Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Joanna Dziekańska
Nr albumu: 322189

Rozwiązania równań Einsteina odpowiadające powierzchniom solitonowym

Praca magisterska
na kierunku Fizyka
w zakresie fizyka teoretyczna

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Adama Szereszewskiego
Wydział Fizyki Uniwersytet Warszawski

Warszawa, luty 2018

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autorki pracy

Świadoma odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autorki pracy

Streszczenie

Metoda rozwiązywania równań Einsteina z symetriami została zastosowana do przypadku niepróżniowych równań ze stałą kosmologiczną. Opisano teorię powierzchni dwuwymiarowych zanurzonych w przestrzeni Euklidesowej i Minkowskiego. Powierzchnie o stałej, ujemnej krzywiźnie wykorzystano do uzyskania ścisłych rozwiązań równań Einsteina. Przeanalizowano dwa przypadki równań: z płynem doskonałym oraz polem elektromagnetycznym. Pokazano, że w pierwszym przypadku równania Einsteina redukują się do dwóch równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. W drugim okazało się, że tak silne założenia jak te postawione w pracy wykluczają istnienie rozwiązania.

Słowa kluczowe

wektor Killinga, równanie sinusa-Gordona, transformacja Bäcklunda, równanie Lelieuvre, równania Einsteina, powierzchnie dwuwymiarowe

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Solutions of the Einstein equations corresponding to solitonic surfaces

Spis treści

Wprowadzenie

Dla zdecydowanej większości nieliniowych równań różniczkowych nie ma możliwości znalezienia i zapisania rozwiązania w jawnej postaci. W wielu dziedzinach fizyki pojawia się pewna szczególna klasa równań różniczkowych nieliniowych cząstkowych zwanych równaniami zupełnie całkowalnymi. W przeciwieństwie do równań różniczkowych zwyczajnych pojęcie zupełnej całkowalności nie jest dobrze zdefiniowane dla równań cząstkowych. Takie równania będziemy nazywali równaniami solitonowymi. Posiadają one szereg bardzo ciekawych własności na przykład możliwość skonstruowania ścisłego rozwiązania oraz generowania nowych rozwiązań z już otrzymanego. Z drugiej strony okazuje się, że metody konstrukcji określonych klas powierzchni analizowane przez dziewiętnastowiecznych matematyków są nierozerwalnie powiązane z teorią układów całkowalnych. Wykorzystywane przez nich równania różniczkowe opisujące geometrię rozważanych zanurzeń często były równaniami całkowalnymi. Przykładem takiego równania jest równanie sinusa-Gordona

$$\phi_{,xx} - \phi_{,tt} = \sin\phi, \tag{0.1}$$

które pełni ważną rolę w tej pracy. Równanie sinusa-Gordona opisuje lokalne zanurzenie dwuwymiarowej powierzchi o stałej, ujemnej krzywiźnie Gaussa w $\mathbb{R}^3$. Funkcja $\phi = \phi(x,t)$ odpowiada kątowi między kierunkami asymptotycznymi na powierzchni, a jego rozwiązania krzywym na powierzchni wzdłuż tych kierunków.

W niniejszej pracy konstruujemy blokowo-diagonalną metrykę

$$g = g_{AB}dx^A dx^B + \rho n_{ab} dx^a dx^b \tag{0.2}$$

zależną jedynie od dwóch współrzędnych. Korzystamy z metody [7, 8], która pozwala automatycznie spełnić część równań Einsteina poprzez wybór dwuwymiarowej powierzchni w trójwymiarowej przestrzeni Minkowskiego. Spełnienie takiego warunku wymaga by poszczególne elementy metryki zawierały odpowiednie kombinacje składowych wektora normalnego do tej powierzchni. Ponadto część g_{AB} metryki g musi być proporcjonalna do drugiej formy fundamentalnej tej powierzchni, a funkcja ρ jest związana z ujemną krzywizną Gaussa tej powierzchni. W pracy dodatkowo będzimy zakładać, że krzywizna ta jest stała.

1 Równania Einsteina z dwiema symetriami

Przedstawimy metodę rozwiązywania niepróżniowych równań Einsteina zakładając, że czasoprzestrzeń dopuszcza dwa komutujące, przestrzenne wektory Killinga K_1, K_2. Niech $\mathscr{M}$ będzie czterowymiarową rozmaitością wyposażoną w metrykę g o sygnaturze $(+---)$. Pokażemy, że mając daną dwuwymiarową powierzchnię zanurzoną w trójwymiarowej (niefizycznej) przestrzeni Minkowskiego równania Einsteina znacznie upraszczają się, co umożliwia znajdowanie ścisłych rozwiązań [7, 8]. Zaczniemy od konstrukcji tensora metrycznego g.

Zwróćmy uwagę na następujący fakt [4]. Niech Y będzie gładkim polem wektorowym na pewnym otwartym podzbiorze $\mathscr{U}$ rozmaitości $\mathscr{M}$ i załóżmy, że w punkcie $p \in \mathscr{U}$ mamy $Y(p) \neq 0$. Wówczas istnieje lokalny układ współrzędnych y^μ na otwartym podzbiorze $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ zawierającym punkt p taki, że $X|_{\mathscr{U}_0} = \frac{\partial}{\partial y^1}$. Można wykazać, iż dla dwóch komutujących pól wektorowych $[Y_1, Y_2] = 0$ da się wybrać taki układ współrzędnych, że $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}$, $Y_2 = \frac{\partial}{\partial y^2}$.

Pozwala nam to założyć, że $K_1 = \frac{\partial}{\partial x^2}$ oraz $K_2 = \frac{\partial}{\partial x^3}$ w lokalnym układzie współrzędnych x^μ, ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Zapewnia to także niezależność metryki od współrzędnych x^2, x^3. W każdym punkcie $x \in \mathscr{M}$ istnieje przestrzeń styczna $T_x\mathscr{M}$, w której można zdefiniować dwuwymiarową podprzestrzeń rozpinaną przez wektory ν_1, ν_2 prostopadłe do $< K_1, K_2 >_x$. Funkcja

$$\mathscr{D} : x \mapsto \mathscr{D}_x =< \nu_1, \nu_2 >_x \tag{1.1}$$

zadaje dwuwymiarową dystrybucję na $\mathscr{M}$. Kluczowe uproszczenie otrzymamy zakładając, że dystrybucja $\mathscr{D}$ jest całkowalna tzn. istnieją powierzchnie, do których wektory ν_1, ν_2 są styczne. Takie założenie sprowadza metrykę do postaci blokowo-diagonalnej, a współrzędnymi na tych powierzchniach są x^0 i x^1. Wówczas metryka w tych współrzędnych przyjmuje postać:

$$g = g_{AB}dx^A dx^B + \rho n_{ab} dx^a dx^b, \tag{1.2}$$

gdzie $A, B = 0, 1$ i $a, b = 2, 3$ oraz funkcje $\rho > 0$, g_{AB}, n_{ab} zależą jedynie od dwóch pierwszych współrzędnych x^0 i x^1. Macierz $n = (n_{ab})$ jest ujemnie określona i zachodzi $\det n = 1$. Tensor Ricciego dla takiej metryki redukuje się do:

$$R_{AB} = \frac{1}{2}R^{(2)}g_{AB} - \frac{1}{\rho}\nabla_A\nabla_B\rho + \frac{1}{2\rho^2}\rho_{,A}\,\rho_{,B} + \frac{1}{4}n_{ab,A}n^{ab}{}_{,B}\,, \tag{1.3}$$

$$R_{Aa} = 0, \tag{1.4}$$

$$R^a{}_b = -\frac{1}{2\rho}\nabla^A\big(\rho_{,A}\,\delta^a{}_b + \rho n^{ac}n_{cb,A}\big), \tag{1.5}$$

gdzie $n^{-1} = (n^{ab})$ jest macierzą odwrotną do n, $R^{(2)}$ to krzywizna dwuwymiarowej powierzchni z metryką g_{AB}, a ∇_A oznacza pochodną kowariantną względem g_{AB}.

1.1 Zredukowane równania Einsteina z płynem doskonałym i stałą kosmologiczną

W tym rozdziale przypomnimy metodę rozwiązywania równań Einsteina z dwoma wektorami Killinga polegającą na związaniu części zredukowanych równań Einsteina z równaniami pojawiającymi się w teorii powierzchni dwuwymiarowych. Przypadek równań próżniowych został opisany w [8], natomiast równania z tensorem energii-pędu dla płynu doskonałego zostały przeanalizowane w [7]. Równania Einsteina z tensorem energii-pędu dla płynu doskonałego mają następującą postać

$$R^\mu{}_\nu = \kappa\Big((\epsilon + p)u^\mu u_\nu - \frac{1}{2}(\epsilon - p)\delta^\mu{}_\nu\Big) + \Lambda\delta^\mu{}_\nu, \tag{1.6}$$

gdzie $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, funkcje ϵ, p oznaczają gęstość energii oraz ciśnienie płynu, Λ to stała kosmologiczna, a u^ν to wektor czteroprędkości z warunkiem normalizacji $u^\mu u_\mu = 1$. Rozważmy przypadek, w którym $\epsilon + p \neq 0$ i zastosujmy (1.3)-(1.5) do równania Einsteina (1.6). Skoro $R_{Aa} = 0 = \kappa(\epsilon + p)u_A u_a$, to bez straty ogólności załóżmy, że $u_a = 0$ (przyjęcie $u_A = 0$ uniemożliwiłoby normalizację wektora czteroprędkości). Założenie $u_a = 0$ pozwala na zapisanie równania $R^a_{\ a} = -\kappa(\epsilon - p) + 2\Lambda$ w postaci:

$$-\frac{1}{2\rho}\nabla^A\big(2\rho,_A + \rho n^{ac} n_{ca,A}\big) = -\kappa(\epsilon - p) + 2\Lambda. \tag{1.7}$$

Zauważmy, że drugi człon po lewej stronie równania (1.7) znika, gdy wykorzystamy tożsamość Jacobiego. Mamy:

$$n^{ac} n_{ca,A} = \mathrm{Tr}\big(n^{-1} n,_A\big) = \mathrm{Tr}\big((\det n)^{-1}(\det n) n^{-1} n,_A\big) = \mathrm{Tr}\big((\det n)^{-1} \mathrm{adj}(n)\, n,_A\big) = \tag{1.8}$$

$$= \frac{(\det n),_A}{(\det n)} = (\ln|\det n|),_A = 0,$$

gdzie $\mathrm{adj}(n)$ jest macierzą dołączoną do macierzy n. Biorąc pod uwagę powyższy fakt oraz to, że $\nabla_A \rho = \rho,_A$ otrzymujemy z (1.7) równanie:

$$\nabla^A \nabla_A \rho = \rho\kappa(\epsilon - p) - 2\rho\Lambda. \tag{1.9}$$

Następnie usuńmy część śladową $R^a_{\ a} = -\frac{1}{\rho}\nabla^A \rho,_A = -\kappa(\epsilon - p) + 2\Lambda$ z równań (1.5)-(1.6). Wówczas zachodzi:

$$-\frac{1}{2\rho}\nabla^A\big(\rho n^{ac} n_{cb},_A\big) = \kappa(\epsilon + p) u^a u_b = 0. \tag{1.10}$$

W podobny sposób postępujemy z równaniem

$$R_{AB} = \kappa(\epsilon + p) u_A u_B - \frac{1}{2}\kappa(\epsilon - p) g_{AB} + \Lambda g_{AB}. \tag{1.11}$$

Wprowadźmy oznaczenie $\tilde{R}_{AB} = R_{AB} + \frac{1}{2\rho}\nabla^A \nabla_A \rho$. Wówczas skorzystanie z (1.9) redukuje równanie (1.11) do

$$\tilde{R}_{AB} = \kappa(\epsilon + p) u_A u_B. \tag{1.12}$$

Podsumowując, równania Einsteina redukują się do równań (1.9), (1.12) oraz

$$\nabla^A\big(\rho n^{-1} n,_A\big) = 0. \tag{1.13}$$

Zauważymy, że postać równania (1.12) prowadzi do

$$\det \tilde{R}_{AB} = 0. \tag{1.14}$$

Przypadek, którym dalej będziemy się zajmować, ogranicza się do $\rho = const$. Wtedy $R_{AB} = \tilde{R}_{AB}$ i z (1.14) wnioskujemy, że

$$\det R_{AB} = 0. \tag{1.15}$$

Dodatkowo w tym przypadku dostajemy z (1.9):

$$\epsilon - p = \frac{2\Lambda}{\kappa}. \tag{1.16}$$

Uwzględniając unormowanie wektora u^ν otrzymujemy warunek (konieczny także dla $\rho \neq const$):

$$R^A_{\ A} R_{00} = \kappa^2 (\epsilon + p)^2 u_0^2 > 0. \tag{1.17}$$

Równania (1.9), (1.12) umożliwią wyznaczenie funkcji ϵ, p ze wzorów

$$\epsilon = \frac{1}{2\kappa} R^A_{\ A} + \frac{\Lambda}{\kappa}, \tag{1.18}$$

$$p = \frac{1}{2\kappa} R^A_{\ A} - \frac{\Lambda}{\kappa}, \tag{1.19}$$

oraz unormowanego wektora czteroprędkości u^μ, gdy spełnione jest równanie (1.15) oraz warunek (1.17). Ostatecznie równania Einsteina sprowadzają się do równań (1.13), (1.15) oraz nierówności (1.17). Metoda, którą zastosujemy w pracy, polega na związku równania (1.13) z teorią dwuwymiarowych powierzchni [7, 8].

