mais atualização monetária definida pelas variações do IGPM/FGV. Correm por conta da empresa o IOF de 0,4% e uma taxa de abertura de crédito de 4% sobre o valor do empréstimo (pagos no ato da liberação do empréstimo). Supondo que o empréstimo fosse liquidado por meio de um único pagamento ao fim do prazo, calcular o custo efetivo aparente e real do financiamento considerando uma variação de 100% no período para o IGPM.

9.8 Respostas dos exercícios propostos

1. Esquema de pagamento e fluxo de caixa:

(\$ 1.000)

Trimestre	Saldo dévedor	Juros	Amortização	Comissão	IOF	Prestação	Fluxo de caixa
0	\$ 12.000,00	-	-	\$ 120,00	\$ 240,00	\$ 360,00	\$ 11.640,00
1	\$ 12.000,00	\$ 1.800,00	-			\$ 1.800,00	(\$ 1.800,00)
2	\$ 12.000,00	\$ 1.800,00	-			\$ 1.800,00	(\$ 1.800,00)
3	\$ 11.125,80	\$ 1.800,00	\$ 874,20			\$ 2.674,20	(\$ 2.674,20)
4	\$ 10.120,47	\$ 1.668,87	\$ 1.005,33			\$ 2.674,20	(\$ 2.674,20)
5	\$ 8.964,34	\$ 1.518,07	\$ 1.156,13			\$ 2.674,20	(\$ 2.674,20)
6	\$ 7.634,79	\$ 1.344,65	\$ 1.329,55			\$ 2.674,20	(\$ 2.674,20)
7	\$ 6.105,81	\$ 1.145,22	\$ 1.528,98			\$ 2.674,20	(\$ 2.674,20)
8	\$ 4.347,48	\$ 915,87	\$ 1.728,33			\$ 2.674,20	(\$ 2.674,20)
9	\$ 2.323,40	\$ 652,12	\$ 2.022,08			\$ 2.674,20	(\$ 2.674,20)
10	-	\$ 348,81	\$ 2.325,40			\$ 2.674,20	(\$ 2.674,20)

O custo efetivo do financiamento é de 15,7454% a.t. Esse valor é encontrado calculando-se a taxa interna de retorno do fluxo de caixa.

2. \$ 18.250,50
3. Sem capitalização de juros na carência
4. Com juros capitalizados na carência

(em \$ 1.000)

Trimestre	Prestação não atualizada	Prestação atualizada	Trimestre	Prestação não atualizada	Prestação atualizada
0	\$ 360,00	\$ 360,00	0	\$ 360,00	\$ 360,00
1	\$ 1.800,00	\$ 1.854,00	1	-	-
2	\$ 1.800,00	\$ 1.909,62	2	-	-
3	\$ 2.674,20	\$ 2.922,17	3	\$ 3.536,63	\$ 3.864,57
4	\$ 2.674,20	\$ 3.009,84	4	\$ 3.536,63	\$ 3.980,51
5	\$ 2.674,20	\$ 3.100,13	5	\$ 3.536,63	\$ 4.099,92
6	\$ 2.674,20	\$ 3.193,14	6	\$ 3.536,63	\$ 4.222,92
7	\$ 2.674,20	\$ 3.288,93	7	\$ 3.536,63	\$ 4.349,61
8	\$ 2.674,20	\$ 3.387,60	8	\$ 3.536,63	\$ 4.480,10
9	\$ 2.674,20	\$ 3.489,23	9	\$ 3.536,63	\$ 4.614,50
10	\$ 2.674,20	\$ 3.593,90	10	\$ 3.536,63	\$ 4.752,94

5. 19,2192% a.t. (custo efetivo aparente) 6. \$ 9.116,34
7. Set./Out. = 1,6667%, Out./Nov. = 0,8130%; Nov./Dez. = -5,2164%, Set./Dez. = -2,6217%
8. A planilha é a seguinte:

Mês	Saldo devedor	Juros	Amortização.	Impostos	Prestação	Fluxo de caixa	Inflator	Prestação atualizada
0	\$ 81.600,00	-	-	\$ 1.600,00	-	\$ 80.000,00	1,0000	-
1	\$ 62.667,83	\$ 4.080,00	18.932,17		\$ 23.012,17	(\$ 23.012,17)	1,1000	\$ 25.313,39
2	\$ 42.789,05	\$ 3.133,39	\$ 19.878,78		\$ 23.012,17	(\$ 23.012,17)	\$ 1,2100	\$ 27.844,73
3	\$ 21.916,33	\$ 2.139,45	\$ 20.872,72		\$ 23.012,17	(\$ 23.012,17)	\$ 1,3310	\$ 30.629,20
4	-	\$ 1.095,82	\$ 21.916,33		\$ 23.012,17	(\$ 23.012,17)	\$ 1,4641	\$ 33.692,12

9. Custo efetivo real = 5,86% a.m.; Custo efetivo aparente = 16,45% a.m.
10. a) 16,48% a.m.; b) 19,3164% a.m.; c) 24,8974% a.m.
11. Rentabilidade aparente = 0,5683% a.m.; rentabilidade real = -3,1134% a.m. 12. \$ 24.017,31
13. \$ 584.876,46 14. \$ 179.119,52 15. 2,8% a.m.
16. Rentabilidade aparente no período = 33% (3,6290% a.m.); Rentabilidade real = 5,56% (0,6782% a.m.)
17. Custo aparente no período = 132,33% (9,82% a.m.); Custo real no período = 16,17% (1,68% a.m.)

MÉTODOS E CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DE INVESTIMENTOS DE CAPITAL

CAPÍTULO

10

Etapas do processo de avaliação
Métodos de análise e seleção de alternativas de investimento
Leasing financeiro e operacional

10.1 Conceitos — etapas do processo de avaliação — métodos de análise e seleção de alternativas de investimento

Orçamentação de capital é o nome dado ao processo de decisões de procura e aquisição de ativos de longo prazo. Com esse fim, existem várias técnicas, métodos, convenções e critérios decisórios que são comumente utilizados na análise e no processo decisório. Neste capítulo, discutiremos e apresentaremos a parte relacionada aos métodos geralmente usados e aceitos para montar os fluxos de caixa incrementais do projeto, o cálculo da sua rentabilidade, os indicadores econômicos e as técnicas específicas que permitem o processo decisório. No próximo capítulo, trataremos da parte relacionada ao risco do projeto.

São cinco as principais etapas do processo de avaliação de um projeto de investimento ou valoração de um ativo real, a saber:

- Estimativa dos fluxos de caixa incrementais, depois de impostos, esperados para o projeto.
- Avaliação do risco do projeto e determinação da taxa de desconto (custo de oportunidade do capital) para o desconto dos fluxos de caixa incrementais futuros esperados.
- Cálculo dos indicadores econômicos, especialmente o Valor Presente Líquido (VPL).
- Reconhecimento das limitações do modelo, estimativa, valoração e incorporação na análise dos intangíveis associados ao projeto.
- Tomada de decisões.

Os projetos de investimento podem ser classificados de acordo com:

- Seu horizonte econômico (por exemplo, projetos de curto e longo prazo).
- Sua natureza (por exemplo, projetos táticos — substituição de equipamentos — e projetos estratégicos — projetos de expansão).

- Os tipos de incertezas envolvidos (incerteza técnica, incerteza econômica/de mercado, incerteza estratégica) e onde ocorrem principalmente (no custo, na receita, nos impostos).
- Sua dependência em relação a outros projetos (por exemplo, projetos independentes e projetos mutuamente exclusivos).

De acordo com a finalidade do projeto:

- De reposição (substituição de um equipamento velho por um novo).
- De redução de custos (substituição de um equipamento menos eficiente por um mais eficiente).
- Ambientais (projetos de melhoramento das condições ambientais).
- De coleta de informação (P&D aplicada, exploração de petróleo, teste piloto de mercado etc.).
- De expansão (projetos que aumentam a produção de bens e serviços).

De acordo com o tipo de projeto:

- De substituição (substituição de um equipamento velho por um novo).
- De redução de custos (substituição de um equipamento menos eficiente por um mais eficiente).
- Ambientais (projetos de melhoramento das condições ambientais).
- De expansão (projetos que aumentam a produção de bens e serviços).

10.2 Métodos de seleção de alternativas: valor presente líquido, pay-back descontado, índice custo-benefício, taxa interna de retorno, anuidade e custo anual equivalente

O valor de um projeto é baseado em sua capacidade de gerar fluxos de caixa futuros, ou seja, na capacidade de gerar renda econômica. Assim sendo, as alternativas de investimento podem ser comparadas somente se as consequências monetárias forem medidas em um ponto comum no tempo e, como as operações de investimento ou financiamento têm como característica um espaçamento dos fluxos de caixa ao longo do tempo, os critérios de avaliação econômica devem considerar a atualização ou desconto dos fluxos. Entre os métodos que descontam fluxos de caixa, dois são os mais conhecidos e utilizados: o do Valor Presente Líquido (VPL) e o da Taxa Interna de Retorno (TIR). Algumas vezes, é necessário termos uma idéia do tempo de recuperação do investimento; nesse caso, o método do *pay-back* descontado nos auxilia. Os critérios de seleção que não atualizam fluxos de caixa, como, por exemplo, o método do Retorno sobre o Investimento (ROI), aplicam conceitos contábeis que, mesmo considerando a vantagem da simplicidade do seu uso, não são apropriados para medir renda econômica gerada por um projeto de investimento.

10.2.1 Método do Valor Presente Líquido

O método do Valor Presente Líquido (VPL) tem como finalidade valorar em termos de valor presente o impacto dos eventos futuros associados a um projeto ou alternativa de investimento, ou seja, mede o valor presente dos fluxos de caixa gerados pelo projeto ao longo da sua vida útil. Não existindo restrição de capital, argumenta-se que esse critério leva à escolha ótima, pois maximiza o valor da empresa. A seguinte expressão define o VPL:

$$VPL = -I + \sum_{t=1}^n \frac{FC_t}{(1+K)^t} \quad \text{critério de decisão: se } VPL > 0 \Rightarrow \text{projeto economicamente viável}$$

FC_t representa o fluxo de caixa no t -ésimo período, I é o investimento inicial, K é o custo do capital e o símbolo Σ , somatório, indica que deve ser realizada a soma da data 1 até a data n dos fluxos de caixa descontados no período inicial. A regra decisória a ser seguida ao se aplicar o VPL é: empreenda o projeto de investimento de capital se o VPL for positivo.

O objetivo do VPL é encontrar projetos ou alternativas de investimento que valham mais para os patrocinadores do que custam — projetos que tenham um VPL positivo. Seu cálculo reflete as preferências entre consumo presente e consumo futuro e a incerteza associada aos fluxos de caixa futuros. O processo por meio do qual os fluxos de caixa são ajustados a esses fatores chama-se desconto, e a magnitude desses fatores é refletida na taxa de desconto usada (custo do capital). O processo de desconto converte os fluxos de caixa futuros em valores presentes, pois fluxos de épocas diferentes não podem ser comparados nem agregados enquanto não forem colocados em uma mesma época.

Exemplo 10.1

Uma empresa estuda a possibilidade de reformar uma máquina. A reforma está orçada em \$200.000 e dará uma sobrevida de cinco anos ao equipamento, proporcionando uma diminuição nos custos operacionais da ordem de \$75.000 ao ano. Considerando um custo de capital de 15% a.a. e usando o método do VPL e da TIR, analisar a viabilidade econômica da reforma do equipamento.

- Avaliação pelo método do VPL

$$\begin{aligned} VPL &= -\$200.000 + \frac{\$75.000}{(1,15)} + \frac{\$75.000}{(1,15)^2} + \dots + \frac{\$75.000}{(1,15)^5} \\ &= -\$200.000 + \$75.000 \times a_{\overline{5}|15\%} = -\$200.000 + \$75.000 \times 3,35216 = \$51.411,63 > 0 \end{aligned}$$

10.2.2 Método do pay-back descontado

Muitas vezes é necessário sabermos o tempo de recuperação do investimento. Ou seja, quantos anos decorrerão até que o valor presente dos fluxos de caixa previstos se iguale ao montante do investimento inicial. Se I representa o investimento, FC_t o fluxo de caixa no período t e K o custo do capital, o método do *pay-back* descontado basicamente consiste em determinar o valor de T na seguinte equação:

$$I = \sum_{t=1}^T \frac{FC_t}{(1+K)^t}$$

Este indicador é utilizado quando se deseja saber o tempo de recuperação do investimento. Tem maior utilidade na comparação entre várias alternativas de investimento, e não na análise de um só projeto. Utiliza-se o *pay-back* como um complemento do método do VPL.

Exemplo 10.2

Qual dos equipamentos mutuamente exclusivos, X ou Y, é mais adequado para realizar uma determinada operação? Considere um custo de capital de 10% a.a. e utilize o método do VPL e da TIR. Determinar o *pay-back* descontado.

Equipamento	Investimento	Fluxo de caixa/ano	Vida útil
X	-\$ 12	\$ 3,0	8 anos
Y	-\$ 13	\$ 2,5	8 anos

- Cálculo do *pay-back* descontado

$$\begin{aligned} \$12 &= 3,0 \times a_{\bar{T}|10\%} \implies a_{\bar{T}|10\%} = 4,00000 \\ \$13 &= 2,5 \times a_{\bar{T}|10\%} \implies a_{\bar{T}|10\%} = 5,20000 \end{aligned}$$

Para um dado valor de T, o fator de valor presente da série uniforme não deve ser inferior a 4,0 e 5,2 para as alternativas X e Y. Como para T = 6 e T = 8 os valores dos fatores são 4,35526 e 5,33493, respectivamente, podemos concluir que PB_X = 6 e PB_Y = 8.

10.2.3 Método do índice custo-benefício

O índice *custo-benefício* é um indicador que permite encontrar a relação existente entre o valor atual dos ingressos e o valor atual dos custos (incluído o investimento inicial). Resulta da divisão de ambos os valores atuais e permite saber se se deve ou não realizar o investimento, bastando para isso observar se o índice é maior que 1, ou seja, o critério de decisão é aceitar o projeto se $\frac{B}{C} > 1$. Entretanto, é um indicador que não deve ser utilizado isoladamente nem deve ser utilizado para comparar projetos, pois pode nos induzir a uma seleção não-adequada. A fórmula do índice *custo-benefício* é:

$$\frac{B}{C} = \frac{\sum_{t=0}^n \frac{b_t}{(1+K)^t}}{\sum_{t=0}^n \frac{c_t}{(1+K)^t}}$$

onde:
 B/C = índice custo-benefício
 b_t = benefícios do período t
 c_t = custos do período t
 n = horizonte de planejamento
 K = custo do capital

Exemplo 10.3

Um projeto de investimento tem um custo do capital de 10% a.m. e os seguintes custos e benefícios:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Custos (c_t)	-\$ 100	-\$ 1.100	-\$ 12.100
Benefícios (b_t)	\$ 50	\$ 1.650	\$ 14.520
Fluxo de caixa líquido	-\$ 50	\$ 550	\$ 2.420

$\frac{B}{C}$ calculado sobre os benefícios e custos:

$$\frac{B}{C} = \frac{\sum_{t=0}^n \frac{b_t}{(1+K)^t}}{\sum_{t=0}^n \frac{c_t}{(1+K)^t}} = \frac{\$50 + \frac{\$1.650}{1,10} + \frac{\$14.520}{(1,10)^2}}{\$100 + \frac{\$1.100}{1,10} + \frac{\$12.100}{(1,10)^2}} = 1,22$$

$\frac{B}{C}$ calculado sobre o fluxo de caixa líquido:

$$\frac{B}{C} = \frac{\frac{\$550}{1,10} + \frac{\$2.420}{(1,10)^2}}{\$50} = 50$$

Podemos notar que o índice $\frac{B}{C}$ está sujeito a um *problema de dimensão*, pois depende da forma como são apresentados os benefícios e os custos do projeto, e o índice não necessariamente reflete a maior ou menor conveniência ou atratividade do projeto com respeito a outros. De todo modo, um $\frac{B}{C}$ maior que 1 indicará que o projeto é economicamente rentável.

Exemplo 10.4

Para um custo de capital de 10% a.a. e com as informações disponíveis a seguir, qual será o projeto selecionado? Qual indicador deve ser utilizado na seleção?

Projetos de investimento				
Ano	A	B	C	D
0	-\$ 8.000	-\$ 8.000	-\$ 8.000	-\$ 8.000
1	1.000	7.000	2.000	3.500
2	2.000	-1.000	1.000	4.500
3	3.000	6.000	2.000	2.000
4	4.000	-1.000	8.000	1.000
VPL	-\$ 452	\$ 1.362	\$ 1.611	\$ 1.087
TIR	7,8%	21,3%	16,8%	17,5%
$\frac{B}{C}$	0,94	1,17	1,20	1,14

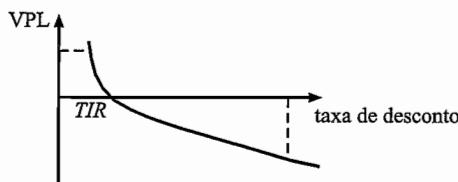
O indicador relevante é o VPL, pois tenta-se obter o máximo benefício que se puder do projeto. Portanto, selecionamos o projeto C. O índice $\frac{B}{C}$ não é adequado para comparar projetos e a TIR não é relevante no processo de seleção, pois há projetos com fluxos não-convencionais (com várias mudanças de sinal).

10.2.4 Método da Taxa Interna de Retorno (TIR)

Por definição, a TIR é a taxa de retorno esperada do projeto de investimento. O método da TIR não tem como finalidade a avaliação da rentabilidade absoluta a um determinado custo de capital (processo de atualização), como o VPL, mas, ao contrário, seu objetivo é encontrar uma taxa intrínseca de rendimento. Matematicamente, a TIR é uma taxa hipotética de desconto que anula o VPL, ou seja, é aquele valor de i^* que satisfaz a seguinte equação:

$$VPL = -I + \sum_{t=1}^n \frac{FC_t}{(1+i^*)^t} = 0 \text{ critério de decisão: se } i^* > K \Rightarrow \text{projeto economicamente viável}$$

O gráfico a seguir mostra o VPL em função da taxa de desconto. Nele, a TIR é dada pelo intercepto da curva que representa o polinômio do VPL com o eixo das abscissas, ou seja, o ponto em que o VPL é zero:



A regra decisória a ser seguida no método da TIR é: empreenda o projeto de investimento de capital se a TIR exceder o custo de oportunidade do capital. Essencialmente ela diz: a taxa de retorno esperada sobre o projeto de investimento excede a taxa de retorno requerida? O projeto criará valor? A princípio, parece dizer a mesma coisa expressa na regra do VPL, mas, como veremos nas seguintes seções, isso nem sempre é verdade. O apelo intuitivo provavelmente responde pelo seu uso generalizado (em alguns casos até preferencial) do método da TIR. As pessoas geralmente têm uma preferência para tomar as suas decisões fazendo comparações em termos de porcentagens.

Exemplo 10.5

No Exemplo 10.1, avaliar o projeto pelo método da TIR.

- Avaliação pelo método da TIR

Cálculo da TIR:

$$VPL = -200.000 + \frac{\$75.000}{(1+TIR)^1} + \dots + \frac{\$75.000}{(1+TIR)^5} = 0$$

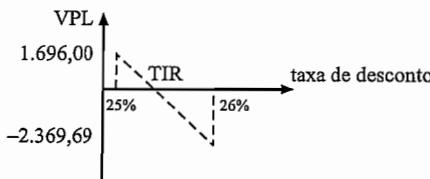
Manualmente, o procedimento para determinar a TIR seria aproximá-la por meio de uma interpolação linear. O processo consiste em tentar duas taxas que resultem em VPLs de sinal contrário, de modo que se permita a interpolação:

$$\text{VPL}(25\%) = -\$200.000 + \$75.000 \times a_{\bar{5}|25\%} = -\$200.000 + \$75.000 \times 2,68928 = \$1.696,00$$

$$\text{VPL}(26\%) = -\$200.000 + \$75.000 \times a_{\bar{5}|26\%} = -\$200.000 + \$75.000 \times 2,63507 = -\$2.369,65$$

por proporcionalidade:

$$\frac{1.696}{\text{TIR} - 25} = \frac{2.369,69}{26 - \text{TIR}} \Rightarrow \text{TIR} = 25,42\%$$



A TIR é maior que o custo do capital ($25,42\% > 15\%$), indicando a viabilidade da reforma do equipamento.

Exemplo 10.6

Qual dos equipamentos mutuamente exclusivos, X ou Y, é mais adequado para realizar uma determinada operação? Considere um custo de capital de 10% a.a. e utilize o método do VPL e da TIR.

Equipamento	Investimento	Fluxo de caixa/ano	Vida útil
X	-\$12	\$3,0	8 anos
Y	-\$13	\$2,5	8 anos

- Cálculo do VPL das alternativas

Como os fluxos de caixa formam uma série uniforme, podemos utilizar o fator de valor presente de séries uniformes (veja o Capítulo 5) para efetuar os cálculos mais facilmente:

$$\text{VPL}_X = -\$12 + 3,0 \times a_{\bar{8}|10\%} = -\$12 + 3,0 \times 5,33493 = \$4,01$$

$$\text{VPL}_Y = -\$13 + 2,5 \times a_{\bar{8}|10\%} = -\$13 + 2,5 \times 5,33493 = \$0,34$$

Como as alternativas têm igual duração, o critério do VPL pode ser aplicado diretamente na seleção. Logo, dado que $\text{VPL}_X > \text{VPL}_Y \Rightarrow X$ domina Y.

- Cálculo da TIR das alternativas

$$-\$12 + 3,0 \times a_{\bar{8}|\text{TIR}\%} = 0 \Rightarrow a_{\bar{8}|\text{TIR}\%} = 4,0 \Rightarrow \text{TIR}_X = 18,62\%$$

$$-\$13 + 2,5 \times a_{\bar{8}|\text{TIR}\%} = 0 \Rightarrow a_{\bar{8}|\text{TIR}\%} = 5,2 \Rightarrow \text{TIR}_Y = 10,71\%$$

Neste exemplo, por coincidência, os dois métodos, o VPL e a TIR, selecionam a mesma alternativa, no caso a alternativa X. Entretanto, como veremos na próxima seção, dado que as alternativas são mutuamente exclusivas e têm diferente escala (tamanho), o uso da TIR não é o método correto de seleção, pois pode levar a uma contradição em relação ao método do VPL. De fato, pela escala diferente das alternativas, a decisão correta deve ser baseada na taxa interna de retorno do fluxo incremental (TIR_{X-Y}), tal como será visto na próxima seção.

10.2.4.1 Problemas da TIR como método de seleção de alternativas independentes e alternativas mutuamente exclusivas

Um projeto independente é aquele cuja aceitação ou rejeição não afeta os fluxos de caixa de outras alternativas; ou seja, podem ser escolhidos independentemente de outros projetos. Entretanto, há casos em que a execução de um determinado projeto anula os benefícios da realização de outro ou, pior ainda, o torna inviável. Esses são os chamados projetos *mutuamente exclusivos*. Em geral, os problemas em orçamento de capital estão mais ligados com a seleção de uma ou mais alternativas entre um conjunto de alternativas disponíveis, envolvendo uma comparação de alternativas que dá origem ao problema da escolha.

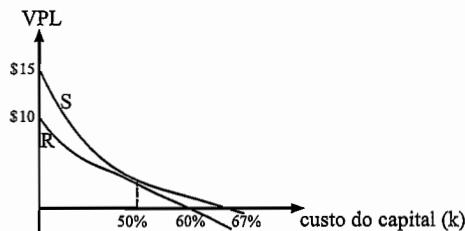
O método da TIR nos brinda uma porcentagem de rentabilidade mais comprehensível, em comparação com o VPL, que fornece um valor monetário mais difícil de explicar. Contudo, a TIR apresenta uma série de limitações e contradições em relação ao VPL que deve ser compreendida se quisermos usá-la corretamente como método decisório na seleção de alternativas de investimento.

O problema do reinvestimento

Um problema ou limitação da TIR é conhecido como *problema do reinvestimento*. No intuito de explicar essa problemática, consideremos as alternativas R e S a seguir:

Alternativa	Investimento	Retorno	TIR
R	-\$15	\$25	67%
S	-\$25	\$40	60%

A próxima figura mostra a relação funcional entre o VPL das alternativas e o custo do capital:



A taxa em que as duas curvas se entrecortam (50%) é conhecida como *taxa incremental de Fisher*, em homenagem ao grande economista Irving Fisher que foi um dos primeiros a levantar o conflito que ocorre quando se avaliam projetos mutuamente exclusivos. Se aplicarmos o método

da TIR como critério de decisão, a alternativa R seria selecionada, pois tem a maior TIR. Entretanto, pelo critério do VPL, a seleção dependerá do fato de o custo do capital ser maior ou menor que a taxa incremental de Fisher. Se o custo do capital for menor do que a taxa incremental de Fisher, então o projeto S será preferível, caso contrário, o projeto R será o preferível. Contudo, para um custo de capital de 10%, o projeto S será escolhido, pois, para essa taxa $VPL_R > VPL_S$. Conseqüentemente, constata-se que na ordenação de projetos mutuamente exclusivos a TIR pode conduzir a uma seleção inconsistente e contraditória em relação ao método do VPL. Essa divergência decorre, entre outros fatores, da diferença nas considerações de cada método em torno do reinvestimento dos fluxos de caixa gerados pelo projeto ao longo de sua vida útil. A questão é: quanto as entradas de caixa decorrentes do projeto renderão ao serem subseqüentemente reinvestidas em outros projetos do mesmo risco? A TIR, implicitamente, considera que esses fluxos renderão a própria TIR que é específica a cada projeto. Ora, não há por que imaginar que os fluxos de caixa de um projeto com TIR de 34% sejam reinvestidos a 34% enquanto aqueles de um projeto com TIR de 15% não possam ser reinvestidos senão a 15%. Do ponto de vista da racionalidade econômica, é pouco realista admitir que os fluxos de caixa gerados pelo projeto serão reinvestidos ganhando a própria TIR. Entretanto, se o custo do capital for corretamente estimado, então poderá ser usado como taxa de retorno exigida para o projeto, já que as forças competitivas assegurarão que no longo prazo essa taxa seja igual à taxa de retorno esperada. Assim, no longo prazo, os fluxos de caixa gerados pelo projeto rendem o custo de oportunidade do capital e não a TIR. Podemos admitir que, pelas suposições implícitas sobre o reinvestimento dos fluxos de caixa gerados pelo projeto, o VPL seja um método mais adequado que a TIR, pois pressupõe que os fluxos renderão o custo de oportunidade do capital. Dessa maneira, a racionalidade econômica atrás da suposição sobre reinvestimento é mais consistente e realista no método do VPL do que no método da TIR.

O problema na seleção de projetos mutuamente exclusivos de escala diferente — taxa incremental de Fisher

O método da TIR possui a vantagem de expressar os resultados em termos percentuais fáceis de ser comparados, mas pode levar a inconsistências decisórias na escolha entre alternativas mutuamente exclusivas de escala (porte) diferente. Como a TIR tem seus resultados expressos em termos relativos (porcentagem), tende a favorecer alternativas de menor escala que possuem maiores chances de produzir um retorno percentual maior que as alternativas de escala maior.

Consideremos inicialmente as duas seguintes alternativas de investimento mutuamente exclusivas da mesma escala (igual investimento inicial) e da mesma duração (somente um período):

Alternativa	Investimento	Retorno	TIR	VPL (10%)
F	-\$ 10	\$ 20	100%	\$ 8,18
G	-\$ 10	\$ 35	250%	\$ 21,82

- Cálculo do Valor Presente Líquido das alternativas

$$VPL_F = -\$ 10 + \$ 20/1,10 = \$ 8,18$$

$$VPL_G = -\$ 10 + \$ 35/1,10 = \$ 21,82$$

- Cálculo da Taxa Interna de Retorno das alternativas

$$-\$10 + \$20/(1 + \text{TIR}) = 0 \Rightarrow \text{TIR}_F = 1,00 = 100\%$$

$$-\$10 + \$35/(1 + \text{TIR}) = 0 \Rightarrow \text{TIR}_G = 2,50 = 250\%$$

Se forem independentes e não existindo restrições de capital, ambas as alternativas seriam aceitas tanto pelo critério do VPL quanto pelo critério da TIR, dado que os VPLs são positivos e as TIRs excedem o custo do capital. Entretanto, como as alternativas são mutuamente exclusivas, devemos escolher somente uma. Vejamos qual:

pela TIR: $\text{TIR}_G = 250\% > \text{TIR}_F = 100\% \Rightarrow$ selecionar G

pelo VPL: $\text{VPL}_G = \$21,82 > \text{VPL}_F = \$8,18 \Rightarrow$ selecionar G

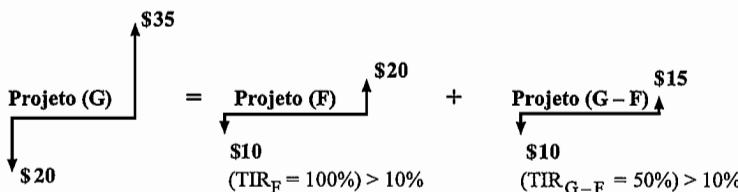
Agora mudemos a escala (investimento inicial) da alternativa G mantendo inalterada a alternativa F:

Alternativa	Investimento	Retorno	TIR	VPL (10%)
F	-\$10	\$20	100%	\$ 8,18
G	-\$20	\$35	75%	\$11,82
G - F (fluxo incremental)	-\$10	\$15	50%	

Nota-se que existe um conflito entre os dois métodos de seleção. Pela TIR seria aceita a alternativa F, enquanto pelo VPL seria a alternativa G. De modo geral, o VPL é o método a seguir quando há diferença de tamanho entre projetos mutuamente exclusivos. Contudo, uma maneira de evitar a contradição entre o VPL e a TIR na comparação de alternativas mutuamente exclusivas de escala diferente é por meio do uso da TIR do fluxo incremental (TIR do fluxo “G – F” ou *taxa incremental de Fisher*). Notemos que, como a TIR_{G-F} é maior que o custo do capital ($50\% > 10\%$), o projeto G (alternativa de escala maior) deve ser selecionado, eliminando-se dessa maneira a contradição entre o VPL e a TIR.

Analisemos mais explicitamente a abordagem do fluxo incremental ou taxa incremental de Fisher: podemos considerar que o projeto G (projeto de maior escala) é igual à soma do projeto F (projeto de menor escala) mais um projeto hipotético complementar (projeto complementar de tamanho $G - F$). Logo, se o projeto F for justificado economicamente (provado que $\text{TIR}_F > k$), bastará justificar o complemento (provar que $\text{TIR}_{G-F} > k$) para justificar economicamente o projeto de maior escala (projeto G) e, consequentemente, preferir G a F.

Esquematicamente



logo, como foi provado que $\text{TIR}_F > 10\%$ e que $\text{TIR}_{G-F} > 10\% \Rightarrow G$ domina F.

Exemplo 10.7

Considerando um custo do capital de 12% a.a., avaliar pelo método de VPL, TIR e TIR incremental as seguintes alternativas mutuamente exclusivas:

Alternativa	Investimento	Retorno
A	-\$ 10.000	\$ 12.000
B	-\$ 15.000	\$ 17.700
B - A	-\$ 5.000	\$ 5.700

- Avaliação pelo método do VPL

$$VPL_A = -\$10.000 + \frac{\$12.000}{1,12} = \$714,29$$

$$VPL_B = -\$15.000 + \frac{\$17.700}{1,12} = \$803,57$$

Como $VPL_B > VPL_A \Rightarrow$ selecionar B

- Avaliação pela TIR das alternativas

$$TIR_A = \frac{\$12.000}{\$10.000} - 1 = 20\%$$

$$TIR_B = \frac{\$17.700}{\$15.000} - 1 = 18\%$$

Como $TIR_A > TIR_B \Rightarrow$ selecionar A

A seleção pela TIR indica a dominância da alternativa A, mas percebe-se que essa escolha seria inconsistente e contraditória em relação à seleção dada pelo VPL.

Se a TIR for calculada sobre o fluxo incremental ($B - A$), a seleção determinada pelos dois critérios, VPL e TIR, será a mesma. A TIR do fluxo incremental ($B - A$) é a seguinte:

$$TIR_{B-A} = \frac{\$5.700}{\$5.000} - 1 = 14\% > (K = 12\%) \Rightarrow \text{selecionar B}$$

Como a TIR do fluxo incremental (TIR_{B-A}) é maior que o custo do capital, então a alternativa de escala maior (B) domina a de escala menor (A). Observe que o fluxo incremental pode ser visto também como um projeto de investimento, pois é efetuado um desembolso inicial de \$ 5.000 no ano 0, seguido de um recebimento de \$ 5.700 no ano 1. Assim, a TIR_{B-A} representa a *rentabilidade efetiva* desse projeto de investimento. Se essa taxa é maior que o custo do capital, então a alternativa B domina a alternativa A. Dessa maneira, podemos concluir que, se a análise é realizada em função da TIR do fluxo incremental, a seleção será consistente com a seleção determinada pelo VPL.

Exemplo 10.8

A um custo do capital de 10% a.a., selecionar uma das seguintes alternativas mutuamente exclusivas:

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
T	-\$3.000	\$200	\$2.500	\$2.300
U	-\$3.000	0	0	\$5.500
Fluxo incremental T - U	0	\$200	\$2.500	-\$3.200
Fluxo incremental U - T	0	-\$200	-\$2.500	\$3.200

- Cálculo e análise da TIR do fluxo incremental

A alternativa incremental T – U equivale a pedir um financiamento, pois se recebe, respectivamente, \$200 e \$2.500 no primeiro e segundo anos e paga-se \$3.200 no terceiro ano pelo financiamento tomado. Assim, a TIR_{T-U} do fluxo incremental representa o *custo efetivo desse financiamento*. Se essa taxa é maior que o custo do capital, então U é melhor que T.

$$\frac{\$200}{(1+TIR_{T-U})} + \frac{\$2.500}{(1+TIR_{T-U})^2} - \frac{\$3.200}{(1+TIR_{T-U})^3} = 0 \Rightarrow TIR_{T-U} = 17,04\% \text{ a.a.}$$

como ($TIR_{T-U} = 17,04\% > 10\%$) \Rightarrow selecionar U

A análise também poderia ser feita usando o fluxo incremental U-T. Nesse caso, o fluxo equivale a investir \$200 e \$2.500 no primeiro e segundo anos, respectivamente, que resultam em um recebimento de \$3.200 no terceiro ano. Assim, a TIR_{U-T} do fluxo incremental representa a *rentabilidade efetiva desse investimento*. Se essa taxa é maior que o custo do capital, então U é melhor que T:

$$-\frac{\$200}{(1+TIR_{U-T})} - \frac{\$2.500}{(1+TIR_{U-T})^2} + \frac{\$3.200}{(1+TIR_{U-T})^3} = 0 \Rightarrow TIR_{U-T} = 17,04\% \text{ a.a.}$$

como ($TIR_{U-T} = 17,04\% > 10\%$) \Rightarrow selecionar U

Como podemos ver, por ambas as formas (financiamento ou investimento) chega-se à mesma seleção da alternativa U.

Exemplo 10.9

Consideremos três alternativas mutuamente exclusivas (compra dos equipamentos A, B ou C), todas com uma vida útil de cinco anos, um custo do capital de 10% e os seguintes custos iniciais de aquisição, custos operacionais/ano e valores de revenda ao término da vida útil:

Alternativa	Custo inicial (em $t = 0$)	Custo operacional/ano (em $t = 1, \dots, 5$)	Valor de revenda (em $t = 5$)
A	-\$ 6,00	-\$ 8,00	\$ 0,00
B	-\$ 30,00	-\$ 2,00	\$ 10,00
C	-\$ 35,00	-\$ 1,60	\$ 12,00

Pede-se: selecionar a melhor alternativa, considerando fluxos postecipados (no fim de cada ano) e usando a TIR dos fluxos incrementais.

Com as informações fornecidas podemos montar o seguinte quadro com os fluxos de caixa:

Alternativa	Fluxo de caixa (\$)					
	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
A	- 6,00	-8,00	-8,00	-8,00	-8,00	-8,00
B	-30,00	-2,00	-2,00	-2,00	-2,00	8,00
C	-35,00	-1,60	-1,60	-1,60	-1,60	10,40

Observe que não é possível calcular a TIR das alternativas. O quadro a seguir apresenta os fluxos incrementais correspondentes a trocar A por B (fluxo A - B), A por C (fluxo A - C) e B por C (fluxo B - C). Na última coluna calculam-se as TIRs destes fluxos incrementais:

Alternativa	Fluxo de caixa incremental (\$)						TIR
	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5	
A - B	24,00	-6,00	-6,00	-6,00	-6,00	-16,00	16,62%
A - C	29,00	-6,40	-6,40	-6,40	-6,40	-18,40	13,03%
B - C	5,00	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-2,40	-5,36%

Os fluxos incrementais podem ser vistos como empréstimos levantados no ano 0 que serão reembolsados em cinco anos. Colocado dessa maneira, a TIR desses fluxos representa o custo efetivo do empréstimo. Portanto, se essa taxa é maior que o custo do capital, então o projeto que representa o *subtraendo* é pior. No caso deste exemplo, podemos inicialmente comparar a alternativa A com as alternativas B e C:

($TIR_{A-B} = 16,62\% > 10\%$) \rightarrow selecionar a alternativa B

($TIR_{A-C} = 13,03\% > 10\%$) \rightarrow selecionar a alternativa C

Estando descartada a alternativa A, a seguir comparamos B com C:

($TIR_{B-C} = -5,36\% < 10\%$) \rightarrow selecionar a alternativa B

Assim, podemos concluir que a alternativa a ser selecionada é a B.

Exemplo 10.10

Uma empresa industrial estuda a possibilidade de terceirizar durante os próximos quatro anos a fabricação de um componente necessário à montagem de seu produto principal. Uma análise mostrou que, para fabricar 10 mil peças/ano, seria necessário um investimento inicial de \$ 150.000, devendo-se incorrer em custos totais de \$ 96.000/ano. Se a fabricação for terceirizada, o preço de compra será de \$ 14,4/peça. Admitindo-se um custo do capital de 10% a.a., determinar se o componente deve ou não ter a sua fabricação terceirizada.