1.2 Zredukowane równania Einsteina z polem elektromagnetycznym i stałą kosmologiczną

Zgodnie z definicją tensor energii-pędu dla pola elektromagnetycznego ma postać

$$T_{\alpha\beta} = F_{\alpha\mu} F_\beta^{\ \mu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g_{\alpha\beta}, \tag{1.20}$$

gdzie $F_{\mu\nu}$ jest tensorem pola elektromagnetycznego. Rozpisanie go na poszczególne składowe ($F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$)

$$T_{AB} = F_{A\mu} F_B^{\ \mu} - \frac{1}{4} F^2 g_{AB}, \tag{1.21}$$

$$T_{ab} = F_{a\mu} F_b^{\ \mu} - \frac{1}{4} F^2 g_{ab}, \tag{1.22}$$

$$T_{Aa} = F_{A\mu} F_a^{\ \mu} - \frac{1}{4} F^2 g_{Aa} = F_{A\mu} F_a^{\ \mu}, \tag{1.23}$$

umożliwi nam zbadanie, czy tak zadany tensor dopuszcza rozwiązania równań Einsteina, w których tensor Ricciego spełnia (1.3)-(1.5) przy założeniu, że $\rho = const$. Z uwagi na zerowanie się śladu tensora energii-pędu dla pola elektromagnetycznego

$$\kappa T^\alpha_{\ \alpha} = -R + 4\Lambda = 0, \tag{1.24}$$

równania Einsteina redukują się do

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{1.25}$$

Okaże się, że samo równanie dla składowej (1.23) narzuci bardzo silne warunki na postać $F_{\mu\nu}$. W rozdziale 7, korzystając z zerowania się śladu tensora energii-pędu dla pola elektromagnetycznego oraz z (1.4), otrzymamy

$$F_{A\mu} F_a^{\ \mu} = 0. \tag{1.26}$$

Wykażemy, że równanie (1.26) dopuszcza tylko dwie postacie tensora $F_{\mu\nu}$.

2 Opis powierzchni dwuwymiarowych zanurzonych w przestrzeni trójwymiarowej przy użyciu ruchomego reperu

W tym rozdziale podajemy opis powierzchni dwuwymiarowych zanurzonych w płaskiej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z metryką $\eta = \mathrm{diag}(1, 1, \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$. W tym celu wykorzystamy formalizm ruchomego reperu. Z każdym punktem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wiążemy prawoskrętny układ wektorów $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, gdzie $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \eta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Niech Σ będzie powierzchnią w $\mathbb{R}^3$ z wektorem wodzącym $\mathbf{x}$. Obliczając pochodną zewnętrzną $\mathbf{x}$ dostajemy wektor $d\mathbf{x}$, którego składowymi są jednoformy:

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = dx^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + dx^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + dx^3 \hat{\mathbf{e}}_3, \tag{2.1}$$

gdzie $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ jest kartezjańskim układem ortonormalnym. W każdym punkcie przestrzeni E^3 możemy wyrazić $\hat{\mathbf{e}}_i$ poprzez reper $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ zaczepiony w tym punkcie. Wówczas $d\mathbf{x} = \theta^1\mathbf{e}_1 + \theta^2\mathbf{e}_2 + \theta^3\mathbf{e}_3$. Wybieramy reper ruchomy dostosowany do powierzchni Σ. Oznacza to, że dla każdego punktu $p \in \Sigma$ wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in T_p\Sigma$ oraz $\mathbf{e}_3$ jest wektorem normalnym[1] do Σ. Wektor $d\mathbf{x}$ jest styczny do Σ, więc powierzchnia zadana jest warunkiem $\theta^3 = 0$. Wprowadzone powyżej wielkości pozwalają zdefiniować pierwszą i drugą formę fundamentalną dla powierzchni Σ:

$$g_I = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \tag{2.2}$$

$$g_{II} = -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{e}_3. \tag{2.3}$$

2.1 Równania struktury i warunki całkowalności

Obliczając różniczki wektorów $\mathbf{e}_i$ dostajemy

$$d\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \omega^j{}_i, \tag{2.4}$$

gdzie $\omega^i{}_j$ są jednoformami. Z warunków całkowalności $dd\mathbf{x} = 0$ oraz $dd\mathbf{e}_i = 0$ otrzymujemy zależności:

$$dd\mathbf{x} = 0 = d\theta^i \mathbf{e}_i - \theta^i \wedge d\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(d\theta^i + \omega^i{}_j \wedge \theta^j), \tag{2.5}$$

$$dd\mathbf{e}_i = 0 = \mathbf{e}_j d\omega^j{}_i + d\mathbf{e}_j \wedge \omega^j{}_i = \mathbf{e}_j(d\omega^j{}_i + \omega^j{}_k \wedge \omega^k{}_i). \tag{2.6}$$

Na mocy liniowej niezależności układu $(\mathbf{e}_i)$ wnioskujemy, że jednoformy θ^i oraz $\omega^i{}_j$ spełniają równania:

$$d\theta^i + \omega^i{}_j \wedge \theta^j = 0, \tag{2.7}$$

$$d\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j = 0. \tag{2.8}$$

Obustronne zróżniczkowanie równania $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \eta_{ij} = const$ implikuje $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$, gdzie $\omega_{ij} = \eta_{ik}\omega^k{}_j$. Antysymetria ω_{ij} oznacza, że macierz $\omega^i{}_j$ zależy jedynie od $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$. Stąd (2.7)-(2.8) sprowadzają się do układu równań na ω_{12}, ω_{13}, ω_{23}, θ^1, θ^2:

$$d\theta^1 + \omega_{12} \wedge \theta^2 = 0, \tag{2.9}$$

$$d\theta^2 - \omega_{12} \wedge \theta^1 = 0, \tag{2.10}$$

$$\omega_{13} \wedge \theta^1 + \omega_{23} \wedge \theta^2 = 0, \tag{2.11}$$

$$d\omega_{12} - \varepsilon\omega_{13} \wedge \omega_{23} = 0, \tag{2.12}$$

$$d\omega_{13} + \omega_{12} \wedge \omega_{23} = 0, \tag{2.13}$$

$$d\omega_{23} - \omega_{12} \wedge \omega_{13} = 0. \tag{2.14}$$

[1] Przyjmujemy, że w przypadku $\varepsilon = -1$ powierzchnia nie jest zerowa.

2.2 Odwzorowanie sferyczne Gaussa

Dwuforma $\theta^1 \wedge \theta^2$ przedstawia element pola powierzchni Σ. Możemy zdefiniować [1] odwzorowanie zadane wzorem:

$$\mu : \Sigma \longrightarrow S^2 \subset E^3$$

$$\mu(p) = \mathbf{e}_3(p), \tag{2.15}$$

które każdemu punktowi $p \in \Sigma$ przypisuje koniec wektora normalnego w tym punkcie, ale zaczepionego w początku układu współrzędnych $\mathbf{0} \in E^3$ (S^2 oznacza sferą jednostkową). Punkt p przebiega powierzchnię Σ, a odpowiadający mu koniec wersora $\mathbf{e}_3$ zakreśla pewien obszar sfery jednostkowej S^2. Równanie $d\mathbf{e}_3 = \omega_{13}\mathbf{e}_1 + \omega_{23}\mathbf{e}_2$ odgrywa taką rolę na S^2 jak $d\mathbf{x} = \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2$ na powierzchni Σ. Możemy więc wnosić, że $\omega_{13} \wedge \omega_{23}$ jest elementem pola powierzchni na S^2. Wobec tego, że na Σ istnieje tylko jedna liniowo niezależna dwuforma (Σ jest 2-wymiarowa) mamy:

$$\omega_{13} \wedge \omega_{23} = K\theta^1 \wedge \theta^2, \tag{2.16}$$

gdzie K jest krzywizną Gaussa.

2.3 Równanie Lelieuvre

Formy ω_{13}, ω_{23} są jednoformami na dwuwymiarowej powierzchni $\mathit{\Sigma}$, więc można je zapisać w bazie (θ^1, θ^2) w następujący sposób:

$$\omega_{13} = \alpha\theta^1 + \beta\theta^2 \tag{2.17}$$

$$\omega_{23} = \tilde{\beta}\,\theta^1 + \gamma\theta^2, \tag{2.18}$$

gdzie $\alpha, \beta, \tilde{\beta}\,, \gamma$ są funkcjami. Zastosowanie (2.11) prowadzi do relacji $\tilde{\beta}\; = \beta$. Pozwala to wyznaczyć drugą formę fundamentalną g_{II} powierzchni Σ :

$$g_{II} = -\big(\alpha(\theta^1)^2 + 2\beta\theta^1\theta^2 + \gamma(\theta^2)^2\big) = g_{II_{AB}}\theta^A\theta^B. \tag{2.19}$$

Pierwsza forma fundamentalna g_I ma postać

$$g_I = \left(\theta^1\right)^2 + \left(\theta^2\right)^2, \tag{2.20}$$

więc krzywizna Gaussa redukuje się do:

$$K = \frac{\det g_{II_{AB}}}{\det g_{I_{AB}}} = \alpha\gamma - \beta^2. \tag{2.21}$$

Wykażemy, że zachodzi następujący

Fakt.

Niech $\mathbf{x}$ będzie wektorem wodzącym dwuwymiarowej powierzchni $\mathit{\Sigma}$ zanurzonej w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej lub Minkowskiego. Jeśli $\rho^{-1} = -\sqrt{|K|}$, gdzie K jest krzywizną Gaussa, $\mathbf{e}_3$ jest wektorem normalnym do $\mathit{\Sigma}$ oraz $*$ jest gwiazdką Hodge'a względem drugiej formy fundamentalnej, to zachodzi relacja (równanie Lelieuvre)

$$d\mathbf{x} = \rho\mathbf{e}_3 \times *d\mathbf{e}_3. \tag{2.22}$$

Dowód:

Niech $*$ będzie gwiazdką Hodge'a względem drugiej formy fundamentalnej g_{II}. Korzystając ze wzorów (2.17)-(2.18) oraz wyrażeń na $*\theta^1$, $*\theta^2$ obliczonych w Dodatku A, dostajemy:

$$*d\mathbf{e}_3 = *(\omega_{13}\mathbf{e}_1 + \omega_{23}\mathbf{e}_2) = *\big((\alpha\theta^1 + \beta\theta^2)\mathbf{e}_1 + (\beta\theta^1 + \gamma\theta^2)\mathbf{e}_2\big) = \sqrt{|W|}(-\theta^2\mathbf{e}_1 + \theta^1\mathbf{e}_2), \tag{2.23}$$

gdzie $W \equiv \det g_{II_{AB}} = \alpha\gamma - \beta^2$. Następnie obliczamy

$$\mathbf{e}_3 \times *d\mathbf{e}_3 = -\sqrt{|W|}(\theta^1\mathbf{e}_1 + \theta^2\mathbf{e}_2) = \frac{1}{\rho}d\mathbf{x}, \tag{2.24}$$

gdzie $\rho^{-1} = -\sqrt{|W|} = -\sqrt{|K|}$, oraz wykorzystaliśmy[2]

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \varepsilon\mathbf{e}_3, \;\; \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2, \;\; \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1. \tag{2.25}$$

Zatem (2.22) jest spełnione (równanie Lelieuvre w analogicznej postaci pojawiło się w [8]). $\square$

2.4 Związek dwuwymiarowych powierzchni z równaniami Einsteina

Każda dwuwymiarowa rozmaitość wyposażona w tensor metryczny jest konforemnie płaska[3]. Oznacza to, że istnieje funkcja $\psi = \psi(x^0, x^1)$ oraz liczba $\gamma = \pm 1$, dla których

$$g_{AB} = \gamma e^{2\psi}\, g'_{AB}, \tag{2.26}$$

gdzie g'_{AB} jest metryką Euklidesową albo Minkowskiego. Wykażemy teraz, że równanie $\nabla^A\big(\rho n^{-1} n,_A\big) = 0$ jest niezmiennicze względem konforemnej transformacji metryki g_{AB}. Niech Γ^C_{AB}, $\tilde{\Gamma}^C_{AB}$ będą odpowiednio symbolami Christoffela drugiego rodzaju względem metryki g_{AB} oraz g'_{AB}. Zauważmy, że:

$$\nabla^A\big(\rho n^{-1} n,_A\big) = g^{AB}\nabla_B\big(\rho n^{-1} n,_A\big) = g^{AB}\big(\rho n^{-1} n,_A\big),_B - g^{AB}\Gamma^C_{AB}\rho n^{-1} n,_C\,. \tag{2.27}$$

Do wykazania prawdziwości powyższego stwierdzenia wystarczy jedynie sprawdzić jak transformuje się drugi człon wyrażenia (2.27). Korzystając z symetrii tensora metrycznego mamy

$$g^{AB}\Gamma^C_{AB} = \frac{1}{2}g^{AB}g^{CD}\big(g_{DA},_B + g_{BD},_A - g_{AB},_D\big) = g^{CD}\big(g^{AB}g_{AD},_B - \frac{1}{2}g^{AB}g_{AB},_D\big). \tag{2.28}$$

Podstawiając (2.26) do wzoru (2.28) można wykazać, że $g^{AB}\Gamma^C_{AB} = \gamma e^{-2\psi} g'^{AB}\tilde{\Gamma}^C_{AB}$. Mamy zatem:

$$\nabla^A\big(\rho n^{-1} n,_A\big) = \gamma e^{-2\psi}\nabla'^A\big(\rho n^{-1} n,_A\big), \tag{2.29}$$

gdzie symbol ∇' oznacza pochodną kowariantną związaną z tensorem metrycznym g'_{AB}.

[2] Dla wektorów $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$, $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)^T$ z przestrzeni Minkowskiego ($\varepsilon = -1$) iloczyn wektorowy definiujemy jako $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & -\mathbf{k} \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$.

[3] Niech (x, y) będą lokalnym układem współrzędnych na dwuwymiarowej rozmaitości, w których metryka o sygnaturze $(+,-)$ przyjmuje postać

$$g = g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dxdy + g_{yy}dy^2.$$

Metrykę g możemy przekształcić do postaci

$$g = \left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} + \sqrt{G}}{\sqrt{g_{xx}}}dy\right)\left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} - \sqrt{G}}{\sqrt{g_{xx}}}dy\right),$$

gdzie $G = g_{xy}^2 - g_{xx}g_{yy}$. Można wykazać, że istnieją czynniki całkujące $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ takie, że

$$\lambda\left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} + \sqrt{G}}{\sqrt{g_{xx}}}dy\right) = du + dv, \quad \mu\left(\sqrt{g_{xx}}dx + \frac{g_{xy} - \sqrt{G}}{\sqrt{g_{xx}}}dy\right) = du - dv.$$

Umożliwia to zapisanie metryki jako $g = \lambda^{-1}\mu^{-1}(du^2 - dv^2)$, a kładąc $\frac{1}{|\lambda\mu|} = e^{2\psi}$ otrzymujemy żądany układ współrzędnych. Taki układ (u, v) nazywamy układem współrzędnych izotermicznych [5].