Como as duas alternativas (terceirizar ou fabricar) são mutuamente exclusivas, a análise será efetuada sobre o fluxo incremental:

Fluxo de caixa (em \$ 1.000)

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
<u>Fabricar (F)</u>					
• Investimento	-\$ 150				
• Custos		-\$ 96	-\$ 96	-\$ 96	-\$ 96
<i>Fluxo de caixa de F</i>	-\$ 150	-\$ 96	-\$ 96	-\$ 96	-\$ 96
<u>Terceirizar (T)</u>					
• Custos		-\$ 144	-\$ 144	-\$ 144	-\$ 144
<i>Fluxo de caixa de T</i>		-\$ 144	-\$ 144	-\$ 144	-\$ 144
Fluxo incremental (F - T)	-\$ 150	\$ 48	\$ 48	\$ 48	\$ 48

- Avaliação pelo VPL do fluxo incremental

$$VPL_{F-T} = -\$150.000 + \$48.000/(1,10) + \dots + \$48.000/(1,10)^4 = \$2.153,54 > 0$$

Como: $VPL_{F-T} > 0 \Rightarrow$ melhor fabricar (F domina T)

Um VPL positivo indica que a alternativa fabricar o componente representa, em valores atuais, um custo menor que a alternativa terceirizar a fabricação.

- Avaliação pela TIR do fluxo incremental

$$VPL_{F-T} = -\$150.000 + \$48.000/(1+TIR_{F-T}) + \dots + \$48.000/(1+TIR_{F-T})^4 = 0$$

$$\Rightarrow TIR_{F-T} = 10,66\% \text{ a.a.}$$

Como: $TIR_{F-T} = 10,66\% > (k = 10\%) \Rightarrow$ melhor fabricar (F domina T)

Problema de múltiplas taxas internas de retorno

De acordo com o comportamento de seu fluxo de caixa, os projetos podem ser divididos em projetos de fluxo convencional e projetos de fluxo não-convencional. Os projetos com fluxo convencional caracterizam-se por terem um fluxo negativo inicial (saída de caixa inicial), seguido de um ou mais fluxos positivos, por exemplo: $- + + +$. Os de fluxo não-convencional têm fluxos positivos e negativos de maneira alternada, por exemplo: $- + + - -$). Uma dificuldade com o método da TIR deriva do fato de que, contrariamente ao que parece, a TIR pode não ser única quando o fluxo de caixa é do tipo não-convencional, pois nesse caso podem

ocorrer múltiplas taxas internas de retorno como resultado da regra cartesiana: *o número de raízes reais positivas de um polinômio é no máximo igual ao número de mudanças de sinal verificado na seqüência de coeficientes do polinômio.* Isso equivale a dizer que o número de TIRs associadas a uma seqüência de fluxos de caixa é no máximo igual ao número de mudanças de sinal verificado nessa seqüência. Assim, é possível, inclusive, encontrarmos fluxos de caixa que resultam em raízes imaginárias sem nenhuma interpretação econômica possível.

Lorie & Savage¹ foram os primeiros a levantar esse problema com a TIR, assinalando que, em certas condições, o perfil do VPL poderia apresentar uma evolução que dificulta a aplicação da TIR como critério decisório. Esses autores tomam como ilustração o exemplo clássico do caso da substituição de uma estação de bombeamento de petróleo atualmente em uso por outra mais potente que permite uma extração mais rápida das reservas petrolíferas do campo explorado. Um exemplo com valores poderia ser o seguinte: a realização do projeto exigiria um desembolso inicial de \$ 1.600 e permitiria esgotar o lençol em um único ano, obtendo-se entradas líquidas de caixa da ordem de \$ 20.000, enquanto a não-realização do projeto não levaria a nenhum novo investimento, permitindo o esgotamento do lençol em dois anos e proporcionando em cada um desses dois anos entradas líquidas de caixa da ordem de \$ 10.000:

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Não substitui (C)	0	\$ 10.000	\$ 10.000
Sim, substitui (S)	-\$ 1.600	\$ 20.000	
S - C (fluxo incremental)	-\$ 1.600	\$ 10.000	-\$ 10.000

Como os dois projetos, substituir e não substituir, são mutuamente exclusivos, aparentemente qualquer divergência e contradição na seleção pelo VPL e TIR seriam evitadas usando-se a TIR do fluxo incremental (taxa incremental de Fisher). Calculemos essa taxa:

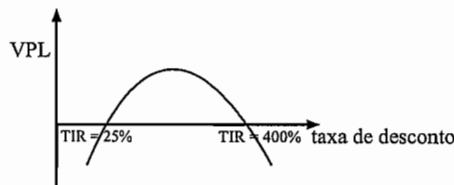
$$\begin{aligned} VPL = -\$1.600 + \frac{\$10.000}{(1+TIR_{S-C})} - \frac{\$10.000}{(1+TIR_{S-C})^2} = 0 \\ \$1.600 (1+TIR_{S-C})^2 - \$10.000 (1+TIR_{S-C}) + \$10.000 = 0 \end{aligned}$$

A forma geral da equação quadrática anterior é: $aX^2 + bX + C$. A sua resolução é:

$$\begin{aligned} X = (1+TIR_{S-C}) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10.000 \pm \sqrt{(-10.000)^2 - 4 \times 1.600 \times 10.000}}{2 \times 1600} = \frac{10.000 \pm 6.000}{3.200} \\ \Rightarrow TIR_{S-C} = 25\% \text{ e } TIR_{S-C} = 400\% \end{aligned}$$

¹ Lorie & Savage, "Three problems in rationing capital"; *Journal of Business*, outubro, 1955.

Representação gráfica do VPL em função da taxa de desconto:



Percebem-se duas taxas internas de retorno: 25% e 400%. Qual das duas deve ser usada como TIR? Se o custo do capital for de 10%, poderíamos concluir que o projeto é rentável? À primeira vista, sim, uma vez que as duas TIRs são superiores a essa taxa. Entretanto, a essa taxa, o VPL seria $-\$773,55$, indicando uma redução do valor da empresa se o projeto for realizado. Dessa maneira, a adoção da TIR, mesmo do fluxo incremental, não parece ser muito indicada quando nos defrontamos com projetos suscetíveis a múltiplas TIRs. Esse tipo de insuficiência relativa ao método da TIR conduziu vários autores a propor pura e simplesmente a adoção do método do VPL sempre que surgir o caso de TIRs múltiplas. Outros autores, como Teichroew, Robichek e Montalbano² e Solomon³ tentaram resgatar o método da TIR nesse tipo de situação propondo determinados procedimentos, mas a fraca racionalidade econômica e grande dose de subjetividade de tais métodos não recomendam seu uso⁴.

Podemos, ainda, encontrar fluxos com TIR indefinida, por exemplo, a TIR do fluxo: +100; -200; +150.

Fazendo $X = 1/(1 + \text{TIR})$, a TIR pode ser calculada resolvendo para X a seguinte equação:

$$100 - 200X + 150X^2 = 0$$

resolvendo a equação quadrática:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{200 \pm \sqrt{(-200)^2 - 4 \times 150 \times 100}}{2 \times 150} = \frac{200 \pm \sqrt{-20.000}}{300}$$

A solução da TIR é um número imaginário, portanto, inconsistente para o propósito de análise econômica e seleção de alternativas de investimento.

Mas o problema não termina. Nas alternativas A e B do quadro a seguir, presenciamos duas mudanças de sinal, entretanto encontramos somente uma TIR para cada uma delas: devemos nos

² Teichroew, Robichek e Montalbano, "Mathematical analysis of rates of return under certainty", *Management Science*, janeiro, 1965.

³ Solomon, E. "The arithmetic of capital budgeting decisions", *Journal of Business*, abril, 1956.

⁴ Foi proposta também a TIR modificada (TIRM), calculada trazendo-se para valor presente os fluxos negativos e para valor futuro, os positivos. Para atualizar os fluxos, esse critério exige que se estipulem taxas de financiamento e de reinvestimento que acrescentam subjetividades adicionais à análise, o que diminui ou anula qualquer ganho propalado por seus defensores.

lembra que o número de mudanças de sinal no fluxo de caixa indica o número máximo de TIRs, mas não necessariamente indica o número real de TIRs.

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	TIR
A	-1.000	1.400	-100			32,45%
B	-1.000	400	400	-100	500	8,07%

O problema da distribuição (timing) dos fluxos de caixa

Quando existe uma diferente distribuição (*timing*) dos fluxos de caixa de duas alternativas mutuamente exclusivas, pode surgir uma contradição entre os métodos do VPL e da TIR. O problema do *timing* dos fluxos de caixa decorre das suposições feitas em relação à taxa de reinvestimento, pois o VPL considera o *timing* dos investimentos, e a TIR não o faz. No quadro a seguir, as alternativas mutuamente exclusivas X e Y têm a mesma escala (investimentos iguais), mas um *timing* diferente. Em X, as entradas de caixa estão mais concentradas no final, enquanto em Y estão mais concentradas no início.

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL (10%)	TIR
X	-\$ 100,00	\$ 20,00	\$ 120,00	\$ 17,36	20,00%
Y	-\$ 100,00	\$ 100,00	\$ 31,25	\$ 16,74	25,00%
X-Y (fluxo incremental)	0,00	-\$ 80,00	\$ 88,75	\$ 0,62	10,94%

Podemos observar que o VPL e a TIR levam a resultados diferentes e contraditórios. A contradição pode ser evitada selecionando-se as alternativas por meio da TIR do fluxo incremental ou *taxa incremental de Fisher* (TIR do fluxo X - Y). Como a TIR_{X-Y} é maior que o custo do capital ($10,94\% > 10\%$), então a alternativa X deve ser selecionada.

De modo geral, a regra decisória do VPL é a melhor regra a seguir quando há diferença de *timing* entre projetos mutuamente exclusivos. Entretanto, um ponto a ser considerado é que o VPL não revela muita coisa a respeito da rentabilidade do projeto, pois dois projetos podem ter o mesmo VPL e um deles representar um investimento substancialmente maior em relação ao outro. O quadro a seguir mostra dois projetos mutuamente exclusivos, A e B:

Alternativa	Investimento	Retorno	TIR	VPL (10%)
A	-\$ 100	+\$ 120	20,00%	+\$ 9,09
B	-\$ 10.000	+\$ 11.010	10,10%	+\$ 9,09

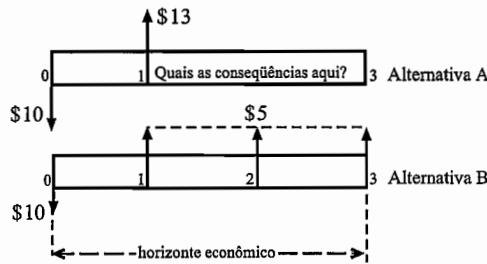
Notemos que a alternativa A requer um investimento muito menor que a alternativa B, mas os VPLs são os mesmos. Este exemplo mostra que as duas alternativas terão de ser vistas e analisadas diferentemente, permitindo-nos concluir que a aplicação do VPL não dá por encerrada a discussão sobre análise e seleção de alternativas de investimento, mas nos proporciona um sólido ponto de partida.

10.2.5 Método da anuidade uniforme equivalente

É essencial que qualquer estudo específico sobre aplicação de capital seja realizado dentro do contexto de um horizonte de planejamento uniforme. Ou seja, para que os projetos possam ser objeto de uma comparação, é necessário que eles sejam comparáveis. Assim, uma das contradições mais problemáticas entre os métodos do VPL e da TIR na seleção de projetos ocorre quando a duração das alternativas é diferente. Ilustremos o problema analisando duas alternativas de duração diferente, em que A e B poderiam ser tipos de equipamentos que executam a mesma tarefa, sendo que A tem vida útil de um ano e B, de três anos:

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	TIR	VPL (10%)
A	-\$10	\$13			30,00%	\$1,82
B	-\$10	\$5	\$5	\$5	23,38%	\$2,43

Observa-se no quadro anterior que a seleção pela TIR e pelo VPL é contraditória, mas se considerarmos o VPL como critério ótimo de escolha, a alternativa B será selecionada; contudo, argumenta-se que a solução válida requer que as alternativas sejam levadas a um horizonte econômico comum. Para isso, seria necessário admitir que a máquina A possa ser substituída uma ou mais vezes ao fim de sua vida útil por outra idêntica, até que seu horizonte econômico seja igualado ao da alternativa B. Esse procedimento é chamado *regra da cadeia*. Os horizontes econômicos das duas alternativas são igualados em alguma data futura que corresponde ao *mínimo múltiplo comum* dos prazos das alternativas. No presente exemplo os horizontes se igualam no terceiro ano após duas substituições do equipamento A.



O quadro a seguir apresenta o fluxo de caixa da alternativa A, já considerando as substituições consecutivas necessárias para igualar seu horizonte econômico ao da alternativa B:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	VPL (10%)
• Fluxo da máquina A	-\$10	\$13			
• 1ª substituição de A		-\$10	\$13		
• 2ª substituição de A			-\$10	\$13	
Fluxo de caixa	-\$10	\$3	\$3	\$13	\$4,97

Observe-se que, igualados os períodos das duas alternativas por meio da repetição sucessiva da alternativa de menor duração, a alternativa A passa a ser dominante, dado que o VPL de A com suas 2 substituições agora é maior em relação ao VPL de B ($\$4,97 > \$2,43$). Conseqüentemente, na comparação de alternativas de duração diferente, a aplicação direta do método do VPL como critério de seleção, sem igualar previamente os horizontes econômicos das alternativas, pode resultar em decisões inconsistentes com a maximização do valor da empresa.

Como os horizontes econômicos das alternativas são igualados em um período igual ao *mínimo múltiplo comum* de seus prazos, repare que seria uma tarefa muito cansativa aplicar esse raciocínio se, por exemplo, a duração da alternativa A fosse 18 anos e a de B fosse 42 anos, pois os horizontes econômicos seriam igualados somente no 126º ano, o que resultaria em sete repetições sucessivas para A e três para B. Um método alternativo, porém mais prático em relação ao de substituições ou repetições sucessivas, é o da *Anuidade Uniforme Equivalente (AE)*. Esse valor ou indicador mostra de que modo seria distribuída a renda econômica gerada pelo projeto se a referida distribuição fosse equitativa para cada ano. Ou seja, equivale a repartir o VPL ao longo da vida útil do projeto transformando-o em uma série uniforme equivalente que pode ser legitimamente comparada entre projetos de duração diferente. Esse método não coloca explicitamente a repetição das alternativas como faz o processo de substituições sucessivas, mas o faz implicitamente.

No presente exemplo, o cálculo das AEs é realizado da seguinte forma:

$$AE_A = \frac{VPL_A}{a_{\overline{n}|10\%}} = \frac{\$1,82}{\left[\frac{(1,10)^1 - 1}{(1,10)^1 \times 0,10} \right]} = \frac{\$1,82}{0,90909} = \$2,00$$

$$AE_B = \frac{VPL_B}{a_{\overline{3}|10\%}} = \frac{\$2,43}{\left[\frac{(1,10)^3 - 1}{(1,10)^3 \times 0,10} \right]} = \frac{\$2,43}{2,48685} = \$0,98$$

como $AE_A > AE_B \Rightarrow$ selecionar A

$$a_{\overline{n}|i\%} = \text{fator de valor presente de séries uniformes} = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right]$$

Exemplo 10.11

Qual das alternativas mutuamente exclusivas, X ou Y, deve ser escolhida se o custo do capital for de 10% a.a.?

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
X	-\$10	\$6	\$6	
Y	-\$9	\$4	\$4	\$4

- Cálculo das anuidades uniformes equivalentes

$$AE_X = \frac{VPL_X}{a_{\bar{2}|10\%}} = \frac{-\$10 + \$6 \times a_{\bar{2}|10\%}}{a_{\bar{2}|10\%}} = \frac{-\$10 + \$6 \times 1,73554}{1,73554} = \$0,2381$$

$$AE_Y = \frac{VPL_Y}{a_{\bar{3}|10\%}} = \frac{-\$9 + \$4 \times a_{\bar{3}|10\%}}{a_{\bar{3}|10\%}} = \frac{-\$9 + \$4 \times 2,48685}{2,48685} = \$0,3810$$

Considerando a duração diferente das alternativas, a decisão correta deve ser com base nas AEs. Logo, como $AE_Y > AE_X \Rightarrow$ selecionamos Y, pois possui a maior AE.

Exemplo 10.12

Comparar as alternativas mutuamente exclusivas, R e S, de duração diferente. O custo do capital é de 10% a.a.

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL (10%)	TIR
R	-\$1.000	\$1.000	\$1.000	\$735,54	61,80%
S	-\$1.000	\$1.800	0	-\$90,91	80,00%

Como pode ser observado, a seleção seria contraditória pelos métodos do VPL e da TIR. Dada a duração diferente das alternativas, a escolha deve ser efetuada comparando-se as AEs.

- Cálculo das anuidades uniformes equivalentes

$$AE_R = \frac{VPL_R}{a_{\bar{2}|10\%}} = \frac{-\$1.000 + \$1.000 \times a_{\bar{2}|10\%}}{a_{\bar{2}|10\%}} = \frac{-\$1.000 + \$1.000 \times 1,73554}{1,73554} = \$423,81/\text{ano}$$

$$AE_S = \frac{VPL_S}{a_{\bar{1}|10\%}} = \frac{-\$1.000 + \$1.000 \times a_{\bar{1}|10\%}}{a_{\bar{1}|10\%}} = \frac{-\$1.000 + \$1.000 \times 0,90909}{0,90909} = -\$100,00/\text{ano}$$

Logo, como $AE_R > AE_S \Rightarrow$ selecionar R, pois possui a maior Anuidade Uniforme Equivalente.

- Método alternativo de análise

Um modo alternativo de abordar o problema é considerar que o fluxo gerado pelo projeto S de menor duração é reinvestido na melhor alternativa disponível; neste caso, no mercado, rendendo o custo de oportunidade do capital (10%). O quadro a seguir mostra esse reinvestimento e o fluxo resultante (fluxo T):

Alternativa	Ano 0	Ano 1	Ano 2	VPL (10%)	TIR
Alternativa S	-\$ 1.000	\$ 1.800		\$ 735,54	61,80%
Reinvestimento		-\$ 1.800	\$ 1.980 (*)		
Fluxo T	-\$ 1.000	0	\$ 1.980	\$ 636,36	40,71%

(*) $\$ 1.800 \times 1,10$

Com a suposição de reinvestimento dos fluxos da alternativa S, conseguimos igualar os horizontes de planejamento das duas alternativas. Logo, como o VPL do fluxo T é menor que o VPL da alternativa R ($\$ 636,36 < \$ 735,53$), conclui-se que a alternativa R deve ser a selecionada. A mesma conclusão seria alcançada comparando-se a TIR de T com a TIR da alternativa R ($40,71\% < 61,80\%$).

10.2.6 Método do custo anual equivalente

O Custo Anual Equivalente (CAE) é um indicador que permite encontrar o custo anual (mensal) que equivale ao investimento inicial. Mostra qual é a quantia uniforme que deve ser investida a cada ano (mês) durante a vida útil de modo que iguale o investimento inicial, ou seja, fornece informação acerca da distribuição do investimento inicial do negócio. Para calcular o CAE é necessário conhecer o valor do investimento e a vida útil do projeto. Calcula-se igualando o investimento inicial ao valor atual de uma anuidade uniforme.

$$\text{Inv} = \text{CAE} \times \left[\frac{(1+K)^n - 1}{(1+K)^n \times K} \right] \quad \text{onde :}$$

Inv = investimento inicial
 CAE = custo anual equivalente
 K = custo do capital
 n = vida útil

Existem projetos que oferecem um determinado serviço que pode ser prestado de diversas maneiras. Os benefícios derivados de um serviço público usualmente não podem ser quantificados em termos monetários. Cada forma de prestar o serviço caracteriza-se por custos diferentes perfeitamente delimitáveis. No setor privado existem também alternativas que produzem o mesmo serviço, quantificável ou não, mas de diferente custo. Nesse tipo de projeto o fator receita pode ser conhecido ou desconhecido, mas, como para todas as alternativas é um fator comum, será irrelevante em uma análise incremental. Assim, devemos conhecer os custos das alternativas e selecionar aquela com menores custos. Muitas vezes, sobretudo em problemas de engenharia econômica, é mais fácil determinar os fluxos de custos do que os fluxos de ingressos dos projetos. Um exemplo pode ajudar a entender a que tipo de projetos estamos nos referindo. Imaginemos uma empresa que pretenda adquirir um equipamento e tem disponíveis no mercado duas marcas diferentes do mesmo equipamento: equipamento A e equipamento B. O equipamento A custa \$ 13.000 e tem uma vida útil de 12 anos, enquanto o equipamento B custa \$ 11.000 com vida útil de oito anos. Quaisquer que seja o equipamento comprado, A ou B, o benefício será o mesmo: \$ 7.000/ano. O custo do capital da empresa é de 4% a.a.

- Cálculo do custo anual equivalente das alternativas:

$$\text{CAE}_A = \frac{\$13.000}{\left[\frac{(1,04)^{12} - 1}{(1,04)^{12} \times 0,04} \right]} = \$1.385,18$$

$$\text{CAE}_B = \frac{\$11.000}{\left[\frac{(1,04)^8 - 1}{(1,04)^8 \times 0,04} \right]} = \$1.636,81$$

Como os benefícios das duas alternativas são iguais, a seleção pode ser realizada comparando-se o CAE e, neste caso, é selecionado o equipamento A. O CAE da alternativa A é menor, mesmo exigindo um investimento maior, pois o investimento maior será repartido também em um período maior.

Exemplo 10.13

Qual dos equipamentos, X ou Y, é mais adequado para realizar uma determinada operação? Considere a taxa mínima de retorno igual a 10% a.a.

Equipamento	Custo inicial	Custo operacional/ano	Vida útil
X	\\$ 12	\\$ 2,5	3 anos
Y	\\$ 32	\\$ 2,0	8 anos

- Custo anual uniforme equivalente para o equipamento X

$$\text{CAE}_X = \frac{\text{custo inicial}}{\alpha_{3|10\%}} + \text{custo operacional/ano} = \frac{\$12}{2,48685} + \$2,5 = \$7,33/\text{ano}$$

- Custo anual uniforme equivalente para o equipamento Y

$$\text{CAE}_Y = \frac{\text{custo inicial}}{\alpha_{8|10\%}} + \text{custo operacional/ano} = \frac{\$32}{5,33493} + \$2,0 = \$8,0/\text{ano}$$

Como $\text{CAE}_X < \text{CAE}_Y \Rightarrow$ selecionamos X, pois possui o menor *custo anual uniforme equivalente*.

Observe que nestes exemplos o método foi chamado de *custo anual uniforme equivalente*, pois os cálculos foram realizados em função de saídas de caixa e não de entradas de caixa. Na análise econômica de projetos de investimento muitas vezes é mais adequado avaliar o projeto em termos de saídas de caixa. Por exemplo, se o problema for selecionar entre dois projetos referentes à instalação de um sistema de ar-condicionado, e a única diferença entre os projetos seja no tipo de combustível usado pelo gerador, gás natural ou energia elétrica, é mais fácil fazermos um levantamento das saídas de caixa (por exemplo, do custo do m^3 de gás natural,

custo do kw/h de energia elétrica etc.) do que das entradas de caixa, pois seria difícil traduzir monetariamente os benefícios trazidos pelo projeto (aumento da produtividade do pessoal devido à instalação do sistema de ar-condicionado, satisfação geral dos empregados etc.).

Exemplo 10.14

A Rielight pretende instalar um gerador de energia elétrica a um custo de \$ 10.000.000. Os custos operacionais projetados são de \$ 80.000/mês ao longo da vida útil do equipamento, que foi estimada em 120 meses. Considerando que a empresa requer uma rentabilidade mínima de 10% a.m., determinar o custo mensal que deve ser repassado aos usuários do equipamento.

O custo mensal que deve ser repassado aos clientes, de modo que cubra os custos operacionais e proporcione a rentabilidade mínima desejada à empresa pelo capital investido, é igual ao custo operacional/mês mais uma *mensalidade uniforme equivalente* calculada sobre o investimento inicial:

$$\begin{aligned} \text{mensalidade uniforme} &= \text{custo operacional/mês} + \frac{\text{investimento}}{a_{120|10\%}} \\ &= \$80.000/\text{mês} + \frac{\$10.000.000}{a_{120|10\%}} = \$80.000/\text{mês} + \frac{\$10.000.000}{9,99989} = \$1.080.011/\text{mês} \end{aligned}$$

10.3 Tempo ótimo de substituição e escala dos projetos de investimento

É possível que um projeto seja rentável hoje, porém a referida rentabilidade pode ser incrementada se o início do projeto for postergado. Portanto, o projeto deverá ser iniciado naquele período em que o VPL seja máximo. Essa postergação terá sentido somente se o valor atual do benefício de postergar for maior que os custos associados a esta decisão. Dessa maneira, o momento ótimo de início do projeto será aquele período em que o valor presente dos benefícios de postergar se iguale ao valor presente dos custos associados. A escala ótima de um projeto será aquela que maximize o VPL. Uma forma moderna de tratar o problema de postergar ou não o início de um projeto é por meio da *Teoria das Opções Reais*, assunto que foge ao escopo deste livro.

Exemplo 10.15

Um equipamento com custo de aquisição de \$ 100.000 tem uma vida útil de três anos e um valor residual que depende do número de anos de uso: \$ 60.000, \$ 15.000 e \$ 10.000, respectivamente, para um ano, dois anos e três anos de uso. Os custos operacionais projetados são de \$ 20.000/ano, \$ 28.000/ano e \$ 42.000/ano, respectivamente, para cada ano de operação. Determinar o tempo ótimo de substituição considerando-se um custo do capital de 10% a.a.

Como o equipamento pode funcionar um, dois ou três anos, existem três alternativas mutuamente exclusivas de diferentes durações. A seguir, calculamos os custos anuais uniformes equivalentes para essas três alternativas, ou seja, o CAE para as alternativas de substituir o equipamento ao término do primeiro, segundo e terceiro ano de uso:

$$\text{CAE}_{1^{\text{o}} \text{ ano}} = \frac{1}{a_{1|10\%}} \times \left[\$100.000 + \frac{\$20.000}{(1,10)} - \frac{\$60.000}{(1,10)} \right] = \$70.000/\text{ano}$$

$$\text{CAE}_{2^{\text{o}} \text{ ano}} = \frac{1}{a_{2|10\%}} \times \left[\$100.000 + \frac{\$20.000}{(1,10)} + \frac{\$28.000}{(1,10)^2} - \frac{\$15.000}{(1,10)^2} \right] = \$74.286/\text{ano}$$

$$\text{CAE}_{3^{\text{o}} \text{ ano}} = \frac{1}{a_{3|10\%}} \times \left[\$100.000 + \frac{\$20.000}{(1,10)} + \frac{\$28.000}{(1,10)^2} + \frac{\$42.000}{(1,10)^3} - \frac{\$10.000}{(1,10)^3} \right] = \$66.496/\text{ano}$$

Como o menor Custo Anual Uniforme Equivalente (CAE) é dado no terceiro ano, será esse o período ótimo de substituição do equipamento

Exemplo 10.16

Determinar o tamanho ótimo de uma planta. O quadro a seguir mostra diversos tamanhos possíveis da planta, com o investimento necessário e a produção para diversas escalas:

Escala	Investimento inicial	Produção (unidades)
1	\$ 120.000	10.000
2	\$ 145.000	12.000
3	\$ 170.000	13.500
4	\$ 180.000	15.000
5	\$ 200.000	15.500

Outras informações:

- preço de venda = \$ 6/unidade
- custo operacional = \$ 0,8/unidade
- vida útil da planta = 5 anos
- custo do capital = 10% a.a.

• Cálculos do VPL incremental:

(em \$ 1.000)

Escala (i)	Investimento	Produção	Fluxo de caixa (a)	Fluxo de caixa incremental (b)	Investimento incremental (c)	VPL incremental (d)
1	\$ 120.000	10.000	52.000			
2	145.000	12.000	62.400	10.400	25.000	14.424
3	170.000	13.500	70.200	7.800	25.000	4.568
4	180.000	15.000	78.000	7.800	10.000	19.568
5	200.000	15.500	80.600	2.600	20.000	-10.144

(a) Produção $i \times (\$6 - \$0,8)$; (b) Fluxo de caixa $i - \text{Fluxo de caixa } i-1$; (c) Investimento $i - \text{Investimento } i-1$

(d) Fluxo de caixa incremental $i \times \left(\frac{(1,10)^5 - 1}{(1,10)^5 \times 0,10} \right) - \text{Investimento incremental } i$

A escala ótima é a escala 4, pois o investimento inicial de \$ 120.000 apresenta o maior VPL incremental. Cabe ressaltar que alternativamente poderia também ser aplicado o método de Anuidade Uniforme Equivalente (AE), que nos levaria à mesma conclusão.

Exemplo 10.17

Uma empresa de energia elétrica planeja a construção de uma linha de transmissão. A informação levantada pela gerência de obras é mostrada no quadro a seguir:

(em \$ 1.000)

Voltagem (Kw)	Investimento (US\$/Km)	Custos de manutenção US\$/ano/Km	Perdas de energia US\$/ano/Km
54	8.400	300	3.000
110	10.200	300	2.125
220	12.000	300	1.785
500	18.000	300	1.410

A vida econômica de linhas de alta tensão é de 25 anos. Considerando um custo de capital de 20% a.a., determinar a linha mais adequada.

- Cálculo do CAE para cada alternativa

(em \$ 1.000)

Voltagem (i)	Investimento	Custos de manutenção + perdas	CAE (a)
54	8.400	3.300	4.988
110	10.200	2.425	4.487
220	12.000	2.085	4.510
500	18.000	1.710	5.348

$$(a) (\text{Custos manutenção} + \text{perdas})_i + \left[\frac{\text{investimento}}{\left(\frac{(1,20)^{25} - 1}{(1,20)^{25} \times 0,20} \right)} \right]$$

A escala ótima é 110 Kw, pois tem o menor CAE.

Exemplo 10.18

O preço atual de um equipamento é de \$ 7.500. O equipamento tem cinco anos de vida útil e gera uma receita operacional de \$ 2.000 por ano. O equipamento pode ser usado até o término da vida útil ou substituído antes desse prazo por um novo equipamento idêntico e de mesmo valor. O quadro a seguir mostra os fluxos de caixa operacionais e os valores de revenda nos respectivos anos para equipamentos com diversos tempos de uso:

	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
Fluxo de caixa operacional	\$ 2.000	\$ 2.000	\$ 2.000	\$ 2.000	\$ 2.000
Valor de revenda	\$ 6.200	\$ 5.200	\$ 4.000	\$ 2.200	\$ 0

Considerando um custo do capital de 10% a.a., determinar o tempo ótimo para substituir o equipamento.

Dado que o equipamento pode funcionar um, dois, três, quatro ou cinco anos, de fato existem cinco alternativas mutuamente exclusivas de diferentes durações. Logo, devemos escolher a alternativa que tenha a maior anuidade uniforme. A análise pode ser resumida no seguinte quadro:

substituição ao término do ano:

Ano (n)	Fluxo	Fator $(1,10)^{-n}$	1	2	3	4	5
1	2.000	0,90909	1.818	1.818	1.818	1.818	1.818
2	2.000	0,82645		1.653	1.652	1.652	1.652
3	2.000	0,75132			1.503	1.502	1.502
4	2.000	0,68301				1.366	1.366
5	2.000	0,62092					1.242
Valor presente do fluxo			1.818	3.471	4.974	6.340	7.582
Valor presente da revenda			5.636	4.298	3.004	1.503	0
Valor presente total			7.454	7.769	7.978	7.843	7.580
- Investimento			-7.500	-7.500	-7.500	-7.500	-7.500
Valor presente líquido			-46	269	478	343	80
Anuidade equivalente (AE)			-50,6	155	192,2	108,2	21,60

O quadro é auto-explicativo, entretanto, como ilustração, podemos calcular a anuidade uniforme considerando uma substituição do equipamento ao término do segundo ano:

$$VPL = \frac{\$2.000}{(1,10)} + \frac{\$2.000}{(1,10)^2} + \frac{\$5.200}{(1,10)^2} - \$7.500$$

$$= \$1.818 + \$1.653 + \$4.298 - \$7.500 = \$269 \text{ e } AE = \frac{VPL}{a_{2|10\%}} = \frac{\$269}{1,73554} = \$155$$

Ao fim do terceiro ano:

$$VPL = \frac{\$2.000}{(1,10)} + \frac{\$2.000}{(1,10)^2} + \frac{\$2.000}{(1,10)^3} + \frac{\$4.000}{(1,10)^3} - \$7.500$$

$$= \$1.818 + \$1.653 + \$1.503 + \$3.004 - \$7.500 = 478 \text{ e } AE = \frac{VPL}{a_{3|10\%}} = \frac{\$478}{2,48685} = \$192,2$$

A anuidade uniforme é maximizada substituindo o equipamento ao fim do terceiro ano. A análise de substituição de equipamentos é um problema clássico da engenharia econômica.

10.4 Ranking e seleção de projetos – racionamento de capital

A hierarquização de um conjunto de alternativas de investimento pode ser tratada sob duas situações. A primeira refere-se ao caso em que não há restrição de capital no financiamento da carteira de projetos e a segunda ao caso em que existe restrição na disponibilidade de capitais. No caso da não-existência de restrição de capital, os projetos devem ser hierarquizados pelo VPL, enquanto que, quando há restrição de capital ou financiamento limitado, não é possível somente usar o VPL, mas alguma medida que incorpore o volume de investimento realizado. Nessa situação, os projetos devem ser ordenados de acordo com o *índice de rentabilidade*, pois o que interessa é maximizar a rentabilidade por cada dólar investido, dadas as restrições de capital existentes. Uma forma de calcular esse índice é dividindo o VPL pelo investimento inicial. Uma outra forma é dividindo o valor presente dos fluxos de caixa líquidos (excluído o investimento inicial) pelo investimento inicial. A regra de decisão será pré-selecionar todos os projetos com VPL positivo e, a seguir, escolher os de maior *índice de rentabilidade*. Essa regra é válida somente para projetos independentes, pois se os projetos forem mutuamente exclusivos, é necessária a aplicação de métodos específicos de análise (veja a Seção 10.2.4.1).

Exemplo 10.19

Uma empresa tem um custo do capital de 8% e possui as seguintes alternativas de investimento candidatas a integrar a sua carteira de projetos:

Projetos		Fluxos de caixa			
A	-\$ 5.000	\$ 580	\$ 1.600	\$ 2.000	\$ 3.000
B	-\$ 10.000	\$ 3.000	\$ 4.000	\$ 6.000	
C	-\$ 10.000	\$ 4.000	\$ 4.000	\$ 4.000	\$ 4.000
D	-\$ 12.000	\$ 5.000	\$ 5.000	\$ 5.000	
E	-\$ 8.000	\$ 6.000	\$ 6.000		
F	-\$ 5.000	\$ 1.000	\$ 4.500		
G	-\$ 6.000	\$ 2.000	\$ 2.000	\$ 3.000	\$ 3.000

- a) Quais projetos serão selecionados se não houver restrição de capital?
- b) Quais projetos serão selecionados se o capital disponível for de somente \$ 24.000?

No quadro a seguir os projetos são ordenados pelo VPL e pelo seu *índice de rentabilidade*:

Projetos	VPL	Investimento	Projetos	Índice de rentabilidade	Investimento acumulado
C	\$ 3.249	\$ 10.000	G	36%	\$ 6.000
E	\$ 2.700	\$ 8.000	E	34%	\$ 14.000
G	\$ 2.153	\$ 6.000	C	32%	\$ 24.000
B	\$ 970	\$ 10.000	A	14%	
D	\$ 885	\$ 12.000	B	10%	
A	\$ 702	\$ 5.000	D	7%	
F	-\$ 216	\$ 5.000	F	-4%	

- a) Sem restrição de capital, somente o projeto F deve ser rejeitado por ter um $VPL < 0$. Todos os outros projetos seriam passíveis de aceitação.
- b) Existindo restrição de capital, os projetos devem ser selecionados de acordo com o *índice de rentabilidade*. Assim, todos os projetos com *índice de rentabilidade* superior ao custo do capital (8%) podem ser aceitos. Contudo, dado que o financiamento está limitado a \$ 24.000, somente serão aceitos os projetos G, E e C. O *índice de rentabilidade* foi calculado dividindo-se o VPL pelo investimento inicial e o resultado multiplicado por 100.

10.5 Leasing

Leasing é uma figura jurídica que baseia-se na locação. Leasing é uma palavra de origem inglesa derivada do verbo *to lease*, que significa alugar. Na legislação brasileira, o Leasing Financeiro chama-se de arrendamento mercantil, que consiste em uma operação contratual de arrendamento em que o possuidor de determinado bem (arrendador) concede a outro (arrendatário) o uso deste bem durante um período preestabelecido, recebendo em troca uma remuneração periódica (contraprestação) que é constituída pela amortização do valor do bem, encargos, remuneração da arrendadora e impostos. Ao fim do contrato, o arrendatário pode optar por devolver o bem, renovar o contrato de arrendamento ou, ainda, exercer a opção de compra do bem pagando um valor previamente estipulado (Valor Residual Garantido – VRG).

10.5.1 Principais características do leasing

O leasing no Brasil, formalmente, é um misto de locação e de uma potencial operação de compra e venda ao fim do contrato. Essa estrutura está consubstanciada nas Leis nº 6.099/74 e nº 7.132/83 e na Resolução 980/84, em que estão caracterizados os seguintes aspectos e características da operação:

- a) O cliente (arrendatário) é o usuário do bem ao longo do prazo do contrato, detendo, para tal, sua posse, sem deter sua propriedade. A posse e o uso do bem obrigam o arrendatário a fazer pagamentos periódicos (contraprestações) por um prazo determinado que, com algumas exceções

(por exemplo, veículos), gira em torno de 70% da vida útil do bem. O arrendador detém a propriedade legal do bem.