Niech $\vec{N}$ będzie kowektorem w przestrzeni Minkowskiego, którego składowe n_i, $(i = 1, 2, 3)$ będące funkcjami współrzędnych (x^0, x^1), są związane z macierzą $n = (n_{ab})$ w następujący sposób:

$$n = \begin{pmatrix} n_1 + n_3 & n_2 \\ n_2 & n_3 - n_1 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Z uwagi na to, że n jest ujemnie określona oraz spełnia $\det n = 1$ przyjmiemy, że zachodzą warunki:

$$n_3 < 0, \tag{2.31}$$

$$\vec{N}^2 = -1, \tag{2.32}$$

gdzie $\vec{N}^2 = n_1^2 + n_2^2 - n_3^2$. Wykażemy teraz, że równanie (1.13) można sprowadzić przy tych założeniach do postaci

$$d\big(\rho\vec{N} \times *d\vec{N}\big) = 0, \tag{2.33}$$

gdzie d to pochodna zewnętrzna i $*$ jest gwiazdką Hodge'a względem metryki g_{AB}. Zauważmy, że $*dn_i = n_{i,A} *dx^A$, gdzie $A = 0, 1$. Korzystając z faktu o niezmienniczości równania (1.13) względem transformacji metryki zadanej wzorem (2.26) możemy g_{AB} sprowadzić do postaci $g'_{AB} \sim (dx^0)^2 - (dx^1)^2$. Wówczas, na podstawie rachunku przeprowadzonego w Dodatku A, zachodzi $*dx^0 = dx^1$ i $*dx^1 = dx^0$, a stąd mamy:

$$\rho\vec{N} \times *d\vec{N} = \rho\left[\begin{pmatrix} n_2\partial_1 n_3 - n_3\partial_1 n_2 \\ n_3\partial_1 n_1 - n_1\partial_1 n_3 \\ n_1\partial_1 n_2 - n_2\partial_1 n_1 \end{pmatrix} dx^0 + \begin{pmatrix} n_2\partial_0 n_3 - n_3\partial_0 n_2 \\ n_3\partial_0 n_1 - n_1\partial_0 n_3 \\ n_1\partial_0 n_2 - n_2\partial_0 n_1 \end{pmatrix} dx^1\right]. \tag{2.34}$$

We wzorach, w których czytelność napisu byłaby utrudniona, stosujemy symbol ∂_A na pochodną cząstkową zamiast przecinka. Różniczkujemy zewnętrznie wyrażenie (2.34) i otrzymujemy

$$d\big(\rho\vec{N} \times *d\vec{N}\big) = \left[\partial_0\left(\rho\begin{pmatrix} n_2\partial_0 n_3 - n_3\partial_0 n_2 \\ n_3\partial_0 n_1 - n_1\partial_0 n_3 \\ n_1\partial_0 n_2 - n_2\partial_0 n_1 \end{pmatrix}\right) - \partial_1\left(\rho\begin{pmatrix} n_2\partial_1 n_3 - n_3\partial_1 n_2 \\ n_3\partial_1 n_1 - n_1\partial_1 n_3 \\ n_1\partial_1 n_2 - n_2\partial_1 n_1 \end{pmatrix}\right)\right] dx^0 \wedge dx^1. \tag{2.35}$$

Zerowanie się lewej strony równania (2.33) można więc równoważnie zapisać w postaci

$$g'^{AB}\left(\rho\begin{pmatrix} n_2\partial_A n_3 - n_3\partial_A n_2 \\ n_3\partial_A n_1 - n_1\partial_A n_3 \\ n_1\partial_A n_2 - n_2\partial_A n_1 \end{pmatrix}\right)_{,B} = 0. \tag{2.36}$$

Z drugiej strony, bezpośredni rachunek pozwala sprawdzić, że wymnożenie macierzy w równaniu (1.13) i zastosowanie (2.32) prowadzi do:

$$\nabla^A\big(\rho n^{-1} n_{,A}\big) = \nabla^A\left[\rho\begin{pmatrix} n_3 - n_1 & -n_2 \\ -n_2 & n_3 + n_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 + n_3 & n_2 \\ n_2 & n_3 - n_1 \end{pmatrix}_{,A}\right] =$$

$$= \nabla^A\left[\rho\begin{pmatrix} n_3\partial_A n_1 - n_1\partial_A n_3 & n_3\partial_A n_2 - n_1\partial_A n_2 - n_2\partial_A n_3 + n_2\partial_A n_1 \\ -n_2\partial_A n_1 - n_2\partial_A n_3 + n_3\partial_A n_2 + n_1\partial_A n_2 & n_1\partial_A n_3 - n_3\partial_A n_1 \end{pmatrix}\right] = 0. \tag{2.37}$$

Z uwagi na płaskość mertyki g'_{AB} można równanie (2.37) równoważnie zapisać w postaci

$$g'^{AB}\left(\rho\begin{pmatrix} n_3\partial_A n_1 - n_1\partial_A n_3 & n_3\partial_A n_2 - n_1\partial_A n_2 - n_2\partial_A n_3 + n_2\partial_A n_1 \\ -n_2\partial_A n_1 - n_2\partial_A n_3 + n_3\partial_A n_2 + n_1\partial_A n_2 & n_1\partial_A n_3 - n_3\partial_A n_1 \end{pmatrix}\right)_{,B} = 0. \tag{2.38}$$

Na podstawie (2.38) można już bez trudu zauważyć, że środkowe wyrażenie we wzorze (2.36) jest równe zeru. Sumując i odejmując stronami równania pochodzące z pozadiagonalnych wyrazów (2.38) otrzymujmy zerowanie się pozostałych składowych w (2.36).

Uwaga 1.

Zauważmy, że jeśli zdefiniujemy $n^i = \eta^{ij} n_j$ oraz przyjmiemy, że $\mathbf{e}_3 = (n^1, n^2, n^3)$ to równanie (2.33) przyjmie postać

$$d(\rho \mathbf{e}_3 \times *d\mathbf{e}_3) = 0. \tag{2.39}$$

Z podrozdziału 2.3 wiemy, że równanie (2.39) jest tożsamościowo spełnione dla wielkości geometrycznych ρ, $\mathbf{e}_3$, $*$ stowarzyszonych z powierzchnią w sposób opisany w Fakcie.

Uwaga 2.

Z każdym rozwiązaniem równania (2.33), dla którego zachodzi nierówność

$$d\vec{N} \times d\vec{N} \neq 0 \tag{2.40}$$

możemy związać dwuwymiarową powierzchnie przestrzenną (czyli taką, dla której zachodzi warunek $\vec{N}^2 < 0$), o ile tylko metryka g_{AB} jest proporcjonalna do drugiej formy fundamentalnej tej powierzchni. W szczególności warunek (2.40) oznacza, że krzywizna Gaussa $K = \alpha\gamma - \beta^2$ powierzchni Σ musi być różna od zera, co można łatwo sprawdzić stosując (2.4), (2.17)-(2.18) przy $\tilde{\beta} = \beta$, (2.25) oraz Uwagę 1. do obliczenia

$$d\mathbf{e}_3 \times d\mathbf{e}_3 = 2\varepsilon \mathbf{e}_3(\alpha\gamma - \beta^2)\theta^1 \wedge \theta^2. \tag{2.41}$$

Uwaga 3.

Ponadto na tym etapie możemy już stwierdzić, że metryka g skonstruowana za pomocą tej metody rozwiązywania równań Einsteina [7, 8] będzie w większości przypadków niediagonalna. Jeśli położymy $n^2 = 0$, to zawsze dostaniemy $d\mathbf{e}_3 \times d\mathbf{e}_3 = 0$, co można wykazać krótkim rachunkiem. Skoro $\mathbf{e}_3$ jest wektorem o składowych $n^i = n^i(x^0, x^1)$, to dla $n^2 = 0$ dostajemy

$$d\mathbf{e}_3 = ({n^1}_{,0}\, dx^0 + {n^1}_{,1}\, dx^1)\hat{\mathbf{e}}_1 + ({n^3}_{,0}\, dx^0 + {n^3}_{,1}\, dx^1)\hat{\mathbf{e}}_3, \tag{2.42}$$

gdzie $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ jest kartezjańskim układem ortonormalnym i wówczas

$$d\mathbf{e}_3 \times d\mathbf{e}_3 = 2({n^1}_{,0}\, {n^3}_{,1} - {n^1}_{,1}\, {n^3}_{,0})dx^0 \wedge dx^1 \hat{\mathbf{e}}_2. \tag{2.43}$$

Skorzystanie z warunku (2.32) prowadzi do ${n^3}_{,i} = \frac{n^1 {n^1}_{,i}}{\sqrt{(n^1)^2+1}}$ dla $i = 0, 1$, co po wstawieniu do prawej strony równania (2.43) daje $d\mathbf{e}_3 \times d\mathbf{e}_3 = 0$.

3 Równanie sinusa-Gordona

Niech $\theta^1 = \cos\Omega du$, $\theta^2 = \sin\Omega dv$, gdzie $\Omega = \Omega(u, v)$ oraz rozpiszmy jednoformę ω_{12} w postaci $\omega_{12} = Adu + Bdv$. Wówczas równania (2.9)-(2.10) pozwalają wyznaczyć współczynniki $A = -\Omega_{,v}$, $B = -\Omega_{,u}$, a stąd:

$$\omega_{12} = -\Omega_{,v}\, du - \Omega_{,u}\, dv. \tag{3.1}$$

Korzystając z warunku całkowalności (2.12) oraz relacji (2.16) i (3.1) dostajemy:

$$d\omega_{12} = \frac{\Omega_{,vv} - \Omega_{,uu}}{\sin\Omega\cos\Omega}\theta^1 \wedge \theta^2 = \varepsilon K \theta^1 \wedge \theta^2. \tag{3.2}$$

A stąd:

$$\Omega_{,vv} - \Omega_{,uu} = \varepsilon K \sin\Omega\cos\Omega\,. \tag{3.3}$$

Pierwsza forma fundamentalna we współrzędnych lokalnych (u, v) przyjmuje postać

$$g_I = \cos^2\Omega du^2 + \sin^2\Omega dv^2. \tag{3.4}$$

3.1 Konstrukcja powierzchni o stałej, ujemnej krzywiźnie Gaussa

Przyjmijmy, że powierzchnia Σ ma stałą, ujemną krzywiznę:

$$K = -\frac{1}{\rho^2} = const. \tag{3.5}$$

Wówczas równanie (3.3) redukuje się do równania sinusa-Gordona:

$$\Omega,_{uu} - \Omega,_{vv} = \frac{\varepsilon}{\rho^2} \sin\Omega \cos\Omega. \tag{3.6}$$

Informacja o tym jak Σ jest zanurzona w przestrzeni trójwymiarowej zawarta jest w drugiej formie fundamentalnej g_{II}, której współczynniki α, β, γ spełniają warunki całkowalności (2.13)-(2.14), czyli równania:

$$\cos\Omega\alpha,_v + (\gamma - \alpha)\sin\Omega\Omega,_v - \sin\Omega\beta,_u - 2\cos\Omega\beta\Omega,_u = 0 \tag{3.7}$$

$$\sin\Omega\gamma,_u + (\gamma - \alpha)\cos\Omega\Omega,_u - \cos\Omega\beta,_v + 2\sin\Omega\beta\Omega,_v = 0 \tag{3.8}$$

oraz $\alpha\gamma - \beta^2 = -\frac{1}{\rho^2}$. Bez straty ogólności[4] możemy przyjąć, że $\beta = 0$ [2, 6]. Wówczas układ równań (3.7)-(3.8) redukuje się do:

$$\cos\Omega\alpha,_v + (\gamma - \alpha)\sin\Omega\Omega,_v = 0 \tag{3.9}$$

$$\sin\Omega\gamma,_u + (\gamma - \alpha)\cos\Omega\Omega,_u = 0 \tag{3.10}$$

oraz warunku $\alpha\gamma = -\frac{1}{\rho^2}$. Podstawiając $\gamma = -\frac{1}{\rho^2\alpha}$ do (3.9)-(3.10) otrzymujemy układ dwóch równań na α. Wyznaczając z nich $\alpha,_v$, $\alpha,_u$ oraz porównując $\alpha,_{vu}$ i $\alpha,_{uv}$ dostajemy związek:

$$\frac{1+\rho^2\alpha^2}{\alpha\sin 2\Omega}(\Omega,_{uv} - 2\Omega,_u \Omega,_v \cot 2\Omega)(-\sin\Omega + \rho^2\alpha^2\cos^2\Omega) = 0. \tag{3.11}$$

Pokażemy, że warunek:

$$\Omega,_{uv} - 2\Omega,_u \Omega,_v \cot 2\Omega = 0 \tag{3.12}$$

jest równoważny przypadkowi, gdy Ω zależy wyłącznie od jednej zmiennej. Ogólne rozwiązanie równania (3.12) ma postać:

$$\Omega = \arctan\exp(U(u) + V(v)). \tag{3.13}$$

Wstawiając (3.13) do równania sinusa-Gordona (3.6) otrzymujemy:

$$U'' - V'' - (U'^2 + V'^2)\tanh(U+V) + \varepsilon K = 0. \tag{3.14}$$

Różniczkując (3.14) po u i v dostajemy warunek:

$$\frac{U'V'}{\cosh^2(U+V)}(U'' - V'' - (U'^2 + V'^2)\tanh(U+V)) = 0, \tag{3.15}$$

który po użyciu (3.14) redukuje się do

$$U'V' = 0. \tag{3.16}$$

Wnioskujemy stąd, że $U = const$ lub $V = const$. Przypadki te odpowiadają $\Omega = \Omega(v)$ lub $\Omega = \Omega(u)$. Jeśli zdecydujemy się na $\Omega = \Omega(u)$, to z równania (3.9) wynika, że $\alpha = \alpha(u)$, a stąd $\gamma = \gamma(u)$. Zakładając, że Ω nie musi spełniać (3.12), otrzymujemy z drugiego nawiasu w (3.11):

[4] Okazuje się, że dla tak wybranych współrzędnych lokalnych (u, v) wszystkie powierzchnie o stałej, ujemnej krzywiźnie mają diagonalną drugą formę fundamentalną g_{II}.

$$\alpha = \pm\frac{1}{\rho}\tan\Omega \tag{3.17}$$

$$\gamma = \mp\frac{1}{\rho}\cot\Omega. \tag{3.18}$$

Okazuje się, że (3.17)-(3.18) są rozwiązaniami równań (3.9)-(3.10).