- b)** O arrendador operacional é provedor do bem e deve suprir valores adicionados (serviços, manutenção etc.) como parte dos contratos de arrendamento, os quais, naturalmente, já embutem estas considerações. O arrendatário, por sua vez, ajusta os contratos de acordo com as suas necessidades e possibilidades, de maneira que estes, muitas vezes, acabam assumindo características extremamente complexas, envolvendo arranjos financeiros específicos (desde que de acordo com as determinações legais).
- c)** O cliente, ao fim do contrato pode optar pela compra do bem por um valor contratual previamente estabelecido com a empresa de leasing (valor residual ou opção de compra), passando, a partir daí, a ser o proprietário do bem. Algumas vezes, o valor residual é pago ao longo do prazo do contrato embutido nas contraprestações, outras no início do prazo como uma entrada ou ao término do contrato.
- d)** As contraprestações periódicas pagas pela arrendatária não são meros aluguéis, pois incluem juros e amortização do principal. Esses pagamentos podem ser deduzidos integralmente para efeitos fiscais e essa vantagem pode tornar-se um fator ponderável no processo decisório⁵? Outro fator preponderante a favor do leasing é decorrente do fato de esse tipo de operação não estar sujeita a IOF, que onera outros tipos de financiamentos.
- e)** O leasing é um financiamento que oferece um meio flexível de dispor de um equipamento — arrendando-o em vez de comprá-lo. Esta operação é realizada por sociedades especializadas (no Brasil, apenas instituições financeiras estão autorizadas a fazer leasing) que compram o bem, seguindo as especificações do usuário, arrendando-o a seguir. Qualquer tipo de bem utilizado na atividade econômica das empresas, seja novo ou usado, pode ser objeto de operações de arrendamento mercantil. Os bens importados, desde que tenham o seu ingresso permitido pela legislação vigente para importação, também podem ser arrendados.
- f)** O leasing caracteriza-se por ser uma operação com o propósito de substituir investimentos em ativo imobilizado, seja em função de insuficiência de recursos, seja em virtude do interesse da arrendatária em manter como capital de giro recursos que seriam destinados a imobilizações fixas.
- g)** É permitido para todas as pessoas jurídicas firmar contratos de leasing, observando que a arrendadora e a arrendatária não sejam empresas coligadas ou interdependentes, ou que a arrendatária não seja o fabricante do próprio bem arrendado (nestes casos, a saída que diversas empresas adotaram para alavancar suas vendas foi criar subsidiárias, uma vez que só instituições financeiras podem fazer leasing). Também foi regulamentada lei que autoriza pessoas físicas a firmar contratos de arrendamento, o que tem ocorrido principalmente com os bancos de varejo.

10.5.2 Leasing operacional

O leasing operacional consiste no contrato pelo qual uma das partes (arrendadora) se obriga a proporcionar à outra (arrendatária) o uso temporário de determinado bem e a mantê-lo em perfeito estado de funcionamento, por um período menor do que sua vida economicamente útil.

⁵ Para uma análise mais exaustiva do leasing e de seu processo de avaliação, veja SAMANEZ, Carlos P. *Leasing: Análise e Avaliação*. São Paulo: Atlas, 1990.

Este processo ocorre mediante o pagamento de contraprestações, na qual sua soma, em geral, é inferior ao total que seria necessário para uma completa amortização do preço do bem alocado. De fato, o leasing operacional aproxima-se bastante de uma operação comum de aluguel (guardadas as devidas diferenças contábeis e jurídicas) com uma opção de compra ao fim do contrato. Geralmente, envolve a locação de objetos móveis, sendo comumente realizado quando estão envolvidos equipamentos de alta tecnologia, como equipamentos de telefonia, computadores, aviões, dentre outros. Este tipo de contrato é, em geral, utilizado por pessoas jurídicas especializadas em determinado tipo de equipamento, podendo, igualmente, coincidir de a arrendadora ser o próprio fabricante do bem.

A duração deste tipo de contrato, geralmente, é pequena e o contrato pode ser rescindido pela arrendatária mediante prévia comunicação, sem que para isso ela tenha de incorrer em encargos de cancelamento, ao contrário do que ocorre no leasing financeiro. O leasing operacional traduz-se em uma opção bastante interessante, pois o bem adquirido neste tipo de contrato não é propriedade da empresa arrendatária, e, apesar de não constar em seu ativo, também não é uma obrigação que cause impacto no seu passivo, de forma que a única despesa tributável declarada é aquela com o *aluguel* do bem, impactando unicamente o resultado. Dessa maneira, o ativo da empresa permanece inalterado e os ganhos advindos das atividades ligadas ao aluguel do equipamento elevam seus lucros, mantendo inalterados os índices de solidez e liquidez da empresa e fazendo-a parecer menos endividada e mais rentável.

Segundo a legislação brasileira, são duas as exigências que devem ser observadas para que um leasing seja considerado operacional:

1. A opção de compra não pode ser determinada no contrato; deve ser determinada no final da operação e ser equivalente ao valor de mercado do bem.
2. O somatório das prestações pagas deve ser inferior a 75% do valor da opção de compra.

Essas duas exigências dificultam a atividade do leasing operacional no Brasil, uma vez que o mercado de usados é pouco significativo e produtos usados geralmente têm muito pouco valor. Desse modo, é difícil tanto prever valores para os bens no futuro (a fim de o arrendador estabelecer um fluxo de pagamentos que lhe traga retorno financeiro) quanto estabelecer valores para o bem usado ao fim do leasing, caso a arrendatária resolva ficar com os bens.

10.5.2.1 Avaliação do leasing operacional

O seguinte exemplo ilustra o procedimento para se calcular a prestação mínima (de equilíbrio financeiro) a ser cobrada da arrendatária em uma operação de leasing operacional.

Exemplo 10.20

A empresa Telecom S.A. (arrendatária) pretende arrendar operacionalmente do fabricante (arrendador) um equipamento de telefonia digital. Calcular o valor mínimo da prestação anual a ser cobrada da arrendatária.

Dados da operação:

O quadro a seguir mostra os fluxos de caixa relevantes à análise da operação do ponto de vista do arrendador:

Item	Fluxo de caixa (\$)				
	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Custo inicial	-20.000				
Gastos gerais		-2.000	-2.000	-2.000	-2.000
Efeitos fiscais					
• dos gastos gerais (a)		600	600	600	600
• da depreciação do equipamento (b)		1.500	1.500	1.500	1.500
Fluxo de caixa incremental líquido	-20.000	100	100	100	100

No quadro observam-se dois itens (a) e (b) relativos aos efeitos fiscais. Vejamos o significado:

a) A operação de leasing operacional proporciona vantagens fiscais ao arrendador, uma vez que este pode deduzir como despesa os gastos gerais de manutenção, administrativos, seguros etc., incorridos no arrendamento do bem. O benefício fiscal será igual ao valor da despesa vezes a alíquota de IR ($\$ 2.000 \times 0,30 = \$ 600$).

b) Como proprietário do equipamento, o arrendador ganha o benefício fiscal da depreciação, que será igual à alíquota de imposto de renda vezes o valor da quota de depreciação anual $\left(0,30 \times \frac{\$20.000}{4} = \$1.500\right)$.

- Cálculo do VPL

Para calcular o VPL realizado pelo arrendador, usa-se como fator de desconto seu custo de oportunidade do capital, no caso 7%:

$$\begin{aligned} VPL(7\%) &= \$20.000 - \frac{\$100}{1,07} - \frac{\$100}{(1,07)^2} - \frac{\$100}{(1,07)^3} - \frac{\$100}{(1,07)^4} \\ &= \$20.000 - \$100 \times a_{\overline{4}|7\%} \\ &= \$20.000 - \$100 \times 3,38721 = \$19.661,28 \end{aligned}$$

- Cálculo da prestação mínima

A prestação mínima a ser cobrada da arrendatária (Telecom S.A.) será igual a uma anuidade equivalente (AE) calculada sobre o VPL do arrendador:

$$AE = \frac{VPL}{a_{\bar{4}|7\%}} = \frac{\$19.661,28}{3,38721} = \$5.804,56$$

O valor da anuidade equivalente ou prestação permite ao arrendador auferir uma rentabilidade compatível com seu custo de oportunidade do capital. Como essa prestação representa uma receita operacional na contabilidade do arrendador, sobre a qual deverá pagar impostos, a prestação mínima líquida a ser cobrada da arrendatária é:

$$\text{prestação mínima} = \frac{AE}{(1-T)} = \frac{\$5.804,56}{(1-0,30)} = \$8.292,23$$

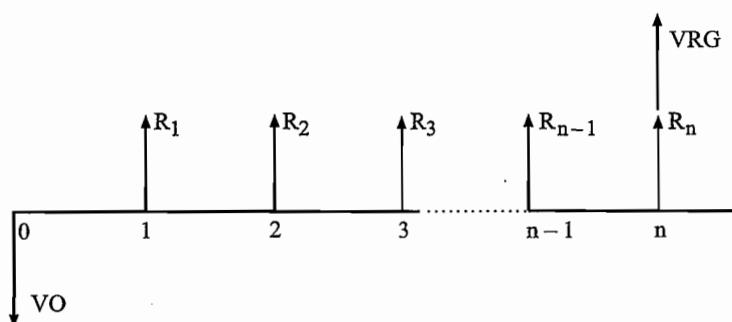
onde T é a alíquota de imposto do arrendador. Logo, podemos concluir que, considerando unicamente os aspectos financeiros da operação, a prestação de equilíbrio financeiro é de \$8.292,23.

10.5.3 Leasing financeiro

O leasing financeiro é mais assemelhado a um financiamento, diferindo, assim, radicalmente do leasing operacional (é, entretanto, importante destacar que existe uma grande diferença em termos contábil e jurídico). O leasing financeiro é mais seguro do ponto de vista da arrendadora, sendo por isso mais utilizado. A operação com opção de compra preestabelecida permite à arrendadora cobrar a maior parte do custo do bem da arrendatária durante o período do contrato. O arrendamento de frotas de veículos pode ser uma exceção à regra, porém, na maioria dos casos, a arrendadora evita preocupar-se com a venda do veículo (ou qualquer outro bem) usado, oferecendo-o vantajosamente à arrendatária. Ainda que seja ativo de venda fácil, a arrendadora não incorre em prejuízo, porque as amortizações e os juros já foram recuperados no contrato inicial.

10.5.3.1 Determinação da taxa de arrendamento

A estrutura da operação de leasing financeiro com prestações postecipadas e desembolso final do Valor Residual Garantido (VRG) é apresentada a seguir:



onde: VO = valor da operação

R_t = valor da prestação do período t

VRG = valor residual garantido (% sobre VO)

n = prazo da operação

Sendo i_A a taxa de juros efetiva aplicada no arrendamento, tem-se:

$$VO = \frac{R_1}{1+i_A} + \frac{R_2}{(1+i_A)^2} + \dots + \frac{R_{n-1}}{(1+i_A)^{n-1}} + \frac{R_n}{(1+i_A)^n} + \frac{VRG}{(1+i_A)^n}$$

Considerando prestações constantes ($R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$), o valor da operação é:

$$VO = R \times a_{n|i_A \% } + \frac{VRG}{(1+i_A)^n}$$

onde $a_{n|i_A \% }$ é o fator de valor presente de séries uniformes: $a_{n|i_A \% } = \left[\frac{(1+i_A)^n - 1}{(1+i_A)^n \times i_A} \right]$

Também: $VO = (VO - VRG) + VRG$

Ou seja, VO é a soma de duas parcelas: $(VO - VRG)$ que representa o montante a ser amortizado durante o prazo da operação e o VRG que será amortizado somente no final. Logo, podemos igualar as duas últimas equações de modo que obtenhamos uma equação para o cálculo da prestação (chamada contraprestação no Leasing):

$$R \times a_{n|i_A \% } + \frac{VRG}{(1+i_A)^n} = (VO - VRG) + VRG \Rightarrow R = \frac{(VO - VRG)}{a_{n|i_A \% }} + i_A \times VRG$$

Dividindo a expressão anterior pelo valor da operação resulta na taxa de arrendamento unitária. Logo, a taxa de arrendamento (TA) unitária e o valor da prestação (R) para operações com prestações postecipadas são:

$$\begin{aligned} TA &= \frac{(VO - VRG)}{a_{n|i_A \% }} \times \left(\frac{1}{VO} \right) + i_A \times VRG \times \left(\frac{1}{VO} \right) \\ &= \frac{(1 - vrg)}{a_{n|i_A \% }} + i_A \times vrg \quad \text{e} \quad R = VO \times TA \end{aligned}$$

onde: $vrg = VRG/VO$

O uso da equação anterior exige colocar o VRG como fração do valor da operação. Por praticidade, podemos colocar o VRG em termos de porcentagem de modo que obtenhamos uma taxa de arrendamento em porcentagem:

$$TA = \frac{(100 - VRG)}{a_{n|i_A} \%} + i_A \times VRG$$

$$R = VO \times \frac{TA}{100}$$

Se o valor residual for cobrado de forma embutida nas prestações ao longo do prazo e as prestações forem postecipadas, a taxa de arrendamento será:

$$TA = \frac{100}{a_{n|i_A} \%}$$

Se o valor residual for cobrado no início da operação, na forma de entrada, e as prestações forem postecipadas, a taxa de arrendamento será:

$$TA = \frac{100 - VRG}{a_{n|i_A} \%}$$

Se for concedido um período de carência de c meses para o início dos pagamentos das prestações, a taxa de arrendamento será dada por:

$$TA_c = \frac{100 \times (1+i_A)^c - VRG}{a_{n-c|i_A} \%} + i_A \times VRG$$

Se o valor residual for cobrado no início da operação, na forma de entrada, e houver uma carência de c meses para início das prestações, a taxa de arrendamento será:

$$TA_c = \frac{100 \times (1+i_A)^c - VRG}{a_{n-c|i_A} \%}$$

Em qualquer uma das modalidades de pagamento do valor residual, para operações com pagamentos antecipados das prestações, a taxa de arrendamento é a seguinte:

$$TA_a = \frac{TA}{(1+i_A)}$$

10.5.3.2 Crédito direto ao consumidor e leasing

Como o leasing financeiro é uma alternativa mutuamente exclusiva em relação à compra do equipamento, pois a aceitação de uma das alternativas exclui a possibilidade de aceitar a outra, na avaliação do leasing para clientes pessoa física, em que não é possível o aproveitamento fiscal da despesa mensal do arrendamento, a comparação mais adequada é com a compra do bem por meio do Crédito Direto ao Consumidor (CDC).

CDC é o financiamento concedido por uma financeira para aquisição de bens e serviços. Sua maior utilização é normalmente para a aquisição de veículos e eletrodomésticos. O bem assim adquirido, sempre que possível, serve como garantia da operação, ficando a ela vinculado pela figura jurídica da alienação fiduciária, pela qual o cliente transfere à financeira a propriedade do bem adquirido com o dinheiro emprestado até o pagamento total de sua dívida. As taxas são prefixadas para operações acima de 30 dias, vinculadas à TR no caso de operações acima de quatro meses, não podendo ser vinculadas à variação cambial. Os recursos (*funding*) das operações de CDC eram, até 1988, as letras de câmbio colocadas no mercado pela financeira e resgatáveis nos seus respectivos vencimentos. Com a criação dos bancos múltiplos, o *funding* dessas operações passou a ser feito também com os CDBs da carteira comercial e os CDIs.

Exemplo 10.21

Calcular a taxa de arrendamento e o valor das prestações (contraprestações) para uma operação de leasing financeiro no valor de \$ 100.000, com prazo de 36 meses e taxa de juros de 8% a.m. aplicada pela Sociedade Arrendadora, nas seguintes hipóteses sobre o valor residual: a) valor residual de 20% cobrado ao término da operação; b) valor residual cobrado ao longo do prazo da operação; c) valor residual cobrado no início da operação na forma de entrada.

Dados: VO = \$ 100.000, VRG = 20%, n = 36 meses, $i_A = 8\%$, TA = ?, R = ?

a) Valor residual garantido (VRG) cobrado ao fim da operação:

$$\begin{aligned} TA &= \frac{(100 - VRG)}{a_{n|i_A} \%} + i_A \times VRG = \frac{(100 - 20)}{a_{36|8}\%} + 0,08 \times 20 & R = VO \times TA = \$100.000 \times \frac{8,43}{100} = \$8.430 \\ &= \frac{80}{\left[\frac{(1,08)^{36} - 1}{(1,08)^{36} \times 0,08} \right]} + 0,08 \times 20 = 8,43\% \end{aligned}$$

b) Valor residual garantido (VRG) cobrado ao longo do prazo da operação:

$$\begin{aligned} TA &= \frac{100}{a_{n|i_A} \%} = \frac{100}{a_{36|8}\%} & R = VO \times TA = \$100.000 \times \frac{8,54}{100} = \$8.540 \\ &= \frac{100}{\left[\frac{(1,08)^{36} - 1}{(1,08)^{36} \times 0,08} \right]} = 8,54\% \end{aligned}$$

c) Valor residual garantido (VRG) cobrado no início da operação na forma de entrada:

$$\begin{aligned} TA &= \frac{(100 - VRG)}{a_{n|i_A} \%} = \frac{(100 - 20)}{a_{36|8\%}} \\ &= \frac{80}{\left[\frac{(1,08)^{36} - 1}{(1,08)^{36} \times 0,08} \right]} = 6,8276\% \end{aligned} \quad R = VO \times TA = \$100.000 \times \frac{6,8276}{100} = \$6.827,58$$

Cálculo da taxa de arrendamento na calculadora HP-12C para os 3 casos:

a)	b)	c)
(f) (FIN)	(f) (FIN)	(f) (FIN)
100 (CHS) (PV)	100 (CHS) (PV)	80 (CHS) (PV)
8 (i)	8 (i)	8 (i)
36 (n)	36 (n)	36 (n)
20 (FV)	(PMT) → 8,5345%	(PMT) → 6,8276%
(PMT) → 8,4276%		

Exemplo 10.22

No exemplo anterior, no caso de o valor residual ser pago ao término do prazo, determinar o valor das primeiras quatro prestações (contraprestações) com atualização monetária pós-fixada, supondo que sejam indexadas pelo IGPM/FGV. Considerar uma variação constante de 14% a.m. para o índice.

- Valor da prestação sem reajuste

$$R = VO \times TA = \$100.000 \times 8,43/100 = \$8.430$$

- Valor das prestações reajustadas pelo IGPM

$$R_1 = \$8.430 \times (1,14) = \$9.610,20$$

$$R_2 = \$8.430 \times (1,14)^2 = \$10.955,63$$

$$R_3 = \$8.430 \times (1,14)^3 = \$12.489,42$$

$$R_4 = \$8.430 \times (1,14)^4 = \$14.237,93$$

Exemplo 10.23

Determinar o valor da prestação para uma operação de leasing financeiro no valor de US\$ 130.000, com prazo de 36 meses, um período de carência de três meses para início do pagamento das prestações e um valor residual garantido de 1% cobrado ao término da operação. Considerar uma taxa de juros aplicada pela instituição financeira de 2% a.m.

Dados: $VO = \text{US\$ } 130.000$, $n = 36$ meses, $c = 3$ meses (carência), $VRG = 1\%$, $i_A = 2\%$ a.m., $TA_c = ?$, $R = ?$

- Taxa de arrendamento e prestação considerando período de carência

$$\begin{aligned}
 TA_c &= \frac{\left[100 \times (1+i_A)^c - VRG \right]}{a_{n-c} i_A \% } + i_A \times VRG \quad R = VO \times TA_c = \$130.000 \times \frac{4,4021\%}{100} = \$5.720 \\
 &= \frac{\left[100 \times (1,02)^3 - 1 \right]}{a_{33} 2\% } + 0,02 \times 1 \\
 &= \frac{105,12}{\left[\frac{(1,02)^{33} - 1}{(1,02)^{33} \times 0,02} \right]} + 0,02 = 4,4021\%
 \end{aligned}$$

Exemplo 10.24

Uma pessoa pretende adquirir um veículo cujo valor à vista é de \$16.800. A concessionária oferece um financiamento pelo sistema leasing, pagando-se uma entrada de 8,631% (\$1.450) e 36 prestações mensais fixas. Considerar que a instituição financeira que intermedeia a operação aplica no arrendamento uma taxa de juros de 2,5% a.m. Pede-se: a) calcular a taxa de arrendamento e o valor da prestação mensal; b) determinar se do ponto de vista financeiro a operação é atrativa ou não, considerando que a pessoa tenha capital disponível mesmo para efetuar a compra à vista.

Dados: $VO = \$16.800$, $VRG = 8,631\%$ (como entrada), $n = 36$ meses, $i_A = 2,5\%$ a.m., $TA = ?$, $R = ?$

- a) Taxa de arrendamento e prestação:

$$\begin{aligned}
 TA &= \frac{100 - VRG}{a_{n} i_A \% } = \frac{100 - 8,631}{a_{36} 2,5\% } \quad R = VO \times TA = \$16.800 \times \frac{3,8788}{100} = \$651,64 \\
 &= \frac{91,3690}{\left[\frac{(1,025)^{36} - 1}{(1,025)^{36} \times 0,025} \right]} = 3,8788\% \text{ a.m.}
 \end{aligned}$$

O valor residual é cobrado como entrada no início da operação.

- b) Se a taxa de arrendamento estiver acima da taxa de juros ganha pela pessoa em suas aplicações financeiras, é melhor comprar à vista.

Exemplo 10.25

Uma pessoa pretende comprar um veículo de \$15.000 que pode ser adquirido por meio de leasing ou pelo CDC. Em ambos os casos, paga-se uma entrada de 10% mais 24 prestações mensais. Para o caso do leasing, a taxa de juros aplicada pela instituição financeira é de 4% a.m. e o imposto sobre serviços (ISS) é de 0,5%. Para o caso do CDC, a taxa de juros é de 3% a.m. e paga-se Imposto sobre Operações Financeiras (IOF) de 0,8%. Calcular a taxa de arrendamento paga pelo leasing e o valor das prestações em ambos os tipos de financiamento.

Dados: $VO = \$15.000$, $VRG = 10\%$ (entrada), $n = 24$ meses, $i_A = 3\%$ a.m., $ISS = 0,5\%$; $IOF = 8\%$, $TA = ?$, $R = ?$

- Taxa de arrendamento

$$TA \text{ (sem imposto)} = \frac{100 - VGR}{a_{n|i_A\%}} = \frac{100 - 10\%}{a_{24|3\%}} = \frac{90\%}{\left[\frac{(1,04)^{24} - 1}{(1,04)^{24} \times 0,04} \right]} = \frac{90\%}{15,24696} = 5,9028\%$$

$$TA \text{ (com imposto)} = \frac{5,9028\%}{1 - 0,5/100} = 5,9325\%$$

- Prestação

$$\begin{aligned} \text{No CDC : } R &= \frac{\text{Financiamento efetivo}}{a_{24|3\%}} + IOF \\ &= \left(\frac{\$15.000 - \$1.500}{16,93554} \right) \times 1,008 = \$803,52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{No Leasing : } R &= VO \times TA / 100 \\ &= \$15000 \times 0,059325 \\ &= \$889,87 \end{aligned}$$

Do ponto de vista meramente financeiro, aparentemente o CDC seria a melhor opção, pois representa a menor prestação mensal.

10.5.3.3 Avaliação do leasing financeiro: pessoa jurídica

O leasing financeiro, pela própria peculiaridade de possibilitar diferentes arranjos financeiros, exige análises mais detalhadas de investimento, financiamento e fluxo. Dessa maneira, para comparar o leasing financeiro e outras formas de financiamento, devem-se considerar tantos os efeitos sobre a estrutura de capital da empresa quanto os riscos resultantes da alavancagem financeira, usando-se, obviamente, a mesma base comparativa para todas as alternativas.

O *leasing financeiro* é uma alternativa mutuamente exclusiva em relação à *compra do equipamento*, pois a aceitação de uma delas exclui a possibilidade de aceitar a outra. Contudo, se a aquisição do bem for realizada com recursos próprios, mesmo que parcialmente, a alternativa *compra* exporia a empresa a um risco financeiro menor em relação à alternativa *leasing financeiro*. Assim, de modo que igualemos os riscos financeiros das duas alternativas, a *compra* deve considerar financiamento total do bem para efeitos de poder ser comparada com o *leasing*. Nas operações com clientes pessoa jurídica, é possível o aproveitamento fiscal da despesa mensal do arrendamento com a dedutibilidade na apuração do lucro real. Conseqüentemente, esse fator deve ser levado em conta na avaliação para pessoa jurídica.

Sabe-se que o *leasing financeiro* é uma alternativa mutuamente exclusiva em relação à *compra do ativo*, portanto, a comparação correta das alternativas deve ser com base no fluxo incremental. O quadro a seguir mostra a montagem do fluxo incremental para um prazo de dois períodos:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2
LEASING FINANCEIRO			
prestações pagas no leasing		-R ₁	-R ₂
efeito fiscal das prestações		T × R ₁	T × R ₂
Fluxo Líquido do Leasing (L)		-R ₁ × (1 - T)	-R ₂ × (1 - T)
COMPRA			
compra do equipamento	-VO		
efeito fiscal da depreciação do equipamento		T × D ₁	T × D ₂
Fluxo Líquido da Compra (C)	-VO	T × D ₁	T × D ₂
Fluxo de Caixa Incremental (L - C)	VO	-R ₁ × (1 - T) - T × D ₁	-R ₂ × (1 - T) - T × D ₂

Na alternativa *leasing* a arrendatária paga as prestações (contraprestações) e ganha o benefício fiscal delas. Na alternativa *compra* temos um desembolso inicial (VO) no período 0, que representa o custo do ativo. A partir do primeiro período ganha-se o benefício fiscal da depreciação, pois nesse caso a propriedade do bem é da arrendatária. O fluxo incremental (L - C) é lançado na última linha do quadro. O valor presente do fluxo incremental pode ser expresso por meio do seguinte somatório:

$$V_{L-C} = VO - \sum_{t=1}^L \frac{R_t(1-T) + T \times D_t}{(1+i^*)^t} \quad \text{se} \quad V_{L-C} > 0 \Rightarrow \text{selecionar o leasing}$$

onde:

V_{L-C} = valor presente do fluxo incremental (vantagem financeira do *leasing versus compra*);

VO = valor da operação (valor do ativo arrendado);

R_t = valor da prestação (contraprestação) paga pelo leasing financeiro, em t;

D_t = quota de depreciação do ativo em t;

L = prazo do leasing financeiro;

T = alíquota marginal de IR da arrendatária;

N = prazo de depreciação do ativo;

i = taxa de juros antes de IR para a empresa arrendatária;

i^{*} = i(1 - T) = taxa de juros após IR para a empresa arrendatária;

i_A = taxa de juros cobrada no arrendamento;

t = t-ésimo período.

A fórmula anterior é de aplicação simples e permite avaliar facilmente o leasing financeiro do ponto de vista da arrendatária pessoa jurídica. Basta observar se V_{L-C} é positivo, para

selecionar o leasing como a melhor alternativa ou não. A fórmula é conhecida como modelo de MDB (Myers, Dill e Bautista)⁶. Este supõe que o benefício fiscal dos fluxos seja instantâneo, ou seja, é ganho no próprio período em que o fluxo ocorre. Supõe também que o VRG é cobrado embutido nas prestações ao longo do prazo do contrato. Entretanto, se o VRG for pago no fim da operação ou no início, poderá ser facilmente incluído na fórmula.

A seguir, aplicaremos o modelo de MDB para avaliar a operação de leasing financeiro do nosso último exemplo com os seguintes dados: VO (valor da operação) = \$ 800.000; L (prazo do leasing = 4 anos); N (prazo de depreciação do ativo) = 4 anos; T (alíquota marginal de IR da arrendatária) = 30%; i (taxa de juros antes de IR para a empresa arrendatária) = 10% a.a.; i_A (taxa de juros cobrada no arrendamento) = 10% a.a.; VGR embutido nas prestações:

- Cálculo do numerador do somatório da fórmula

$$\begin{aligned}
 & [R \times (1-T)] + (D \times T) \\
 & [TA \times VO \times (1-T)] + \left(\frac{VO}{N} \times T \right) \\
 & \left[\left(\frac{1}{a_{\text{Li}_A \%}} \right) \times VO \times (1-T) \right] + \left(\frac{VO}{N} \times T \right) \\
 & \left[\left(\frac{1}{a_{4|10\%}} \right) \times \$800.000 \times (1 - 0,30) \right] + \left(\frac{\$800.000}{4} \times 0,3 \right) \\
 & [0,3155 \times \$800.000 \times 0,70] + (\$200.000 \times 0,30) = \$236.663,64
 \end{aligned}$$

taxa de juros após o imposto de renda: $i^* = i(1-T) = 0,10 \times (1 - 0,30) = 0,07 = 7\%$

- Substituição dos valores no modelo de MDB

$$\begin{aligned}
 V_{L-C} &= VO - \sum_{t=1}^{L=4} \frac{R_t(1-T) + T \times D_t}{(1+i^*)^t} \\
 &= \$800.000 - \left[\frac{\$236.663,64}{1,07} + \frac{\$236.663,64}{(1,07)^2} + \frac{\$236.663,64}{(1,07)^3} + \frac{\$236.663,64}{(1,07)^4} \right] \\
 &= -\$1.630 < 0 \quad \text{selecionar o leasing}
 \end{aligned}$$

Dado que no termo entre colchetes o valor do numerador é constante para os diversos anos do prazo da operação, podemos nos utilizar do fator de valor presente de séries uniformes para expressar a fórmula de MDB de um modo mais compacto e de fácil aplicação:

⁶ C.P. Samanez, op. cit.

$$\begin{aligned}
 V_{L-C} &= VO - \left[\frac{VO}{a_{L|i_A}\%} \times (1-T) + \frac{VO}{N} \times T \right] a_{L|i^*\%} \\
 &= \$800.000 - \left[\frac{\$800.000}{a_{4|10\%}} \times (1-0,30) + \frac{\$800.000}{4} \times 0,30 \right] \times a_{4|7\%} \\
 &= \$800.000 - \left[\frac{\$800.000}{3,16987} \times (1-0,30) + \frac{\$800.000}{4} \times 0,30 \right] \times 3,38721 = -\$1.630
 \end{aligned}$$

O V_{L-C} do modelo de MDB é exatamente igual ao VPL do fluxo incremental, mas apresenta a vantagem de não incluir os fluxos decorrentes do financiamento da compra do ativo. O uso direto desse modelo pressupõe auferimento instantâneo dos efeitos fiscais dos fluxos, mas, quando este não é o caso, a taxa de desconto (a taxa de juros após imposto de renda) deve refletir a defasagem existente entre o período em que o fluxo ocorre e o período em que o imposto é pago.

10.5.3.4 Leasing comparado com operações de repasse de recursos internos — Finame

O leasing financeiro é uma alternativa mutuamente exclusiva em relação à compra financiada do equipamento, pois a aceitação de uma delas exclui a possibilidade de aceitar a outra. Nesta seção faremos uma comparação do leasing com a alternativa de financiamento por meio de recursos da Finame (Agência de Financiamento Industrial).

Custo efetivo de operações da Finame

A Finame é uma empresa pública ligada ao Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES). Administra recursos que são repassados por intermédio de instituições financeiras às empresas para financiamento de máquinas e equipamentos industriais. Em geral, as condições de financiamento (Programa Finame Automático) são as seguintes:

- **Custo financeiro:** o custo financeiro básico da Finame é a Taxa de Juros de Longo Prazo (TJLP), que é fixada pelo Banco Central a cada período de três meses. Assim, o custo dos financiamentos da Finame varia trimestralmente, de acordo com a variação da TJLP, que sempre é expressa em valores anuais. Além da TJLP, o custo financeiro inclui um spread (% acima da TJLP) que varia de 3% a 6%, composto de encargos do BNDES e da remuneração do agente financeiro (*del credere*).
- **Prazo:** de 12 a 60 meses, incluída a carência de 3 a 12 meses, salvo o Programa Finame especial, cujo prazo pode ser maior. O prazo de carência vai da assinatura do contrato de financiamento até o pagamento da primeira parcela de amortização do principal. No prazo da carência, são pagos trimestralmente apenas os juros incidentes sobre o saldo devedor (semestralmente no caso do programa agrícola).
- **Financiamento:** de 75% a 90% do valor total do equipamento, já incluído o IPI e o ICMS.
- **Atualização do financiamento:** determinada pela Unidade de Referência (UR) cuja variação trimestral é determinada pela TJLP.

- **Comissão de reserva de capital:** em torno de 0,1% a.m., cobrada proporcionalmente ao prazo decorrido entre a data da reserva do financiamento e a data da liberação dos recursos.
- **Imposto sobre Operações de Crédito (IOC):** em torno de 3% a.a. sobre o valor financiado.
- **Sistema de reembolso:** Sistema de Amortização Constante (SAC) com amortizações mensais (semestrais no caso do programa agrícola) e prestações vencendo no dia 15 de cada mês.

No caso do Programa de Operações Conjuntas (POC), as condições são idênticas, apenas não existe a comissão de reserva de capital, o prazo de carência pode chegar a 24 meses e a participação máxima do investimento varia de 65% a 85%. As condições operacionais referentes aos diferentes programas de financiamento podem mudar, logo é importante consultar o BNDES quando o uso dessa fonte de financiamento é cogitada. O site na Internet é: <http://www.bnDES.gov.br>.

Expostas as condições gerais deste tipo de financiamento, e como ilustração do processo de cálculo do custo efetivo, vejamos o seguinte exemplo de um financiamento da Finame.

Exemplo 10.26

Uma empresa pretende adquirir um equipamento por meio de um financiamento da Finame (Programa Finame Automático) com as seguintes características:

- Valor da operação: \$ 2.000.000 (valor do equipamento acrescido do IPI e do ICMS);
- Financiamento (80% do valor do equipamento): $0,8 \times \$ 2.000.000 = \$ 1.600.000$;
- Juros efetivos (TJLP): 10% a.a. (vigente na data de assinatura do financiamento);
- Spread: 3% a.a. acima da TJLP (encargos BNDES + comissão cobrada pelo agente financeiro);
- Prazo: 12 amortizações mensais com seis meses de carência (durante a carência, o mutuário pagará trimestralmente apenas os juros e o spread). Considere, para simplificar os cálculos, que as prestações são pagas no fim de cada mês;
- Comissão de reserva de capital: 1,0% a.m., cobrada proporcionalmente ao prazo decorrido entre a data da reserva do financiamento e a data da liberação dos recursos (10 dias);
- Imposto sobre Operações de Crédito (IOC): 3% a.a. sobre o valor financiado;
- Sistema de reembolso: SAC com 12 amortizações mensais.

Pede-se: elaborar a planilha de amortização e calcular o custo efetivo do financiamento.

- Valor líquido liberado à empresa

Financiamento	\$ 1.600.000
(-) IOC($3\% \times 1.600.000$)	(\$ 48.000)
(-) Comissão de reserva	(\$ 5.333)
$\left(0,01 \times \frac{10}{30} \text{ dias} \times \$ 1.600.000\right)$	_____
Valor líquido liberado:	\$ 1.546.667

- Planilha de reembolso pelo SAC

(em \$ 1.000)

Mês T	Saldo devedor $SD_t = SD_{t-1} - A_t$	Amortização A_t	Juros $i \times SD_{t-1}$	Prestação $A_t + Juros$	Fluxo de caixa
0	1.600,00				(**)1.546,67
1	1.600,00				0,00
2	1.600,00				0,00
3	1.600,00		(*) 49,64		-49,64
4	1.600,00				0,00
5	1.600,00				0,00
6	1.466,67	133,33	(*) 49,64	182,97	-182,97
7	1.333,33	133,33	15,01	148,35	-148,35
8	1.200,00	133,33	13,65	146,98	-146,98
9	1.066,67	133,33	12,28	145,62	-145,62
10	933,33	133,33	10,92	144,25	-144,25
11	800,00	133,33	9,55	142,89	-142,89
12	666,67	133,33	8,19	141,52	-141,52
13	533,33	133,33	6,82	140,16	-140,16
14	400,00	133,33	5,46	138,79	-138,79
15	266,67	133,33	4,09	137,43	-137,43
16	133,33	133,33	2,73	136,06	-136,06
17	0,00	133,33	1,36	134,70	-134,70

Taxa de juros anual: 10% a.a. (TJLP) + 3% a.a. (Spread) = 13% a.a.

Taxa de juros equivalente ao mês (i): $(1,13)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,0236844\%$ a.m.(**) Juro trimestral: $(1,13)^{\frac{1}{4}} - 1 = 3,1026\%$ a.t. (durante a carência pagam-se trimestralmente os juros devidos)

(**) Representa o valor líquido liberado

$$A_t = \frac{\$1.600}{12} = \$133,33$$

- Custo efetivo do financiamento

O custo efetivo do financiamento será a taxa interna de retorno do fluxo de caixa:

$$\$1.546,67 \dots - \frac{49,64}{(1+TIR)^3} \dots - \frac{\$182,97}{(1+TIR)^6} \dots - \frac{134,70}{(1+TIR)^{17}} = 0$$

$$\Rightarrow TIR = 1,3386\% \text{ a.m. (17,30% a.a.)}$$

Calculadora HP-12C
(f) (REG)
1.546,67 (CHS) (g) (CF_0)
0 (g) (CF_J)
:
134,70 (g) (CF_J)
(f) (IRR) → 1,338627%

Custo efetivo do leasing financeiro

Do ponto de vista do arrendatário, o processo de cálculo do custo efetivo de uma operação de leasing financeiro pode ser ilustrado com o auxílio do seguinte exemplo (veja as Seções 10.5.2 e 10.5.3 para uma avaliação sobre leasing financeiro e operacional).