4 Transformacja Bäcklunda. Generacja nietrywialnego rozwiązania równania sinusa-Gordona

Powierzchnia o stałej, ujemnej krzywiźnie Gaussa odpowiada nietrywialnemu rozwiązaniu równania sinusa-Gordona (3.6). Transformacja Bäcklunda pozwala na uzyskanie nowych rozwiązań równania (3.6) oraz konstrukcję odpowiadających im powierzchni o stałej, ujemnej krzywiźnie Gaussa. Niech Σ' będzie nową powierzchnią a $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(u,v)$, $\mathbf{e}_3'$ odpowiednio wektorem wodzącym oraz normalnym do tej powierzchni. Żądamy, aby zachodziły następujące warunki:

1. $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \in \mathrm{T}_p\Sigma$
2. $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = L = const$
3. $(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \perp \mathbf{e}_3'$
4. $d\mathbf{x}' \perp \mathbf{e}_3'$

Z pierwszej własności wynika, że $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$, gdzie a, b są funkcjami. Drugi punkt pozwala na zapisanie $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2 = a^2 + b^2 = L^2$ i położenie $a = L\cos\Phi$ oraz $b = L\sin\Phi$, gdzie $\Phi = \Phi(u,v)$. Mamy zatem:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + L\cos\Phi\mathbf{e}_1 + L\sin\Phi\mathbf{e}_2. \tag{4.1}$$

Spełnienie warunku z punktu trzeciego jest równoważne równości $\mathbf{e}_3' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = 0$. Rozpisując wektor normalny do powierzchni Σ' w bazie $(\mathbf{e}_i)$ i dobierając współczynniki rozwinięcia tak, aby spełnić $(\mathbf{e}_3)^2 = (\mathbf{e}_3')^2 = \varepsilon$ otrzymujemy

$$0 = \mathbf{e}_3' \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = (a'\mathbf{e}_1 + b'\mathbf{e}_2 + c'\mathbf{e}_3) \cdot (L\cos\Phi\mathbf{e}_1 + L\sin\Phi\mathbf{e}_2) = L(a'\cos\Phi + b'\sin\Phi). \tag{4.2}$$

Na podstawie równania (4.2) możemy stwierdzić, że $a' = q\sin\Phi$ oraz $b' = q\cos\Phi$. Mamy wtedy:

$$\mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_3' = q^2\sin^2\Phi + q^2\cos\Phi + \varepsilon(c')^2 = q^2 + \varepsilon(c')^2 = \varepsilon. \tag{4.3}$$

W przypadku, gdy q, $c' = const$ oraz $\varepsilon = -1$ możemy położyć $q = \sinh\xi$, $c' = \cosh\xi$, gdzie $\xi \in \mathbb{R}$. Ostatecznie:

$$\mathbf{e}_3' = \sinh\xi\sin\Phi\mathbf{e}_1 - \sinh\xi\cos\Phi\mathbf{e}_2 + \cosh\xi\mathbf{e}_3. \tag{4.4}$$

Ostatni punkt, na podstawie którego $d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_3' = 0$ bezpośrednio zadaje transformację Bäcklunda. Korzystając z (4.1) obliczmy różniczkę $d\mathbf{x}'$:

$$d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} + L(d\cos\Phi(u,v)\,\mathbf{e}_1 + \cos\Phi(u,v)\,d\mathbf{e}_1 + d\sin\Phi(u,v)\,\mathbf{e}_2 + \sin\Phi(u,v)\,d\mathbf{e}_2). \tag{4.5}$$

Zastosowanie $d\mathbf{x} = \theta^1\mathbf{e}_1 + \theta^2\mathbf{e}_2$ oraz wzorów (2.4), (2.17)-(2.18), (3.1) (z warunkami (3.17)-(3.18) i $\beta = 0$) do formuły (4.5) umożliwia obliczenie iloczynu skalarnego $d\mathbf{x}'$ z $\mathbf{e}_3'$. Przyrównanie do zera wyrażeń stojących przy θ^1, θ^2 w $d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}_3' = 0$ prowadzi do następującej postaci transformacji Bäcklunda:

$$\Phi_{,u} + \Omega_{,v} = \frac{\sin\Phi\cos\Omega}{L} - \frac{\cosh\xi\cos\Phi\sin\Omega}{\rho\sinh\xi} \tag{4.6}$$

$$\varPhi,_v + \varOmega,_u = -\frac{\cos\Phi\sin\varOmega}{L} + \frac{\cosh\xi\sin\Phi\cos\varOmega}{\rho\sinh\xi}. \tag{4.7}$$

Załóżmy, że $\varOmega$ spełnia równanie (3.6) z $\varepsilon = -1$ tzn.:

$$\Omega,_{uu} - \Omega,_{vv} = -\frac{1}{\rho^2}\sin\Omega\cos\Omega. \tag{4.8}$$

Wówczas (4.6)-(4.7) jest układem równań na $\varPhi$, które powinno spełniać $\varPhi,_{uv} = \varPhi,_{vu}$, o ile tylko $\varOmega$ jest rozwiązaniem (4.8). Z tożsamości

$$\varPhi,_{uv} - \varPhi,_{vu} = \left(-\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{L^2} + \frac{\coth^2\xi}{\rho^2}\right)\sin\varOmega\cos\varOmega = 0 \tag{4.9}$$

dostajemy warunek wiążący stałe:

$$L = \rho\sinh\xi. \tag{4.10}$$

Oczekujemy, że krzywizna K' nowej powierzchni będzie równa krzywiźnie wyjściowej powierzchni $K = -\frac{1}{\rho^2}$. Zobaczmy, że rzeczywiście tak jest. Obliczmy w tym celu formy fundamentalne g_I' i g_{II}' powierzchni $\varSigma'$ i następnie K':

$$g_I' = d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' = \left(\frac{\cos\varPhi}{\cos\varOmega}\right)^2(\theta^1)^2 + \left(\frac{\sin\varPhi}{\sin\varOmega}\right)^2(\theta^2)^2 = \cos^2\varPhi du^2 + \sin^2\varPhi dv^2 \tag{4.11}$$

$$g_{II}' = -d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{e}_3' = -\frac{\sin 2\varPhi}{2\rho}\left(\frac{1}{\cos^2\varOmega}(\theta^1)^2 - \frac{1}{\sin^2\varOmega}(\theta^2)^2\right) = -\frac{\sin 2\varPhi}{2\rho}(du^2 - dv^2) \tag{4.12}$$

$$K' = \frac{\det g'_{II_{AB}}}{\det g'_{I_{AB}}} = -\frac{1}{\rho^2} = K. \tag{4.13}$$

Używając warunku (4.10) transformację Bäcklunda można zapisać w postaci:

$$\varPhi,_u + \varOmega,_v = \frac{\sin\Phi\cos\varOmega}{\rho\sinh\xi} - \frac{\cosh\xi\cos\Phi\sin\varOmega}{\rho\sinh\xi} \tag{4.14}$$

$$\varPhi,_v + \varOmega,_u = -\frac{\cos\Phi\sin\varOmega}{\rho\sinh\xi} + \frac{\cosh\xi\sin\Phi\cos\varOmega}{\rho\sinh\xi}. \tag{4.15}$$

Z kolei wykorzystując warunek $\varOmega,_{uv} = \varOmega,_{vu}$ i równania (4.14)-(4.15) możemy wykazać, że $\varPhi$ spełnia równanie:

$$\varPhi,_{uu} - \varPhi,_{vv} = -\frac{1}{\rho^2}\sin\Phi\cos\Phi. \tag{4.16}$$

Uzyskane w ten sposób $\varPhi$ również jest rozwiązaniem równania sinusa-Gordona. Użyjemy teraz transformacji Bäcklunda do wygenerowania nietrywialnego rozwiązania równania sinusa-Gordona (4.8). Kładąc $\varOmega = 0$ w układzie równań (4.14)-(4.15) dostajemy:

$$\varPhi,_u = \frac{\sin\varPhi}{\rho\sinh\xi}, \tag{4.17}$$

$$\varPhi,_v = \frac{\cosh\xi\sin\varPhi}{\rho\sinh\xi}. \tag{4.18}$$

Zauważenie, że $(\ln\tan\frac{\varPhi}{2}),_u = \frac{1}{\rho\sinh\xi}$ oraz $(\ln\tan\frac{\varPhi}{2}),_v = \frac{\cosh\xi}{\rho\sinh\xi}$ prowadzi do uzyskania rozwiązania równania (4.16) postaci:

$$\varPhi = 2\arctan\exp\left(\frac{u}{\rho\sinh\xi} + \frac{\cosh\xi}{\rho\sinh\xi}\mathrm{v} + \mathrm{c}\right), \qquad c = const, \tag{4.19}$$

czyli do rozwiązania równania sinusa-Gordona. Na koniec można zauważyć, że transformacja Bäcklunda przyjmuje elegancką postać, gdy dokonamy zamiany zmiennych $\frac{u+v}{2\rho} = x$, $\frac{v-u}{2\rho} = y$. Wówczas system (4.14)-(4.15) sprowadza się do:

$$(\Phi + \Omega)_{,x} = \frac{\coth\frac{\xi}{2}}{2}\sin(\Phi - \Omega) \tag{4.20}$$

$$(\Phi - \Omega)_{,y} = \frac{\tanh\frac{\xi}{2}}{2}\sin(\Phi + \Omega). \tag{4.21}$$

Wielokrotne użycie transformacji Bäcklunda pozwala na konstrukcję nowych rozwiązań równania sinusa-Gordona w sposób niewymagający całkowania.

5 Redukcja równań Einsteina w przypadku $\rho = const$

W dalszej części pracy wciąż będziemy zakładać, że

$$\rho = const.$$

W takim przypadku tensor Ricciego (1.3)-(1.5) ma postać

$$R_{AB} = \frac{1}{2}R^{(2)}g_{AB} + \frac{1}{4}n_{ab,A}n^{ab}{}_{,B}\,. \tag{5.1}$$

$$R_{Aa} = 0, \tag{5.2}$$

$$R^a_{\ b} = -\frac{1}{2}\nabla^A(n^{ac}n_{cb,A}). \tag{5.3}$$

Korzystając z faktu o konforemnej płaskości dwuwymiarowych rozmaitości możemy metrykę g_{AB} przetransformować zgodnie z (2.26) do postaci

$$g_{AB} = \gamma e^{2\psi}(du^2 - dv^2). \tag{5.4}$$

Drugi człon równania (5.1) zapisujemy w postaci

$$n_{ab,A}\,n^{ab}{}_{,B} = Tr(n_{ab,A}\,n^{bc}{}_{,B}\,) = -2\eta_{ij}n^i{}_{,A}\,n^j{}_{,B} = -2n^i{}_{,A}\,n_{i,B} = -2\mathbf{N}_{,A}\cdot\mathbf{N}_{,B}\,, \tag{5.5}$$

gdzie n_i występują w macierzy (2.30) oraz $\mathbf{N} = (n^1, n^2, n^3)$.

Jeśli część równań Einsteina redukuje się do $\nabla^A(n^{ac}n_{cb,A}) = 0$, to wykorzystując równoważność równań (1.13) oraz (2.33) wiemy, że możemy spełnić (2.33) wybierając w przestrzeni Minkowskiego powierzchnię o stałej, ujemnej krzywiźnie $K = -\frac{1}{\rho^2}$. Z podrozdziału 3.1 wiadomo, że takie powierzchnie o stałej, ujemnej krzywiźnie zadane są przez funkcję $\Omega(u, v)$, która spełnia równanie sinusa-Gordona (4.8). Wynika stąd, że iloczyny skalarne pochodnych wektora normalnego $\mathbf{N}$ występujące w (5.5) muszą wyrażać się przez Ω. Wyznaczymy je wykorzystując równania (2.4).

Niech $\mathbf{e}_1 = \mathbf{X}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{Y}$ oraz $\mathbf{e}_3 = \mathbf{N}$. Zapiszemy teraz układ (2.4) we współrzędnych $(x^0, x^1) = (u, v)$. Korzystając ze wzoru (3.1) na ω_{12}, równań $\omega_{13} = \alpha\theta^1$ oraz $\omega_{23} = \gamma\theta^2$, gdzie α, γ są zadane wzorami (3.17)-(3.18) oraz $\theta^1 = \cos\Omega du$, $\theta^2 = \sin\Omega dv$, otrzymujemy równania

$$d\mathbf{X} = (\Omega_{,v}\,du + \Omega_{,u}\,dv)\mathbf{Y} + \frac{1}{\rho}\sin\Omega\,du\,\mathbf{N}, \tag{5.6}$$

$$d\mathbf{Y} = -(\Omega_{,v}\,du + \Omega_{,u}\,dv)\mathbf{X} - \frac{1}{\rho}\cos\Omega\,dv\,\mathbf{N}, \tag{5.7}$$

$$d\mathbf{N} = \frac{1}{\rho}\sin\Omega\,du\,\mathbf{X} - \frac{1}{\rho}\cos\Omega\,dv\,\mathbf{Y}. \tag{5.8}$$

Zapisując układ równań (5.6)-(5.8) w postaci macierzowej,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_{,u} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega,_v & \frac{1}{\rho}\sin\Omega \\ -\Omega,_v & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho}\sin\Omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_{,v} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega,_u & 0 \\ -\Omega,_u & 0 & -\frac{1}{\rho}\cos\Omega \\ 0 & -\frac{1}{\rho}\cos\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

możemy upewnić się, że dla dowolnej funkcji Ω spełniającej równania sinusa Gordona układ ten posiada rozwiązanie. Zapiszmy (5.9)-(5.10) w postaci $\vec{V},_u = \tilde{C}\vec{V}$ oraz $\vec{V},_v = \tilde{D}\vec{V}$. Bezpośrednim rachunkiem można wykazać, że $\vec{V},_{uv} - \vec{V},_{vu} = (\tilde{C},_v - \tilde{D},_u + [\tilde{C},\tilde{D}])\vec{V} = 0$ tylko wtedy, gdy spełnione jest równanie sinusa-Gordona (4.8).