Exemplo 10.27

Considerando os dados do exemplo anterior, suponha que a empresa, além do financiamento da Finame, esteja estudando uma proposta para financiar o equipamento por meio de uma operação de leasing financeiro com as seguintes características:

- VO: \$ 2.000.000;
- Prazo do contrato de arrendamento (L): 24 meses (*geralmente* uma operação é considerada de *arrendamento mercantil* quando seu prazo é de no mínimo 70% da vida útil do bem);
- Taxa de juros da operação: IGPM/FGV + 13,5% a.a.;
- ISS: 2% sobre as contraprestações previamente acrescidas dos encargos;
- VRG: 40% sobre o valor da operação, com pagamento parcelado embutido nas contraprestações;
- Alíquota de imposto de renda da arrendatária (T): 15%;
- Contraprestações pelo SAC com 24 amortizações mensais.

a) Taxa de juros mensal efetiva:

$$i = \left(1 + i\right)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1,135)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 1,06\% \text{ a.m.}$$

b) Custo efetivo aparente:

$$\$ 2.000 - \frac{\$ 104,69}{1 + \text{TIR}} - \frac{\$ 120,68}{(1 + \text{TIR})^2} - \frac{\$ 139,89}{(1 + \text{TIR})^3} - \dots - \frac{\$ 3.080,41}{(1 + \text{TIR})^{24}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TIR} \approx 16,82\% \text{ a.m.}$$

Calculadora HP-12C:

(f) (REG)	2.000 (CHS) (g) (CF ₀)
104,69 (g) (CF _J)	120,68 (g) (CF _J)
139,89 (g) (CF _J)	⋮
⋮	3.080,41 (g) (CF _J)
(f) (IRR) → 16,82%	

O custo efetivo aparente do leasing é a TIR do fluxo de caixa da operação (veja a planilha do leasing).

c) Custo real médio

Se supusermos que o IGPM reflete a inflação do período, temos:

$$(1+i^*)^{24} = (1+i_r)^{24} \times (\text{inflator}) \Rightarrow i_r = \left[\frac{(1,1682)^{24}}{38,31625} \right]^{1/24} - 1 \approx 0,36\% \text{ a.m.} \quad (4,41\% \text{ a.a.})$$

em \$ 1.000)

Planilha do Leasing Financeiro											
Mês	Saldo devedor	Amortização	Juros	Contra-prestação	Valor faturado	Valor residual garantido (incluído o ISS)	Contra-prestação antes de IR	Contra-prestação líquida	Variação do IGPM	Inflator	Fluxo de caixa
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0	2.000,00									1.00000	2000,00
1	1.950,00	50,00	21,20	71,20	73,10	34,00	107,10	91,03	15,00%	1,15000	(104,69)
2	1.900,00	50,00	20,67	70,67	72,55	34,00	106,55	90,57	15,87%	1,33251	(120,68)
3	1.850,00	50,00	20,14	70,14	72,01	34,00	106,01	90,11	16,51%	1,55250	(139,89)
4	1.800,00	50,00	19,61	69,61	71,46	34,00	105,46	89,64	17,07%	1,81751	(162,93)
5	1.750,00	50,00	19,08	69,08	70,92	34,00	104,92	89,18	16,09%	2,10995	(188,17)
6	1.700,00	50,00	18,55	68,55	70,38	34,00	104,38	88,72	17,89%	2,48742	(220,68)
7	1.650,00	50,00	18,02	68,02	69,83	34,00	103,83	88,26	17,99%	2,93491	(259,03)
8	1.600,00	50,00	17,49	67,49	69,29	34,00	103,29	87,79	17,89%	3,45996	(303,76)
9	1.550,00	50,00	16,96	66,96	68,74	34,00	102,74	87,33	17,99%	4,08241	(356,52)
10	1.500,00	50,00	16,43	66,43	68,20	34,00	102,20	86,87	16,96%	4,77479	(414,78)
11	1.450,00	50,00	15,90	65,90	67,65	34,00	101,65	86,41	16,54%	5,56454	(480,81)
12	1.400,00	50,00	15,37	65,37	67,11	34,00	101,11	85,94	16,00%	6,45487	(554,76)
13	1.350,00	50,00	14,84	64,84	66,57	34,00	100,57	85,48	16,00%	7,48764	(640,06)
14	1.300,00	50,00	14,31	64,31	66,02	34,00	100,02	85,02	16,00%	8,68567	(738,45)
15	1.250,00	50,00	13,78	63,78	65,48	34,00	99,48	84,56	16,00%	10,07537	(851,94)
16	1.200,00	50,00	13,25	63,25	64,93	34,00	98,93	84,09	16,00%	11,68743	(982,85)
17	1.150,00	50,00	12,72	62,72	64,39	34,00	98,39	83,63	16,00%	13,55742	(1.133,83)
18	1.100,00	50,00	12,19	62,19	63,85	34,00	97,85	83,17	16,00%	15,72661	(1.307,97)
19	1.050,00	50,00	11,66	61,66	63,30	34,00	97,30	82,71	16,00%	18,24287	(1.508,81)
20	1.000,00	50,00	11,13	61,13	62,76	34,00	96,76	82,24	16,00%	21,16173	(1.740,43)
21	950,00	50,00	10,60	60,60	62,21	34,00	96,21	81,78	16,00%	24,54760	(2.007,54)
22	900,00	50,00	10,07	60,07	61,67	34,00	95,67	81,32	16,00%	28,47522	(2.315,58)
23	850,00	50,00	9,54	59,54	61,13	34,00	95,13	80,86	16,00%	33,03125	(2.670,80)
24	800,00	50,00	9,01	59,01	60,58	34,00	94,58	80,39	16,00%	38,31625	(3.080,41)

$$L = 24 \text{ meses} \quad ISS = 2\% \quad i = 1,06\% \text{ a.m.}$$

$$\text{VRG} = 40\% \quad \text{VO} = \$ 2.000$$

$$T = 15\% \quad \text{Encargos} = 0,65\%$$

$$(1) SD_t = SD_{t-1} - A; \quad (2) A = \frac{VO - VRG}{L}; \quad (3) J_t = i \times SD_{t-1}; \quad (4) (2) + (3); \quad (5) (4) \times 1,0065 \times 1,02;$$

$$(6) VRG = 0,4 \times (VO + L) \times 1,02; \quad (7) (5) + (6); \quad (8) (1 - T) \times (7); \quad (11) (8) \times (10)$$

10.6 Exercícios propostos

Calcular a TIR dos seguintes fluxos de caixa:

1.		2.		3.		4.	
Ano	Fluxo de caixa						
0	-\$ 100	0	\$ 100	0	\$ 400	0	-\$ 200
1	\$ 700	1	-\$ 200	1	\$ 400	1	-\$ 200
2	-\$ 1.200	2	\$ 150	2	-\$ 1.000	2	-\$ 600

- Calcular a TIR de um projeto que requer um investimento inicial de \$ 2.000.000 e produz um fluxo de caixa de \$ 240.000/ano durante 15 anos.
- A Riolux instalou um sistema de geração de energia elétrica a um custo de \$ 30 milhões. Os custos operacionais do equipamento são de \$ 120.000/mês e sua vida útil é estimada em 15 anos. Considerando que a empresa deseja uma rentabilidade mínima de 12% a.m., determinar o custo mensal que deve ser repassado aos usuários do sistema de modo que cubra os gastos operacionais e remunere adequadamente o capital empregado.
- Uma empresa industrial estuda a viabilidade econômica de um projeto de investimento orçado em \$ 981.815,00. Considerando que o projeto tem uma duração prevista de 20 anos e o estudo de viabilidade econômico-financeiro projetou fluxos de caixa de \$ 100.000 por ano, calcular a TIR do projeto de investimento.
- Considere as seguintes alternativas de investimento mutuamente exclusivas:

Fluxos de caixa			
Alternativas	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Alternativa A	-\$ 100	\$ 25	\$ 125
Alternativa B	-\$ 100	\$ 95	\$ 45
Fluxo Incremental (A - B)	0	-\$ 70	\$ 80

Considerando um custo do capital de 10% a.a., pede-se: a) calcular a taxa interna de retorno para cada alternativa e para o fluxo incremental; b) determinar o VPL das alternativas e do fluxo incremental; c) identificar pela TIR qual é a preferível; d) identificar pelo VPL qual é a preferível; e) identificar pela análise do fluxo incremental qual é a preferível; f) estabelecer qual deve ser a escolha correta.

- Considere as seguintes alternativas mutuamente exclusivas:

Fluxo de caixa			
Alternativas	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Alternativa α	-\$ 100	\$ 120	\$ 30
Alternativa β	-\$ 100	\$ 40	\$ 140

Determinar a taxa de desconto que faz as duas alternativas serem igualmente atrativas para o investidor.

10. Uma empresa estuda a possibilidade de substituir um equipamento. Dispõe de duas alternativas mutuamente exclusivas, o equipamento N e o equipamento V. Os fluxos de caixa estimados são os seguintes:

Alternativas	Fluxo de caixa		
	Ano 0	Ano 1	Ano 2
Máquina N	-\$ 100	\$ 1.000	\$ 200
Máquina V	-\$ 90	\$ 300	\$ 1.400

Considerando um custo do capital de 10% a.a., pede-se identificar: a) pela análise do fluxo incremental qual é a melhor escolha; b) pelo VPL qual é a melhor escolha.

11. Uma empresa estuda a troca de uma máquina velha por uma nova. Com as seguintes informações, determinar se a máquina deve ou não ser substituída.

	<u>Máquina velha (V)</u>	<u>Máquina nova (N)</u>
Investimento inicial	—	\$ 25.000
Custo operacional	\$ 12.000/ano	\$ 8.000/ano
Vida útil	2 anos	6 anos
Custo do capital	6% a.a.	6% a.a.

12. Determine qual projeto é preferível:

	Projeto X	Projeto Y
Investimento inicial	\$ 1.000	\$ 600
Fluxo de caixa	\$ 200/ano	\$ 100/ano
Vida útil	100 anos	90 anos
Custo do capital	10% a.a.	10% a.a.
Valor residual	0	0

13. Determinar qual projeto é preferível:

	Projeto A	Projeto B
Investimento inicial	\$ 210.000	\$ 360.000
Custo operacional/ano	\$ 72.000	\$ 82.000
Vida útil	10 anos	12 anos
Custo do capital	15% a.a.	18% a.a.
Receitas/ano	\$ 160.000	\$ 210.000
Valor residual	0	\$ 50.000

14. Qual dos equipamentos, A ou B, é mais adequado economicamente? Considere um custo de oportunidade do capital de 10% a.a.

Equipamento	Investimento	Custo operacional/ano	Vida útil
A	\$ 18.000	\$ 2.860	13 anos
B	\$ 28.000	\$ 1.960	18 anos

15. Para as seguintes alternativas mutuamente exclusivas, calcular o VPL e a anuidade uniforme equivalente e determinar qual das alternativas representa a melhor escolha econômica:

	<u>Alternativa X</u>	<u>Alternativa Y</u>
Investimento inicial	\$ 5.000	\$ 8.000
Fluxo de caixa	\$ 1.672/ano	\$ 1.594/ano
Duração	5 anos	10 anos
Custo do capital	10% a.a.	10% a.a.

16. Uma empresa cujo custo de oportunidade do capital é de 7% a.a. estuda a possibilidade de comprar uma máquina. Para escolher entre a máquina A e a máquina B, ela dispõe das seguintes informações sobre as alternativas de investimento:

	<u>Máquina A</u>	<u>Máquina B</u>
Investimento inicial	\$ 19.000	\$ 25.000
Fluxo de caixa	\$ 12.000/ano	\$ 8.000/ano
Vida útil	4 anos	6 anos
Valor residual	0	0

Para as duas alternativas de investimento pede-se calcular: a) o VPL; b) a TIR; c) anuidade uniforme equivalente e determinar qual projeto é preferível.

17. Qual das alternativas mutuamente exclusivas, A ou B, é melhor considerando um custo do capital de 5% a.a.?

Fluxos de caixa

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
Alternativa A	-\$ 14	\$ 8	\$ 8	
Alternativa B	-\$ 11	\$ 5	\$ 5	\$ 5

18. Uma empresa industrial pretende terceirizar durante três anos a fabricação de uma determinada peça. Se for fabricada internamente, um estudo mostrou que para fabricar 8.000 peças/ano é necessário um investimento inicial de \$200.000 em equipamentos e custos operacionais totais de \$18.000/ano. Se a fabricação for terceirizada, o preço de compra será de \$ 12/peça. Considerando que o custo do capital da empresa seja de 8% a.a., determinar se a fabricação da peça deve ou não ser terceirizada.

19. Uma bomba instalada em um poço artesiano tem custos operacionais de \$450/ano considerados *muito altos* para o tipo de instalação. Trocá-la por um equipamento mais moderno representaria um investimento líquido de \$ 1.230 sem valor residual. Uma projeção indica que a nova bomba teria os seguintes custos operacionais/ano ao longo de sua vida útil:

	<u>Ano 0</u>	<u>Ano 1</u>	<u>Ano 2</u>	<u>Ano 3</u>	<u>Ano 4</u>	<u>Ano 5</u>
Custos operacionais: 0		\$ 250	\$ 200	\$ 150	\$ 100	\$ 50

Considerando um custo de oportunidade do capital de 2% a.a., calcular o custo anual uniforme equivalente das duas alternativas (trocar e não trocar a bomba) e determinar se a bomba deve ou não ser substituída. Não levar em consideração efeitos fiscais.

20. Atualmente a operação de um equipamento produz uma receita líquida de \$ 200/ano. Existe a possibilidade de trocá-lo por um novo equipamento orçado em \$ 4.800 com vida útil de cinco anos e sem valor residual. No caso da troca de equipamentos, o fluxo de caixa líquido aumentará geometricamente nos próximos cinco anos de acordo com a seguinte projeção:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Ano 5
Fluxo de caixa:	-\$ 4.800	\$ 200	\$ 400	\$ 800	\$ 1.600	\$ 3.200

Considerando um custo de oportunidade do capital de 5% a.a., calcular as anuidades uniformes equivalentes para as duas alternativas (trocar e não trocar o equipamento) e determinar se o equipamento deve ou não ser substituído. Por simplicidade, não considerar efeitos fiscais.

21. Para as seguintes alternativas mutuamente exclusivas calcular a TIR e o VPL. Se o custo do capital for de 10% a.a., determinar a melhor alternativa.

Ano	Fluxos de caixa			
	A	B	C	D
0	-\$ 1.500	-\$ 1.500	-\$ 1.500	-\$ 1.500
1	150	0	150	300
2	1.350	0	300	450
3	150	450	450	750
4	-150	1.050	600	750
5	-600	1.950	1.875	900

22. Uma prensa hidráulica nova custa \$ 90.000. A máquina tem vida útil de quatro anos e gera um fluxo de caixa operacional líquido de \$ 30.000/ano. A um custo do capital de 20% a.a., calcular as anuidades uniformes equivalentes e determinar a época ótima de substituição da máquina. A empresa dispõe das seguintes informações sobre os atuais valores de mercado de máquinas usadas:

Anos de uso da máquina:	1	2	3	4
Valor de mercado (hoje):	\$ 80.000	\$ 72.000	\$ 68.000	\$ 34.000

23. Um equipamento pode ser usado por cinco anos ou substituído antes deste prazo. Considerando um custo do capital de 10% a.a., e com os seguintes VPLs para cada uma das alternativas de substituição, calcular as anuidades uniformes equivalentes e determinar o período ótimo de substituição do equipamento.

Ano:	1	2	3	4	5
VPL:	\$ 2.000	\$ 5.000	\$ 7.000	\$ 8.000	\$ 10.000

Obs.: Cada alternativa de substituição do equipamento (substituir no primeiro, no segundo,..., ou no quinto ano) é mutuamente exclusiva em relação às outras.

24. O fluxo de caixa de um projeto de plantação de eucaliptos para fabricação de papel e celulose é função do tempo: $F_t = 10.000(1+t)^{-\frac{1}{2}}$. O valor presente líquido do projeto com t anos de duração pode ser expresso por $VPL_t = F_t e^{-k t} - C$, onde $k = 5\%$ a.a. (custo do capital); $C = \$ 15.000$ (investimento inicial); t = tempo. Determinar o tempo ótimo de corte das árvores usando como critério decisório o método do VPL.
25. Uma empresa deve arrendar operacionalmente um equipamento. O valor do equipamento é de \$27.000, com vida útil de três anos. A sociedade arrendadora propõe um contrato de três anos, comprometendo-se a arcar com os gastos gerais de manutenção do equipamento, estimados em \$3.000/ano. A alíquota de IR da arrendadora é de 30% e seu custo do capital, 10% a.a. Calcular o valor da prestação anual mínima líquida do IR a ser cobrada da arrendatária.
26. Considerando um auferimento instantâneo dos benefícios fiscais, determinar qual é a melhor alternativa do ponto de vista financeiro: entre comprar o equipamento e contratar uma operação de leasing financeiro.

Dados da operação:

- valor do equipamento (igual ao valor da operação) = \$21.000;
- vida útil do equipamento (igual ao prazo do contrato de arrendamento) = 3 anos;
- alíquota de IR = 35%; taxa de arrendamento = 7% a.a.; taxa de juros = 7,6923% a.a.

27. Calcular a taxa de arrendamento e o valor das prestações para uma operação de leasing financeiro de \$20.000 com prazo de 24 meses sem valor residual e com prestações pagas ao fim de cada mês. Considere uma taxa de juros de 5% a.m. fixada pela instituição financeira que intermedeia o financiamento.
28. A taxa de arrendamento para uma operação de leasing financeiro sem valor residual e com prazo de 36 meses é de 5,2887% a.m. Calcular a taxa de juros aplicada pela instituição financeira.
29. Calcular a taxa de juros aplicada em uma operação de leasing financeiro com prazo de 48 meses, taxa de arrendamento de 3,9195% a.m. e valor residual de 4% a ser cobrado ao término da operação.
30. Considerando uma taxa de juros aplicada pela instituição financeira de 5% a.m., determinar a taxa de arrendamento e o valor da prestação postecipada para uma operação de leasing financeiro no valor de US\$ 200.000, com prazo de 28 meses e valor residual garantido de 5% cobrado ao fim da operação.
31. No exercício anterior, se for concedido um período de carência de dois meses para o início do pagamento das prestações, calcular a taxa de arrendamento e o valor das prestações.
32. Uma concessionária vende por meio de leasing um veículo cujo valor à vista é de \$20.000. Devem ser pagas uma entrada de 20% e 36 prestações mensais iguais. Considerando que a instituição financeira aplica juros de 3% a.m., calcular a taxa de arrendamento e o valor da prestação.
33. Por um veículo adquirido pelo sistema leasing paga-se uma determinada entrada e 24 prestações mensais iguais. Considerando uma taxa de arrendamento de 4% a.m. e que a instituição financeira aplica uma taxa de juros efetiva de 3% a.m., calcular a porcentagem paga como entrada.

34. A taxa de arrendamento de uma operação de leasing é de 5,0954% a.m. Considerando um VRG de 15% pago ao término da operação e que a instituição financeira que intermedeia o financiamento aplica uma taxa de juros de 4% a.m., determinar o prazo da operação em meses.
35. Determinar a taxa de juros aplicada em um arrendamento de 24 meses em que o VRG de 20% é pago na entrada e a taxa de arrendamento é de 4,7238% a.m.

10.7 Respostas dos exercícios propostos

1. 300% e 200%

2. números imaginários: $\pm \frac{\sqrt{-2}}{2}$

3. 15,83%

4. 50%; 100%

5. 8,4418%

6. \$ 3.720.000/mês

7. 8% a.a.

8. a) $TIR_A = 25\%$; $TIR_B = 29,7\%$

$TIR_{A-B} = 14,29\%$; b) $VPL_A = \$26,03$

$VPL_B = \$23,55$; $VPL_{A-B} = \$2,48$

c) B; d) A; e) A; f) A

9. $TIR_{\alpha-\beta} = 37,5\%$

10. $VPL_{N-V} = -\$365 < 0 \Rightarrow$ melhor V;
 $VPL_N = \$974,38$ e $VPL_V = \$1.339,75$
 \Rightarrow melhor V

11. $CAE_V = \$12.000 < CAE_N = \13.084
 \Rightarrow melhor V (manter o equipamento velho)

12. $AE_Y = \$40 < AE_X = \$99,59 \Rightarrow X$ é melhor

13. $AE_B = \$54.325,38 > AE_A = \46.157
 $\Rightarrow B$ é melhor

14. $CAE_B = \$5.374 < CAE_A = \$5.394 >$
 $\Rightarrow B$ é melhor

15. $VPL_X = \$1.338,20$ $VPL_Y = \$1.794,44$;
 $AE_X = \$353 > AE_Y = \$292 \Rightarrow X$ é melhor

16. a) $VPL_A = \$21.646,54$; $VPL_B = \$13.132,32$; b) $TIR_A = 51,01\%$; $TIR_B = 22,56\%$; c) $CAE_B = \$6.390,67 >$

$CAE_A = \$2.755,11 \Rightarrow A$ é preferível

17. $AE_B = \$0,9607 > AE_A = \$0,4707 > \Rightarrow B$ é melhor

18. $CAE_{jerceirizar} = \$96.000 > CAE_{fabricar} = \$95.606,70 \Rightarrow$ melhor fabricar

19. $CAE_N = \$412,93 < CAE_V = \$450/\text{ano}$
 \Rightarrow melhor N (comprar novo equipamento)

20. $AE_V = \$200/\text{ano} > AE_N = \$61,90/\text{ano}$
 \Rightarrow melhor V (manter o equipamento velho V)

21. $TIR: -200\%; 20,9\%; 22,8\%; 25,4\%$; VPL: $-\$610,24$; $\$766,05$; $\$796,42$; $\$778,20$; Alternativa C

22. $(AE_3 = \$40.444); 3^{\circ}$ ano

23. $\$2.200$; $\$2.880,95$; $\$2.814,80$;
 $\$2.523,77$; $\$2.637,98$; período ótimo: 2°

24. 9 anos

25. \$ 14.653,00

26. $V_{L-C} = 163,46 > 0 \Rightarrow$ melhor leasing

27. $TA = 7,2471\%$ a.m.; $R = \$1.449,42$

28. $i = 4\%$ a.m.

29. $i = 3\%$ a.m.

30. $TA = 6,6266\%$; $R = US\$13.253,28$

31. $TA = 7,5716\%$; $R = US\$15.143,29$

32. $3,6643\%$ a.m.; $\$732,86$

33. $VRG = 32,2578\%$

34. 36 meses

35. $i = 3\%$ a.m.

ANÁLISE E AVALIAÇÃO ECONÔMICA DE INVESTIMENTOS DE CAPITAL

CAPÍTULO

11

- Estrutura do fluxo de caixa e avaliação**
- Fluxo econômico**
- Fluxo de financiamento: a separação da decisão econômica e financeira**

11.1 A importância dos fluxos de caixa na avaliação econômica

O fluxo de caixa resume as entradas e as saídas efetivas de dinheiro ao longo do horizonte de planejamento do projeto, permitindo, dessa maneira, conhecer a sua rentabilidade e viabilidade econômica. Nesse sentido, os fluxos de caixa representam a *renda econômica* gerada pelo projeto ao longo de sua vida útil, ou seja, os ganhos que sejam superiores aos obtidos em qualquer outro investimento alternativo de igual risco. Fluxos de caixa não são sinônimo de lucros contábeis, pois podem ocorrer mudanças no lucro sem que haja qualquer mudança correspondente nos fluxos de caixa.

O fluxo de caixa é construído para um determinado número de períodos que dependem da capacidade de o projeto gerar renda econômica, ou seja, gerar ganhos que sejam superiores aos obtidos em qualquer outro investimento alternativo de igual risco. A vida técnica dos ativos não deve ser utilizada para determinar a vida útil do projeto. Por exemplo, se as máquinas para a fabricação de certo produto duram dez anos sob circunstâncias normais de uso, por que empregar dez anos de vida do projeto, se depois do segundo ano o mercado muda e não existe mais demanda pelo produto? Em suma, não há relação entre vida útil dos ativos físicos e a renda econômica obtida em uma determinada atividade de produção. A organização do fluxo de caixa é feita em períodos de tempo iguais, em que comumente as operações são lançadas ao fim do período em que ocorrem. Normalmente a vida útil do projeto é dividida em anos, embora isto dependa da precisão da informação que possa ser obtida.

11.2 Considerações na montagem do fluxo de caixa

A análise de projetos de investimento e a montagem do fluxo de caixa necessário para avaliação econômica não são uma ciência exata; entretanto, se o analista segue alguns princípios e convenções comumente aceitas, o resultado obtido será mais satisfatório. A seguir listamos alguns dos principais aspectos a serem considerados na montagem do fluxo de caixa:

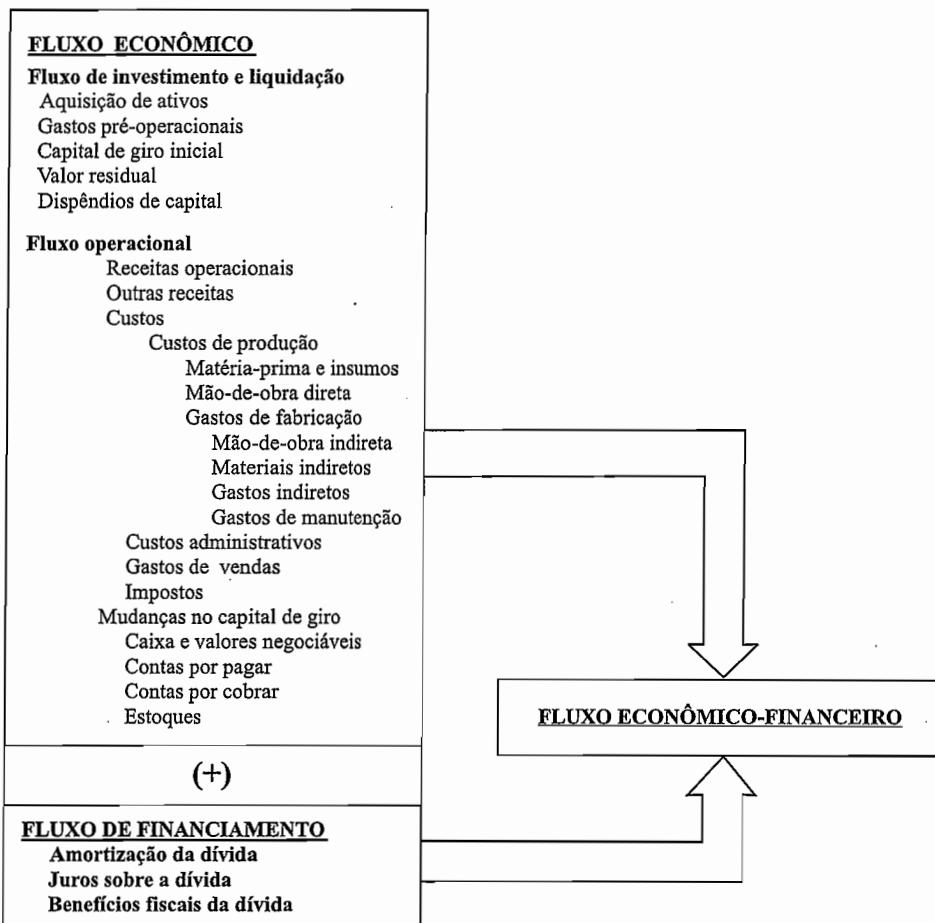
1. Os fluxos de caixa devem ser estimados em uma base incremental ou, em outras palavras, os únicos fluxos relevantes são os fluxos decorrentes da aceitação do projeto.
2. Os custos de oportunidade associados a recursos previamente possuídos devem ser alocados com base no melhor uso alternativo do bem.
3. As mudanças nos requerimentos de capital de giro devem ser consideradas, dado que elas afetam os fluxos de caixa do projeto.
4. Os efeitos fiscais (economias de imposto) e qualquer outro efeito derivado da aceitação do projeto devem ser considerados.
5. Os efeitos derivados do projeto devem ser incluídos (impacto do projeto em outros setores da empresa).
6. Os custos passados já gastos (custos afundados) não serão recuperados se o projeto não for empreendido. Logo, por não serem valores incrementais, não devem ser incluídos no fluxo de caixa.
7. Os custos não diretamente atribuídos ao projeto devem ser alocados somente se forem incrementais.
8. Os fluxos devidos ao financiamento não devem ser incluídos no fluxo de caixa para avaliação da viabilidade econômica do investimento de capital.
9. Os efeitos da inflação nos fluxos de caixa e na avaliação do projeto devem receber um tratamento adequado.
10. O valor residual do projeto deve ser estimado de modo consistente.

11.3 Tipos de fluxos de caixa

Em geral, há três tipos de fluxos de caixa utilizados para realizar a análise econômica e/ou financeira de um projeto de investimento. O primeiro é o fluxo de caixa econômico, por meio do qual se realiza a avaliação econômica. Essa avaliação busca determinar a rentabilidade intrínseca do projeto, sem incluir o financiamento utilizado para executá-lo. O segundo é o fluxo do financiamento efetivo, que incorpora os efeitos produzidos pelo esquema financeiro que irá financiar o projeto. Por meio desse fluxo é avaliada a adequação do financiamento escolhido para o projeto. O terceiro é o fluxo econômico-financeiro ou fluxo total, conhecido por esse nome porque é o resultado da agregação dos dois fluxos anteriores. Esse fluxo é o que permite realizar a avaliação da rentabilidade global do projeto.

O seguinte diagrama permite visualizar os fluxos de caixa e a sua respectiva agregação:

ESTRUTURA DO FLUXO DE CAIXA



O fluxo econômico é intrínseco ao projeto. Ele pode ser desmembrado em fluxo de investimento e liquidação e fluxo operacional. Por sua vez, o fluxo de investimento e liquidação é subdividido em aquisição de ativos, gastos pré-operacionais, capital de giro inicial, valor residual e dispêndios de capital. O fluxo operacional pode ser subdividido em receitas operacionais, outras receitas, custos e mudanças nos requerimentos de capital de giro.

O fluxo de financiamento pode ser desmembrado em amortização da dívida, juros pagos sobre o saldo da dívida e benefícios fiscais implícitos no pagamento dos juros (os juros implicam uma despesa fiscalmente dedutível no demonstrativo de resultados).

11.4 Fluxo econômico

11.4.1 Aquisição de ativos

Aquisição de ativos são os desembolsos que ocorrem devido à compra dos ativos, sejam tangíveis ou intangíveis, e que constituem a base para o funcionamento do projeto. Alguns exemplos comuns são o investimento em máquinas, edifícios, terrenos, móveis, marcas registradas, patentes etc. Os ativos tangíveis são bens móveis ou imóveis que geralmente estão sujeitos a uma vida útil e depreciação. São adquiridos uma única vez ao início do negócio e/ou cada vez que seja necessária a reposição de um equipamento.

11.4.2 Gastos pré-operacionais

Os gastos pré-operacionais correspondem aos gastos incorridos antes de iniciar as atividades operacionais. Estes gastos são também considerados custos de investimento e incluem os salários pagos antecipadamente, reformas de escritórios ou equipamentos necessários para início das operações, aluguéis pagos antecipadamente etc.

11.4.3 Capital de giro

O capital de giro está constituído pelos recursos utilizados nas atividades produtivas da empresa e são desembolsos que retornam durante o ciclo produtivo. O capital de giro inicial serve fundamentalmente para financiar a operação do negócio até que sejam recebidos os ingressos gerados pelas atividades produtivas, sendo tratado como um investimento recuperável ao término da vida útil do projeto. Dado que o capital de giro é por definição um estoque de dinheiro mantido no negócio, enquanto suas mudanças constituem um fluxo de dinheiro, na montagem do fluxo de caixa é necessária a inclusão das *mudanças de capital de giro* (aumento ou diminuição) com a finalidade de garantir o financiamento de todos os recursos de operação consumidos no ciclo produtivo. Por exemplo, em uma planta produtora de laticínios, o capital de giro deve garantir os recursos suficientes para adquirir a matéria-prima e cobrir os custos operacionais suficientes durante os 60 dias normais que dura o processo de produção mais os 30 dias que demoram, em média, a comercialização e a recuperação dos fundos para ser utilizados novamente no processo.

Exemplo 11.1

Um pequeno agricultor do Vale do Itajaí estuda a possibilidade de investir em um projeto agrícola dedicado à produção de sementes especiais. O projeto e suas instalações serão implementados em um terreno. O investimento principal será o pagamento do aluguel do terreno por quatro anos, o que implica um investimento antecipado de \$ 12.000. A colheita será a cada quatro meses produzindo uma receita quadrimestral de \$ 3.200 e gastos operacionais de \$ 500/mês. O projeto tem uma vida útil igual ao período de aluguel do terreno.

Com as informações anteriores, podemos montar o seguinte fluxo de caixa:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Investimento	-\$ 12.000				
Receitas (a)		\$ 9.600	\$ 9.600	\$ 9.600	\$ 9.600
Gastos operacionais (b)		-\$ 6.000	-\$ 6.000	-\$ 6.000	-\$ 6.000
Mudanças no capital de giro (c)	-\$ 2.000				\$ 2.000
Fluxo de caixa	\$ 14.000	\$ 3.600	\$ 3.600	\$ 3.600	\$ 5.600

(a) $3 \times \$ 3.200$; (b) $12 \times \$ 500$; (c) $4 \times \$ 500$

Este exemplo demonstra a necessidade de um investimento inicial de \$ 2.000 em capital de giro correspondente aos custos operacionais dos primeiros quatro meses antes da primeira colheita, pois sem este capital de giro inicial não seria possível iniciar as operações. Uma vez realizada a primeira colheita, os ingressos provenientes desta serão utilizados para cobrir os gastos operacionais da segunda colheita. Ou seja, repõe-se o capital de giro inicial. Esse processo repete-se na segunda colheita e assim sucessivamente. Dessa maneira, o investimento em capital de giro é realizado somente no ano 0, já que os ingressos recebidos permitirão a sua reposição, não sendo necessário efetuar um novo investimento. Ao fim da vida útil, o capital de giro é recuperado.

11.4.3.1 Capital de giro como porcentagem das vendas

As vendas reais e projetadas têm grande influência sobre a quantidade de capital de giro necessária, pois ocasionam um aumento espontâneo no nível de ativos e passivos circulantes da empresa. É por isso que um método para estimar as mudanças no capital de giro consiste em considerá-lo como uma porcentagem do incremento das vendas. A porcentagem atribuída depende do giro e do índice de rotação das principais operações do negócio. O uso desse critério é geralmente aceito devido à relação existente entre vendas, variações nos níveis de produção e o crédito concedido nas vendas. Vejamos o seguinte exemplo ilustrativo.

Exemplo 11.2

Suponha que a empresa agroindustrial Agrosem S.A. pretenda comprar e processar as sementes produzidas pelos pequenos agricultores do Vale do Itajaí, do exemplo anterior, e vendê-las ao público depois de processadas na sua fábrica. A produção da empresa agroindustrial acompanhará a colheita de sementes, processando-as também três vezes ao ano (em abril, agosto e dezembro). Diferentemente dos pequenos agricultores, a empresa agroindustrial deve oferecer ao mercado ao longo do ano uma quantidade constante de sementes processadas. Por essa razão, deve manter estoques nas épocas em que não houver colheita. A empresa projeta vendas mensais de \$ 15.000, que segundo estimativas devem aumentar em 50% a partir do terceiro ano. Os gastos em sementes equivalem a 50% das vendas. Adicionalmente, a empresa deve incorrer em gastos operacionais calculados em aproximadamente 10% das vendas. Dado que a colheita das sementes é quadriestral, estima-se que as mudanças de capital de giro equivalham aproximadamente a 20% das mudanças nas vendas. A vida útil do projeto é de quatro anos.

Com as informações anteriores podemos montar o seguinte fluxo de caixa:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Receitas (a)		\$ 180.000	\$ 180.000	\$ 270.000	\$ 270.000
Matéria-prima (b)		-\$ 90.000	-\$ 90.000	-\$ 135.000	-\$ 135.000
Gastos operacionais (c)		-\$ 18.000	-\$ 18.000	-\$ 27.000	-\$ 27.000
Mudanças no capital de giro (d)	-\$ 36.000		-\$ 18.000		\$ 54.000
Fluxo de caixa	-\$ 36.000	\$ 72.000	\$ 54.000	\$ 108.000	\$ 162.000

(a) Receitas: para os anos 1 e 2: $\$ 15.000 \times 12 = \$ 180.000$; para os anos 3 e 4: $(\$ 15.000 \times 1,50) \times 12 = \$ 270.000$.

(b) Matéria-prima = $0,50 \times$ Receitas.

(c) Gastos operacionais = $0,10 \times$ Receitas.

(d) Mudanças do capital de giro em $t = 0,20 \times (\text{Receitas}_{t+1} - \text{Receitas}_t)$.

No quadro, as mudanças nos requerimentos de capital de giro foram consideradas fluxos antecipados, ou seja, esses gastos são incorridos no início dos respectivos anos. Assim, no início do ano 1 (final do ano 0) requerem-se 20% de \$ 180.000 (aumento das vendas do ano 0 ao ano 1). No ano 1 não há mudanças no capital de giro, porque não há alteração nas vendas entre os anos 1 e 2. No ano 2 requerem-se 20% de \$ 90.000 (aumento das vendas do ano 2 ao ano 3). Ao término da vida útil do projeto, o capital de giro é recuperado (\$ 36.000 + \$ 18.000).

11.4.4 Valor de liquidação (valor residual) e depreciação

O conceito de vida útil pode levar a certa confusão, já que se pode pensar que se refira à *vida* de um projeto na sua interpretação literal. O conceito de *vida útil* se refere basicamente à vida econômica do projeto, ou seja, ao período em que se espera que o projeto gere *rendas econômicas*, que são ganhos superiores aos obtidos em qualquer outro investimento alternativo de igual risco. Assim, a estimativa do valor residual de um projeto deve ser consequente ao fim do projeto no sentido econômico. Portanto, quando termina a vida útil do projeto, o valor residual deve refletir os *ganhos normais* que possam ser obtidos em atividades alternativas no futuro. Dessa maneira, o valor residual deve ser igual aos fluxos futuros que possam ocorrer após o término da *vida útil* do projeto, trazidos para a data fim da vida útil. Uma solução para resolver esse problema consiste em calcular um fluxo de caixa médio constante para os anos posteriores ao término da vida útil, supondo-se que o projeto funcionará para sempre, isto é, terá uma vida residual infinita. Contudo, se o valor de liquidação física do projeto for superior ao valor descontado deste fluxo perpétuo, deverá ser usado o valor de liquidação física como valor residual do projeto. Se o valor de liquidação física for usado como valor residual, este poderá ser desmembrado em: venda dos ativos, efeito fiscal sobre ganho/perda de capital na venda dos ativos, despesas de remoção e limpeza e liberação de capital de giro.

Os dispêndios de capital necessários para manter os fluxos residuais não devem ser considerado, pois esses investimentos serão independentes do valor de liquidação. Assume-se que, terminando a *vida útil*, os eventuais investimentos sucessivos renderão somente o custo de oportunidade do capital, que seria igual ao rendimento do valor de liquidação. Dessa maneira, ao

término da vida útil supõe-se implicitamente que o fluxo de caixa dos períodos posteriores seja o mesmo fluxo que seria recebido em uma alternativa especulativa de igual risco. Se for considerado explicitamente o valor de resgate ou valor de liquidação, então o valor presente de todo o fluxo posterior à finalização da vida útil do projeto deverá ser nulo e irrelevante na análise econômica.

11.4.4.1 Depreciação, amortização e exaustão

É freqüente surgirem dúvidas sobre qual tipo de depreciação usar. O fluxo de caixa não considera diretamente a depreciação, ela é incluída indiretamente como um benefício fiscal no cálculo dos impostos. Para o cálculo do benefício fiscal são necessários os valores contábeis da depreciação, enquanto no ano de liquidação do projeto devem ser usados valores econômicos. Observe-se que, se o projeto é rentável sem considerar o benefício fiscal da depreciação e o valor residual, ele o será mais ainda considerando-se tais fatores. Isso explica que em determinados projetos não sejam considerados esses itens. Entretanto, esses casos não são muito freqüentes, pois na maioria das situações o valor residual e os benefícios fiscais são importantes na avaliação da rentabilidade do projeto. Os itens de depreciações, amortizações e exaustões são redutores do ativo imobilizado. Apenas os bens tangíveis, que estão sujeitos ao desgaste ou deterioração pelo uso ou pelo transcorrer do tempo, devem ser depreciados. Há vários critérios e taxas para depreciação, tendo cada critério suas próprias vantagens.

A legislação fiscal define as regras para depreciação, baseada em taxas determinadas pela Secretaria da Receita Federal. Como exemplo podemos citar:

Tipo de imobilizado	Taxa de depreciação	Vida útil estimada
Prédios e construções	0,4%	25 anos
Máquinas e equipamentos	10%	10 anos
Veículos	20%	5 anos
Móveis e utensílios	10%	10 anos
Instalações em geral	10%	10 anos
Ferramentas (alicates, facas etc.)	20%	10 anos
Microcomputadores	20%	5 anos

As taxas estabelecidas pela Receita Federal são taxas máximas. A legislação fiscal admite que as taxas sejam ajustadas em virtude do número de turnos em que a empresa trabalha, por exemplo, um turno: 1,0; dois turnos: 1,5; três turnos: 2,0. A utilização de um bem por mais de um turno, portanto, permite a chamada depreciação acelerada. Os terrenos não estão sujeitos à depreciação pois não sofrem desgaste pelo uso ou pela ação do tempo. Quanto às **amortizações**, de modo geral, são aplicadas sobre os intangíveis, como marcas e patentes, ou sobre benfeitorias em propriedade de terceiro. A **exaustão**, por outro lado, é utilizada no caso de florestas e de jazidas de minérios. A **reavaliação de ativo** é usada pelas empresas para reavaliar itens do ativo imobilizado para expressar o efetivo valor dos respectivos bens. A reavaliação aumenta o valor do ativo imobilizado e, em contrapartida, gera um lançamento a crédito no patrimônio líquido, em uma conta de *reserva de reavaliação*. Muitas vezes, a reavaliação é necessária para a empresa atualizar

valores que estejam muito defasados. Outras vezes, algumas empresas usam a reavaliação com propósito único de melhorar artificialmente o valor de seu patrimônio líquido.

11.4.5 Dispêndios de capital

Os dispêndios de capital são investimentos para dar suporte ao projeto. São efetuados depois do investimento inicial, sendo necessários para manter o projeto funcionando. Um exemplo de dispêndio de capital são os investimentos necessários para uma reforma de grande porte dos equipamentos ou uma expansão da fábrica que permita manter o negócio lucrativo e competitivo.

11.4.6 Gastos indiretos

Os custos indiretos que não são diretamente atribuídos ao projeto devem ser alocados somente se forem incrementais. Ou seja, se esses custos existissem mesmo que o projeto não fosse empreendido, então não seriam incrementais e não deveriam ser considerados no fluxo de caixa.

11.4.7 O investimento em terrenos

Uma das idéias-chave na avaliação econômica é a não-agregação de projetos. Isso explica porque não se considera a apreciação ou depreciação de terrenos, salvo que o projeto esteja gerando tal efeito. Para ilustrar a idéia suponhamos que se fez um investimento na compra de um terreno para instalar uma fábrica para produção de eletrodomésticos. Se o terreno estiver em uma região de expansão urbana com boa valorização imobiliária, ele poderá em cinco anos valer o dobro do valor gasto na sua compra. Se usarmos como valor de liquidação do terreno o dobro do seu valor de aquisição, o projeto aumentará sua rentabilidade. Mas essa agregação de projetos (produção de eletrodomésticos + *especulação imobiliária com terrenos*) dificulta sabermos de qual deles provém a renda econômica. É graças à valorização do terreno que o projeto se torna rentável? Se ganhamos mais com a valorização do terreno do que com a produção de eletrodomésticos, então para que investir no projeto? Mesmo esperando-se uma valorização do terreno, fato que não depende em absoluto do projeto, tal valorização não deve ser incluída no fluxo de caixa para análise econômica do projeto. No máximo o analista pode mencionar que além dos ganhos obtidos na fabricação de eletrodomésticos haverá também ganhos adicionais no investimento em terreno. Porém, esses ganhos serão independentes do projeto.

A valorização do terreno reduz em termos relativos a rentabilidade do projeto, pois o custo de oportunidade de usar esse ativo aumenta. Em todo o caso, a separação de projetos nos levaria a considerar uma avaliação unicamente em terrenos para, depois, considerar um investimento adicional (no projeto). É importante comparar a situação *com* o projeto com a situação *sem* o projeto. Não é apropriado comparar a situação *depois* do projeto com a situação *antes* do projeto, pois a situação antes pode corresponder a uma dinâmica própria, tal como a que resultaria da valorização dos terrenos.

11.4.8 Custos de oportunidade

Os custos associados à alocação de recursos previamente possuídos pela empresa, tais como terrenos, equipamentos, edifícios, mão-de-obra etc. são custos de oportunidade que devem

ser considerados no fluxo de caixa com base no melhor uso alternativo do bem ou recurso. Por exemplo, se o terreno já fosse propriedade da empresa antes da aceitação do projeto, o custo de oportunidade adequado poderia ser seu valor de mercado. No caso de edifícios, pode-se considerar como custo de oportunidade o aluguel de mercado etc.

11.4.9 Custos afundados

Os custos afundados são valores já gastos que, se o projeto não for empreendido, não serão recuperados. Como são custos já incorridos, eles não podem ser mudados pela decisão de aceitar ou rejeitar o projeto. Exemplos típicos de custos afundados são os gastos em pesquisa e desenvolvimento, os gastos em projetos piloto, os gastos em estudos de viabilidade etc. Esse tipo de gastos não afeta a decisão de investimento e é irrelevante para fins de análise de investimento de capital. Portanto, por não ser incremental, não deve ser incluído no fluxo de caixa do projeto.

11.5 Fluxo de financiamento: a separação da decisão econômica e financeira

Na análise da viabilidade econômica de um projeto de investimento, os fluxos financeiros não devem ser incluídos, pois as decisões de investimento e de financiamento devem ser analisadas separadamente. Esse é um conceito fundamental em finanças, conhecido como *teorema da separação*: o sucesso ou insucesso do projeto deve ser determinado considerando-se unicamente seu próprio potencial de geração de renda econômica, independentemente da forma como será financiado.

11.5.1 Montagem do fluxo de caixa e avaliação

Nesta seção, seguindo uma abordagem que permita ressaltar a separação dos efeitos fiscais e o conceito de *incrementalidade* dos fluxos de caixa, veremos como os fluxos econômico e de financiamento são estruturados e agregados para efeitos de avaliação econômica. O processo será mais bem entendido por meio dos exemplos ilustrativos a seguir:

Exemplo 11.3

A empresa Eletromecânica Richter S.A. pretende investir \$4 milhões na compra de um equipamento. A totalidade do investimento será efetuada no ano zero. A vida útil do equipamento é de quatro anos e ele será instalado em um terreno da própria empresa, cujo valor de mercado é de \$1 milhão. Ao término da vida útil estará contabilmente depreciado, mas naquela data poderá ser liquidado por \$1,2 milhão no mercado de equipamentos usados. A receita operacional projetada, obtida da operação do equipamento, é de \$2 milhões/ano, com custos operacionais de \$0,4 milhão/ano e gastos indiretos de \$0,2 milhão/ano. As necessidades de capital de giro serão de 15% sobre os incrementos das vendas. A alíquota de IR da empresa é de 30%. Pede-se montar o fluxo de caixa econômico do projeto.

Fluxo de Caixa Econômico (em \$ 1.000.000)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4	Liquidado
Receitas operacionais		2,00	2,00	2,00	2,00	
Investimentos						
• Equipamento (a)	-4,00					1,20
• Terreno	-1,00					1,00
• Mudanças no capital de giro (b)	-0,30					0,30
Custos						
• Custos operacionais		-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	
• Gastos indiretos		-0,20	-0,20	-0,20	-0,20	
• Depreciação (c)		-1,00	-1,00	-1,00	-1,00	
Lucro tributável	0,40	0,40	0,40	0,40		
• Impostos (30%)	-0,12	-0,12	-0,12	-0,12	-0,12	-0,36 (d)
• Depreciação (e)	1,00	1,00	1,00	1,00		
Fluxo econômico	-5,30	1,28	1,28	1,28	1,28	2,14

(a) O equipamento é liquidado pelo seu valor de mercado.

(b) Mudanças do capital de giro em $t = 0,15 \times (\text{receitas}_{t+1} - \text{receitas}_t)$. O capital de giro é recuperado no final.

(c) \$ 4,0/4; (d) Imposto sobre ganho de capital na venda do equipamento = $0,30 \times (\$1,20 - 0,00)$.

(e) A depreciação, depois de considerado seu efeito fiscal, é somada novamente por não ser um fluxo de caixa.

No quadro anterior somente as mudanças nos requerimentos de capital de giro foram consideradas fluxos antecipados. O resto dos fluxos é postecipado. Todos os efeitos fiscais são instantâneos, ou seja, ocorrem no próprio período da receita/despesa.

Exemplo 11.4

Suponha-se que um projeto tenha somente dois anos de vida útil e represente um investimento de \$ 20 milhões no ano zero. O investimento implica um gasto na compra de terrenos, construção de edifícios, compra de máquinas e equipamentos e em capital de giro inicial. As vendas projetadas são de \$ 30 milhões e \$ 60 milhões, respectivamente, para o primeiro e segundo ano. Sessenta por cento do investimento será financiado por meio de um empréstimo a juros efetivos de 20% a.a. reembolsável em dois anos pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). Os equipamentos serão vendidos pelo seu valor residual contábil, ou seja, não haverá ganhos de capital na venda do imobilizado.

Pede-se montar: a) o fluxo de caixa econômico; b) o fluxo das mudanças do capital de giro; c) o fluxo de financiamento líquido; d) o fluxo econômico-financeiro.

Fluxo de Caixa Econômico (em \$ 1.000)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Liquidação
Receitas operacionais		30.000	60.000	
Investimento				
• Terrenos	-2.000			2.000
• Edifícios	-4.000			2.000
• Máquinas	-8.000			6.000
• Equipamentos	-3.000			
• Capital de giro inicial	-3.000			3.000
Custos de fabricação				
• Mão-de-obra		-4.000	-8.000	
• Matéria-prima		-2.000	-4.000	
• Gastos indiretos de fabricação		-1.000	-1.000	
Custos operacionais				
• Administrativos		-1.000	-1.000	
• Vendas		-2.000	-2.000	
• Depreciação				
• Edifícios (a)		-1.000	-1.000	
• Máquinas (b)		-1.000	-1.000	
• Equipamentos (c)		-1.500	-1.500	
Lucro tributável (d)	16.500	40.500		
• Impostos (50%) (e)	-8.250	-20.250		
• Depreciação (f)	3.500	3.500		
Mudanças do capital de giro (g)	-3.000	-3.600		6.600
Fluxo econômico	-20.000	8.750	20.150	19.600

$$(a) \left(\frac{\$4.000 - \$2.000}{2} \right); \quad (b) \left(\frac{\$8.000 - \$6.000}{2} \right); \quad (c) \frac{\$3.000}{2}$$

(d) Receitas – custos de fabricação – custos operacionais.

(e) Não tem imposto na venda do imobilizado.

(f) A depreciação, depois de considerado seu efeito fiscal, é somada novamente (não é um fluxo de caixa).

(g) Veja quadro das mudanças do capital de giro.

Fluxo das Mudanças do Capital de Giro (em \$ 1.000)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Liquidation
Mudanças em:				
• Caixa (a)	-3.000			
• Contas a cobrar (b)		-3.000	-3.000	
• Estoques (c)		-1.500	-1.500	
• Contas a pagar (d)		1.500	900	
Total	-3.000	-3.000	-3.600	9.600

caixa: é requerido um capital de giro inicial de \$ 3.000 colocado em caixa;

estoques: 5% das vendas;

contas a cobrar: 10% das vendas; contas a pagar: 15% dos custos de fabricação e operacionais.

(a) Em 31 de dezembro do ano 0 há um caixa de \$ 3.000 para usar no ano 1.

(b) Contas a cobrar: ano 1: $0,10 \times (30.000 - 0) = \$ 3.000$; ano 2: $0,10 \times (60.000 - 30.000) = \$ 3.000$.

(c) Estoques: ano 1: $0,05 \times (30.000 - 0) = \$ 1.500$; ano 2: $0,05 \times (60.000 - 30.000) = \$ 1.500$.

(d) Contas a pagar: ano 1: $0,15 \times (10.000 - 0) = \$ 1.500$; ano 2: $0,15 \times (16.000 - 10.000) = \$ 900$.

Fluxo de Financiamento Líquido (em \$ 1.000)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Liquidation
Empréstimo	12.000			
Amortização e juros				
• Amortização (a)		-6.000	-6.000	
• Juros (b)		-2.400	-1.200	
• Benefício fiscal dos juros (c)		1.200	600	
Financiamento líquido	12.000	-7.200	-6.600	

(a) $\frac{\$12.000}{2}$; (b) 20% sobre o saldo devedor do período anterior; (c) $0,50 \times$ juros

Fluxo Econômico-Financeiro (em \$ 1.000)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Liquidation
Fluxo econômico	-20.000	8.750	20.150	19.600
Financiamento líquido	12.000	-7.200	-6.600	
Fluxo econômico-financeiro	-8.000	1.550	13.550	19.600

Nos quadros anteriores todos os fluxos, inclusive as mudanças no capital de giro, foram considerados fluxos postecipados.

Exemplo 11.5

A empresa Alfa S.A. estuda a substituição de um antigo gerador de energia elétrica que usa óleo diesel como combustível por outro a gás natural. O gerador a óleo diesel tem, ainda, uma vida útil de 4 anos e um valor contábil de \$ 8.000 que pode ser depreciado em dois anos; contudo, será substituído e vendido por \$ 9.000 no mercado de equipamentos usados no momento da compra do novo equipamento. O valor do novo equipamento é de \$ 24.000 com vida útil de quatro anos sem valor residual, e sabe-se que ao término da sua vida útil estará totalmente depreciado. O novo gerador proporcionará uma diminuição de 1.100 m³/ano no consumo de óleo diesel, cujo preço é de \$ 5/m³. Estima-se que as despesas operacionais e de manutenção sejam \$ 4.000 menores em relação ao gerador antigo. A alíquota de IR da empresa é de 30% e o custo do capital é de 13% a.a. Pede-se montar o fluxo de caixa incremental e analisar a viabilidade econômica e financeira do projeto, sabendo-se que 40% do investimento será financiado por meio de um empréstimo que será pago em três prestações anuais pela Tabela Price a juros de 15% a.a. Considerar auferimento instantâneo dos efeitos fiscais.

Por questões didáticas e visando a mostrar melhor o sentido de incrementalidade e explicitar os efeitos fiscais dos diversos fluxos, neste exemplo seguiremos uma abordagem um pouco diferente da utilizada nos exemplos anteriores. Assim, nos seguintes quadros, os efeitos fiscais serão separados dos fluxos correntes, criando-se uma rubrica especial chamada *efeitos fiscais*.

Fluxo de Caixa

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Fluxos de investimento					
• Investimento na compra do equipamento	-\$ 24.000				
• Venda do equipamento antigo	\$ 9.000				
Fluxos operacionais					
• Diminuição da despesa de combustíveis		\$ 5.500	\$ 5.500	\$ 5.500	\$ 5.500
• Diminuição da despesa de manutenção		\$ 4.000	\$ 4.000	\$ 4.000	\$ 4.000
Efeitos fiscais					
• Da venda do equipamento antigo (a)	-\$ 300				
• Da diminuição da despesa em combustível (b)		-\$ 1.650	-\$ 1.650	-\$ 1.650	-\$ 1.650
• Da diminuição da despesa de manutenção (c)		-\$ 1.200	-\$ 1.200	-\$ 1.200	-\$ 1.200
• Do aumento da quota de depreciação (d)		\$ 600	\$ 600	\$ 1.800	\$ 1.800
Fluxo econômico	-\$ 15.300	\$ 7.250	\$ 7.250	\$ 8.450	\$ 8.450
Fluxos do financiamento					
• Financiamento (e)	\$ 9.600				
• Prestações do financiamento		-\$ 4.205	-\$ 4.205	-\$ 4.205	
• Benefício fiscal dos juros (f)		\$ 432	\$ 308	\$ 165	
Fluxo econômico-financeiro	-\$ 5.700	\$ 3.477	\$ 3.353	\$ 4.410	\$ 8.450

(a) Imposto sobre ganho de capital na venda de imobilizado = (\$ 9.000 - \$ 8.000) × 0,30;

(b) 1.100m³ × \$ 5/m³ × 0,30; (c) \$ 4.000 × 0,30;

(d) 1º e 2º anos: 0,30 × $\left(\frac{\$24.000}{4} - \frac{\$8.000}{2} \right)$; 3º e 4º anos: 0,30 × $\left(\frac{\$24.000}{4} \right)$;

(e) 0,40 × \$ 24.000; (f) Juros de cada período × 0,30.

Quadro de amortização do financiamento – Tabela Price

Ano	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	\$ 9.600			
1	\$ 6.835	\$ 2.765	\$ 1.440	\$ 4.205
2	\$ 3.656	\$ 3.180	\$ 1.025	\$ 4.205
3		\$ 3.656	\$ 549	\$ 4.205

- Avaliação econômica (perspectiva da empresa)

$$-\$15.300 + \frac{\$7.250}{(1+ \text{TIR})} + \frac{\$7.250}{(1+ \text{TIR})^2} + \frac{\$8.450}{(1+ \text{TIR})^3} + \frac{\$8.450}{(1+ \text{TIR})^4} = 0$$

$$\Rightarrow \text{TIR} = 35,11\% \text{ a.a.} > 13\% \text{ a.a.}$$

Como a TIR é maior do que o custo do capital ($36,55\% > 13\%$), o projeto é economicamente viável. Podemos observar no quadro do fluxo de caixa que o fluxo econômico do ano zero representa o *capital líquido total* empregado no projeto (aporte dos acionistas e de terceiros) e que os fluxos dos anos posteriores são fluxos disponíveis tanto para os acionistas quanto para os credores. Isso se deve ao fato de que os fluxos do financiamento ainda não foram subtraídos. Ou seja, a viabilidade econômica mede a rentabilidade do capital total (perspectiva da empresa) e, consequentemente, a TIR calculada representa a rentabilidade desse capital total. Portanto, essa TIR deve ser comparada com o custo do capital da empresa (custo médio ponderado).

- Análise da viabilidade econômico-financeira (perspectiva dos acionistas)

$$-\$5.700 + \frac{\$3.477}{(1+ \text{TIR})} + \frac{\$3.353}{(1+ \text{TIR})^2} + \frac{\$4.410}{(1+ \text{TIR})^3} + \frac{\$8.450}{(1+ \text{TIR})^4} = 0$$

$$\Rightarrow \text{TIR} = 61,85\% \text{ a.a.} > K_{cp} (?)$$

A análise da viabilidade financeira do projeto é um passo posterior à análise da viabilidade econômica. Assim, depois de se analisar o potencial do projeto quanto à geração de renda econômica suficiente para remunerar adequadamente o capital empregado, deve-se avaliar se o projeto gera renda suficiente para pagar também os compromissos assumidos no financiamento. Para tanto, é necessário incluir os fluxos relativos ao empréstimo tomado. Observe que o fluxo econômico-financeiro do ano zero representa unicamente o *capital próprio* (aporte dos acionistas) empregado no projeto. Igualmente, os fluxos dos anos posteriores são fluxos disponíveis somente aos acionistas, pois os juros e amortizações do financiamento já foram subtraídos. Ou seja, a viabilidade econômico-financeira mede a rentabilidade do capital próprio e, a rigor, a TIR obtida deve ser comparada com o *custo do capital próprio* (K_{cp}) e não com o *custo do capital da empresa* (custo médio ponderado). No próximo capítulo apresentamos a teoria e fórmulas de cálculo do custo do capital.

11.6 Tratamento adequado da inflação

A inflação tem um impacto importante no processo de análise de investimentos e orçamentação de capital. É possível que um projeto que seja aceito na ausência de inflação seja rejeitado se forem considerados os efeitos da inflação nos fluxos de caixa e nas taxas de desconto.

Muitas vezes, a análise de uma alternativa ou projeto de investimento envolve fluxos em valores constantes (moeda de hoje) e fluxos em valores correntes (moeda das respectivas datas). Fluxos em valores constantes é sinônimo de fluxos reais, enquanto fluxos em valores correntes é sinônimo de fluxos nominais. Para sermos consistentes nos cálculos, os fluxos de caixa em valores correntes devem ser descontados a uma taxa nominal, enquanto os fluxos em valores constantes devem ser descontados a uma taxa real.

Comumente, a taxa de desconto é expressa em termos nominais. A taxa real pode ser estimada a partir da taxa nominal e da projeção inflacionária, aplicando-se a seguinte identidade de cálculo:

$$(1 + \text{taxa nominal}) = (1 + \text{taxa real}) \times (1 + \text{inflação projetada})$$

$$(1 + k_N) = (1 + k_r) \times (1 + I) \Rightarrow k_r = \frac{(1 + k_N)}{(1 + I)} - 1$$

Consideremos uma alternativa que requeira um investimento inicial de \$ 100 e renda um fluxo de caixa nominal de \$ 150 daqui a um período. Se o custo real do capital for de 10% e a inflação projetada de 8%, o cálculo do VPL poderá ser feito de duas maneiras:

- Descontando-se o fluxo de caixa em termos reais a uma taxa real

$$VPL = -\$100 + \frac{\$150/1,08}{1,10} = \$26,26$$

- Descontando-se o fluxo nominal a uma taxa nominal

$$VPL = -\$100 + \frac{\$150}{1,10 \times 1,08} = \$26,26$$

Constata-se que em ambos os modos de cálculo do VPL o resultado é o mesmo. Logo, poderíamos ser induzidos a imaginar que uma análise em termos nominais e reais sempre daria o mesmo resultado em termos de VPL. Esse seria o caso em um contexto de efeito inflacionário neutro, em que os preços e custos são afetados por igual pela inflação. Entretanto, na realidade, dada a complexidade do processo inflacionário, isso não acontece, obrigando o analista a trabalhar com diversos índices de atualização monetária adequados para os diversos componentes do fluxo de caixa. Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 11.6

Considerando uma taxa nominal de 14% e uma inflação projetada de 4%, provar que, se os seguintes fluxos de caixa nominais (moeda corrente) forem convertidos em fluxos reais (moeda constante), o VPL do projeto não será afetado.

- Análise em valores correntes

Fluxo de caixa em valores correntes (fluxo nominal)

Ano 0	Ano 1	Ano 2
-\$1.000	\$600	\$650

$$VPL(14\%) = -\$1.000 + \frac{\$600}{1,14} + \frac{\$650}{(1,14)^2} = \$26,47$$

O VPL foi calculado com a taxa nominal. Os fluxos de caixa nominais são realizados em datas futuras e estabelecidos em moeda das respectivas datas (moeda corrente).

- Análise em valores constantes

Fluxo de caixa em valores constantes (fluxo real)

Ano 0	Ano 1	Ano 2
-\$1.000	$\frac{\$600}{1,04} = \$576,92$	$\frac{\$650}{(1,04)^2} = \$600,96$

- Custo real do capital:

$$k_r = \frac{1+k_N}{1+I} - 1 = \frac{1,14}{1,04} - 1 = 9,62\% \text{ a.a.}$$

- Valor presente líquido:

$$VPL(9,62\%) = -\$1.000 + \frac{\$576,92}{1,0962} + \frac{\$600,96}{(1,0962)^2} = \$26,47$$

Os fluxos de caixa em valores constantes são realizados em datas futuras, mas estabelecidos em moeda constante (moeda de hoje). Foram determinados descontando-se os fluxos nominais pela taxa de inflação projetada. O VPL foi calculado com a taxa real.

Exemplo 11.7

Uma empresa pretende investir \$ 100.000 em um projeto de investimento para produzir um novo produto. Dispõe-se das seguintes informações: investimento = \$ 100.000; vida útil do projeto = 3 anos (sem valor residual); custo do capital (k_N) = 12% a.a. (taxa nominal); preço unitário do produto (P) = \$ 10/unidade; produção (Q) = 6.000 unidades/ano (constante); custos totais de produção (CT) = \$ 10.000/ano; taxa de inflação projetada: 10% a.a. (constante).

Considerando que o preço do produto e os custos acompanharão a inflação projetada e que a taxa de produção permanecerá constante, analisar a viabilidade econômica do projeto por meio de uma análise em valores constantes e em valores correntes. Por simplicidade assuma que o fluxo de caixa seja basicamente igual às receitas menos os custos totais e que não haja efeitos fiscais.

- Análise em valores constantes (a preços de hoje)

fluxo de caixa = receitas – custos totais

$$= P \times Q - CT = \$10/\text{unidades} \times 6.000 \text{ unidades/ano} - \$10.000/\text{ano} = \$50.000/\text{ano}$$

Custo real do capital

$$k_r = \frac{1+k_N}{1+I} - 1 = \frac{1,12}{1,10} - 1 = 1,8182\% \text{ a.a.}$$

O fluxo de caixa expresso em valores constantes deve ser descontado ao custo real do capital:

$$\begin{aligned} VPL(1,8182\%) &= -\$100.000 + \$50.000 \times a_{\overline{1},1,8182\%} = -\$100.000 + \$50.000 \times 2,89413 \\ &= \$44.706 > 0 \end{aligned}$$

- Análise em valores correntes (a preços das respectivas datas)

Neste caso, os fluxos de caixa devem refletir o poder aquisitivo da moeda, ou seja, os preços e os custos devem ser inflacionados. O quadro a seguir apresenta os cálculos:

- Fluxo de caixa em valores correntes (fluxo nominal)

	Ano 1	Ano 2	Ano 3
+ Receitas ($P \times Q$)	$10 \times 1,1 \times 6.000 = 66.000$	$10 \times (1,1)^2 \times 6.000 = 72.600$	$10 \times (1,1)^3 \times 6.000 = 79.860$
- Custo total (CT)	$-10.000 \times 1,1 = -11.000$	$-10.000 \times (1,1)^2 = -12.100$	$-10.000 \times (1,1)^3 = -13.310$
Fluxo de caixa	\$ 55.000	\$ 60.500	\$ 66.550

Fluxos de caixa a preços correntes devem ser descontados ao custo nominal (aparente) do capital:

$$VPL(12\%) = -\$100.000 + \frac{\$55.000}{(1,12)} + \frac{\$60.500}{(1,12)^2} + \frac{\$66.550}{(1,12)^3} = \$44.706 > 0$$

Constata-se que em ambas as formas de análise, em valores correntes e em valores constantes, o VPL é o mesmo. Isso é devido à suposição feita de que tanto os custos como os preços acompanharão por igual a inflação.

Exemplo 11.8

Uma empresa pretende investir \$ 5.000.000 em uma planta para produzir 45 mil unidades/ano de bobinas elétricas. O preço de venda atual das bobinas é de \$ 125/unidade, sendo esperado um incremento de 9% ao ano no preço das bobinas. O custo total de produção é de \$ 70/unidade, sendo esperado um incremento de 2% ao ano. Considerando uma inflação projetada de 6% a.a.,

um custo do capital (taxa nominal) de 11% a.a. e vida útil do projeto de dois anos, calcular o VPL com base no fluxo nominal e no fluxo real. Não considere o valor residual nem os efeitos fiscais.

- Fluxo de caixa em valores correntes (fluxo nominal)

	Ano 0	Ano 1	Ano 2
- Investimento	-\$ 5.000.000		
+ Receitas		\$ 45.000 × \$ 125 × (1,09) = \$ 6.131.250	\$ 45.000 × \$ 125 × (1,09) ² = \$ 6.683.062
- Custos		-\$ 45.000 × \$ 70 × (1,02) = -\$ 3.213.000	-\$ 45.000 × \$ 70 × (1,09) ² = -\$ 3.277.260
Fluxo de caixa	\$ 5.000.000	\$ 2.918.250	\$ 3.405.802

Valor presente líquido:

$$VPL(11\%) = -\$5.000.000 + \frac{\$2.918.250}{(1,11)} + \frac{\$3.405.802}{(1,11)^2} = \$393.280$$

- Fluxo de caixa em valores constantes (fluxo real)

Ano 0	Ano 1	Ano 2
-\$ 5.000.000	\$ 2.918.250/1,06 = \$ 2.753.066	\$ 3.405.802,50/(1,06) ² = \$ 3.031.152

Custo real do capital e cálculo do VPL:

$$k_r = \frac{1+k_N}{1+I} - 1 = \frac{1,11}{1,06} - 1 = 4,7170\% \text{ a.a.}$$

$$VPL(4,7170\%) = -\$5.000.000 + \frac{\$2.753.066}{(1,047170)} + \frac{\$3.031.152}{(1,047170)^2} = \$393.280$$

Exemplo 11.9

Considerando um custo do capital de 2% a.a. (taxa real) e uma inflação projetada de 8% a.a., analisar pelo critério da TIR a viabilidade econômica do seguinte projeto de investimento.

- Fluxo de caixa em valores correntes (fluxo nominal)

Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
-\$ 100	\$ 40	\$ 50	\$ 60

Taxa interna de retorno:

$$-\$100 + \frac{\$40}{1+TIR} + \frac{\$50}{(1+TIR)^2} + \frac{\$60}{(1+TIR)^3} = 0 \Rightarrow TIR = 21,65\% \text{ a.a.}$$

A TIR calculada com base no fluxo nominal (valores correntes) deve ser comparada com o custo nominal do capital.

Custo nominal do capital: $k_N = (1 + k_r) \times (1 + I) - 1 = 1,02 \times 1,08 - 1 = 10,16\% \text{ a.a.}$

Como ($TIR = 21,65\% > k_N = 10,16\%$), a alternativa de investimento é economicamente viável.

11.6.1 Fluxos de caixa e avaliação em moeda forte

É um erro imaginar que, quando a inflação é alta, a única avaliação consistente será aquela efetuada em alguma moeda forte, por exemplo, o dólar. A maioria das pessoas acredita que o uso de moedas fortes proporciona melhor idéia sobre a rentabilidade dos investimentos, mas isso não é necessariamente verdadeiro. Deve ser levado em consideração que mesmo o dólar e outras moedas estrangeiras também estão sujeitos à depreciação. Muitas vezes, em situações de inflação alta, a desvalorização cambial da moeda nacional não acompanha necessariamente a inflação. É possível que em tais situações a inflação seja menor que o rendimento das aplicações em moeda nacional, mas também pode ocorrer que a rentabilidade em dólar seja negativa.

Convém entender que, quando um fluxo de caixa é expresso em termos reais (valores constantes), ele pode ser equivalente a um fluxo expresso em dólares. O seguinte exemplo ilustra esses conceitos.

Exemplo 11.10

(avaliação em dólar ou em reais?) Considerando um custo do capital de 2% a.a. (taxa real) e uma inflação projetada de 8% a.a., analisar um projeto que requeira um investimento de \$100 e dure somente dois anos. Os fluxos de caixa em termos reais são: \$200 e \$300, respectivamente, para o primeiro e o segundo ano. Suponhamos também que a taxa de inflação da moeda nacional e a sua taxa de desvalorização frente ao dólar sejam as mesmas e iguais a 100% por ano.

O seguinte quadro mostra os fluxos de caixa do projeto e a sua TIR respectiva:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	TIR
Fluxo de caixa real em moeda nacional	-\$100	\$200	\$300	200%
Índice de preços	1,0	$1,0 \times (1+1,0) = 2,0$	$2,0 \times (1+1,0) = 4,0$	
Fluxo de caixa nominal em moeda nacional	$-\$100 \times 1,0 = \100	$\$200 \times 2,0 = \400	$\$300 \times 4 = \1.200	
Tipo de câmbio	1,0	$1,0 \times (1+1,0) = 2,0$	$2,0 \times (1+1,0) = 4,0$	
Fluxo de caixa real em dólar	$-\$100/1,0 = \text{US\$ } 100$	$\$400/2,0 = \text{US\$ } 200$	$\$1.200/4,0 = \text{US\$ } 300$	200%

inflação = 100% a.a.; desvalorização = 100% a.a.

Observa-se no quadro que para uma inflação de 100% ao ano o índice de preços é, respectivamente, 1, 2 e 4. Assumindo-se que o tipo de câmbio hoje seja igual a \$ 1 e não exista inflação em dólar, o tipo de câmbio será, respectivamente, 1, 2 e 4. Dessa maneira, o fluxo de caixa real em dólares é igual ao fluxo real em moeda nacional. Igualmente, a TIR dos fluxos reais em moeda nacional e em dólar é a mesma.

Se a inflação da moeda nacional for maior que a sua desvalorização frente ao dólar, o fluxo de caixa real em dólar será maior que o fluxo de caixa real em moeda nacional. Por outro lado, se a inflação da moeda nacional for menor que a sua desvalorização frente ao dólar, o fluxo de caixa real em dólar será menor que o fluxo de caixa real em moeda nacional. O quadro a seguir mostra a primeira dessas duas situações:

	Ano 0	Ano 1	Ano 2	TIR
Fluxo de caixa nominal em moeda nacional	-\$ 100	\$ 400	\$ 1.200	
Índice de preços	1,0	$1,0 \times (1+1,5) = 2,5$	$2,5 \times (1+1,5) = 6,25$	
Fluxo de caixa real em moeda nacional	$-\$ 100/1,0 = \$ 100$	$\$ 400/2,5 = \$ 160$	$\$ 1.200/6,25 = \$ 192$	140%
Tipo de câmbio	1,0	$1,0 \times (1+1,0) = 2,0$	$2,0 \times (1+1,0) = 4,0$	
Fluxo de caixa real em dólar	$-\$ 100/1,0 = \text{US\$ } 100$	$\$ 400/2,0 = \text{US\$ } 200$	$\$ 1.200/4,0 = \text{US\$ } 300$	200%

$$\text{inflação} = 150\% \text{ a.a.}; \text{desvalorização} = 100\% \text{ a.a.}$$

No quadro anterior vemos que a TIR do fluxo real em moeda nacional (140%) é menor que a TIR do fluxo real em dólar (200%), mostrando claramente que, quando a taxa de inflação e desvalorização da moeda nacional é diferente, uma avaliação em dólar e em moeda nacional tem resultados diferentes.

11.6.2 Decisões de investimento em moeda nacional e em moeda estrangeira: Brasil versus Estados Unidos

Algumas vezes apresentam-se situações em que se deve efetuar uma análise comparativa de oportunidades de investimento no País e no exterior. Esse tipo de análise está sujeita ao tipo de câmbio que relaciona as moedas dos países à taxa de inflação nacional e à taxa de desvalorização cambial da moeda nacional frente à moeda estrangeira. O seguinte exemplo ilustra o tipo de tratamento que deve ser dado nessas situações.

Exemplo 11.11

(investir em dólar ou em reais?) Uma pessoa pretende investir \$ 500.000 nos próximos dois anos. Dispõe de duas opções de investimento: a) um depósito a prazo fixo em um banco de Miami que rende juros de 6% a.a. em *dólares correntes*; b) um depósito a prazo fixo em *reais* em um banco do Rio de Janeiro que paga três pontos percentuais acima da inflação anual. Projeta-se uma inflação anual de 9% nesse prazo no Brasil e espera-se que o *Real* enfrente um ritmo de desvalorização frente ao *dólar* de 7% ao ano nos próximos dois anos. Atualmente as moedas se relacionam de acordo com o câmbio: \$ 2,0 = US\$ 1,0. Pede-se para determinar a melhor opção de investimento.

O seguinte quadro mostra a análise da primeira alternativa:

	Ano 0	Ano 2	
Reais	\$ 500.000	\$ 643.205	(d)
Tipo de câmbio	2,0	2,2898	(c)
Dólares	US\$ 250,000 (a)	US\$ 280,900	(b)
Rentabilidade nominal anual		13,42% a.a.	(e)
Rentabilidade real anual		4,06% a.a.	(f)

$$(a) \frac{\$500.000}{2,0}; (b) \text{US\$} 250.000 \times (1,06)^2; (c) 2,0 \times (1,07)^2; (d) \text{US\$} 280.900 \times 2,2898;$$

$$(e) \left(\frac{643.205}{500.000} \right)^{\frac{1}{2}} - 1; (f) \frac{1,1342}{1,09} - 1.$$

Segunda alternativa:

	Ano 0	Ano 2	
Reais	\$ 500.000	\$ 627.200 (a)	
Rentabilidade nominal anual		12,00% a.a. (b)	
Rentabilidade real anual		2,75% a.a. (c)	

$$(a) \$ 500.000 \times (1,12)^2; (b) \left(\frac{\$ 627.200}{\$ 500.000} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (c) 1,12/1,09 - 1.$$

Conclui-se, portanto, que a melhor alternativa é aplicar em Miami (para quem pode, é claro), pois a rentabilidade real é maior em relação ao investimento no banco carioca.