Z układu równań (5.9)-(5.10) i ortonormalności $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{N})$ wynika, że

$$R_{uu} = R^{(2)}_{uu} - \frac{1}{2}\mathbf{N},_u \cdot \mathbf{N},_u = R^{(2)}_{uu} - \frac{1}{2\rho^2}\sin^2\Omega, \tag{5.11}$$

$$R_{vv} = R^{(2)}_{vv} - \frac{1}{2}\mathbf{N},_v \cdot \mathbf{N},_v = R^{(2)}_{vv} - \frac{1}{2\rho^2}\cos^2\Omega, \tag{5.12}$$

$$R_{uv} = R^{(2)}_{uu} - \frac{1}{2}\mathbf{N},_u \cdot \mathbf{N},_v = R^{(2)}_{uv}, \tag{5.13}$$

gdzie

$$R^{(2)}_{AB} = \begin{pmatrix} -\psi,_{uu} + \psi,_{vv} & 0 \\ 0 & \psi,_{uu} - \psi,_{vv} \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\Delta\psi = \psi,_{uu} - \psi,_{vv}\,. \tag{5.15}$$

Wówczas tensor Ricciego wynosi

$$R_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \Big(-\Delta\psi - \frac{1}{2\rho^2}\sin^2\Omega\Big)du^2 + \Big(\Delta\psi - \frac{1}{2\rho^2}\cos^2\Omega\Big)dv^2, \tag{5.16}$$

a skalar krzywizny

$$R = g^{AB}R_{AB} = R^A_{\ A} = \gamma e^{-2\psi}\Big(-2\Delta\psi + \frac{1}{2\rho^2}\cos 2\Omega\Big). \tag{5.17}$$

Obliczając tensor Einsteina $G^\mu_{\ \nu}$ dostajemy

$$G^A_{\ B} = R^A_{\ B} - \frac{1}{2}R\delta^A_{\ B} = -\frac{\gamma e^{-2\psi}}{4\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.18}$$

$$G^a_{\ b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}R & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}R \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

5.1 Równania Einsteina z płynem doskonałym i stałą kosmologiczną

Z postaci tensora Ricciego (5.16) oraz nierówności (1.17) wynika, że równanie wyznacznikowe (1.15) sprowadza się do równania $R_{vv} = 0$. To oznacza, że równania Einsteina redukują się w tym przypadku do dwóch równań skalarnych:

$$\Omega,_{uu} - \Omega,_{vv} = -\frac{1}{\rho^2}\sin\Omega\cos\Omega, \tag{5.20}$$

$$\Delta\psi - \frac{1}{2\rho^2}\cos^2\Omega = 0. \tag{5.21}$$

Gdy zachodzi (5.21) dostajemy

$$R_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-\frac{1}{2\rho^2}, 0, 0, 0), \tag{5.22}$$

a skalar krzywizny (5.17) wynosi $R^A_A = -\frac{\gamma e^{-2\psi}}{2\rho^2}$. Nierówność $R^A_A R_{00} = \frac{\gamma e^{-2\psi}}{2\rho^2} > 0$ jest spełniona, gdy $\gamma = 1$, zatem gęstość energii ϵ i ciśnienie p wynoszą

$$\epsilon = -\frac{e^{-2\psi}}{4\kappa\rho^2} + \frac{\Lambda}{\kappa}, \tag{5.23}$$

$$p = -\frac{e^{-2\psi}}{4\kappa\rho^2} - \frac{\Lambda}{\kappa}, \tag{5.24}$$

a korzystając z równania (1.12) wyliczamy wektor czteroprędkości

$$u_\mu = (e^\psi, 0, 0, 0). \tag{5.25}$$

5.2 Rozwiązanie równań Einsteina odpowiadające szczególnemu rozwiązaniu równania sinusa-Gordona

W niniejszym podrozdziale podajemy rozwiązanie układu (5.9)-(5.10) z Ω będącą rozwiązaniem równania (4.8). Wprowadźmy nowe współrzędne (u', v') za pomocą wzorów

$$u' = u\coth\xi + \frac{v}{\sinh\xi}, \tag{5.26}$$

$$v' = \frac{u}{\sinh\xi} + v\coth\xi. \tag{5.27}$$

Wówczas rozwiązanie równania sinusa-Gordona (4.8) zależy tylko od jednej zmiennej i przyjmuje postać $\Omega = 2\arctan\exp\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)$. Dodatkowo spełnione są równości:

$$\sin\Omega = \frac{1}{\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)}, \quad \cos\Omega = -\tanh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right), \quad \Omega_{,v'} = \frac{1}{\rho\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)}. \tag{5.28}$$

Po wprowadzeniu nowych współrzędnych równania (5.9)-(5.10) przyjmują następującą postać:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_{,u'} = \frac{1}{\rho\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \coth\xi \\ -1 & 0 & -\frac{\sinh\left(\frac{v'}{\rho}+c\right)}{\sinh\xi} \\ \coth\xi & -\frac{\sinh\left(\frac{v'}{\rho}+c\right)}{\sinh\xi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \tag{5.29}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_{,v'} = \frac{1}{\rho\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sinh\xi} \\ 0 & 0 & \coth\xi\sinh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right) \\ -\frac{1}{\sinh\xi} & \coth\xi\sinh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

Metoda rozwiązywania układu równań (5.29)-(5.30) znajduje się w Dodatku B. Rozwiązania układu (5.29)-(5.30) mają postać

$$\mathbf{X} = \frac{C_1 e^{-\frac{v}{\rho}} - C_2 e^{\frac{v}{\rho}}}{\sinh\xi\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)} - F\tanh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right), \tag{5.31}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{-C_1 \sinh\left(\frac{v'}{\rho} + c + \xi\right) e^{-\frac{v}{\rho}} + C_2 \sinh\left(\frac{v'}{\rho} + c - \xi\right) e^{\frac{v}{\rho}}}{\sinh \xi \cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)} - F \frac{\cosh \xi}{\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)}, \tag{5.32}$$

$$\mathbf{N} = \frac{C_1 \cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c + \xi\right) e^{-\frac{v}{\rho}} + C_2 \cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c - \xi\right) e^{\frac{v}{\rho}}}{\sinh \xi \cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)} - F \frac{\sinh \xi}{\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)}, \tag{5.33}$$

gdzie $v = v' \coth \xi - \frac{u'}{\sinh \xi}$ oraz C_1, C_2, F to stałe wektory. Z ortonormalności układu $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{N})$ dostajemy warunki

$$C_1^2 = C_2^2 = 0, \ \ F^2 = 1, \ \ C_1 F = C_2 F = 0, \ \ C_1 C_1 = -\frac{\sinh^2 \xi}{2}. \tag{5.34}$$

Zawsze możemy wybrać wektor F postaci

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

Wówczas z równań (5.34) otrzymujemy

$$C_1 = \frac{\sinh \xi}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon_{II} \end{pmatrix} \varepsilon_I, \ \ C_2 = \frac{\sinh \xi}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \varepsilon_{II} \end{pmatrix} \varepsilon_I, \tag{5.36}$$

gdzie $\varepsilon_I = \pm 1$ oraz $\varepsilon_{II} = \pm 1$. Z uwagi na to, że

$$n_3 = -n^3 = -\frac{\varepsilon_I \varepsilon_{II}}{2} \frac{\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c + \xi\right) e^{-\frac{v}{\rho}} + \cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c - \xi\right) e^{\frac{v}{\rho}}}{\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)}, \tag{5.37}$$

oraz (2.31) dostajemy $\varepsilon_I \varepsilon_{II} = 1$. Wynika stąd, że

$$C_1 = \frac{\sinh \xi}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_I \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ C_2 = \frac{\sinh \xi}{2} \begin{pmatrix} -\varepsilon_I \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.38}$$

Wybieramy $\varepsilon_I = 1$, wówczas tensor metryczny przyjmuje postać:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} \gamma e^{2\psi(u',v')} & 0 \\ 0 & -\gamma e^{2\psi(u',v')} \end{pmatrix}, \tag{5.39}$$

$$g_{ab} = \frac{\rho}{\cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c\right)} \begin{pmatrix} -\exp\left(\frac{v' \coth \xi - \frac{u'}{\sinh \xi}}{\rho}\right) \cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c - \xi\right) & \sinh \xi \\ \sinh \xi & -\exp\left(-\frac{v' \coth \xi - \frac{u'}{\sinh \xi}}{\rho}\right) \cosh\left(\frac{v'}{\rho} + c + \xi\right) \end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

Następnie wyliczamy tensor Ricciego i wracamy do współrzędnych (u, v), w których $R_{\mu\nu}$ przyjmuje diagonalną postać

$$R_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\left(\Delta\psi + \frac{1}{2\rho^2 \cosh^2\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{u}{\sinh \xi} + v \coth \xi\right) + c\right)}\right) du^2 + \left(\Delta\psi - \frac{\tanh^2\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{u}{\sinh \xi} + v \coth \xi\right) + c\right)}{2\rho^2}\right) dv^2, \tag{5.41}$$

gdzie operator $\Delta\psi$ został zdefiniowany w (5.15).

6 Równań Einsteina z płynem doskonałym i stałą kosmologiczną

W przypadku równań Einsteina z płynem doskonałym równanie (1.15) przyjmuje postać

$$\left(\Delta\psi + \frac{1}{2\rho^2\cosh^2\Big(\frac{1}{\rho}\big(\frac{u}{\sinh\xi} + v\coth\xi\big) + c\Big)}\right)\left(\Delta\psi - \frac{\tanh^2\Big(\frac{1}{\rho}\big(\frac{u}{\sinh\xi} + v\coth\xi\big) + c\Big)}{2\rho^2}\right) = 0. \tag{6.1}$$

Z analizy przeprowadzonej w 5.1 wiemy, że musi być spełnione równanie (5.21), które po skorzystaniu z (5.28) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} = -\frac{\tanh^2\Big(\frac{1}{\rho}\big(\frac{u}{\sinh\xi} + v\coth\xi\big) + c\Big)}{2\rho^2}. \tag{6.2}$$

Do otrzymania pełnego rozwiązania równań Einsteina potrzebne jest znalezienie rozwiązania równania (6.2).

Równanie (6.2) jest przykładem niejednorodnego dwuwymiarowego równania falowego. Metoda prowadząca do znalezienia ogólnego rozwiązania takiego równania sprowadza się do rozwiązania jednorodnego, a następnie niejednorodnego równania transportu i została opisana w Dodatku C. Wykazaliśmy tam, że ogólnym rozwiązaniem ujednorodnionego równania (6.2) z dowolnymi warunkami początkowymi jest funkcja

$$\psi = F_1(u+v) + F_2(u-v). \tag{6.3}$$

Następnie znaleźliśmy rozwiązanie szczególne równania (6.2) zakładając zerowe warunki początkowe i uzasadniliśmy, że tak powstałe rozwiązanie opisuje wszystkie możliwe rozwiązania równania (6.2). Pełne rozwiązanie przyjmuje postać

$$\psi(u,v) = F_1(u+v) + F_2(u-v) - \frac{v^2}{4\rho^2} + \frac{1}{2}\log\cosh\theta - \tag{6.4}$$

$$-\frac{1}{4}(1-\cosh\xi)\log\cosh\Big(\frac{v\coth\frac{\xi}{2}}{\rho} - \theta\Big) - \frac{1}{2}\cosh^2\frac{\xi}{2}\log\cosh\Big(\theta - \frac{v\tanh\frac{\xi}{2}}{\rho}\Big),$$

gdzie $\theta = \frac{u}{\rho\sinh\xi} + \frac{v\coth\xi}{\rho} + c$. Rozwiązanie szczególne ψ_s równania (6.2) można zapisać w bardziej czytelny sposób. Okazuje się, że człony zawierające $\coth\frac{\xi}{2}$ oraz $\tanh\frac{\xi}{2}$ w (6.4) są funkcjami zmiennych $u-v$, $u+v$, a zatem

$$\psi_s(u,v) = -\frac{v^2}{4\rho^2} + \frac{1}{2}\log\cosh\Big(\frac{u}{\rho\sinh\xi} + \frac{v\coth\xi}{\rho} + c\Big). \tag{6.5}$$

Dokonując następującej zamiany zmiennych

$$z = \frac{u}{\rho\sinh\xi} + \frac{v}{\rho}\coth\xi + c, \tag{6.6}$$

$$t = \frac{u}{\rho}\coth\xi + \frac{v}{\rho\sinh\xi}, \tag{6.7}$$

zapisujemy przy użyciu współrzędnych (z,t) równanie (6.2)

$$\psi_{,tt} - \psi_{,zz} = \frac{\tanh^2 z}{2}, \tag{6.8}$$

oraz jego rozwiąznie szczególne (6.5)

$$\psi_s(z,t) = -\frac{1}{4\sinh^2\xi}\big(t + (c-z)\cosh\xi\big)^2 + \frac{1}{2}\log\cosh z. \tag{6.9}$$

Pierwszy człon w (6.9) można znacznie uprościć zapisując jego poszczególne części jako funkcje sumy i różnicy współrzędnych (z,t). Zauważmy, że

$$-\frac{1}{4\sinh^2\xi}\big(t+(c-z)\cosh\xi\big)^2=\frac{t^2}{4}-\frac{1}{4\sinh^2\xi}\big(t^2\sinh^2\xi+t^2+2t(c-z)\cosh\xi+(c-z)^2\cosh^2\xi\big)=$$

$$=\frac{t^2}{4}-\frac{1}{4\sinh^2\xi}\big((t^2+z^2-2cz+c^2)\cosh^2\xi+2tc\cosh\xi-2tz\cosh\xi\big), \tag{6.10}$$

a fragmenty (6.10) zawierające z, t, $t^2+z^2=\frac{1}{2}(t+z)^2+\frac{1}{2}(t-z)^2$, $tz=\frac{1}{4}(t+z)^2-\frac{1}{4}(t-z)^2$ można włączyć do rozwiązania ogólnego. Ostatecznie pełne rozwiązanie (6.8) przyjmuje postać

$$\psi(z,t)=F(t+z)+G(t-z)+\frac{1}{4}(t^2+2\log\cosh z). \tag{6.11}$$

Podsumowując, skonstruowaliśmy rozwiązanie równań Einsteina z płynem doskonałym (1.6), które ma postać

$$g=e^{2\psi(z,t)}(dt^2-dz^2)-\frac{\rho}{\cosh z}\Bigg[\exp\bigg((z-c)\coth\xi-\frac{t}{\sinh\xi}\bigg)\cosh(z-\xi)(dx^2)^2+ \tag{6.12}$$

$$+\exp\bigg((c-z)\coth\xi+\frac{t}{\sinh\xi}\bigg)\cosh(z+\xi)(dx^3)^2-2\sinh\xi dx^2dx^3\Bigg],$$

$$\epsilon=\frac{\Lambda}{\kappa}-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{4\kappa\rho^2\cosh z}e^{-2(F(t+z)+G(t-z))}, \tag{6.13}$$

$$p=-\frac{\Lambda}{\kappa}-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{4\kappa\rho^2\cosh z}e^{-2(F(t+z)+G(t-z))}, \tag{6.14}$$

$$u_0=e^{\psi(z,t)},\ \ u_1=0,\ \ u_a=0, \tag{6.15}$$

gdzie $\psi(z,t)$ jest dane w (6.11).

7 Rozwiązania równań Einsteina z polem elektromagnetycznym

Rozważymy równania Einsteina z tensorem energii-pędu dla pola elektromagnetycznego $T_{\mu\nu}$ oraz $\rho=const$. Niech $F_{\mu\nu}$będzie tensorem pola elektromagnetycznego postaci

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & c\end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

gdzie

$$a=P\varepsilon=\begin{pmatrix} 0 & P\\ -P & 0\end{pmatrix}=F_{AB}, \tag{7.2}$$

$$c=Q\varepsilon=\begin{pmatrix} 0 & Q\\ -Q & 0\end{pmatrix}=F_{ab}. \tag{7.3}$$

Podobnie jak wcześniej, zakładamy, że metryka ma postać

$$g=g_{AB}dx^Adx^B+g_{ab}dx^adx^b, \tag{7.4}$$

gdzie

$$g_{ab}=\begin{pmatrix} g_{22} & g_{23}\\ g_{23} & g_{33}\end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

a metrykę g_{AB} możemy przetransformować zgodnie z (2.26) otrzymując w ten sposób

$$g_{AB} = \gamma e^{2\psi}(du^2 - dv^2) \equiv \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & g_{11} \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Równanie (1.25) można przekształcić do postaci

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{7.7}$$

Po obniżeniu wskaźnika w (5.18)-(5.19) i skorzystaniu z (1.24) dostajemy

$$G_{AB} = -\frac{1}{4\rho^2}\mathrm{diag}(1,1), \tag{7.8}$$

$$G_{ab} = -2\Lambda g_{ab}. \tag{7.9}$$

Korzystając z definicji tensora energii-pędu dla pola elektromagnetycznego (1.20) sprawdzimy czy istnieje tensor $F_{\mu\nu}$ zgodny z równaniami (7.7). Zauważmy, że na podstawie (1.4) oraz (1.23) otrzymujemy

$$F_{A\mu}F_a{}^{\mu} = 0. \tag{7.10}$$

Obniżając wskaźnik w (7.10) dostajemy

$$F_{A\mu}F_{a\nu}g^{\mu\nu} = -F_{A\mu}g^{\mu\nu}F_{\nu a} = -F_{AB}g^{BC}F_{Ca} - F_{Ab}g^{bc}F_{ca}, \tag{7.11}$$

a skorzystanie ze wzorów (7.2)-(7.3) daje $P\varepsilon_{AB}g^{BC}F_{Ca} + F_{Ab}g^{bc}Q\varepsilon_{ca} = 0$. Rachunek dla poszczególnych wskaźników został przedstawiony w Dodatku D. Ostatecznie otrzymujemy układ równań wiążący składowe tensora metrycznego z elementami macierzowymi $(F_{\mu\nu})$:

$$\begin{pmatrix} P & 0 & Qg_{00}g^{23} & Qg_{00}g^{33} \\ 0 & P & -Qg_{00}g^{22} & -Qg_{00}g^{23} \\ -Qg_{11}g^{23} & -Qg_{11}g^{33} & P & 0 \\ Qg_{11}g^{22} & Qg_{11}g^{23} & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{02} \\ F_{03} \\ F_{12} \\ F_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{7.12}$$

Oznaczmy macierz z (7.12) przez $\mathcal{A}$ i obliczmy jej wyznacznik $\det\mathcal{A} = (P^2g^{00}g^{11} - (g^{22}g^{33} - (g^{23})^2)Q)^2$. Zauważmy, że

$$\det\mathcal{A} = 0 \Longleftrightarrow P^2 \det g^{AB} - Q^2 \det g^{ab} = 0. \tag{7.13}$$

Wyznaczniki $\det g^{AB}$ i $\det g^{ab}$ nie mogą mieć takiego samego znaku, ponieważ $\det g^{\mu\nu} = \det g^{AB} \det g^{ab} < 0$, zatem

$$\det\mathcal{A} = 0 \Longleftrightarrow P = Q = 0. \tag{7.14}$$

Jeśli $\det\mathcal{A} = 0$, to mogą istnieć niezerowe rozwiązania układu (7.12). W przeciwnym razie, dla $\det\mathcal{A} \neq 0$, jedynym rozwiązaniem (7.12) jest $F_{02} = F_{03} = F_{12} = F_{13} = 0$. Podsumowując, tensor pola elektromagnetycznego $F_{\mu\nu}$ może przyjmować postać

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_3 & f_4 \\ 0 & 0 & f_5 & f_6 \\ -f_3 & -f_5 & 0 & 0 \\ -f_4 & -f_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.15}$$

gdy $\det\mathcal{A} = 0$ albo

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f_2 & 0 & 0 \\ -f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_7 \\ 0 & 0 & -f_7 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

w przeciwnym razie. Wynik powyższy został otrzymamy jedynie przy założeniu blokowej postaci metryki (7.4).

Przydatna będzie znajomość współczynników metryki odwrotnej do (7.4). Dla części określonej wzorem (7.6) zachodzą równości $g^{00} = g_{00}^{-1}$ oraz $g^{11} = g_{11}^{-1}$. Opierając się na założeniu przyjętym na początku pracy ($\det n = 1$) dla $g_{ab} = \rho n_{ab}$ zachodzi $\det g_{ab} = \rho^2$ i wówczas prawdziwe są relacje

$$g^{22} = \rho^{-2} g_{33}, \quad g^{33} = \rho^{-2} g_{22}, \quad g^{23} = g^{32} = -\rho^{-2} g_{23}. \tag{7.17}$$

Korzystając z antysymetrii $F_{\mu\nu}$ możemy zapisać tensor energii-pędu w postaci

$$T_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\mu} g^{\mu\nu} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} g^{\nu\nu'} F_{\nu'\mu'} g^{\mu'\mu} g_{\alpha\beta}. \tag{7.18}$$

•**Przypadek** (7.15). Zapisujemy drugi człon wyrażenia (7.18) za pomocą elementów macierzy (7.15) oraz metryki odwrotnej $g^{\alpha\beta}$ i otrzymujemy

$$F_{\mu\nu} g^{\nu\nu'} F_{\nu'\mu'} g^{\mu'\mu} = -2g^{11} \left[g^{22}(f_5^2 - f_3^2) + 2g^{23}(f_6 f_5 - f_3 f_4) + g^{33}(f_6^2 - f_4^2) \right]. \tag{7.19}$$

Pierwszy człon we wzorze (7.18) dla poszczególnych składowych tensora $T_{\alpha\beta}$ zaprezentowano w Tabeli 1 poniżej.

Tabela 1: Składowe tensora $T_{\alpha\beta}$

(α, β)	$-F_{\alpha\mu} g^{\mu\nu} F_{\nu\beta}$	$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\kappa} G_{\alpha\beta} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{\alpha\beta}$
$(0,0)$	$f_3^2 g^{22} + 2 f_3 f_4 g^{23} + f_4^2 g^{33}$	$-\frac{1}{4\rho^2\kappa} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{00}$
$(1,1)$	$f_5^2 g^{22} + 2 f_5 f_6 g^{23} + f_6^2 g^{33}$	$-\frac{1}{4\rho^2\kappa} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{11}$
$(0,1)$	$f_3 f_5 g^{22} + (f_3 f_6 + f_4 f_5) g^{23} + f_4 f_6 g^{33}$	0
$(2,2)$	$f_3^2 g^{00} + f_5^2 g^{11}$	$-\frac{\Lambda}{\kappa} g_{22}$
$(2,3), (3,2)$	$f_3 f_4 g^{00} + f_5 f_6 g^{11}$	$-\frac{\Lambda}{\kappa} g_{23}$
$(3,3)$	$f_4^2 g^{00} + f_6^2 g^{11}$	$-\frac{\Lambda}{\kappa} g_{33}$

Na podstawie powyższych obliczeń otrzymujemy dla składowych $(\alpha, \beta) = (A, B)$

$$\frac{1}{2}(f_3^2 + f_5^2) g^{22} + \frac{1}{2}(f_4^2 + f_6^2) g^{33} + (f_3 f_4 + f_5 f_6) g^{23} = -\frac{1}{4\rho^2\kappa} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{00}, \tag{7.20}$$

$$f_3 f_5 g^{22} + (f_3 f_6 + f_4 f_5) g^{23} + f_4 f_6 g^{33} = 0. \tag{7.21}$$

Korzystając z Tabeli 1 i wzoru (7.19) zauważamy, że $T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}(f_3^2 + f_5^2) g^{22} + \frac{1}{2}(f_4^2 + f_6^2) g^{33} + (f_3 f_4 + f_5 f_6) g^{23}$. Z uwagi na to, że $g_{00} = -g_{11}$ odjęcie stronami równań Einsteina na składowe $(0,0)$ oraz $(1,1)$ prowadzi do

$$2\Lambda g_{00} = 0. \tag{7.22}$$

Skoro $g_{00} \neq 0$ oraz $\Lambda \neq 0$ to układ równań na składowe $(0,0)$, $(1,1)$ jest sprzeczny. Zbadamy teraz przypadek, w którym $\Lambda = 0$. W tym celu korzystamy również z równań na składowe (a,b).

Kombinacje liniowe składowych tensora energii-pędu o wskaźnikach $(\alpha, \beta) = (a, b)$

$$T_{22} g^{22} - T_{33} g^{33} = 0, \tag{7.23}$$

$$T_{22} g^{23} + T_{23} g^{33} = 0, \tag{7.24}$$

$$T_{33} g^{23} + T_{23} g^{22} = 0, \tag{7.25}$$

doprowadzają kolejno do równań

$$(f_3^2 - f_5^2)g^{22} - (f_4^2 - f_6^2)g^{33} = 0, \tag{7.26}$$

$$(f_3^2 - f_5^2)g^{23} + (f_3 f_4 - f_5 f_6)g^{33} = 0, \tag{7.27}$$

$$(f_4^2 - f_6^2)g^{23} + (f_3 f_4 - f_5 f_6)g^{22} = 0. \tag{7.28}$$

Zakładając, że $f_3^2 - f_5^2 \neq 0$ oraz $g^{33} \neq 00$ wyznaczamy z równań (7.26)-(7.27) współczynniki g^{22}, g^{23} za pomocą g^{33} i otrzymujemy

$$g^{22} = \frac{f_4^2 - f_6^2}{f_3^2 - f_5^2} g^{33}, \tag{7.29}$$

$$g^{23} = -\frac{f_3 f_4 - f_5 f_6}{f_3^2 - f_5^2} g^{33}. \tag{7.30}$$

Wstawiając (7.29)-(7.30) do (7.21) otrzymujemy, iż równanie (7.21) jest spełnione tożsamościowo. Jednak wstawienie wzorów (7.29)-(7.30) do (7.20) prowadzi do otrzymania sprzeczności $0 = -\frac{1}{4\rho^2\kappa}$.

Zbadajmy zatem przypadek, w którym $f_3^2 = f_5^2$, czyli $f_5 = \omega f_3$, gdzie $\omega = \pm 1$. Wówczas równania (7.26)-(7.28) mają postać

$$(f_4^2 - f_6^2)g^{33} = 0, \tag{7.31}$$

$$f_3(f_4 - \omega f_6)g^{33} = 0, \tag{7.32}$$

$$(f_4^2 - f_6^2)g^{23} + f_3(f_4 - \omega f_6)g^{22} = 0. \tag{7.33}$$

Rozważmy przypadek dla $g^{33} = 0$. Wówczas wzory (7.20)-(7.21) przybierają postać

$$f_3^2 g^{22} + f_3(f_4 + \omega f_6)g^{23} = -\frac{1}{4\rho^2\kappa}, \tag{7.34}$$

$$\omega f_3^2 g^{22} + f_3(f_6 + \omega f_4)g^{23} = 0. \tag{7.35}$$

Wstawienie wyrażenia na $f_3^2 g^{22}$ z (7.35) do (7.34) prowadzi do sprzeczności. Oznacza to, że musimy przyjąć, iż $g^{33} \neq 0$, a to znaczy, że $f_4^2 = f_6^2$, czyli $f_6 = \omega' f_4$, gdzie $\omega' = \pm 1$. Na podstawie równań (7.26)-(7.28) dostajemy

$$(f_3 f_4 - f_5 f_6)g^{22} = 0, \tag{7.36}$$

$$(f_3 f_4 - f_5 f_6)g^{22} = 0, \tag{7.37}$$

a stąd

$$g^{22} = g^{33} = 0 \tag{7.38}$$

lub

$$f_3 f_4 = f_5 f_6. \tag{7.39}$$

Przypadek (7.38) redukuje równania (7.20)-(7.21) do

$$(f_3 f_4 + f_5 f_6)g^{23} + \frac{1}{4\rho^2\kappa} = 0, \tag{7.40}$$

$$(f_3 f_6 + f_4 f_5)g^{23} = 0. \tag{7.41}$$

Z uwagi na to, że $g^{23} \neq 0$ dostajemy

$$f_3 f_4 (1 + \omega\omega') g^{23} + \frac{1}{4\rho^2 \kappa} = 0, \tag{7.42}$$

$$f_4 f_3 (\omega + \omega') = 0. \tag{7.43}$$

Jeżeli $(\omega + \omega') \neq 0$ w (7.43), to $f_3 f_4 = 0$ i otrzymujemy sprzeczność na podstawie (7.42). Jeśli $\omega + \omega' = 0$, to w podobny sposób dochodzimy do sprzeczności.