11.7 Receita mínima de equilíbrio

Muitas vezes é necessário ter uma idéia preliminar da receita mínima do projeto como valor inicial comparativo que permita tomar decisões, sobretudo quando ainda não se dispõe de informações completas que façam possível a total estruturação do fluxo de caixa, cálculo do custo do capital e posterior avaliação econômica do projeto. Nesse caso, os procedimentos aplicados ao seguinte exemplo mostram de que modo pode ser calculada uma receita ou fluxo de caixa de equilíbrio para um projeto de investimento.

Exemplo 11.12

Um engenheiro cogita a possibilidade de investir em um projeto de fabricação de painéis de aglomerado. Ele contratou um analista de projetos que elaborou o estudo de viabilidade cobrando pelo trabalho \$ 4.000. As seguintes informações foram extraídas desse estudo:

Custos operacionais anuais projetados:

energia elétrica = \$ 10.000; mão-de-obra = \$ 60.000, matéria-prima = \$ 100.000

Investimento necessário:

licenças e alvarás de funcionamento = \$ 5.000

máquinas e equipamentos = \$ 200.000

capital de giro inicial = \$ 25.000

Total: \$ 230.000

Origem dos recursos

O engenheiro pensa cobrir o investimento requerido usando recursos próprios que estão investidos em fundos de ações que lhe rendem em média 20% a.a. O restante do investimento será obtido por meio de um financiamento a juros efetivos de 10% a.a.

Recursos provenientes de	Taxa:	Montante:
• fundos de ações	20% a.a.	\$ 150.000
• empréstimo	10% a.a.	\$ 80.000
	Total:	\$ 230.000

a) Admitamos que a empresa terá uma dívida constante (perpetuidade) de \$ 80.000 pela qual pagará anualmente os juros respectivos. A fábrica será instalada em um galpão de propriedade do empresário; o aluguel de mercado de um galpão similar é de \$ 12.000/ano. Se o engenheiro não se dedicasse à administração do negócio, poderia se empregar no mercado de trabalho por um salário médio de \$ 80.000/ano. Considerando as informações anteriores, e que não há depreciação nem desgaste dos equipamentos, determinar o *valor da receita mínima inicial* do projeto para torná-lo viável economicamente.

O quadro a seguir apresenta os valores e cálculos necessários à análise:

Investimento necessário	\$ 230.000	Custos operacionais e financeiros	\$ 178.000
• Licenças e alvarás	\$ 5.000	• Energia elétrica	\$ 10.000
• Máquinas e equipamentos	\$ 200.000	• Mão-de-obra	\$ 60.000
• Capital de giro inicial	\$ 25.000	• Matéria-prima	\$ 100.000
		• Juros do empréstimo (a)	\$ 8.000
		Custos de oportunidade	\$ 112.000
Origem dos recursos	\$ 230.000	• Salário alternativo	\$ 80.000
• Capital próprio	\$ 150.000	• Aluguel de mercado do galpão	\$ 12.000
• Empréstimo	\$ 80.000	• Rendimento do capital próprio (b)	\$ 20.000
		Imposto de renda (30%) (c)	\$ 48.000
		Receita mínima para iniciar (d)	\$ 338.000

(a) $0,1 \times \$ 80.000$; (b) $0,20 \times \$ 150.000$; (c) $0,30 \times (\$ 338.000 - \$ 178.000)$;

(d) cálculo da receita mínima de equilíbrio para iniciar:

Receita mínima – custos operacionais e financeiros – imposto de renda – custos de oportunidade = 0

$$R_{\min} - \$ 178.000 - 0,3 \times (R_{\min} - \$ 178.000) - \$ 112.000 = 0 \Rightarrow R_{\min} = \$ 338.000$$

O custo do estudo de viabilidade é um custo afundado não-recuperável; portanto, não é considerado na análise. Os custos de oportunidade não entram no cálculo do imposto de renda.

b) Admitamos agora que após três anos de funcionamento do negócio 50% do empréstimo tenha sido amortizado e o saldo devedor permanecido constante nos anos posteriores. Admita-se, também, que a partir daquela época o custo de oportunidade do capital próprio (rentabilidade do fundo de ações) aplicado no projeto tenha diminuído de 20% para 15% a.a. O engenheiro recebeu uma inesperada, mas muito atrativa, proposta salarial para trabalhar em uma empresa com um salário de \$140.000/ano. Se o engenheiro desistir de continuar com o empreendimento para poder aceitar a proposta, poderá recuperar unicamente 70% do capital inicialmente investido em máquinas e equipamentos e 100% do capital de giro inicial.

Pede-se para determinar o *valor da receita anual mínima* que faça o engenheiro continuar com o negócio.

O quadro a seguir apresenta os valores e os cálculos necessários à análise:

Investimento recuperável	\$ 165.000	Custos operacionais e financeiros	\$ 174.000
• Licenças e alvarás (a)	0	• Energia elétrica	\$ 10.000
• Máquinas e equipamentos (b)	\$ 140.000	• Mão-de-obra	\$ 60.000
• Capital de giro inicial	\$ 25.000	• Matéria-prima	\$ 100.000
		• Juros do empréstimo (e)	\$ 4.000
		Custos de oportunidade	\$ 170.750
Capital próprio (c)	\$ 125.000	• Salário alternativo	\$ 140.000
Empréstimo (d)	\$ 40.000	• Aluguel do galpão	\$ 12.000
		• Rendimento do capital próprio (f)	\$ 18.750
		Imposto de renda (g)	\$ 73.179
		Receita mínima para continuar (h)	\$ 417.929

(a) Não pode recuperar; (b) $0.70 \times \$200.000$; (c) $165.000 - \$40.000$; (d) $0.50 \times \$80.000$;

(e) 0.10×40.000 ; (f) $0.15 \times \$125.000$; (g) $0.30 \times (\$417.929 - \$174.000)$;

(h) Cálculo da receita mínima de equilíbrio para continuar:

$$\text{Receita mínima} - \text{custos operacionais e financeiros} - \text{imposto de renda} - \text{custos de oportunidade} = 0$$

$$R_{\min} - 174.000 - 0.3 \times (R_{\min} - 174.000) - 170.750 = 0 \Rightarrow R_{\min} = \$417.929$$

11.8 Exercícios propostos

- A compra de um equipamento com vida útil de 3 anos e sem valor residual exige um investimento inicial de \$1.180.000. O equipamento permitirá diminuir os custos operacionais em \$388.000/ano e aumentar a receita operacional em \$210.000/ano. Considerando uma alíquota de IR de 30% e o custo do capital de 10%, calcular o VPL e a TIR do projeto e verificar se o projeto vale a pena do ponto de vista econômico. Considerar os efeitos fiscais dos fluxos de caixa, como, por exemplo, efeito fiscal devido ao aumento da receita, diminuição de custos, aumento da depreciação etc.

2. Uma empresa estuda a compra de um determinado equipamento que permita uma redução de custos no seu processo operacional. O preço do equipamento é de \$ 5.000 e sua vida útil é de cinco anos com valor residual igual a 10% do valor de aquisição. Considerando que o custo de oportunidade do capital é de 10% a.a., de quanto deverá ser no mínimo a redução anual de custos proporcionada pelo equipamento, de modo que possa ser comprado? Desconsidere todo tipo de efeito fiscal.
3. Uma empresa pretende investir \$ 220.000 na compra de um equipamento com vida útil de 4 anos sem valor residual. O equipamento deve proporcionar uma diminuição nos custos operacionais da ordem de \$ 52.000/ano e um incremento na receita operacional da ordem de \$ 30.000/ano. Considerando uma alíquota de IR da empresa de 30% e seu custo do capital de 12% a.a., analisar a viabilidade econômica do projeto pelo critério da TIR.
4. Uma empresa estuda a possibilidade de substituir uma bateria de tornos mecânicos por outra com comando numérico. O valor do novo equipamento é de \$ 200.000, com vida útil de 4 anos sem valor residual. Os tornos mecânicos têm hoje ainda uma vida útil de 4 anos e um valor contábil igual ao seu valor de mercado (\$ 60.000) que pode ser depreciado em dois anos, mas serão dispensados e vendidos pelo seu valor de mercado. O investimento acarretará uma diminuição nos custos operacionais da ordem de \$ 30.000/ano e um aumento nas necessidades de capital de giro da ordem de \$ 5.000 (considerado investimento inicial). Do investimento no novo equipamento, a empresa pretende financiar 80% por meio de um empréstimo bancário reembolsável em 3 prestações anuais pela Tabela Price a juros de 10% a.a. Considerando um custo do capital de 12% a.a. e uma alíquota de IR de 30%, analisar o projeto e determinar a sua viabilidade econômico-financeira.
5. A instalação de um moderno equipamento orçado em \$ 28 milhões depreciáveis em 2 anos sem valor residual possibilitará que uma mina de bauxita opere por mais 4 anos. A receita operacional atual é de \$ 15 milhões/ano e os custos operacionais totalizam \$ 6 milhões/ano. Um estudo indica que a instalação do novo equipamento incrementará a receita operacional em 30%, diminuirá os custos operacionais em 10% e aumentará os requerimentos de capital de giro em \$ 0,3 milhão (considerado investimento inicial). O investimento no equipamento será financiado em 80% a juros de 10% a.a. amortizáveis em 4 anos pela Tabela Price. Considerando uma alíquota de imposto de renda de 30% e um custo do capital de 12% a.a., analisar a viabilidade econômica e financeira do projeto.
6. Uma empresa pretende trocar um equipamento velho por um novo. O valor do novo equipamento é de \$ 60.000, com vida útil de 3 anos e valor residual de \$ 6.000. O equipamento velho pode ainda ser usado por mais 3 anos e tem hoje um valor contábil de \$ 4.000 a ser depreciado em 2 anos, mas poderá ser vendido no mercado de equipamentos usados por \$ 10.000 no ato da compra do novo. Um estudo realizado pelo engenheiro de produção da planta estima que o novo equipamento incrementará a receita operacional em \$ 30.000/ano e diminuirá os custos operacionais em \$ 4.000/ano. O projeto será financiado em 50% por meio de um empréstimo a juros efetivos de 15% a.a., reembolsável em 3 prestações anuais segundo a Tabela Price. A alíquota de IR da empresa é 20% e seu custo do capital é de 20% a.a. Pede-se: analisar a viabilidade econômica e financeira do projeto.

11.9 Respostas dos exercícios propostos

1. Fluxo de caixa

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
Fluxos de investimento				
• Investimento inicial	-\$ 1.180.000			
Fluxos operacionais				
• Diminuição dos custos operacionais		\$ 388.000	\$ 388.000	\$ 388.000
• Aumento da receita operacional		\$ 210.000	\$ 210.000	\$ 210.000
Efeitos fiscais				
• Da depreciação		\$ 118.000	\$ 118.000	\$ 118.000
• Da diminuição do custo operacional		-\$ 116.000	-\$ 116.000	-\$ 116.000
• Do aumento da receita operacional		-\$ 63.000	-\$ 63.000	-\$ 63.000
Fluxo de caixa econômico	-\$ 1.180.000	\$ 536.600	\$ 536.600	\$ 536.600

VPL = \$ 154.444,78 >0 e TIR = 17,3% >10% ⇒ a compra do equipamento se justifica economicamente

2. \$ 1.237,08/ano

3. Fluxo de caixa

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Fluxos de investimento					
• Compra do equipamento	-\$ 220.000				
Fluxos operacionais					
• Diminuição dos custos operacionais		\$ 52.000	\$ 52.000	\$ 52.000	\$ 52.000
• Incremento da receita operacional		\$ 30.000	\$ 30.000	\$ 30.000	\$ 30.000
Efeitos fiscais					
• Da depreciação		\$ 16.500	\$ 16.500	\$ 16.500	\$ 16.500
• Da diminuição dos custos operacionais		-\$ 15.600	-\$ 15.600	-\$ 15.600	-\$ 15.600
• Do incremento da receita operacional		-\$ 9.000	-\$ 9.000	-\$ 9.000	-\$ 9.000
Fluxo de caixa econômico	-\$ 220.000	\$ 73.900	\$ 73.900	\$ 73.900	\$ 73.900

TIR = 12,96% >12% ⇒ a compra do equipamento se justifica economicamente

4. Fluxo de caixa

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Fluxos de investimento					
• Compra dos tornos com controle numérico	-\$ 200.000				
• Venda dos tornos mecânicos	\$ 60.000				
Fluxos operacionais					
• Diminuição dos custos operacionais		\$ 30.000	\$ 30.000	\$ 30.000	\$ 30.000
Outros fluxos					
• Aumento das necessidades de capital de giro	-\$ 5.000				\$ 5.000
Fluxo do financiamento					
• Financiamento tomado	\$ 160.000	-\$ 64.338	-\$ 64.338	-\$ 64.338	
• Prestações pagas pelo financiamento		\$ 6.000	\$ 6.000	\$ 15.000	\$ 15.000
Efeitos fiscais					
• Do aumento da quota de depreciação		-\$ 9.000	-\$ 9.000	-\$ 9.000	-\$ 9.000
• Da diminuição dos custos operacionais					
• Dos juros embutidos nas prestações		\$ 4.800	\$ 3.350	\$ 1.755	
Fluxo econômico-financeiro	\$ 15.000	-\$ 32.538	-\$ 33.988	-\$ 26.583	\$ 41.000

VPL (12%) = -\$ 34.012 < 0 ⇒ inviável

5. Fluxo de caixa (milhões)

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3	Ano 4
Fluxos de investimento					
• Compra do equipamento	-\$ 28,00				
Fluxos operacionais					
• Aumento da receita operacional		\$ 4,50	\$ 4,50	\$ 4,50	\$ 4,50
• Diminuição dos custos operacionais		\$ 0,60	\$ 0,60	\$ 0,60	\$ 0,60
Outros fluxos					
• Aumento dos requerimentos de capital de giro	-\$ 0,30				\$ 0,30
Efeitos fiscais					
• Do aumento da quota de depreciação		\$ 4,20	\$ 4,20		
• Da diminuição dos custos operacionais		-\$ 0,18	-\$ 0,18	-\$ 0,18	-\$ 0,18
• Do aumento da receita operacional		-\$ 1,35	-\$ 1,35	-\$ 1,35	-\$ 1,35
Fluxo de caixa econômico	-\$ 28,30	\$ 7,77	\$ 7,77	\$ 3,57	\$ 3,87

VPL (12%) = -\$ 10.167.793 < 0 ⇒ a compra do equipamento não se justifica economicamente.

6. Quadro de Amortização do Financiamento e Fluxo de Caixa

Ano	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
Fluxos de investimento				
• Compra do equipamento novo e VR	-\$ 60.000,00			\$ 6.000,00
• Venda do equipamento velho	\$ 10.000,00			
Fluxos operacionais				
• Diminuição dos custos operacionais		\$ 4.000,00	\$ 4.000,00	\$ 4.000,00
• Dumento da receita operacional		\$ 30.000,00	\$ 30.000,00	\$ 30.00,00
Efeitos fiscais				
• Do aumento da quota de depreciação		\$ 4.800,00	\$ 4.800,00	\$ 5.400,00
• Da diminuição do custo operacional		-\$ 1.200,00	-\$ 1.200,00	-\$ 1.200,00
• Do aumento da receita operacional		-\$ 9.000,00	-\$ 9.000,00	-\$ 9.000,00
• Da venda do equipamento velho		-\$ 1.800,00		
Fluxo de caixa econômico	-\$ 51.800,00	\$ 28.600,00	\$ 28.600,00	\$ 35.200,00
Fluxos do financiamento				
• Empréstimo	\$ 30.000,00			
• Prestações		-\$ 13.139,31	-\$ 13.139,31	-\$ 13.139,31
• Efeito fiscal das prestações		\$ 1.350,00	\$ 961,23	\$ 514,15
Fluxo econômico-financeiro	-\$ 21.800,00	\$ 16.810,69	\$ 16.421,92	\$ 22.574,84

$VPL_{econômico} (20\%) = + \$ 12264,82 > 0 \Rightarrow$ viável economicamente.

$VPL_{econômico-financeiro} (20\%) = + \$ 16.677,16 > 0 \Rightarrow$ viável econômica e financeiramente.

- Custo ponderado médio do capital
- Custo da dívida
- Custo do capital próprio
- Custo do capital para projetos
- Risco financeiro e custo do capital
- Ajuste do custo do capital para risco financeiro

12.1 Custo de oportunidade do capital

O custo de oportunidade do capital ou simplesmente custo do capital é o custo de oportunidade de uso do fator de produção *capital* ajustado ao risco do empreendimento. É a taxa esperada de rentabilidade oferecida nos mercados de capitais para empreendimentos na mesma classe de risco. Este é um assunto criticamente importante na avaliação econômica por três razões. A primeira diz respeito às decisões de investimento que têm forte impacto sobre a empresa e requerem uma estimativa consistente do custo do capital. A segunda é relacionada à estrutura de capital, ou seja, a forma como a empresa financia seus ativos pode afetar seu risco e seu valor de mercado. O entendimento da formação do custo do capital e como é influenciado pelo risco financeiro é útil nas decisões sobre financiamento e estrutura de capital da empresa. A terceira razão de estudarmos o custo do capital é que muitas outras decisões financeiras requerem boas estimativas do custo do capital para serem corretamente avaliadas.

É necessário distinguir entre o custo do capital da empresa, o custo do capital do acionista (custo do capital próprio) e o custo do capital apropriado para avaliação econômica de um projeto de investimento (custo ajustado do capital). O primeiro reflete a atual estrutura de capital e a rentabilidade dos atuais ativos da empresa. O segundo representa o retorno esperado pelo capital próprio (dos acionistas) colocado no empreendimento. O terceiro é a taxa mínima de atratividade do empreendimento com o ajuste necessário para o risco do projeto.

12.2 Custo do capital da empresa: custo médio ponderado do capital (CMPC)

O *Custo Médio Ponderado do Capital* (CMPC) parte da idéia de que a empresa é financiada simultaneamente por capital próprio e por capital de terceiros. Assim, a rentabilidade mínima aceitável será igual à rentabilidade média ponderada de uma carteira formada pelas fontes de recursos que financiam o ativo da empresa. Essa média é:

$$\left(\begin{array}{c} \text{retorno} \\ \text{dos ativos} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{custo dos} \\ \text{capitais próprios} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{proporção} \\ \text{dos capitais próprios} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{custo líquido da} \\ \text{dívida} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{proporção} \\ \text{da dívida} \end{array} \right)$$

$$\boxed{K = K_{cp} \left(\frac{CP}{V} \right) + K_d (1 - T) \left(\frac{D}{V} \right)}$$

onde: K = custo médio ponderado do capital;

K_{cp} = custo do capital próprio;

K_d = custo marginal da dívida (taxa de juros paga sobre a dívida adicional);

D = valor da dívida;

CP = valor de mercado do capital próprio;

V = $CP + D$ = valor da empresa;

T = alíquota marginal de imposto de renda.

É importante observar alguns aspectos acerca da fórmula do CMPC:

- A fórmula é aplicável para a empresa em sua totalidade e não necessariamente para um projeto em particular. Todas as variáveis se referem à empresa no seu conjunto. Não é adequada para projetos com risco operacional diferente ao risco da atual linha de negócios da empresa patrocinadora, ou para projetos que alterem a alavancagem financeira da empresa. É aplicável somente a projetos que sejam *cópias perfeitas* da empresa, tanto do ponto de vista de sua estrutura de capital quanto do ponto de vista do nível de risco dos fluxos de caixa.
- A fórmula pode ser usada para estimar o custo do capital para um determinado projeto se no cálculo forem usados especificamente os custos das fontes de recursos que financiam esse projeto e não os custos das fontes que financiam os atuais ativos da empresa.
- As proporções $\frac{CP}{V}$ e $\frac{D}{V}$ devem ser calculadas com base em valores de mercado. O

efeito fiscal da dívida pressupõe que o valor contábil e o valor de mercado da dívida sejam idênticos. A fórmula assume também que todos os efeitos fiscais e tributários estão resumidos na variável T e considera que a empresa pode aproveitar totalmente o valor presente das deduções fiscais.

- Se uma empresa consegue identificar que uma determinada estrutura de capital maximiza o seu valor de mercado, essas proporções podem ser usadas no cálculo do custo do capital, mesmo que essa estrutura não seja a atual.
- A fórmula considera que a empresa e o projeto geram fluxos de caixa em forma de perpetuidade que suportam um nível de endividamento constante. Para fluxos de caixa com outras configurações, é necessário ajustar a fórmula.

12.3 Custo da dívida

O custo líquido da dívida é um dos componentes necessários para o cálculo do custo do capital. Para calculá-lo é necessário considerar o seu efeito fiscal, multiplicando-se o custo marginal da dívida (K_d) por $(1 - T)$, onde T é a alíquota marginal de IR:

$$\text{custo líquido da dívida} = K_d(1 - T)$$

O custo da dívida é o custo dos financiamentos e empréstimos contratados para o projeto. Portanto, deve ser um custo *marginal* e não a taxa à qual a empresa tomou empréstimos no passado. Como os juros constituem uma despesa dedutível, eles produzem reduções de impostos que diminuem o custo líquido da dívida, fazendo com que o custo de capital de terceiros líquido de impostos seja inferior ao custo bruto de impostos. Efetivamente, o governo paga uma parte do custo do capital de terceiros porque os juros são dedutíveis para fins fiscais. O motivo de utilizar o custo da dívida, líquido de impostos, é que o valor das ações de uma empresa e o VPL de um projeto dependem dos fluxos de caixa líquidos de impostos e, como os fluxos de caixa e as taxas de desconto devem ser colocados em bases comparáveis, ajusta-se a taxa de juros para baixo para levar em consideração o tratamento tributário preferencial do capital de terceiros.

A expressão para o cálculo do custo líquido da dívida geralmente fornecerá uma aproximação bastante boa do verdadeiro custo da dívida líquido de impostos. Entretanto, diferenças podem ocorrer quando a entidade-projeto não puder utilizar as deduções fiscais dos juros. Por exemplo, quando a entidade-projeto for organizada como uma corporação e a construção se estender por vários períodos durante os quais não haverá receita para contrapor às deduções relativas a juros para fins de imposto de renda.

12.4 Custo do capital para o projeto: custo ajustado do capital

Como foi mencionado na seção anterior, o uso do CMPC é correto somente para projetos idênticos à empresa patrocinadora. Não é correto para projetos que alteram o risco e a estrutura de capital da empresa. A seguir, deduziremos fórmulas para o cálculo do custo do capital próprio e para o custo do capital (custo ajustado) considerando que o projeto possa alterar o risco financeiro e a estrutura de capital da empresa.

Custo do capital pela fórmula de Modigliani-Miller

Se LAJIR é uma perpetuidade que representa o fluxo operacional antes dos juros e do imposto de renda, T represente a alíquota de IR, D a dívida, e K_d o custo da dívida, o fluxo tributável disponível para acionistas e credores é

$$\text{LAJIR}(1 - T) + T \times D \times K_d$$

Descontando o fluxo anterior a taxas adequadas para seu nível de risco:

$$V = \frac{\text{LAJIR}(1 - T)}{K_o} + \frac{T \times D \times K_d}{K_d}$$

$V = V_o + T \times D$

$V = V_0 + TD$ é conhecida em finanças como *Proposição I de Modigliani-Miller*¹. Ela diz que o valor da empresa com dívida é igual ao valor da empresa sem dívida (V_0) mais o valor presente do benefício fiscal da dívida ($T \times D$). Se destacarmos K_0 na penúltima expressão temos:

$$K_0 = \frac{LAJIR(1 - T)}{V} + \frac{K_0 \times T \times D}{V}$$

Considerando que $K = LAJIR(1 - T)/V$, tem-se: $K_0 = K + K_0 \times T \times (D/V)$

destacando K :
$$K = K_0 [1 - T^* \times L] \quad \text{onde: } L = \left(\frac{D}{V} \right)$$

A expressão anterior é conhecida em finanças como fórmula de Modigliani-Miller para cálculo do custo do capital. Algumas observações importantes sobre ela são pertinentes:

- L representa a contribuição marginal do projeto para a capacidade de endividamento da empresa em proporção do valor atual do projeto. O valor de L pode ser maior ou menor do que o atual grau de endividamento da empresa, e não deve ser confundido com a fonte imediata de fundos para o projeto. Capacidade de endividamento é entendida como o risco de falência resultante do uso de dívida com o consequente aumento da alavancagem financeira.
- K_0 é a taxa para a empresa não-alavancada, ou seja, é a taxa requerida pelos acionistas caso a empresa não tenha dívidas.
- T^* representa a taxa efetiva do *benefício fiscal do uso de capital de terceiros* que não necessariamente é igual à taxa alíquota de imposto de renda (T). Na prática, a taxa efetiva de dedução fiscal dos juros provavelmente será inferior à taxa alíquota de IR ($T^* < T$); inclusive, alguns autores argumentam que $T^* = 0$. Uma posição intermediária seria aquela que aceita que $0 < T^* < T$. Nos exercícios de aplicação, por simplicidade assumiremos que $T^* = T$.
- A fórmula de Modigliani-Miller considera que a empresa e o projeto geram fluxos de caixa em forma de perpetuidade e suportam um nível de endividamento constante. Ou seja, deve ser aplicada unicamente aos casos em que a contribuição do projeto para a capacidade de endividamento da empresa seja um valor constante.
- A fórmula faz uma simplificação extrema porque pressupõe que a única contribuição do financiamento ao valor da empresa seja devido aos benefícios fiscais dos juros. Não existe qualquer outro efeito colateral.

Se o cálculo do custo do capital pela fórmula do CMPC for feito usando-se especificamente os custos das fontes de recursos que financiam o projeto, e não os custos das fontes que financiam os atuais ativos da empresa, o resultado será o mesmo ao obtido pela fórmula de Modigliani-Miller (MM). Assim, podemos obter uma fórmula para o custo do capital próprio igualando-se a equação do CMPC com a equação de MM:

¹ MODIGLIANI, F., & MILLER, M. "The cost of capital, corporate finance and the theory of investment", *American Economic Review*, junho, 1958.

$$K_{cp} \left(\frac{CP}{CP + D} \right) + K_d (1 - T) \left(\frac{D}{CP + D} \right) = K_o \left[1 - T \left(\frac{D}{D + CP} \right) \right]$$

Colocando em evidência o custo do capital próprio:

$$K_{cp} = K_o + \left(\frac{D}{CP} \right) (K_o - K_d) (1 - T)$$

Como definido anteriormente, K_o é o custo do capital da empresa sem dívida e K_d é o custo da dívida. A expressão anterior é conhecida na literatura de finanças como *Proposição II de Modigliani-Miller*². Segundo essa proposição, o custo do capital próprio (K_{cp}) aumenta proporcionalmente à razão dívida-capital próprio (D/CP), e a taxa de crescimento dependerá da diferença entre K_o e K_d .

Cálculo do Custo do Capital Próprio pelo Modelo CAPM

O custo do capital próprio é a taxa de retorno requerida pelos acionistas ou donos do capital próprio. Um investidor irá adquirir um ativo de risco apenas se o retorno compensar o risco assumido. Quanto maior o risco maior o retorno exigido. A dificuldade de estabelecer critérios específicos de ajuste para diferentes níveis de exposição ao risco retardou a formalização adequada dos princípios de avaliação de títulos e projetos de investimento até o desenvolvimento do CAPM (Capital Asset Pricing Model) por Sharpe-Lintner-Mossin³. Após a derivação do modelo, a análise de projetos de investimento ganhou um novo alento e um enfoque quantitativo mais fundamentado, pois o CAPM resolve simultaneamente os problemas da oferta e alocação de recursos de capital, proporcionando uma estimativa de custo do capital em um contexto de mercado.

O CAPM é um modelo expresso em termos de valores esperados, em que o retorno esperado do ativo é a soma de dois fatores. O primeiro é a rentabilidade dos ativos ou aplicações sem risco e o segundo, o chamado *prêmio de risco*:

$$\bar{R} = R_f + \beta [\bar{R}_m - R_f]$$

onde: \bar{R} = retorno esperado do ativo; R_f = rentabilidade dos ativos sem risco; \bar{R}_m = rentabilidade esperada da carteira de mercado; β = beta do ativo (volatilidade dos retornos do ativo em relação ao índice de mercado); $\beta (\bar{R}_m - R_f)$ = prêmio de risco do ativo.

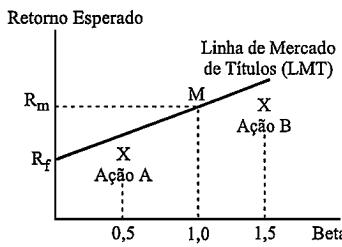
O *prêmio de risco* pode ser visto como o retorno adicional exigido por investidores para compensar cada unidade de risco adicional por eles assumido. É função de duas variáveis: o beta que mede a contribuição incremental do ativo para o grau de risco de uma carteira diversificada (reflete a correlação entre os retornos do ativo e a carteira de mercado); e a diferença entre o retorno esperado da carteira de mercado e a taxa livre de risco, que se denomina *prêmio de risco do mercado*. Essa estrutura simplíssima para o prêmio de risco é o que distingue o CAPM dos demais modelos.

² MODIGLIANI, F., & Miller, M., op.cit.

³ William Sharpe ganhou o Prêmio Nobel de Economia (1990) por ser o principal teórico do CAPM.

No contexto do CAPM, o único risco relevante é o *risco de mercado ou risco sistemático*, ou seja, o risco que não pode ser eliminado por diversificação primária. Esse risco está relacionado a mudanças macroeconômicas ou condições gerais da economia que afetam as empresas como um todo, e algumas são mais sensíveis a esses fatores do que outras. No modelo, o risco sistemático é representado pelo beta do título. Se o beta de uma ação for igual a 1, seus retornos tendem acompanhar o mercado. Se a carteira de mercado subir ou cair 10%, a ação também tenderá a subir ou cair 10%. Se uma ação possuir um beta menor do que 1, subirá ou cairá menos do que o mercado. Por exemplo, suponhamos que uma ação tenha um beta de 0,5. Se a carteira de mercado subir ou cair 10%, a ação tenderá a subir ou cair apenas 5%. Uma ação com um beta maior do que 1,0 subirá ou cairá mais do que o mercado. Por exemplo, uma ação com um beta de 1,5 tenderá a subir ou descer 15% quando a carteira de mercado subir ou cair 10%.

De acordo com o CAPM, a relação entre risco e retorno para qualquer ativo ou carteira de ativos com risco é representada por uma relação linear denominada *Linha de Mercado de Títulos* (LMT). A figura a seguir representa essa linha.



R_f representa a rentabilidade dos ativos sem risco, M representa a carteira de mercado e R_m seu retorno esperado. Embora o modelo CAPM esteja sujeito a várias críticas e restrições, tem a vantagem de considerar de forma explícita a classe de risco do empreendimento, determinando a taxa de retorno esperado para os ativos da empresa. Essa taxa é função inversa dos preços dos títulos, tornando o CAPM um modelo de formação de preços de ativos com risco. Os investidores relacionam o preço dos ativos com seu risco sistemático por meio das taxas esperadas de retorno apropriadas. Qualquer ativo localizado acima da LMT será considerado subvalorado, porque seu retorno esperado estará acima do apropriado para seu nível de risco e, consequentemente, todos desejariam adquirir esse ativo com retorno acima do normal. A demanda pelo ativo elevará seu preço, reduzindo indiretamente sua taxa de retorno até retornar ao ponto de equilíbrio (LMT). O mesmo raciocínio vale para ativos situados abaixo da LMT com retornos abaixo do apropriado, dando margem a um ajustamento por meio da queda de seu preço.

Observe a figura da LMT e imagine que você encontre a ação A sendo negociada no mercado. Você a compraria? Esperamos que não, pois, se comprar um ativo com beta igual a 0,5, existe a possibilidade de você aplicar metade do seu capital no ativo sem risco e a outra metade na carteira de mercado e obter um retorno esperado maior para o mesmo nível de risco. E, em relação à ação B da figura? Você ficaria tentado pelo elevado retorno? Esperamos que não, pois também se observa que existem melhores oportunidades disponíveis, isto é, há uma combinação na LMT que para o mesmo nível de risco, proporciona um retorno maior. Isso é conseguido tomando emprestado e aplicando o total de recursos (150%) na carteira de ativos com risco.

A determinação do custo do capital próprio utilizando-se a metodologia do CAPM poderá ser feita mediante os seguintes passos:

- Obter o *beta* dos títulos da empresa. Caso ele não seja objeto de publicações especializadas, medir o *beta* dos títulos da empresa negociados em bolsa, obtendo assim o *beta* de seus ativos (hipótese em que o projeto seja “cópia” dos atuais ativos da empresa).
- Situar o *beta* do projeto em relação ao mercado, caso o projeto a avaliar altere o risco ou a estrutura de capital da empresa. Para empresas que não tenham títulos negociados no mercado, estimar a medida de risco do projeto por meio da comparação de seus riscos operacionais, financeiros e de mercado, com atividades de mesma classe de risco (veja a Seção 12.6 para ajuste do beta).
- Escolher a taxa livre de risco, R_f .
- Definir a carteira de mercado e medir seu retorno esperado, \bar{R}_m .
- Calcular o custo do capital próprio usando o CAPM:

$$K_{cp} = R_f + \beta [\bar{R}_m - R_f]$$

onde: K_{cp} = custo do capital próprio (rentabilidade requerida pelos acionistas); R_f = rentabilidade dos ativos sem risco; \bar{R}_m = rentabilidade esperada do índice de mercado (Ibovespa); β = beta (volatilidade das ações comuns em relação ao índice de mercado).

Para o uso desse modelo é necessária a disponibilidade de betas. Não existindo betas publicados, estes devem ser calculados a partir dos retornos esperados ou observados das ações da empresa. Deve ser definida a carteira de mercado com a respectiva definição do retorno de mercado, \bar{R}_m . Para efeitos práticos, a carteira de mercado pode ser aproximada pelo Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa), no caso brasileiro. A escolha do ativo sem risco deverá guardar relação com o período em que se pretenda medir o *beta*. Na ausência de aplicações de longo prazo no mercado brasileiro, candidatos para a taxa de retorno sem risco (R_f) poderiam ser a remuneração média, no longo prazo, de títulos como:

- CDBs de emissão de bancos de primeiríssima linha;
- cadernetas de poupança;
- títulos do Tesouro como LFT, LBC, BBC etc.; T-Bonds de dez anos do Tesouro dos Estados Unidos;
- outros títulos de dívida que possam ser considerados sem risco.

O uso de qualquer um desses retornos não estará livre de controvérsia, devendo o analista preparar-se para explicitar e justificar sua escolha. Os conceitos discutidos e as equações desenvolvidas podem ser mais bem compreendidos por meio dos seguintes exemplos numéricos ilustrativos.

Exemplo 12.1

Calcular o custo líquido da dívida de uma empresa que paga juros de 6% sobre o exigível de longo prazo e tem uma alíquota de IR de 30%.

Dados: $K_d = 6\%$ a.a., $T = T^* = 30\%$, $K_d(1 - T) = ?$

$$\text{Custo líquido da dívida} = K_d(1 - T) = 0,06 \times (1 - 0,30) = 4,2\%$$

Exemplo 12.2

Calcular o CMPC para uma empresa em que o custo da dívida seja de 6% a.a., o retorno sobre o capital próprio, de 9% a.a., a alíquota de IR, 30%, e a dívida represente 20% na estrutura de capital.

Dados: $K_d = 6\%$ a.a., $K_{cp} = 9\%$ a.a., $T = T^* = \frac{D}{(CP + D)} = 0,20$, $K = ?$

$$K = K_{cp} \left(\frac{CP}{CP + D} \right) + K_d (1 - T) \left(\frac{D}{CP + D} \right) = 9\% \times 0,80 + 6\%(1 - 0,30) \times 0,20 = 8,04\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 12.3

Admitamos que a dívida de uma empresa represente 35,71% na sua estrutura de capital, que a taxa de juros sobre a dívida de longo prazo seja de 8% a.a. e que o custo do capital próprio seja de 10,78%. A empresa gera fluxos de caixa perpétuos, antes de juros e imposto de renda, de \$142.860/ano e sua alíquota de imposto de renda é de 30%. Pede-se estimar o CPMC e o custo do capital apropriado para a empresa sem dívidas.

Dados: $L \left(\frac{D}{V} \right) = 35,71\%$, $K_d = 8\%$ a.a., $K_{cp} = 10,78\%$ a.a., $LAJIR = \$142.860$, $T = T^* = 30\%$, $K = ?$, $K_o = ?$

- Custo Médio Ponderado do Capital

$$K = K_{cp} \left(\frac{CP}{V} \right) + K_d (1 - T) \left(\frac{D}{V} \right) = 0,1078 \times (1 - 0,3571) + 0,08 \times (1 - 0,30) \times 0,3571 = 0,0893$$

- Custo do capital para a empresa sem dívidas

$$K = K_o \left[1 - T^* \times L \right] \Rightarrow K_o = \frac{K}{1 - T^* \times L} = \frac{\$142.860 \times (1 - 0,30)}{1 - 0,30 \times 0,3571} = 0,10$$

Exemplo 12.4

Um projeto de investimento tem um custo inicial de \$100.000 e deve gerar um fluxo de caixa líquido de \$15.000/ano durante 15 anos. Pede-se determinar o custo do capital adequado para desconto dos fluxos de caixa, considerando-se que: a) o custo da dívida é de 6% a.a.; b) o custo do capital para a empresa sem dívidas é de 10% a.a.; c) a alíquota de IR é de 30% e a taxa efetiva do *benefício fiscal do uso de capital de terceiros* é igual a essa alíquota ($T^* = T$), ou seja, a empresa pode aproveitar totalmente as deduções fiscais atualizadas; d) o financiamento afeta o valor da empresa somente por meio dos benefícios fiscais dos juros e não existe qualquer outro efeito colateral; e) a dívida representa 20% na estrutura de capital e será ajustada de modo que mantenha constante a proporção de endividamento ($L = 0,20$).