Zbadajmy w takim razie przypadek (7.39), w którym $f_3 f_4 = f_5 f_6$. Oznacza to, że $f_3 f_4 = \omega\omega' f_3 f_4$, a zatem $\omega = \omega'$ albo $f_3 f_4 = 0$. Dla $\omega = \omega'$ wstawienie $f_6 = \omega' f_4$ oraz $f_5 = \omega f_3$ do równań (7.20)-(7.21) daje sprzeczność. W przypadku $f_3 f_4 = 0$ połóżmy $f_3 = f_5 = 0$ oraz niech $f_4^2 = f_6^2 \neq 0$, czyli $f_6 = \omega' f_4$. Wówczas równanie (7.21) sprowadza się do $\omega' f_4^2 g^{33} = 0$ i skoro $f_4 \neq 0$, to $g^{33} = 0$. Stoi to w sprzeczności z równaniem (7.20), które sprowadza się do $f_4^2 g^{33} = -\frac{1}{4\rho^2 \kappa}$.

•**Przypadek** (7.16). Wiemy, że $g_{00} \neq 0$. Do analizy tego przypadku wystarczy wpisać równania na składowe T_{00} oraz T_{11} tensora energii-pędu (7.18)

$$P^2 g^{11} - \frac{1}{2} Q^2 g^{22} g^{33} g_{00} = -\frac{1}{4\rho^2 \kappa} + \Lambda g_{00}, \tag{7.44}$$

$$P^2 g^{00} - \frac{1}{2} Q^2 g^{22} g^{33} g_{11} = -\frac{1}{4\rho^2 \kappa} + \Lambda g_{11}. \tag{7.45}$$

Korzystając z faktu, że $g^{11} = g_{11}^{-1}$ oraz $g_{00} = -g_{11}$ mnożymy obustronnie równania (7.44)-(7.45) przez g_{00}, a następnie dodajemy stronami i otrzymujemy

$$0 = \frac{g_{00}}{2\rho^2 \kappa}. \tag{7.46}$$

Podsumowując, wykazaliśmy, że nie istnieją rozwiązania równań Einsteina z polem elektromagnetycznym odpowiadające powierzchniom o stałej, ujemnej krzywiźnie Gaussa.

8 Podsumowanie

W rozdziale pierwszym omówiliśmy wykorzystywaną w pracy metodę redukcji niepróżniowych równań Einsteina ze stałą kosmologiczną, zakładając, że czasoprzestrzeń dopuszcza dwa wektory Killinga. Zgodnie z tą metodą uzyskane rozwiązania odpowiadają powierzchniom o ujemnej krzywiźnie Gaussa zanurzonym w trójwymiarowej przestrzeni Minkowskiego. Rozważania przeprowadziliśmy dla tensora energii-pędu w postaci płynu doskonałego i pola elektromagnetycznego.

W rozdziale drugim i trzecim przedstawiliśmy wprowadzenie do teorii dwuwymiarowych powierzchni zanurzonych w przestrzeni Euklidesowej lub Minkowskiego. Wykazaliśmy równoważność części zredukowanych równań Einsteina z równaniem Lelieuvre (2.22). Zredukowaliśmy warunki całkowalności do przypadku powierzchni o stałej, ujemnej krzywiźnie Gaussa. Równania opisujące jej zanurzenie doprowadziły do równania sinusa-Gordona (3.6). W rozdziale czwartym podaliśmy geometryczną konstrukcję transformacji Bäcklunda (4.14)-(4.15) w przestrzeni Minkowskiego, która umożliwiła uzyskanie rozwiązania (4.19) równania sinusa-Gordona.

W rozdziale piątym przeanalizowaliśmy rozwiązania równań Einsteina, które odpowiadają dwuwymiarowym powierzchniom o stałej, ujemnej krzywiźnie $K = -\frac{1}{\rho^2} = const < 0$, związanym z równaniem sinusa-Gordona. Pokazaliśmy, że równania Einsteina z płynem doskonałym i stałą kosmologiczną można wówczas sprowadzić do równań (5.20)-(5.21). W rozdziale szóstym rozwiązaliśmy równanie (5.21) otrzymując rozwiązanie (6.11). Tym samym skonstruowaliśmy metrykę postaci (6.12), a gęstość energii, ciśnienie i wektor czteroprędkości zostały wyrażone odpowiednio wzorami (6.13), (6.14), (6.15).

Rozdział siódmy został poświęcony analizie przypadku z polem elektromagnetycznym. Dowiedliśmy, że nie istnieją rozwiązania równań Einsteina z polem elektromagnetycznym odpowiadające powierzchniom o stałej, ujemnej krzywiźnie Gaussa.

8.1 Osłabienie warunku $\rho = const$

Mimo, że nie udało się otrzymać wyników umożliwiających przedstawienie konkretnej fizycznej interpretacji, to praca otwiera drogę do dalszych badań. Można zaproponować osłabienie warunku stałej krzywizny, na przykład do warunku

$$\Box\rho = 0. \tag{8.1}$$

W tym celu wygodnie jest rozważać powierzchnie hiperboliczne, których równania [6] zgodności we współrzędnych asymptotycznych (x, y) to

$$a_{,y} + \frac{1}{2}\frac{\rho_{,y}}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_{,x}}{\rho}b\cos\Omega = 0, \tag{8.2}$$

$$b_{,x} + \frac{1}{2}\frac{\rho_{,x}}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_{,y}}{\rho}a\cos\Omega = 0, \tag{8.3}$$

$$\Omega_{,xy} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho_{,x}}{\rho}\frac{b}{a}\sin\Omega\Big)_{,x} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho_{,y}}{\rho}\frac{a}{b}\sin\Omega\Big)_{,y} - ab\sin\Omega = 0, \tag{8.4}$$

a pierwsza i druga forma fundamentalna przyjmują postać

$$g_I = \rho^2\big(a^2dx^2 + 2ab\cos\Omega dxdy + b^2dy^2\big), \tag{8.5}$$

$$g_{II} = 2\rho ab\sin\Omega dxdy, \tag{8.6}$$

oraz krzywizna Gaussa $K = -\frac{1}{\rho^2} < 0$. W szczególnym przypadku $\rho = const$ wykorzystanym w pracy równaniom (8.2)-(8.3) odpowiadają (2.13)-(2.14), a (8.4) równanie sinusa-Gordona (4.8). Bianchi rozważał powierzchnie hiperboliczne, dla których zachodzi dodatkowy warunek (8.1), czyli

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \;\text{ oraz }\; \rho = \rho_1(x) + \rho_2(y). \tag{8.7}$$

Dla takich powierzchni (zwanych powierzchniami Bianchiego) również istnieje transformacja Bäcklunda.

Niewykluczone, że mniej restrykcyjne założenie (8.1) doprowadziłoby do rozwiązań, które łatwiej byłoby zinterpretować. Jednak przyjęcie (8.1) prowadzi do znacznej komplikacji zagadnienia. Mimo, że równanie (1.13) nie uległoby zmianie, to składowa tensora Ricciego (5.1) zyskałaby nowe człony zawierające pochodne ρ. Prowadziłoby to kolejno do komplikacji układu równań (5.29)-(5.30) oraz jego rozwiązania, czyli między innymi wektora normalnego (5.33), który jest nam potrzebny do skonstruowania metryki.

8.2 Dwusolitonowe rozwiązanie równania sinusa-Gordona

Stosując po raz kolejny transformacje Bäcklunda (4.14)-(4.15) możemy wygenerować nowe [6] rozwiązania równania (4.8). Wprowadźmy współrzędne (x, y) takie, że

$$x = \frac{u+v}{2\rho}, \tag{8.8}$$

$$y = \frac{v-u}{2\rho}. \tag{8.9}$$

Równanie sinusa Gordona (4.8) przyjmuje wówczas postać

$$\mathit{\Omega}_{,xy} = \sin\mathit{\Omega}\cos\mathit{\Omega}. \tag{8.10}$$

Wykorzystując metodę opisaną w rodziale 4 konstruujemy dwa rozwiązania dla parametrów ξ_1, ξ_2, zaczynając za każdym razem od rozwiązania $\mathit{\Omega}_1 = 0$. Uzyskujemy w ten sposób dwa jednosolitonowe rozwiązania równania (8.10)

$$\Omega_2 = 2\arctan\left(C_1 \exp\left(\frac{x}{\tanh\frac{\xi_1}{2}} + y\tanh\frac{\xi_1}{2}\right)\right), \tag{8.11}$$

$$\Omega_3 = 2\arctan\left(C_2 \exp\left(\frac{x}{\tanh\frac{\xi_2}{2}} + y\tanh\frac{\xi_2}{2}\right)\right), \tag{8.12}$$

w których C_1 oraz C_2 to stałe. Celem otrzymania rozwiązania dwusolitonowego Ω_4 stosujemy kilkukrotnie transformację Bäcklunda dla różnych kombinacji par rozwiązań Ω_2, Ω_3, Ω_4. Postępujemy tak by wyeliminować człony zawierające pochodne. W efekcie otrzymujemy

$$\Omega_4 = -2\arctan\left(\frac{\tanh\frac{\xi_1}{2} + \tanh\frac{\xi_2}{2}}{\tanh\frac{\xi_1}{2} - \tanh\frac{\xi_2}{2}}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1+\alpha_1\alpha_2}\right)\right), \tag{8.13}$$

gdzie $\alpha_i = C_i \exp\left(\frac{x}{\tanh\frac{\xi_i}{2}} + y\tanh\frac{\xi_i}{2}\right)$, $i = 1, 2$. Niestety rozwiązanie równania (5.21) z $\Omega = \Omega_4$ staje się bardzo skomplikowane.

9 Dodatki

9.1 Dodatek A

Niech a, b będą 1-formami na n-wymiarowej ($1 \leq n$) rozmaitości z metryką $\tilde{g}$. Zakładamy, że rozmaitość jest zorientowana i w związku z tym wyposażona w formę objętości vol. Można wówczas zdefiniować odwzorowanie $*$ przeprowadzające 1-formy na $(n-1)$-formy. Zachodzi wówczas wzór

$$a \wedge *b = \langle a, b\rangle\, vol, \tag{9.1}$$

gdzie $\langle a, b\rangle = \tilde{g}^{ij} a_i b_j$.

W przypadku dwuwymiarowej powierzchni Σ możemy zdefiniować odwzorowanie $*$ względem metryki $\tilde{g} = g_{AB}\theta^A\theta^B$, gdzie θ^A, θ^B są jednoformami oraz

$$g_{AB} = -\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \tilde{g}^{-1} = g^{AB} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -\gamma & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

gdzie α, β, γ są gładkimi funkcjami oraz $W := \det g_{AB} = \alpha\gamma - \beta^2$. Forma objętości jest zadana wzorem $vol = \sqrt{|\det g_{AB}|}\theta^A \wedge \theta^B$. Obliczmy $*\theta^1$ oraz $*\theta^2$ korzystając z (9.1)

$$\theta^1 \wedge *\theta^1 = -\frac{\gamma}{W}\sqrt{|W|}\theta^1 \wedge \theta^2 \qquad \theta^2 \wedge *\theta^1 = \frac{\beta}{W}\sqrt{|W|}\theta^1 \wedge \theta^2, \tag{9.3}$$

$$\theta^1 \wedge *\theta^2 = \frac{\beta}{W}\sqrt{|W|}\theta^1 \wedge \theta^2 \qquad \theta^2 \wedge *\theta^2 = -\frac{\alpha}{W}\sqrt{|W|}\theta^1 \wedge \theta^2. \tag{9.4}$$

Na podstawie (9.3)-(9.4) otrzymujemy:

$$*\theta^1 = -\frac{\gamma}{W}\sqrt{|W|}\theta^2 - \frac{\beta}{W}\sqrt{|W|}\theta^1 = -\frac{\mathrm{sgn} W}{\sqrt{|W|}}\left(\beta\theta^1 + \gamma\theta^2\right), \tag{9.5}$$

$$*\theta^2 = -\frac{\gamma}{W}\sqrt{|W|}\theta^2 - \frac{\beta}{W}\sqrt{|W|}\theta^1 = \frac{\mathrm{sgn} W}{\sqrt{|W|}}\left(\alpha\theta^1 + \beta\theta^2\right). \tag{9.6}$$

9.2 Dodatek B

W tym dodatku rozwiążemy układ równań (5.29)-(5.30). Wprowadzamy następujące oznaczenia: $\sigma = \frac{v'}{\rho} + c$ oraz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho\cosh\sigma} & \frac{\coth\xi}{\rho\cosh\sigma} \\ -\frac{1}{\rho\cosh\sigma} & 0 & -\frac{\tanh\sigma}{\rho\sinh\xi} \\ \frac{\coth\xi}{\rho\cosh\sigma} & -\frac{\tanh\sigma}{\rho\sinh\xi} & 0 \end{pmatrix} \quad D = \frac{1}{\rho\cosh\sigma}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sinh\xi} \\ 0 & 0 & \coth\xi\sinh\sigma \\ -\frac{1}{\sinh\xi} & \coth\xi\sinh\sigma & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.7}$$

Zauważmy, że $\det C = 0$ oraz $\det D = 0$. Obliczmy wartości własne macierzy C. Zerowanie się wyznacznika macierzy C oznacza, że przekształcenie zadane przez tę macierz nie jest różnowartościowe, czyli jedna z wartości własnych $\lambda_1 = 0$. Pozostałe wynoszą odpowiednio $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho}\sinh\xi}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{\rho}\sinh\xi}$. Niech $S = S(u, v)$ diagonalizuje macierz C:

$$S^{-1}CS = C_{diag} = \mathrm{diag}(0, \lambda, -\lambda) \tag{9.8}$$

Taka macierz S istnieje, ponieważ wszystkie wartości własne macierzy C są różne. Podstawmy C z (9.8) do (5.29):

$$\vec{V}_{,u'} = SC_{diag}S^{-1}\vec{V}. \tag{9.9}$$

Dalej przekształcamy wyrażenie (9.9) mnożąc je obustronnie od lewej strony przez S^{-1} i korzystając z reguły Leibniza. Otrzymujemy

$$(S^{-1}\vec{V})_{,u'} = \big((S^{-1})_{,u'} + C_{diag}\big)S^{-1}\vec{V}. \tag{9.10}$$

W naszym przypadku $S = S(v')$ zatem $(S^{-1}\vec{V})_{,u'} = C_{diag}S^{-1}\vec{V}$. Oznacza to, że istnieje taka kombinacja liniowa $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{N}$ taka, że

$$s_1(v')\mathbf{X} + s_2(v')\mathbf{Y} + s_3(v')\mathbf{N} = f(v'). \tag{9.11}$$

Zróżniczkowanie (9.11) po u' prowadzi do równania $s_1\mathbf{X}_{,u'} + s_2\mathbf{Y}_{,u'} + s_3\mathbf{N}_{,u'} = 0$, do którego podstawiamy wyrażenia na $\mathbf{X}_{,u'}$, $\mathbf{Y}_{,u'}$, $\mathbf{N}_{,u'}$ z (5.29). Otrzymujemy układ trzech równań na s_1, s_2, s_3 i rozwiązanie go prowadzi do:

$$\sinh\sigma\,\mathbf{X} + \cosh\xi\,\mathbf{Y} + \sinh\xi\,\mathbf{N} = f(v'), \tag{9.12}$$

$$\sinh\sigma\,\mathbf{X}_{,u'} + \cosh\xi\,\mathbf{Y}_{,u'} + \sinh\xi\,\mathbf{N}_{,u'} = 0. \tag{9.13}$$

Podobną analizę przeprowadzmy dla drugiej zmiennej v'. Różniczkujemy (9.11) po v' i korzystamy z wzorów na $\mathbf{X}_{,v'}$, $\mathbf{Y}_{,v'}$, $\mathbf{N}_{,v'}$ z (5.30). Otrzymujemy

$$\sinh\sigma\,\mathbf{X} + \cosh\xi\,\mathbf{Y} + \sinh\xi\,\mathbf{N} = F\cosh\sigma, \tag{9.14}$$

gdzie wektor $F = const$.