Dados: $I = \$100.000$; $FC_t = \$15.000/\text{ano}$; $n = 15$ anos; $K_d = 6\%$ a.a.; $T = T^* = 0,3$;

$$L = \frac{D}{V} = 0,20; K_o = 10\% \text{ a.a.}$$

- Cálculo do custo do capital para o projeto: fórmula de Modigliani-Miller (MM)

$$K = K_o [1 - T \times L] = 0,10 \times (1 - 0,30 \times 0,20) = 9,40\% \text{ a.a.}$$

- Cálculo do custo do capital para o projeto: fórmula do CMPC

Para o cálculo do CMPC é necessário primeiramente calcular o valor de mercado do projeto e o custo do capital próprio:

Valor Presente Líquido do Projeto:

$$\begin{aligned} VPL &= -I + \sum_{t=1}^{15} \frac{FC_t}{(1+K)^t} = -\$100.000 + \$15.000 \times a_{15|9,40\%} \\ &= -\$100.000 + \$15.000 \times 7,87383 = \$18.107 \end{aligned}$$

Valor de Mercado do Projeto: $I + VPL = \$100.000 + \$18.107 = \$118.107$

Valor de Mercado da Dívida (D): valor de mercado do projeto $\times L = \$118.107 \times 0,20 = \23.622

Valor de Mercado do Capital Próprio (CP): $\$118.107 - \$23.622 = \$94.485$

Custo do Capital Próprio:

$$K_{cp} = K_o + \left(\frac{D}{CP} \right) (K_o - K_d)(1-T) = 0,10 + \left(\frac{\$23.622}{\$94.485} \right) \times (0,10 - 0,06) \times (1 - 0,30) = 10,70\% \text{ a.a.}$$

Custo do Capital para o Projeto:

$$K = K_{cp} \left(\frac{CP}{V} \right) + K_d (1-T) \left(\frac{D}{V} \right) = 0,1070 \times \left(\frac{\$94.485}{\$118.107} \right) + 0,06 \times (1 - 0,30) \times \left(\frac{\$23.622}{\$118.107} \right) = 9,40\% \text{ a.a.}$$

É importante observar alguns aspectos acerca dos cálculos:

- $\frac{D}{V}$ representa o novo índice de estrutura de capital. A dívida será reajustada de modo que se mantenha constante a proporção de endividamento ($L = 0,20$), e esse índice será o desejado pela empresa após a implementação do projeto.
- Na fórmula do CMPC, as proporções $\frac{CP}{V}$ e $\frac{D}{V}$ foram baseadas em valores de mercado e não no custo inicial do projeto, pois esse custo desconsidera o VPL. É por isso que neste exemplo o resultado do CMPC é igual ao da fórmula de MM (Modigliani-Miller).
- O custo do capital baseado na fórmula de MM seria perfeitamente apropriado somente se o projeto suportasse um nível de dívida constante (nível de $\$23.622$) e se os fluxos fossem perpetuidades, que não é o caso. O uso da fórmula de ME (Miles-Ezzell) teria a seu favor o fato de os fluxos de caixa não serem perpetuidades (prazo finito de 15 anos), mas a empresa teria de ajustar seu passivo de modo que mantivesse constante a proporção de endividamento ($L = 0,20$).⁴

Exemplo 12.5

Suponha que você seja um especialista em avaliação de empresas e seja solicitado para estimar o valor de uma empresa que usa capital próprio e capital de terceiros e tenha os seguintes fluxos de caixa esperados para os próximos cinco anos.

⁴ Veja Brealey & Myers. *Princípios de finanças empresariais*. McGraw-Hill, 1992, onde está derivada a fórmula de Miles-Ezzell.

(em \$ 1.000)

Ano	Fluxo de caixa do capital próprio (dos acionistas)	Fluxo de caixa do capital de terceiros (dos credores): juros = D × (1 - T) × K _d	Fluxo de caixa da firma (dos acionistas + dos credores)
1	\$ 50,00	\$ 40,00	\$ 50,00 + \$ 40,00 = \$ 90,00
2	\$ 60,00	\$ 40,00	\$ 60,00 + \$ 40,00 = \$ 100,00
3	\$ 68,00	\$ 40,00	\$ 68,00 + \$ 40,00 = \$ 108,00
4	\$ 76,20	\$ 40,00	\$ 76,20 + \$ 40,00 = \$ 116,20
5	\$ 83,49	\$ 40,00	\$ 83,49 + \$ 40,00 = \$ 123,49
valor residual	\$ 1.603,00		\$ 2.363,00

Assuma que a alíquota de IR seja de 50%, que o custo do capital próprio seja de 13,625% a.a., que a empresa possa tomar recursos a longo prazo à taxa de 10% a.a. e que a dívida de longo prazo seja de \$ 800.000. Pede-se estimar o valor da empresa.

Dados: alíquota de IR (T) = 50%; custo do capital próprio (K_{cp}) = 13,625% a.a.; custo líquido da dívida (K_d) (1 - T) = 10% × (1 - 0,5) = 5% a.a.; valor da dívida (D) = \$ 800; valor residual do capital próprio = \$ 1.603,00; valor residual da empresa = \$ 2.363,00;

a) Primeira abordagem de avaliação:

Uma primeira forma de estimar o valor da empresa é calculando o valor do capital próprio que, somado ao valor da dívida, resulta no valor da empresa.

- **Valor do capital próprio**

O valor do capital próprio é estimado descontando-se os fluxos de caixa do capital próprio, isto é, os fluxos de caixa após despesas operacionais diversas, obrigações fiscais, juros e amortização de empréstimos. O fator de desconto deve ser o custo do capital próprio.

$$\begin{aligned} \text{valor do capital próprio} &= \frac{\$ 50,00}{1,13625} + \frac{\$ 60,00}{(1,13625)^2} + \frac{\$ 68,00}{(1,13625)^3} \\ &\quad + \frac{\$ 76,20}{(1,13625)^4} + \frac{\$ 83,49 + \$ 1.603}{(1,13625)^5} = \$ 1.073 \end{aligned}$$

- **Valor da empresa**

$$\begin{aligned} V &= \text{valor do capital próprio} + \text{valor da dívida} \\ &= \$ 1.073 + \$ 800 = \$ 1.873 \end{aligned}$$

b) Segunda abordagem de avaliação

Uma segunda forma de estimar o valor da empresa é descontando-se os fluxos de caixa da empresa, isto é, os fluxos de caixa após despesas operacionais e obrigações fiscais, porém antes de juros e amortização de empréstimos. O fator de desconto adequado é o CPMC, que é o custo ponderado dos diversos componentes da estrutura de capital da empresa.

- Custo Médio Ponderado do Capital

$$K = K_{cp} \left(\frac{CP}{CP + D} \right) + K_d (1 - T) \left(\frac{D}{CP + D} \right)$$

$$= 13,625\% \times \left(\frac{\$1.073}{\$1.073 + \$800} \right) + 10\% \times (1 - 0,50) \times \left(\frac{\$800}{\$1.073 + \$800} \right) = 9,94\% \text{ a.a.}$$

- Valor da empresa

$$V = \frac{\$90}{1,0994} + \frac{\$100}{(1,0994)^2} + \frac{\$108}{(1,0994)^3} + \frac{\$116,2}{(1,0994)^2}$$

$$+ \frac{(\$123,49 + \$2.363)}{(1,0994)^5} = \$1.873$$

Repare que, se os fluxos de caixa do capital próprio fossem descontados usando-se como fator de desconto o CMPC (9,94%), o seu valor presente seria maior (\$ 1.248), cometendo-se um erro de *superavaliação* do capital próprio. Por outro lado, se os fluxos de caixa da empresa fossem descontados usando-se o custo do capital próprio (13,625%), o valor da empresa seria menor (\$ 1.613), cometendo-se um erro de *subavaliação*. Este exemplo mostrou a importância de serem utilizadas taxas de desconto apropriadas para o tipo e risco de cada fluxo.

Exemplo 12.6

Uma empresa atualmente sem dívidas pretende tomar um financiamento de longo prazo no valor de \$ 400.000 a juros de 8% a.a. A empresa espera gerar fluxos de caixa perpétuos, antes de juros e imposto de renda, de \$ 142.860/ano. A alíquota de imposto de renda é de 30%. Empresas do mesmo setor que só usam capital próprio têm um custo de capital de 10%. Pede-se estimar o valor da empresa após o levantamento do empréstimo; o custo do capital próprio; o CMPC depois de levantado o financiamento.

Dados: $D = \$400.000$, $K_d = 8\% \text{ a.a.}$, $K_o = 10\% \text{ a.a.}$, $\text{LAJIR} = \$142.860$, $T = T^* = 30\%$, $V = ?$, $K_{cp} = ?$, $K = ?$

- Valor da empresa

$$V = \frac{\text{LAJIR}(1 - T)}{K_o} + T \times D = \frac{\$142.860 \times (1 - 0,30)}{0,10} + 0,30 \times \$400.000 = \$1.120.000$$

- Custo do capital próprio

$$K_{cp} = K_o + \left(\frac{D}{CP} \right) (K_o - K_d) (1 - T) = 0,10 + \left(\frac{\$400.000}{\$720.000} \right) \times (0,10 - 0,08) \times (1 - 0,30) = 0,1078$$

- Custo Médio Ponderado do Capital

$$K = K_{cp} \left(\frac{CP}{V} \right) + K_d (1 - T) \left(\frac{D}{V} \right) = 0,1078 \times \left(\frac{\$720.000}{\$1.120.000} \right) + 0,08 \times (1 - 0,30) \times \left(\frac{\$400.000}{\$1.120.000} \right)$$

$$= 0,0893$$

Alternativamente, supondo que a empresa ajuste a dívida de modo que permaneça constante a proporção de endividamento (L) e admitindo-se que L seja igual a $\frac{D}{V}$, podemos também calcular o CMPC usando a equação de Modigliani-Miller:

$$K = K_o [1 - T \times L] = 0,10 \times \left[1 - 0,30 \times \left(\frac{\$400.000}{\$1.120.000} \right) \right] = 0,0893$$

Os resultados dos exemplos anteriores mostraram que, sob as proposições de Modigliani-Miller, o aumento da dívida de longo prazo eleva o valor da empresa e diminui o CMPC, devido ao *benefício fiscal do uso de capital de terceiros*. Entretanto, esses resultados poderiam nos induzir a pensar que, elevando o grau de endividamento, o valor da empresa aumentaria indefinidamente. Contudo, isso não ocorre na realidade, pois na prática as empresas adotam níveis de endividamento moderados. Na próxima seção estudaremos como a partir de certo nível de endividamento ocorre um efeito contrário, pois o maior uso de dívida aumenta a possibilidade de dificuldades financeiras, incrementando outros custos que se contrapõem às vantagens fiscais implícitas na dívida.

12.5 Risco financeiro e custo do capital

Risco financeiro diz respeito aos custos financeiros fixos decorrentes dos financiamentos do projeto ou da empresa. Refere-se ao risco de não conseguir cobrir as despesas financeiras fixas e indica em que medida a empresa utiliza dívida para financiar seu ativo. À seguir discutiremos de que modo o aumento do endividamento altera o custo do capital e o valor da empresa.

Tomando os dados do exemplo anterior, o quadro a seguir mostra os valores das diferentes variáveis para diversos mix de composição dívida-capital próprio. A linha em negrito corresponde aos dados do referido exemplo.

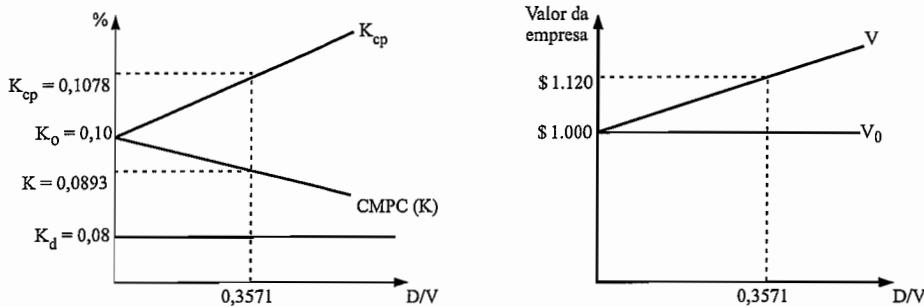
(em \$ 1.000)					
Divida D	Capital próprio CP	Valor da empresa V	Grau de endividamento D/V	Custo do capital próprio K_{cp}	CMPC K
0	\$ 1.000	\$ 1.000	0,0000	0,1000	0,1000
\$ 100	\$ 930	\$ 1.030	0,0971	0,1015	0,0971
\$ 200	\$ 860	\$ 1.060	0,1887	0,1033	0,0943
\$ 300	\$ 790	\$ 1.090	0,2752	0,1053	0,0917
\$ 400	\$ 720	\$ 1.120	0,3571	0,1078	0,0893
\$ 500	\$ 650	\$ 1.150	0,4348	0,1108	0,0870

Dados: $T = 30\%$, $K_o = 10\%$, $K_d = 8\% \text{ a.a.}$, $LAJIR = \$142.860$, $K_o = 10\% \text{ a.a.}$

As equações usadas para os cálculos são:

$$K_{cp} = K_o + \left(\frac{D}{CP} \right) (K_o - K_d)(1 - T); \quad K = K_{cp} \left(\frac{CP}{V} \right) + k_d (1 - T) \left(\frac{D}{V} \right); \quad V = \frac{LAJIR (1 - T)}{K_o} + T \times D;$$

As figuras a seguir mostram graficamente os valores do quadro anterior:



Nota-se que o maior uso de capital de terceiros aumenta o custo do capital próprio (K_{cp}), diminui o Custo Médio Ponderado do Capital (K) e, consequentemente, aumenta o valor da empresa graças ao *benefício fiscal do uso de capital de terceiros*. Repare que o custo da dívida (K_d) e o LAJIR($1 - T$) permaneceram constantes, motivo pelo qual os resultados podem nos induzir a crer que, ao elevarmos o grau de endividamento, o valor da empresa aumenta indefinidamente refletindo o *benefício fiscal do uso de capital de terceiros*, levando a empresa a optar por uma estrutura de capital composta unicamente por capital de terceiros. Entretanto, isso é incompatível com a realidade, pois na prática as empresas adotam níveis de endividamento apenas moderados. De fato, a partir de certo nível de endividamento existe um efeito contrário, pois o maior uso de capital de terceiros aumenta também o risco financeiro, incrementa a possibilidade de dificuldades financeiras e de falência e, consequentemente, eleva os custos da dívida e do capital próprio. O aumento desses custos vão de encontro com as vantagens fiscais associadas ao capital de terceiros, reduzindo essas vantagens e o valor da empresa. Em outras palavras, existe um limite ao uso de capital de terceiros. Qual é esse limite? A seguir mostraremos de que maneira, em uma análise estática, poderia ser definido o limite de estrutura de capital de uma empresa.

Analisemos o seguinte exemplo: admitamos que uma empresa atualmente sem dívidas pretenda tomar um financiamento de longo prazo no valor de \$20 milhões a juros de 7% a.a. A empresa espera gerar fluxos de caixa perpétuos, antes de juros e imposto de renda, de \$22 milhões/ano. O beta da empresa é de 1,0 e sua alíquota de imposto de renda é de 30%. A rentabilidade dos ativos sem risco é de 7% a.a. e a rentabilidade esperada da carteira de mercado é de 17% a.a.

O quadro e os gráficos a seguir mostram os valores das diversas variáveis de acordo com diversos graus de endividamento $\left(\frac{D}{V}\right)$. A linha em negrito corresponde aos dados do presente exemplo.

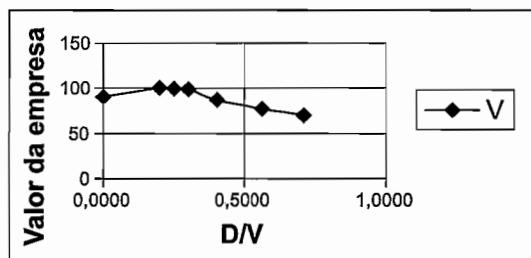
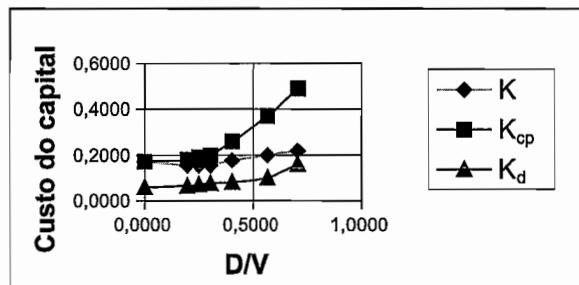
Dívida D (milhões)	Custo da dívida K_d	Beta do capital próprio β	Custo do capital próprio K_{cp}	Capital próprio CP (milhões)	Valor da empresa V (milhões)	Grau de endividamento D/V	CMPC K
0	0,06	1,0	0,17	91	91	0,0000	0,1700
20	0,07	1,1	0,18	81	101	0,1990	0,1532
25	0,07	1,2	0,19	75	100	0,2510	0,1546
30	0,08	1,3	0,20	69	99	0,3026	0,1554
35	0,08	1,9	0,26	52	87	0,4037	0,1776
44	0,10	3,0	0,37	33	77	0,5692	0,1992
50	0,16	4,2	0,49	20	70	0,7143	0,2200

Dados: $T = 30\%$, $\beta_0 = 1$, $K_d = 7\% \text{ a.a.}$, LAJIR = \$22, $R_f = 7\% \text{ a.a.}$, $\bar{R}_m = 17\% \text{ a.a.}$

As equações usadas para os cálculos são:

$$K_{cp} = \underbrace{R_f}_{\text{taxa de juros sem risco}} + \underbrace{\beta_0 (\bar{R}_m - R_f)}_{\text{prêmio pelo risco operacional}} + \underbrace{(\beta - \beta_0) (\bar{R}_m - R_f)}_{\text{prêmio pelo risco financeiro}}$$

$$CP = \frac{(LAJIR - D \times K_d) (1 - T)}{K_{cp}}; \quad V = D + CP; \quad K = K_{cp} \left(\frac{CP}{V} \right) + K_d (1 - T) \left(\frac{D}{V} \right)$$



Nos gráficos podemos observar que o custo da dívida, o beta e o custo do capital próprio são funções diretas do grau de endividamento, aumentando em função da relação $\left(\frac{D}{V}\right)$.

Contudo, observamos também que o valor da empresa (V) alcança um valor máximo quando a relação D/V é igual a 0,1990, ou seja, quando K atinge seu valor mínimo (15,32%). Após atingir seu máximo, o valor da empresa começa a diminuir devido ao aumento do Custo Médio Ponderado do Capital (K). O aumento de K se deve ao fato de que um maior grau de endividamento aumenta as possibilidades de a empresa entrar em dificuldades financeiras, que trazem consigo um acréscimo de outros custos que se contrapõem ao *benefício fiscal do uso de capital de terceiros*. O CMPC já inclui o risco decorrente do aumento do risco financeiro.

Para contemplar o aumento das possibilidades de a empresa entrar em dificuldades financeiras, devido ao maior grau de endividamento, a Proposição I de Modigliani-Miller pode ser ajustada do seguinte modo:

$$V = V_0 + T \times D - \text{Valor presente dos custos associados a dificuldades financeiras}$$

A posição *tradicionalista* sobre estrutura de capital admite que exista um nível ótimo de estrutura de capital em que o valor da empresa é maximizado ao nível de endividamento que minimiza o CMPC. Contudo, nem sempre a maximização do valor da empresa é equivalente à minimização do CMPC. Se o resultado operacional, $LAJIR(1 - T)$, for afetado pelo grau de endividamento, esses dois objetivos não serão necessariamente equivalentes. Se o $LAJIR(1 - T)$ for constante, tudo o que aumentar o valor da empresa reduzirá o CMPC. Mas se o $LAJIR(1 - T)$ também variar, tudo poderá acontecer. Logo, não existe uma resposta simples sobre qual a melhor estrutura de capital, nem podemos afirmar que o endividamento adicional seja sempre melhor. O endividamento pode ser melhor do que o capital próprio em alguns casos e pior em outros.

12.6 Risco financeiro e beta: ajuste do custo do capital para risco financeiro

O CMPC reflete o risco e a estrutura de capital desejada pela empresa com seus atuais ativos, mas não considera necessariamente as alterações devidas a um determinado projeto de investimento. Se o projeto tiver o mesmo perfil de risco operacional da empresa patrocinadora e não altera a alavancagem financeira da empresa, o CMPC da empresa poderá ser usado no desconto dos fluxos de caixa do projeto. Entretanto, se o projeto aumentar ou diminuir o risco financeiro da empresa, será necessário efetuar um ajuste no CMPC. A seguir, trataremos das razões desse ajuste e dos procedimentos para realizá-lo.

Como a empresa é basicamente financiada por capital próprio e por dívida, o beta da empresa é o *beta de seu ativo*, que é uma média ponderada dos betas do capital próprio e da dívida. Então, o *beta do ativo* pode ser assim calculado:

$$\beta_A = \beta \left(\frac{CP}{CP + D} \right) + \beta_d (1 - T) \left(\frac{D}{CP + D} \right)$$

onde: β_A = beta do ativo; β_d = beta da dívida; β = beta do capital próprio (beta atual da empresa); D = valor de mercado da dívida; CP = valor de mercado do capital próprio; T = alíquota de imposto de renda.

Outra equação alternativa para o *beta do ativo* é:

$$\beta_A = \beta_o \left(1 - T \times \frac{D}{CP + D} \right)$$

onde β_o é o beta não-alavancado, ou seja, o beta que a empresa teria se ela não tivesse dívida alguma.

Como as duas expressões anteriores para o β_A são equivalentes, então podemos igualá-las e a seguir destacar o beta do capital próprio:

$$\begin{aligned} \beta \left(\frac{CP}{CP + D} \right) + \beta_d (1 - T) \left(\frac{D}{CP + D} \right) &= \beta_o \left(1 - T \times \frac{CP}{CP + D} \right) \\ \Rightarrow \beta &= \beta_o + (\beta_o - \beta_d) \left(\frac{D}{CP} \right) (1 - T) \end{aligned}$$

Se todo o risco da empresa for originado pelo acionistas (pelo capital próprio) ou se o beta da dívida for muito baixo ou, em outras palavras, se a probabilidade de a empresa não honrar seus compromissos financeiros for quase inexistente, então poderemos aproximar β_d a zero. Logo, o beta do capital próprio é:

$$\beta = \beta_o \left(1 + (1 - T) \frac{D}{CP} \right)$$

Finalmente, podemos destacar o beta não-alavancado da empresa:

$$\beta_o = \left(\frac{\beta}{1 + (1 - T) \frac{D}{CP}} \right)$$

A expressão anterior permite expurgar a alavancagem financeira do beta atual. Feito isso, agora podemos inserir a nova alavancagem (índice dívida/capital próprio) decorrente da aceitação do projeto e calcular um novo beta do capital próprio. Esse beta será chamado de beta ajustado e é calculado do seguinte modo:

$$\beta_a = \beta_o \left(1 + (1 - T) \frac{D'}{CP'} \right)$$

onde $\frac{D'}{CP'}$ é o novo índice dívida/capital próprio após a decisão de investir no projeto. Poderia ser o índice dívida/capital próprio desejado pela empresa após a implementação do projeto.

Se o projeto proposto tiver o mesmo perfil de risco operacional e a mesma estrutura de capital que a empresa patrocinadora, o custo do capital da empresa patrocinadora poderá ser utilizado para o desconto dos fluxos de caixa do projeto. Mas, se o perfil de risco operacional do projeto for diferente ao da empresa, ou se o projeto for mais altamente alavancado que a empresa patrocinadora, envolvendo, portanto, um maior risco financeiro, os passos para se estimar o custo do capital para este projeto serão:

1. Selecionar um setor de empresas de atividades operacionais similares às do projeto.
2. Obter os betas do capital próprio (beta das ações) das empresas do setor selecionado.
3. Retirar a alavancagem dos betas, de modo que se obtenham os betas não-alavancados.
4. Calcular a média dos betas não-alavancados.
5. Ajustar o beta calculado na etapa anterior ao grau de endividamento que será tomado pela empresa que pretende implementar o projeto.
6. Por meio do CAPM e usando como beta o beta ajustado na etapa anterior, calcular o custo do capital próprio.
7. Calcular o CMPC usando como pesos do capital próprio e do capital de terceiros a estrutura de capital que a empresa manterá após a decisão de investir no projeto.

Uma forma de obter uma aproximação ao problema é usando os dados do setor respectivo. Como o risco operacional afeta o beta de um projeto de investimento, a amostragem de empresas representativas do setor deve restringir-se àquelas que utilizam um conjunto de ativos e métodos de produção que sejam aproximadamente equivalentes aos do projeto proposto.

Exemplo 12.7

O beta (β) das ações comuns de uma empresa é 1,7. A dívida, que atualmente representa 30% do ativo total, passará a representar 40% devido a um financiamento contratado. Calcular o retorno requerido pelos acionistas antes e depois do financiamento.

Dados: rentabilidade dos ativos sem risco (R_f) = 2% a.a., alíquota de IR (T) = 35%, retorno esperado do mercado (\bar{R}_m) = 6% a.a., $D = 0,30$, $D' = 0,40$, $K_{cp} = ?$

- Retorno requerido pelos acionistas antes de a empresa tomar o financiamento

$$K_{cp} = R_f + \beta (\bar{R}_m - R_f) = 2\% + 1,7 \times (6\% - 2\%) = 8,8\%$$

- Retorno requerido pelos acionistas depois de a empresa tomar o financiamento

$$\text{beta não-alavancado: } \beta_0 = \left(\frac{\beta}{1 + (1-T)D/CP} \right) = \frac{1,7}{1 + (1 - 0,35) \times \frac{0,30}{0,70}} = 1,33$$

$$\text{beta ajustado: } \beta_a = \beta_0 (1 + (1-T)D'/CP') = 1,33 \times \left(1 + (1 - 0,35) \frac{0,40}{0,60} \right) = 1,91$$

$$\text{retorno requerido pelos acionistas: } K_{cp} = R_f + \beta_a (\bar{R} - R_f) = 2\% + 1,91 \times (6\% - 2\%) = 9,64\%$$

Tal como era de esperar, o aumento da dívida se traduz em um maior retorno exigido pelos acionistas, ou seja, o aumento da alavancagem financeira (risco financeiro) resulta em um maior custo do capital próprio.

Exemplo 12.8

Uma empresa pretende expandir a sua produção investindo \$3 milhões em novas instalações. Desses \$3 milhões, \$2 milhões serão recursos próprios levantados por meio de uma emissão de ações e \$1 milhão será levantado por meio de um empréstimo a juros de 6,5% a.a. Atualmente, em valores de mercado, o capital próprio e a dívida da empresa são, respectivamente, \$20 milhões e \$15 milhões. Pede-se calcular o custo médio ponderado do capital para desconto dos fluxos de caixa do projeto. Considere as seguintes informações adicionais: custo da dívida (K_d) = 6,5% a.a.; rentabilidade dos ativos sem risco (R_f) = 7% a.a.; alíquota de IR (T) = 30%; beta do capital próprio (β) = 0,5; retorno esperado do mercado (\bar{R}_m) = 9% a.a.

O beta do capital próprio leva implícito a atual estrutura de capital da empresa (\$20 milhões de capital próprio e \$15 milhões de dívida). Entretanto, o projeto deve alterar essa estrutura para \$22 milhões de capital próprio e \$16 milhões de dívida, alterando em consequência a alavancagem financeira da empresa, portanto, se faz necessário ajustar o beta de modo que reflita esse novo risco financeiro. No processo de ajuste, primeiramente deve ser expurgada a alavancagem financeira do beta e, a seguir, o beta expurgado (beta não-alavancado) deve ser ajustado ao novo risco financeiro.

- Cálculo do beta não-alavancado (β_o)

$$\beta_o = \left(\frac{\beta}{1 + (1 - T) \frac{D'}{CP'}} \right) = \frac{0,5}{1 + (1 - 0,30) \times \frac{\$15}{\$20}} = 0,3279$$

onde, D' e CP' são os atuais valores da dívida e do capital próprio, respectivamente, \$15 milhões e \$20 milhões.

- Cálculo do beta ajustado

$$\beta_a = \beta_o \left(1 + (1 - T) \frac{D'}{CP'} \right) = 0,3279 \times \left(1 + (1 - 0,30) \times \frac{\$16}{\$22} \right) = 0,4948$$

onde: β_a é o beta do capital próprio ajustado ao novo risco financeiro trazido pelo investimento; CP' e D' são os novos valores do capital próprio e da dívida, respectivamente, \$22 milhões e \$16 milhões.

- Custo do capital próprio:

$$K_{cp} = R_f + \beta_a (\bar{R}_m - R_f) = 7\% + 0,4948 \times (9\% - 7\%) = 7,99\%$$

- Custo do capital para o projeto (custo ajustado)

$$\begin{aligned} K &= K_{cp} \left(\frac{CP'}{CP' + D'} \right) + K_d (1 - T) \left(\frac{D'}{CP' + D'} \right) \\ &= 7,99\% \times \left(\frac{\$22}{\$22 + \$16} \right) + 6,5\% \times (1 - 0,30) \times \left(\frac{\$16}{\$22 + \$16} \right) = 6,54\% \end{aligned}$$

Nos cálculos, $\frac{D'}{CP'}$ representa o novo índice dívida-capital próprio após a decisão de investir no projeto. Supõe-se que seja o índice dívida-capital próprio de médio e longo prazo desejado pela empresa após a implementação do projeto.

Exemplo 12.9

Uma empresa será constituída para explorar as reservas de uma jazida de manganês. O projeto representa um investimento de \$ 15 milhões, e 60% será financiado a juros de 17% a.a. Espera-se que o projeto gere um *fluxo de caixa operacional líquido* de \$ 2 milhões/ano durante 16 anos. A rentabilidade dos ativos sem risco é de 7% a.a., a rentabilidade esperada da carteira de mercado é de 10% a.a. e a alíquota de IR do setor é de 30%. O projeto não tem valor residual. Estimar o custo de oportunidade do capital e avaliar economicamente o projeto.

Consideremos os seguintes dados observados e calculados para as empresas representativas do setor de mineração com métodos de produção aproximadamente equivalentes aos do projeto proposto:

Empresa	Relação dívida-capital próprio (D/CP)	Beta atual β	Beta não-alavancado
A	0,10	1,12	$\beta_0 = \left(\frac{\beta}{1 + (1 - T)D/CP} \right) = \frac{1,12}{1 + (1 - 0,30) \times 0,10} = 1,047$
B	0,13	1,15	$\left(\frac{1,15}{1 + (1 - 0,30) \times 0,13} \right) = 1,054$
C	0,15	1,20	$\left(\frac{1,20}{1 + (1 - 0,30) \times 0,15} \right) = 1,086$
D	0,09	1,10	$\left(\frac{1,10}{1 + (1 - 0,30) \times 0,09} \right) = 1,035$

Total = 4,222

- Beta não-alavancado médio do setor

$$\bar{\beta}_0 = 4,222/4 = 1,056$$

Uma forma alternativa de calcular o beta desalavancado médio do setor seria ponderando os betas não-alavancados das empresas por um índice que represente o tamanho da empresa no setor (por exemplo, o índice valor dos ativos da empresa-valor dos ativos do setor).

- Cálculo do beta ajustado

$$\beta_a = \beta_0 \left(1 + (1 - T) \frac{D'}{CP'} \right)$$

onde D' representa a parte do investimento financiada com recursos de terceiros ($60\% \times \$15 = \9 milhões) e CP' representa a parcela financiada com recursos próprios ($40\% \times \$15 = \6 milhões).

milhões). O cálculo anterior considera que D'/CP' seja a razão esperada a permanecer a médio e longo prazo.

- Custo do capital próprio

$$K_{cp} = R_f + \beta_a (\bar{R}_m - R_f) = 7\% + 2,165 \times (10\% - 7\%) = 13,5\% \text{ a.a.}$$

- Custo do capital para o projeto (custo ajustado)

$$K = K_{cp} \left(\frac{CP'}{CP' + D'} \right) + K_d (1-T) \left(\frac{D'}{CP' + D'} \right)$$

$$13,5\% \times \left(\frac{\$6}{\$6 + \$9} \right) + 17\% \times (1 - 0,30) \times \left(\frac{\$9}{\$6 + \$9} \right) = 12,54\%$$

- Cálculo do VPL e avaliação econômica do projeto

$$VPL(12,54\%) = -\$15 + \$2 \times a_{16|12,54\%} = -\$15 + \$2 \times \left[\frac{(1,1254)^{16} - 1}{(1,1254)^{16} \times 0,1254} \right] = -\$1,4599 < 0$$

⇒ projeto inviável

Os valores monetários estão expressos em milhões.

Exemplo 12.10

Atualmente, os valores do capital próprio e do capital de terceiros de uma empresa são, respectivamente, \$200 milhões e \$150 milhões. A empresa pretende expandir a sua produção investindo \$18 milhões em novos equipamentos com vida útil de três anos e sem valor residual. Dois terços desse investimento serão recursos próprios levantados por meio de uma emissão de novas ações e o resto será levantado por meio de um empréstimo a juros de 5% a.a. reembolsável em três parcelas anuais pela Tabela Price. Os novos equipamentos devem proporcionar uma receita operacional de \$11 milhões/ano com custos operacionais de \$3 milhões/ano. Usando as seguintes informações, analisar e avaliar econômica e financeiramente o projeto: rentabilidade dos ativos sem risco (R_f) = 7% a.a.; alíquota de IR (T) = 30%; beta do capital próprio (β) = 0,5; retorno esperado do mercado (\bar{R}_m) = 9% a.a.

- Cálculo do beta não-alavancado

$$\beta_o = \left(\frac{\beta}{1 + (1-T) \frac{D}{CP}} \right) = \frac{0,5}{1 + (1 - 0,30) \times \frac{\$150.000.000}{\$200.000.000}} = 0,3279$$

D' e CP' são os atuais valores da dívida e do capital próprio.

- Cálculo do beta ajustado

$$\beta_a = \beta_o \left(1 + (1-T) \frac{D'}{CP'} \right) = 0,3279 \times \left(1 + (1 - 0,30) \times \frac{\$156.000.000}{\$212.000.000} \right) = 0,4968$$

CP' e D' representam os valores do capital próprio e da dívida após o investimento de expansão. A razão D'/CP' é um índice-alvo.

- Custo do capital próprio

$$K_{cp} = R_f + \beta_a (\bar{R}_m - R_f) = 7\% + 0,4968 \times (9\% - 7\%) = 8\% \text{ a.a.}$$

- Custo do capital para o projeto (custo ajustado)

$$K = K_{cp} \left(\frac{CP'}{CP' + D'} \right) + K_d (1-T) \left(\frac{D'}{CP' + D'} \right)$$

$$8\% \times \left(\frac{\$212.000.000}{\$368.000.000} \right) + 5\% \times 0,7 \times \left(\frac{\$156.000.000}{\$368.000.000} \right) = 6,092\%$$

A razão D'/CP' representa o índice dívida-capital próprio após a decisão de investir no projeto. Implicitamente estamos supondo que seja o índice desejado pela empresa após a implementação do projeto.

- Planilha do fluxo de caixa

Item	Ano 0	Ano 1	Ano 2	Ano 3
Investimento	-\$ 18.000.000,00			
Receita operacional		\$ 11.000.000,00	\$ 11.000.000,00	\$ 11.000.000,00
Custo operacional		-\$ 3.000.000,00	-\$ 3.000.000,00	-\$ 3.000.000,00
Depreciação		-\$ 6.000.000,00	-\$ 6.000.000,00	-\$ 6.000.000,00
LAJIR		\$ 2.000.000,00	\$ 2.000.000,00	\$ 2.000.000,00
IR		-\$ 600.000,00	-\$ 600.000,00	-\$ 600.000,00
Depreciação		\$ 6.000.000,00	\$ 6.000.000,00	\$ 6.000.000,00
Fluxo econômico	-\$ 18.000.000,00	\$ 7.400.000,00	\$ 7.400.000,00	\$ 7.400.000,00
Empréstimo	\$ 6.000.000,00			
Prestações		-\$ 2.203.251,39	-\$ 2.203.251,39	-\$ 2.203.251,39
Benefício fiscal dos juros		\$ 90.000,00	\$ 61.451,23	\$ 31.475,02
Fluxo econômico-financeiro	-\$ 12.000.000,00	\$ 5.286.748,61	\$ 5.258.199,84	\$ 5.228.223,63

No quadro anterior, a depreciação foi deduzida da receita ao se calcular o lucro tributável (LAJIR), mas posteriormente foi somada, pois trata-se de uma despesa não-caixa. Os fluxos do financiamento foram incluídos somente na análise econômico-financeiro, já que as decisões de investimento e financiamento são separadas.

Quadro de amortização do financiamento (Tabela Price)

Ano	Saldo devedor	Juros	Amortização	Prestação
0	\$ 6.000.000,00	-	-	-
1	\$ 4.096.748,61	\$ 300.000,00	\$ 1.903.251,39	\$ 2.203.251,39
2	\$ 2.098.334,65	\$ 204.837,43	\$ 1.998.413,96	\$ 2.203.251,39
3	-	\$ 104.916,73	\$ 2.098.334,66	\$ 2.203.251,39

- Avaliação econômico-financeira do projeto

Podemos observar na planilha do fluxo de caixa, na linha que representa o fluxo econômico, que o fluxo do ano zero é igual ao capital total empregado no projeto (\$ 18 milhões), logo, a taxa interna de retorno do fluxo econômico (TIR_e) será a rentabilidade do capital total (perspectiva do investimento total ou perspectiva dos acionistas e dos credores). Na mesma planilha, na linha que representa o fluxo econômico-financeiro, o fluxo do ano zero é igual ao capital próprio (12 milhões), logo, a taxa interna de retorno desse fluxo (TIR_f) será a rentabilidade do capital próprio (perspectiva do capital próprio ou perspectiva dos acionistas).

Se usarmos o método da taxa interna de retorno (TIR) para avaliar o projeto, devemos comparar a taxa interna de retorno do fluxo econômico (TIR_e) com o custo de oportunidade do capital, e a taxa interna de retorno do fluxo econômico-financeiro (TIR_f) com o custo do capital próprio:

$$TIR_e = 11,27\% > (K = 6,092\%) \Rightarrow \text{viabilidade econômica}$$

$$TIR_f = 15,05\% > (K_{cp} = 8\%) \Rightarrow \text{viabilidade econômico-financeira}$$

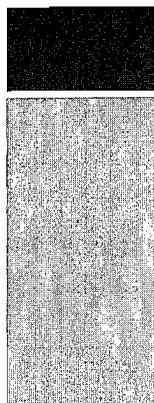
O valor presente líquido do fluxo econômico (chamado $VPL_{econômico}$ ou $VPL_{perspectiva da empresa}$ deve ser calculado usando-se como fator de desconto o custo de oportunidade do capital ($K = 6,092\%$), enquanto para o cálculo do valor presente líquido do fluxo econômico-financeiro (chamado $VPL_{financeiro}$ ou $VPL_{perspectiva dos acionistas}$) deve ser utilizado o custo do capital próprio ($K_{cp} = 8\%$):

$$VPL_{econômico} (6,096\%) = \$ 1.746.667 > 0 \Rightarrow \text{viabilidade econômica}$$

$$VPL_{financeiro} (8\%) = \$ 1.553.529 > 0 \Rightarrow \text{viabilidade econômico-financeiro}$$

APÊNDICE

TABELAS FINANCEIRAS



FATOR DE VALOR FUTURO PARA PAGAMENTO ÚNICO: $(1+i)^n$										
n	1%		2%		3%		4%		5%	
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,01000	1,02000	1,03000	1,04000	1,05000	1,06000	1,07000	1,08000	1,09000	1,10000
2	1,02010	1,04040	1,06090	1,08160	1,10250	1,12360	1,14480	1,16640	1,18810	1,21000
3	1,03030	1,06121	1,09273	1,12486	1,15763	1,19102	1,22504	1,25971	1,29503	1,33100
4	1,04060	1,08243	1,1251	1,16986	1,21551	1,26248	1,31080	1,36049	1,41158	1,46410
5	1,05101	1,10408	1,15927	1,21665	1,27628	1,33823	1,40255	1,46933	1,53862	1,61051
6	1,06152	1,12616	1,19405	1,26532	1,34010	1,41852	1,50075	1,58687	1,67710	1,77156
7	1,07214	1,14869	1,22987	1,31593	1,40710	1,50363	1,60578	1,71382	1,82804	1,94872
8	1,08286	1,17166	1,26677	1,36857	1,47746	1,59385	1,71819	1,85093	1,99256	2,14359
9	1,09369	1,19809	1,30477	1,42331	1,55133	1,68948	1,83846	1,99900	2,17189	2,35795
10	1,10462	1,21899	1,34392	1,48024	1,62889	1,79085	1,96715	2,15892	2,36736	2,59374
11	1,11567	1,24437	1,38423	1,53945	1,71034	1,89830	2,10485	2,33164	2,58043	2,85312
12	1,12683	1,26824	1,42576	1,60103	1,75586	2,01220	2,25219	2,51817	2,81266	3,13843
13	1,13809	1,29861	1,46691	1,66607	1,88565	2,13293	2,40989	2,71962	3,06580	3,45227
14	1,14947	1,31948	1,51259	1,73168	1,97993	2,26090	2,57853	2,93719	3,34173	3,79750
15	1,16097	1,34887	1,55797	1,80094	2,07883	2,39686	2,75903	3,17217	3,64248	4,17725
16	1,17258	1,37279	1,60471	1,87298	2,18287	2,54035	2,95216	3,42594	3,97031	4,59497
17	1,18430	1,40024	1,65285	1,94790	2,29202	2,69277	3,15882	3,70002	4,32763	5,05447
18	1,19615	1,42825	1,70243	2,02582	2,40662	2,85434	3,37993	3,99602	4,71712	5,55992
19	1,20811	1,45681	1,75351	2,10885	2,52685	3,02560	3,61653	4,31570	5,14166	6,11591
20	1,22019	1,48595	1,80611	2,19112	2,65330	3,20714	3,86968	4,66096	5,60441	6,72750
21	1,23239	1,51567	1,86029	2,27877	2,78596	3,39956	4,14056	5,03383	6,10881	7,40025
22	1,24472	1,54598	1,91610	2,36952	2,92526	3,60354	4,43040	5,43654	6,65860	8,14027
23	1,25716	1,57690	1,97359	2,46472	3,07152	3,81975	4,74053	5,87146	7,25787	8,95430
24	1,26973	1,60844	2,03279	2,56330	3,22510	4,04883	5,07237	6,34118	7,91108	9,84973
25	1,28243	1,64061	2,09378	2,66564	3,38635	4,29187	5,42743	6,84848	8,62308	10,83471
26	1,29526	1,67342	2,15669	2,77247	3,55567	4,54938	5,80735	7,39635	9,39916	11,91818
27	1,30821	1,70689	2,22129	2,88337	3,73346	4,82235	6,21387	7,98806	10,24508	13,10999
28	1,32129	1,74102	2,28793	3,29803	5,11169	6,64884	8,62711	11,16714	14,42099	
29	1,33450	1,77584	3,11865	4,16114	5,41839	7,1426	9,31727	12,17218	15,86309	
30	1,34785	1,81136	2,42726	3,24340	4,32194	5,74349	7,61226	10,06266	13,26768	17,44940
31	1,36133	1,84759	2,50098	3,37313	4,53804	6,08810	8,14511	10,86767	14,46177	19,19434
32	1,37494	1,88454	2,57508	3,50806	4,76494	6,45339	8,71527	11,73708	15,76333	21,11378
33	1,38869	1,92223	2,65234	3,64838	5,03119	6,84059	9,32534	12,67605	17,18203	23,22515
34	1,40258	1,96068	2,73191	3,79432	5,25335	7,25103	9,97811	13,69013	18,72841	25,54767
35	1,41660	1,99989	2,81386	3,94609	5,51602	7,68609	10,67653	14,78534	20,41397	28,10244
36	1,43077	2,03989	2,89828	4,10383	5,79182	8,14725	11,42394	15,96817	22,25123	30,91268
37	1,44508	2,08069	2,98523	4,26809	6,08141	8,63609	12,2362	17,24563	24,25384	34,0395
38	1,45563	2,12230	3,07418	4,43881	6,38548	9,15425	13,07927	18,62528	26,43668	37,40434
39	1,47412	2,16474	3,16703	4,61637	6,70475	9,70351	13,99482	20,11530	28,81598	41,14473
40	1,48886	2,20804	3,26204	4,80102	7,03989	10,28572	14,97446	21,72452	31,40942	45,25926

FATOR DE VALOR FUTURO PARA PAGAMENTO ÚNICO: (1+i) n									
n	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%
1	1,11000	1,12000	1,13000	1,14000	1,15000	1,16000	1,17000	1,18000	1,19000
2	1,23210	1,25440	1,27690	1,29860	1,32250	1,34560	1,36890	1,39240	1,41610
3	1,36763	1,40493	1,44290	1,48154	1,52088	1,56090	1,60161	1,64303	1,68516
4	1,51807	1,57352	1,63047	1,68896	1,74901	1,81064	1,87389	1,93878	2,00534
5	1,68506	1,76234	1,84244	1,92541	2,01136	2,10034	2,19245	2,28776	2,38635
6	1,87041	1,97382	2,08195	2,19497	2,31997	2,43640	2,56516	2,69955	2,83976
7	2,07616	2,21068	2,35261	2,50227	2,66002	2,82622	3,00124	3,18547	3,37932
8	2,30454	2,47596	2,63844	2,85259	3,05902	3,27841	3,51145	3,75886	4,02139
9	2,55804	2,77308	3,00404	3,25195	3,51788	3,80296	4,10840	4,43545	4,78545
10	2,83942	3,10585	3,39457	3,70722	4,04556	4,41144	4,80683	5,23384	5,69468
11	3,15176	3,47855	3,83586	4,22623	4,65239	5,11726	5,62399	6,17593	6,77667
12	3,49845	3,89598	4,33452	4,81790	5,35025	5,93603	6,58007	7,28759	8,06424
13	3,88328	4,36349	4,89801	5,49241	6,15279	6,88579	7,69868	8,59936	9,59645
14	4,31044	4,88711	5,53475	6,26135	7,07571	7,98752	9,00745	10,14724	11,41977
15	4,78459	5,47357	6,25427	7,13794	8,13707	9,26552	10,53872	11,97375	13,56953
16	5,31089	6,13039	7,06733	8,13725	9,35762	10,74800	12,30320	14,12902	16,17154
17	5,89509	6,86604	7,98608	9,27646	10,76126	12,46768	14,42646	16,67325	19,24413
18	6,54355	7,68997	9,02427	10,57517	12,37545	14,46251	16,87895	19,67325	22,90052
19	7,26334	8,61276	10,19742	12,05569	14,23177	16,77652	19,74838	23,21444	27,25162
20	8,06231	9,64629	11,52309	13,74249	16,36654	19,46076	23,10560	27,39303	32,42942
21	8,94917	10,80385	13,02109	15,66758	18,82152	22,57448	27,03355	32,32378	38,59101
22	9,93357	12,10031	14,71383	17,86104	21,64475	26,18640	31,62925	38,14206	45,92331
23	11,02627	13,55235	16,62663	20,36158	24,89146	30,37622	37,00623	45,00763	54,64873
24	12,23916	15,17863	18,78809	23,21221	28,62518	35,23642	43,29729	53,10901	65,03199
25	13,58546	17,00006	21,24054	26,46192	30,85680	37,85680	40,87424	50,65783	62,66863
26	15,07986	19,04007	23,98051	30,16658	37,85680	47,41412	59,36294	73,94898	92,00518
27	16,73865	21,32488	27,10928	34,38891	43,53531	55,00038	69,34550	87,25980	109,58925
28	18,57990	23,88387	30,63349	39,20449	50,06561	63,8044	81,13423	102,96656	130,41121
29	20,62369	26,74993	34,61584	44,69312	57,57545	74,00851	94,92705	121,50054	155,18934
30	22,89230	29,95992	39,11590	50,95016	66,21177	85,84988	111,06465	143,37064	184,67531
31	25,41045	33,55511	44,20096	58,08318	76,14354	99,58586	129,94564	169,17735	237,37631
32	28,20560	37,58173	49,94709	66,21483	87,56507	115,51959	152,03640	199,62928	284,85158
33	31,30821	42,09153	56,44021	75,48490	100,69983	134,00273	177,88259	235,56255	311,20726
34	34,75212	47,14252	63,77744	86,02579	115,80480	155,44317	208,12263	277,96381	370,33664
35	38,57485	52,79962	72,06851	98,10018	133,17552	180,31407	243,50347	327,98729	440,70061
36	42,81808	59,13557	81,43741	111,83420	153,15185	209,16432	284,89906	387,03680	524,43372
37	47,52807	66,23184	92,02428	127,49099	176,12463	242,63062	333,33191	456,70343	624,07613
38	52,75616	74,17966	103,98743	145,33973	202,5432	281,45151	389,99833	538,91004	742,65059
39	58,55934	83,08122	117,50580	165,68729	232,92482	326,48376	456,29805	635,91385	883,73784
40	65,00087	93,05097	132,78155	188,88351	267,86355	378,72116	533,86871	750,37784	1051,66751

FATOR DE VALOR PRESENTE DE SÉRIES UNIFORMES: $a(n, i\%)$		5%	6%	7%	8%	9%	10%
n	i%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	0,99009901	0,98039216	0,97073779	0,96155846	0,95238095	0,94339623	0,93457944
2	1,97039506	1,94156094	1,9134697	1,88605467	1,85941043	1,83339267	1,80801817
3	2,94008521	2,88388327	2,82861135	2,77509103	2,72324803	2,67301195	2,62431604
4	3,90196555	3,8077287	3,7170984	3,62988522	3,5459805	3,46510561	3,38721126
5	4,85343124	4,71345951	4,57970719	4,4518233	4,3294667	4,21236379	4,1001744
6	5,79547647	5,60143089	5,41719144	5,24213686	5,07569207	4,91732433	4,76653966
7	6,72819453	6,47199107	6,23028296	6,0005467	5,7836734	5,58238144	5,38928994
8	7,65167775	7,32548144	7,01969219	6,73274487	6,46321276	6,20979381	5,97129851
9	8,56601758	8,16223671	7,78610892	7,43533161	7,10782168	6,80169227	6,51523225
10	9,47130453	8,98256501	8,53020284	8,11088578	7,721173493	7,36008705	7,02358154
11	10,3676282	9,78684805	9,25262411	8,76041671	8,30641422	7,88687458	7,49867434
12	11,2550775	10,5753412	9,95400399	9,38507376	8,86325164	8,38384394	7,9426863
13	12,1337401	11,3483737	10,6348553	9,9856785	9,39357299	8,85262296	8,35765074
14	13,003703	12,1062488	11,2960731	10,5631229	9,89864094	9,29498393	8,74546799
15	13,8650525	12,8492635	11,9379351	11,11838874	10,379658	9,7121224899	9,10791401
16	14,7178738	13,5777093	12,561102	11,6522956	10,8377696	10,1058953	9,44664486
17	15,5622513	14,2918719	13,1661185	12,1656889	11,2740662	10,4772597	9,76322299
18	16,3982686	14,9920313	13,7535131	12,65297	11,6898869	10,8276035	10,0590869
19	17,2266085	15,6784612	14,32321991	13,133394	12,0853209	11,1581165	10,3355952
20	18,045553	16,3514333	14,8774749	13,5902363	12,4622103	11,4698212	10,5940142
21	18,8569831	17,0112092	15,4150241	14,0291599	12,8211527	11,7640766	10,8358273
22	19,6603793	17,6580482	15,9369166	14,4511153	13,1630026	12,0415817	11,0612405
23	20,4556211	18,2922041	16,4436084	14,85668417	14,8585739	12,030379	11,2721874
24	21,2423873	18,9139256	16,9355421	15,2466631	13,7986418	12,503575	11,489334
25	22,0231557	19,5234565	17,4131477	15,6220799	14,0939446	12,7833562	11,6535832
26	22,7952037	20,1210358	17,8768424	15,9822692	14,3751853	13,0031662	11,8257787
27	23,5596076	20,7068978	18,3270315	16,3298857	14,6430336	13,2105341	11,9886709
28	24,3164432	21,2812724	18,7641082	16,6636632	14,8981273	13,4061643	12,1371113
29	25,0657853	21,8443847	19,1884546	16,9837146	15,1410736	13,590721	12,27776741
30	25,8077082	22,3964556	19,60004413	17,2920333	15,327451	13,7648312	12,4090412
31	26,5422854	22,9377015	20,0004285	17,5884936	15,5928105	13,929086	12,5318142
32	27,2695895	23,4683348	20,3886755	17,8735515	15,8026767	14,0840434	12,6465553
33	27,9886925	23,9885636	20,7657918	18,1476457	16,0025492	14,2302296	12,753739
34	28,7026659	24,4985917	21,1318367	18,4111978	16,192904	14,3681411	12,854094
35	29,4085801	24,9986193	21,4872201	18,6646132	16,3741943	14,4982464	12,9476723
36	30,107505	25,4888425	21,8322525	18,908282	16,5486517	14,6209871	13,0352078
37	30,7985099	25,9684534	22,1672354	19,1426788	16,71212873	14,7367803	13,1170166
38	31,4846633	26,4406406	22,4924616	19,3678642	16,8678927	14,8460192	13,1934735
39	32,163033	26,9025888	22,8052151	19,5844848	17,0110407	14,9490747	13,2649285
40	32,8346861	27,3554792	23,114772	19,7927739	17,1550864	15,0462969	13,3317088

FATOR DE VALOR PRESENTE DE SÉRIES UNIFORMES: $a(n, i\%)$										
n	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,9009009	0,8928574	0,88495575	0,87719298	0,86956522	0,86206897	0,85470085	0,84745763	0,84033613	0,83333333
2	1,7125233	1,69005102	1,66810244	1,64666051	1,62570888	1,60523187	1,58521441	1,56564206	1,54650095	1,52777778
3	2,44371472	2,36183127	2,36163203	2,28322512	2,24588954	2,20958496	2,17427293	2,13891677	2,10648148	2,05873457
4	3,10244569	3,03734935	2,97447133	2,91317123	2,854977836	2,79818064	2,74235051	2,6900618	2,63858552	2,58871244
5	3,659589702	3,6047762	3,51723126	3,43308997	3,35211551	3,27429365	3,19354616	3,12717102	3,05763489	2,99061214
6	4,23053785	4,1140732	3,99754979	3,88866752	3,78448269	3,68473591	3,58918475	3,49760256	3,40977722	3,32551012
7	4,71219626	4,56375654	4,42261043	4,28830484	4,16041973	4,03856544	3,9238013	3,81152759	3,70669514	3,60459176
8	5,14612276	4,96763977	4,79877029	4,63886389	4,48732151	4,3435909	4,20716251	4,07756576	3,95436567	3,83715988
9	5,53704753	5,32824979	5,13165513	4,94637184	4,77158392	4,60654388	4,45056624	4,30302183	4,16333249	4,03096665
10	5,88923201	5,65022303	5,42624348	5,21611565	5,01876863	4,8322748	4,65860365	4,49408629	4,33893487	4,19247209
11	6,20651533	5,93769913	5,68694113	5,45273302	5,23371185	5,02864438	4,83641336	4,65600533	4,48649989	4,32706007
12	6,49235615	6,197649213	5,917649213	5,66026119	5,42010722	4,9838748	4,79322486	4,61050411	4,43821673	
13	6,7498704	6,42354842	6,12181152	5,84236151	5,59314636	5,34233381	5,1182799	4,90512539	4,53268061	
14	6,98186523	6,62816823	6,30248807	6,00202175	5,72447561	5,46752915	5,22929906	5,00806152	4,80227675	4,61056717
15	7,19086958	6,81086449	6,46237882	6,14216799	5,8473701	5,5745616	5,32418723	5,09157756	4,87586282	4,67547264
16	7,37916178	6,97398615	6,60387596	6,26505964	5,95423487	5,66649669	5,40528823	5,16235386	4,93769985	4,72556054
17	7,5487944	7,11963049	6,72909298	6,37285933	6,04716076	5,74870404	5,47460533	5,22233378	4,98966374	4,77463378
18	7,70161657	7,24967008	6,83890529	6,46742046	6,12796587	5,87784831	5,53385071	5,27316422	5,03333087	4,81219482
19	7,8929421	7,36577666	6,93796928	6,550363833	6,19823119	5,87745544	5,58448778	5,31624087	5,07002594	4,84349568
20	7,96332812	7,46944362	7,02475158	6,622130565	6,19833147	5,9288409	5,62776734	5,35287465	5,10086214	4,86857973
21	8,07507038	7,56200324	7,10155007	6,686951007	6,31246215	5,97313879	5,66475841	5,32868347	5,1267749	4,89131644
22	8,17573908	7,64464575	7,16951334	6,74294441	6,35866274	6,01132647	5,69633747	5,40990125	5,14855034	4,90943403
23	8,2664316	7,7184337	7,22965732	6,79205656	6,39883717	6,04424696	5,72339719	5,4321197	5,16884902	4,92452531
24	8,34813658	7,78431581	7,28288303	6,83513728	6,43377145	6,07262669	5,74649332	5,4509489	5,18227607	4,93710442
25	8,42174466	7,84313911	7,32998488	6,87292744	6,46414909	6,090709197	5,76623361	5,46690585	5,19517476	4,94758702
26	8,48805826	7,895655982	7,37166812	6,90607676	6,49056442	6,11818273	5,73310565	5,48042868	5,20600669	4,95632252
27	8,547780023	7,9425555	7,40855586	6,9351556	6,51353428	6,13363443	5,79752619	5,49188872	5,21513167	4,9636021
28	8,60162183	7,98442277	7,44119988	6,96066228	6,53350807	6,15203883	5,80985145	5,50160061	5,22279972	4,96966841
29	8,65010976	8,02180604	7,47008839	6,983030709	6,55087658	6,1655026	5,80983102	5,22824347	4,97472368	
30	8,68379257	8,05518397	7,49565344	7,00266411	6,565719964	6,17751008	5,82938962	5,51680595	5,23465837	4,9789364
31	8,73314646	8,084948569	7,51827738	7,0198808	6,57911273	6,18724008	5,83708514	5,52271691	5,23920872	4,982447
32	8,76860042	8,11159436	7,53829857	7,03498316	6,59053281	6,19898662	5,84366252	5,52772619	5,24303254	4,9853725
33	8,80054092	8,13535211	7,55601643	7,04823084	6,60046331	6,2035916	5,8492842	5,53197135	5,24624583	4,98781042
34	8,82931614	8,15656438	7,57169536	7,05985161	6,60909853	6,2079238	5,85408906	5,53566894	5,24894607	4,9884201
35	8,85523977	8,17550391	7,588557164	7,07004528	6,61660742	6,215333826	5,85819578	5,53861775	5,25121519	4,99153501
36	8,87859438	8,19241421	7,59785101	7,07898708	6,62313689	6,22011919	5,86170579	5,54120148	5,25512201	4,99294584
37	8,89863438	8,20751259	7,60871771	7,08683078	6,62881468	6,22424068	5,86470581	5,54539108	5,25472438	4,99412154
38	8,91858971	8,22099347	7,61833426	7,09371121	6,6337579	6,22793639	5,86726992	5,54624668	5,2680709	4,99510128
39	8,93566641	8,23302988	7,62684441	7,09874667	6,638904513	6,23085663	5,86946147	5,54681922	5,25781244	4,995891773
40	8,95105082	8,24377668	7,63437564	7,10504094	6,64177837	6,23349709	5,87133439	5,54815188	5,25815331	4,99559811

FATOR DE VALOR FUTURO DE SÉRIES UNIFORMES: $s(n, i\%)$									
n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05	2,06	2,07	2,08	2,09
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836	3,2149	3,2464	3,2781
4	4,060401	4,121608	4,183627	4,246464	4,310125	4,374616	4,439943	4,506112	4,573129
5	5,10100501	5,20404016	5,30913581	5,41632256	5,52563125	5,63709296	5,75073901	5,86660096	5,98471061
6	6,15201506	6,30812096	6,46840388	6,63297546	6,80191281	6,97531884	7,15329074	7,33592904	7,52333456
7	7,21353521	7,43428338	7,66246218	7,89829448	8,14240845	8,39831765	8,66402109	8,92403366	9,18711166
8	8,28567056	8,56296965	8,89233605	9,21422626	9,54910988	9,90746791	10,25980626	10,63662616	11,0284738
9	9,36852727	9,75462843	10,1591061	10,58279563	11,02656643	11,491316	11,9779887	12,4875578	13,02101364
10	10,4622125	10,949721	11,4638793	12,0061071	12,5778925	13,1807949	13,816448	14,4865625	15,1929297
11	11,5668347	12,1687154	12,8077957	13,4863514	14,2067872	14,9716262	15,7835993	16,6454875	17,5602934
12	12,1682603	13,4120897	14,1920296	15,0258055	15,9171265	16,8699412	17,8884513	18,9771265	20,1407198
13	13,809328	14,6803315	15,6177904	16,6268377	17,7129928	18,8821377	20,1406429	21,4952966	22,9533846
14	14,9474213	15,9739382	17,0863242	18,2919112	19,598632	21,0150659	22,5504879	24,2149203	26,0191882
15	16,0968895	17,2934169	18,5989139	20,0235876	21,5785636	23,2759689	25,129022	27,1521139	29,3609162
16	17,2578645	18,6392853	20,1845513	23,674918	26,6725281	27,8880536	30,324283	33,00333987	35,9497299
17	18,4304431	20,0120701	21,7615877	23,6975124	25,8440664	28,2128798	30,5440273	36,9737046	40,5447028
18	19,6147476	21,4123124	23,4144354	26,6454229	28,1323847	30,9056525	33,990325	37,4502437	41,301338
19	20,810895	22,8405586	25,1168684	27,6712294	30,5390039	33,7599917	37,3789648	41,4462632	46,0184584
20	22,019004	24,2973698	26,8703745	29,7780786	33,0659541	36,7855912	40,9954923	45,7619643	51,1601196
21	23,239194	25,7833172	28,6764857	31,9692017	35,7192518	39,9927267	44,8651768	50,4229214	56,7645504
22	24,471586	27,2989835	30,5367863	34,2479698	38,5052144	43,3922903	49,0057392	55,4567552	62,8733381
23	25,7163018	28,8449632	32,4528837	36,6178886	41,4304751	46,9958277	53,4361409	60,8932956	69,5319386
24	26,9734649	30,4218624	34,4264041	44,5019989	50,8155774	58,1766708	66,7647592	76,7898131	88,4973268
25	28,2431995	32,0302997	36,4592643	41,6459083	47,7277988	54,864512	63,2490377	73,10594	84,7008662
26	29,5256315	33,6709057	38,5530423	44,3117446	51,1134538	59,1563827	68,6764704	79,9544151	93,3239769
27	30,8208878	35,3443238	40,7096335	47,0842444	54,6691264	63,7057657	74,4838233	87,3507684	102,723135
28	32,1290967	37,0512103	42,9309225	49,9675883	58,4025528	68,5281116	80,6976909	95,3388298	112,968217
29	33,4503877	38,7922245	45,2188502	52,9662863	62,3227119	73,6397983	87,3465293	103,9659396	124,135356
30	34,7848915	40,5680792	47,5754157	56,0849378	66,4388475	79,0581862	94,4607963	113,283211	136,307539
31	36,1327404	42,3794408	50,0026782	59,3283353	70,7607989	84,8016774	102,073041	123,345868	149,575217
32	37,4940679	44,2270296	52,5027585	62,7014687	75,2988294	90,889778	110,218154	134,213537	164,036987
33	38,8690085	46,1115702	55,0778413	66,2095274	80,0637708	97,3431647	118,933425	145,95062	179,800315
34	40,2576886	48,0338016	57,7037016	69,8579085	85,0669594	104,13755	128,6258765	158,62667	196,82344
35	41,6602756	49,9944776	60,4620816	73,6522949	90,3220374	111,43748	138,236878	172,316804	215,710755
36	43,0768784	51,9943672	63,2759443	77,5983138	95,8363227	119,120867	148,91346	187,102148	236,124723
37	44,5076471	54,0342545	66,1742226	81,7022464	101,628139	127,268119	160,337402	203,07032	258,375948
38	45,9527236	56,1494936	69,1594493	85,9703636	107,09546	135,904206	172,56102	220,315945	282,629783
39	47,4122509	58,2372884	72,2342288	90,4091497	114,095023	145,058458	185,640292	238,941221	309,066463
40	48,8863734	60,4019832	75,4012597	95,0255157	120,799774	154,761966	199,635112	259,0566519	337,882445

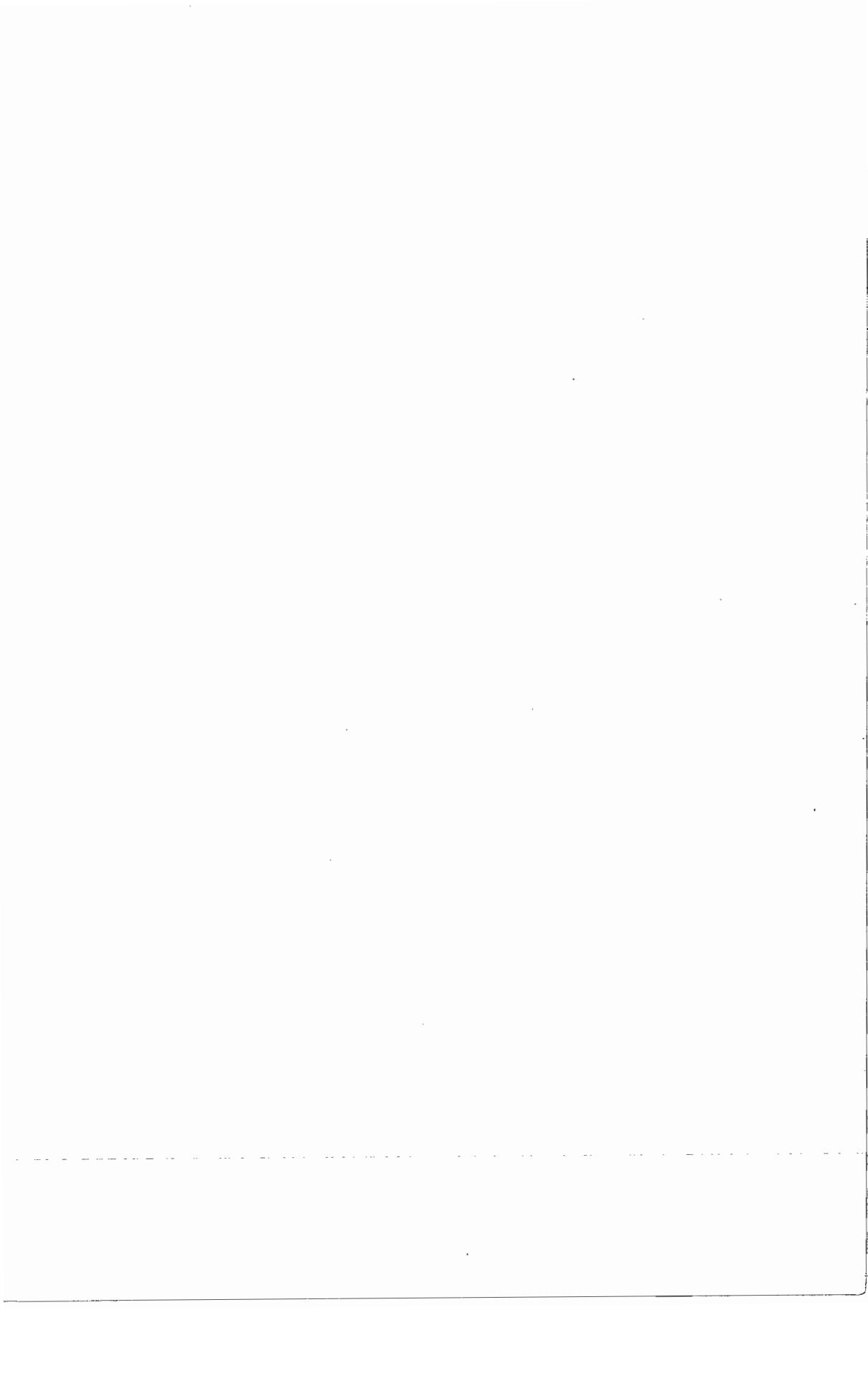
FATOR DE VALOR FUTURO DE SÉRIES UNIFORMES: s (n, i%)									
n	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2,11	2,12	2,13	2,14	2,15	2,16	2,17	2,18	2,19
3	3,3421	3,3744	3,4069	3,4396	3,4725	3,5056	3,5389	3,5724	3,6061
4	4,709731	4,779328	4,849797	4,921144	4,993375	5,066496	5,140513	5,215432	5,291259
5	6,22780141	6,35284736	6,48027061	6,61010416	6,74238125	6,87713536	7,01440021	7,15420976	7,29659821
6	7,91285957	8,11518904	8,32207579	8,53551874	8,75373844	8,9747702	9,20684825	9,44196752	9,68295187
7	9,78327412	10,08901117	10,40465756	10,73049114	11,0667992	11,4138733	11,7702124	12,1415217	12,5227127
8	11,8594343	12,2986931	12,757263	13,2327602	13,7268191	14,2400931	14,7732546	15,3266956	15,9020281
9	14,163972	14,7756563	15,4157072	16,0853466	16,7858419	17,518508	18,2847078	19,0858548	19,9234135
10	16,722009	17,5487351	18,4197492	19,3372951	20,3037182	21,3214692	22,3931082	23,5213086	24,7088621
11	19,56143	20,6545833	21,8143165	23,0445164	24,349276	25,7329043	27,1999366	28,7551442	30,4035458
12	22,7131872	24,1331333	25,6501777	27,2707487	29,0016674	30,850169	32,8239258	34,9310701	37,1802196
13	26,2116378	28,0291093	29,9847003	32,0886535	34,3519175	36,7861961	39,4038932	42,2186628	45,2444613
14	30,094919	32,3926024	34,8827119	37,581665	40,5047051	43,6719874	47,1026772	50,8180221	54,8409089
15	34,405359	37,2797147	40,4174644	43,8424141	47,5804109	51,6556054	56,1101262	60,9665266	66,2606816
16	39,1899485	42,7532804	46,6717348	50,9803521	55,7174725	60,9250725	66,6488477	72,9390139	79,8502111
17	44,5008428	48,8836741	53,7380603	59,1176014	65,0750934	71,6720305	78,9791518	87,0630364	96,0217512
18	50,3959355	55,749715	61,7251382	68,3940656	75,8363574	84,1407154	93,4056076	103,740283	115,263884
19	56,9394884	63,4396808	70,7494062	78,9692348	88,211811	98,6032298	110,284561	123,413534	138,166402
20	64,2028321	72,0524424	80,946829	91,0249277	102,443583	115,379747	130,032936	146,62797	165,418018
21	72,2651437	81,6987355	92,4699167	104,788418	118,81012	134,840506	153,138535	174,021005	197,847442
22	81,2143095	92,5025838	105,491006	120,455996	137,631638	157,414987	180,172086	206,344785	236,438456
23	91,1478835	104,602894	120,204837	138,291035	159,276384	183,601385	211,801341	244,486847	282,361762
24	102,174151	118,155241	136,831466	158,656862	184,167841	213,977607	248,807569	289,494479	337,010497
25	114,413307	133,33387	155,619556	181,870827	212,793017	249,214024	292,104856	342,603486	392,484236
26	127,998771	150,333934	176,850098	208,332743	245,71197	290,088267	342,762681	405,272131	479,430565
27	143,078636	169,374007	200,840611	238,499327	283,568766	337,50239	402,032337	479,221093	571,522377
28	159,8177286	190,698887	227,94989	272,889233	327,10408	392,502773	471,377835	566,48089	681,111623
29	178,397187	214,582754	258,583376	312,093725	377,169693	456,303216	552,512066	669,44745	811,522831
30	199,020878	241,332684	293,199215	356,766847	434,745146	530,311731	647,439118	790,947991	966,712169
31	221,913174	271,292606	332,315113	407,737006	500,956918	616,161608	758,503768	934,31863	1151,38748
32	247,323624	304,847719	376,516078	465,820186	577,100456	715,747465	888,449408	1103,49598	1371,1511
33	275,529222	342,429446	426,463168	532,055012	664,665524	831,267059	1040,48581	1303,12526	1632,66981
34	306,837437	384,520979	482,90338	607,519914	765,3665353	965,259789	1218,36839	1538,68781	2045,93135
35	341,589555	431,663496	546,680819	693,557297	881,170156	1120,71295	1426,49102	1869,99456	2144,6489
36	380,164406	484,463116	618,749325	791,672881	1014,345668	1301,02703	1669,99456	2144,6489	2754,1943
37	422,98249	543,598869	700,186738	903,507084	1167,49753	1510,19135	1954,89356	2531,6857	3279,34805
38	470,510564	609,830533	792,211014	1050,99808	1343,62216	1752,82197	2288,22547	2988,38913	3903,42418
39	523,266726	684,010197	896,198445	1176,33781	1546,16549	2034,27348	2678,22379	3527,29918	4646,07477
40	581,826066	767,09142	1013,70424	1342,0251	1779,09031	2360,75724	3134,52184	4163,21303	5529,82898

BIBLIOGRAFIA



- AYRES Jr., F. *Matemática financeira*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1971.
- BIERMAN, H. & SMIDT, S. *The capital budgeting decision*. Nova York: MacMillan Publishing Co., 1990.
- BREALEY, R. & MYERS, S. *Princípios de finanças empresariais*. Lisboa: McGraw-Hill, 1992.
- BRIGHAM, E. F. *Fundamentals of financial management*. 6. ed. Nova York: The Dryden Press, 1992.
- CISSELL, CISSELL & FLASPOHLER. *The mathematics of finance*. Houghton Mifflin Co., 1982.
- CLARK, J. J., HINDELANG, T. J. & PRITCHARD, R. E. *Capital budgeting: planning and control of capital expenditures*. 3. ed. Nova York: Prentice Hall.
- COPELAND, T. E., & WESTON, J. F. *Managerial finance*. 9. ed. Nova York: The Dryden Press, 1992.
- COPELAND, T. E. & WESTON, J. F. *Financial theory and corporate policy*. 3. ed. Nova York: Addison Wesley, 1988.
- ELTON, E. J. & GRUBER, M. J. *Modern portfolio theory and investments analysis*. 5. ed. John Wiley & Sons, 1995.
- FERNANDES, Polo, E. *Engenharia das operações financeiras*. São Paulo: Atlas, 1995.
- GRANT, E. & IRESON, W. *Principles of engineering economy*. Nova York: Ronald Press, 1976.
- JUER, Milton. *Matemática financeira: aplicações no mercado de títulos*. Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (IBMEC), 1984.
- LEVY, H. & SARNAT, M. *Capital investment and financial decisions*. Reino Unido: Prentice Hall, 1994.
- MANNARINO, R. *Introdução à engenharia econômica*. Rio de Janeiro: Campus, 1991.

- PUCCINI, A. L. *Matemática financeira*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1982.
- MATHIAS, W. F. & GOMES, J. M. *Matemática financeira*. São Paulo: Atlas, 1993.
- ROSS, S. A., WESTERFIELD, R. W. & JAFFE, J. F. *Administração financeira*. São Paulo: Atlas, 1995.
- SAMANEZ, C. P. *Leasing: análise e avaliação*. São Paulo: Atlas, 1990.
- SAMANEZ, C. P. *Matemática financeira: aplicações à análise de investimentos*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1999.
- SHARPE, W., ALEXANDER, G. J. & BAILEY, J. V. *Investments*. 5. ed. Nova York: Prentice Hall, 1995.
- SHIM, J. K. & SIEGEL, J. G. *Managerial finance: theory and problems*. Schaum's Outline Series. Nova York: McGraw-Hill, 1983.
- THUESEN, H. G. *Engineering economy*. Nova York: Prentice Hall, 1974.
- VIEIRA, Sobrinho, J. D. *Matemática financeira*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1985.





Impressão e acabamento:
GRÁFICA PAYM
Tel. (011) 4392-3344