Następnie zapisujemy $\mathbf{X}_{,u'}$, $\mathbf{Y}_{,u'}$za pomocą $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ oraz F korzystając z (9.14)

$$\rho\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{,u'} = \frac{1}{\cosh\sigma}\begin{pmatrix} -\frac{\coth\xi\sinh\sigma}{\sinh^2\xi} & -\frac{1}{\sinh^2\xi} \\ -1 + \frac{\sinh^2\sigma}{\sinh^2\xi} & \frac{\coth\xi\sinh\sigma}{\sinh^2\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \frac{1}{\sinh\xi}\begin{pmatrix} \coth\xi \\ -\frac{\sinh\sigma}{\sinh\xi} \end{pmatrix}F. \tag{9.15}$$

Obliczamy wartości i wektory własne macierzy znajdującej się we wzorze (9.15). Wynoszą one odpowiednio $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{\sinh\xi}$, $\tilde{\lambda}_2 = -\frac{1}{\sinh\xi}$ dla

$$v_1 = \sinh(\sigma - \xi)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sinh(\sigma+\xi) \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sinh(\sigma-\xi) \end{pmatrix}. \tag{9.16}$$

Wówczas macierz ze wzoru (9.15) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sinh(\sigma+\xi) & -\sinh(\sigma-\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sinh\xi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sinh\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sinh(\sigma+\xi) & -\sinh(\sigma-\xi) \end{pmatrix}^{-1}. \tag{9.17}$$

Wstawmy (9.17) do (9.15) i połóżmy $F=0$ w (9.15). Rozwiązujemy teraz jednorodny układ równań różniczkowych cząstkowych na $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$:

$$-\rho\big(\sinh(\sigma-\xi)\mathbf{X}+\mathbf{Y}\big)_{,u'} = -\frac{1}{\sinh\xi}\big(\sinh(\sigma-\xi)\mathbf{X}+\mathbf{Y}\big), \tag{9.18}$$

$$\rho\big(\sinh(\sigma+\xi)\mathbf{X}+\mathbf{Y}\big)_{,u'} = -\frac{1}{\sinh\xi}\big(\sinh(\sigma+\xi)\mathbf{X}+\mathbf{Y}\big). \tag{9.19}$$

Rozwiązania to

$$\mathbf{X} = \frac{Q_2\exp\big(\frac{-u'}{\sinh\xi}\big) - Q_1\exp\big(\frac{u'}{\sinh\xi}\big)}{\sinh\xi\cosh\sigma}, \tag{9.20}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{Q_1\sinh(\sigma+\xi)\exp\big(\frac{u'}{\sinh\xi}\big) - Q_2\sinh(\sigma-\xi)\exp\big(\frac{-u'}{\sinh\xi}\big)}{\sinh\xi\cosh\sigma}, \tag{9.21}$$

gdzie $Q_i = Q_i(v')$ dla $i=1,2$. W kolejnym kroku stosujemy metodę uzmienniania stałej kładąc $Q_i = Q_i(u',v')$. Prowadzi ona do ogólnego rozwiązania układu (9.15), które ma postać (9.20)-(9.21) z

$$Q_1 = \frac{1}{2}\cosh(\sigma-\xi)Fe^{-\frac{u'}{\rho\sinh\xi}} + S_1(v'), \tag{9.22}$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\cosh(\sigma+\xi)Fe^{\frac{u'}{\rho\sinh\xi}} + S_2(v'). \tag{9.23}$$

Wektor $\mathbf{N}$ wyznaczamy z (9.14). Tak otrzymane wektory ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{N}$) spełniają (5.29), natomiast układ (5.30) narzuca warunki na funkcje S_1, S_2. Ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbf{X} = \frac{C_1e^{-\frac{v}{\rho}} - C_2e^{\frac{v}{\rho}}}{\sinh\xi\cosh\big(\frac{v'}{\rho}+c\big)} - F\tanh\Big(\frac{v'}{\rho}+c\Big), \tag{9.24}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{-C_1\sinh\big(\frac{v'}{\rho}+c+\xi\big)e^{-\frac{v}{\rho}} + C_2\sinh\big(\frac{v'}{\rho}+c-\xi\big)e^{\frac{v}{\rho}}}{\sinh\xi\cosh\big(\frac{v'}{\rho}+c\big)} - F\frac{\cosh\xi}{\cosh\big(\frac{v'}{\rho}+c\big)}, \tag{9.25}$$

$$\mathbf{N} = \frac{C_1\cosh\big(\frac{v'}{\rho}+c+\xi\big)e^{-\frac{v}{\rho}} + C_2\cosh\big(\frac{v'}{\rho}+c-\xi\big)e^{\frac{v}{\rho}}}{\sinh\xi\cosh\big(\frac{v'}{\rho}+c\big)} - F\frac{\sinh\xi}{\cosh\big(\frac{v'}{\rho}+c\big)}. \tag{9.26}$$

9.3 Dodatek C

Zaczynamy od znalezienia rozwiązania jednorodnego równania falowego $\psi_{,vv} - \psi_{,uu} = 0$ metodą opisaną w książce [3]. Dla $v=0$ mamy następujące warunki początkowe

$$\psi(u,0) = h_1 \tag{9.27}$$

$$\left.\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right|_{v=0} = h_2 \tag{9.28}$$

gdzie h_1, h_2 to dane funkcje. Zauważmy, że

$$(\partial_v+\partial_u)(\partial_v-\partial_u)\psi = \psi_{,vv} - \psi_{,uu} = 0 \tag{9.29}$$

i wprowadźmy funkcję $\chi = \chi(u,v) = (\partial_v - \partial_u)\psi$. Wówczas równanie (9.29) przyjmuje postać równania transportu o stałych współczynnikach $\chi_{,v} + \chi_{,u} = 0$, co można równoważnie zapisać

$$\mathrm{grad}\big(\chi(\mathrm{u,v})\big)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{9.30}$$

Oznacza to, że pochodna kierunkowa funkcji χ w kierunku wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ znika w dowolnym punkcie. Nietrudnym rachunkiem, w oparciu o powyższą obserwację, sprawdzamy, że funkcja χ jest stała na każdej prostej równoległej do wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Prosta przechodząca przez punkt (u,v) i równoległa do tego wektora składa się z punktów $(u+s, v+s)$ dla $s \in \mathbb{R}$. Prosta ta przecina poziomą oś układu współrzędnych $(v = 0)$ dla $s = -v$, czyli w punkcie $(u - v, 0)$. Wobec tego

$$\chi(u,v) = f_1(u - v), \tag{9.31}$$

dla pewnej funkcji f_1.

Korzystając z równań (9.29) oraz (9.31) otrzymujemy niejednorodne równanie transportu

$$\psi_{,v} - \psi_{,u} = f_1(u - v). \tag{9.32}$$

Zapiszmy równanie (9.32) w postaci

$$\psi_{,v} - \psi_{,u} = f(u,v). \tag{9.33}$$

Niech $f_2 = f_2(u + v)$ będzie rozwiązaniem równania jednorodnego $\psi_{,v} - \psi_{,u} = 0$. Wprowadzamy funkcję pomocniczą $z(s) := \psi(u - s, v + s)$ i sprawdzamy, że zachodzi $z'(s) = f(u - s, v + s)$. Stąd

$$\psi(u,v) - f_2(u + v) = z(0) - z(-v) = \int\limits_{-v}^{0} z'(s)ds = \int\limits_{-v}^{0} f(u - s, v + s)ds = \int\limits_{0}^{v} f(u - s + v, s)ds. \tag{9.34}$$

Zatem

$$\psi(u,v) = f_2(u + v) + \int\limits_{0}^{v} f(u - s + v, s)ds. \tag{9.35}$$

Podstawiając za $f(u,v) = f_1(u - v)$ otrzymujemy

$$\psi(u,v) = f_2(u + v) + \int\limits_{0}^{v} f_1(u + v - 2s)ds = f_2(u + v) + \frac{1}{2}\int\limits_{u-v}^{u+v} f_1(y)dy. \tag{9.36}$$

Następnie wyznaczamy f_2 oraz f_1 z warunków początkowych (9.27)-(9.28)

$$f_2(u) = h_1(u) \tag{9.37}$$

$$f_1(u) = \chi(u,0) = \left.\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right|_{v=0} - \left.\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right|_{v=0} = h_2(u) - h_1'(u) \tag{9.38}$$

Podstawiając wyniki (9.37)-(9.38) do (9.36) dostajemy

$$\psi(u,v) = \frac{1}{2}\int\limits_{u-v}^{u+v} (h_2(y) - h_1'(y))dy + h_1(u + v). \tag{9.39}$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór d'Alemberta

$$\psi(u,v) = \frac{1}{2}(h_1(u+v) + h_1(u-v)) + \frac{1}{2}\int\limits_{u-v}^{u+v} h_2(y)dy. \tag{9.40}$$

W związku z rozkładem na czynniki (9.29) rozwiązaniem ogólnym równania $\psi,_{vv} - \psi,_{uu} = 0$ jest suma rozwiązań ogólnych równań $\psi,_v - \psi,_u = 0$ oraz $\psi,_v + \psi,_u = 0$, zatem

$$\psi = F_1(u+v) + F_2(u-v). \tag{9.41}$$

Następnie szukamy rozwiązania szczególnego równania

$$\psi,_{vv} - \psi,_{uu} = \phi(u,v), \tag{9.42}$$

z warunkami początkowymi

$$\psi(u,0) = 0, \tag{9.43}$$

$$\left.\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right|_{v=0} = 0. \tag{9.44}$$

Skorzystanie ze wzoru d'Alemberta (9.40) sprowadza problem do obliczenia następującej całki

$$\psi(u,v) = \frac{1}{2}\int\limits_0^v \int\limits_{u-v+s}^{u+v-s} \phi(y,s)dyds = \frac{1}{2}\int\limits_0^v \int\limits_{u-s}^{u+s} \phi(y,v-s)dyds. \tag{9.45}$$

Wykorzystano w tym kroku zasadę Duhamela [3], która sprowadza problem rozwiązania równania niejednorodnego z zerowym warunkiem początkowym do rozwiązania zagadanienia jednorodnego, w którym współrzędna v jest mierzona nie od $v = 0$, lecz począwszy od pewnego $v = s$. Zgodnie z zasadą Duhamela rozwiązanie równania (9.42) możemy zbudować z rozwiązań zagadnienia przesuniętego, całkując względem parametru s. Wykonanie rachunku (9.45) doprowadza do otrzymania szczególnego rozwiązania równania (9.42).

W naszym przypadku

$$\phi(u,v) = -\frac{\tanh^2\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{u}{\sinh\xi} + v\coth\xi\right) + c\right)}{2\rho^2}. \tag{9.46}$$

Wprowadzając oznaczenie $\theta = \frac{u}{\rho\sinh\xi} + \frac{v\coth\xi}{\rho} + c$, po odcałkowaniu (9.45) dostajemy

$$\psi(u,v) = F_1(u+v) + F_2(u-v) - \frac{v^2}{4\rho^2} + \frac{1}{2}\log\cosh\theta - \tag{9.47}$$

$$-\frac{1}{4}(1-\cosh\xi)\log\cosh\left(\frac{v\coth\frac{\xi}{2}}{\rho} - \theta\right) - \frac{1}{2}\cosh^2\frac{\xi}{2}\log\cosh\left(\theta - \frac{v\tanh\frac{\xi}{2}}{\rho}\right).$$

Każde rozwiązanie równanie wyjściowego (6.2) można przedstawić jako sumę rozwiązania rownania jednorodnego z zadanymi warunkami brzegowymi oraz pewnego rozwiązania równania niejednorodnego z zerowymi warunkami brzegowymi, co uzasadnia, że wzór (9.47) opisuje wszystkie funkcje spełniające (6.2).

9.4 Dodatek D

Wypisujemy równania dla poszczególnych wskaźników w równaniu $F_{A\mu}F_a{}^{\mu} = 0$. W poniższej Tabeli znajdują się równania na składowe tensora $F_{\mu\nu}$ w zależności od współczynników metryki g, określonej równaniem (7.4). Do wykonania rachunku skorzystano z postaci (7.1) tensora $F_{\mu\nu}$ oraz wzorów (1.23)-(1.25). Zgodnie z (7.2)-(7.3) w obliczeniach wykorzystujemy następujące oznaczenia

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{01} \\ \epsilon_{10} & \epsilon_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.48}$$

Tabela 2: Równanie $F_{A\mu}F_a{}^{\mu} = 0$ dla poszczególnych składowych tensora $F_{\mu\nu}$.

(A, a)	$-F_{AB}g^{BC}F_{Ca} - F_{Ab}g^{bc}F_{ca} = 0$
$(0, 2)$	$P\epsilon_{01}g^{11}F_{12} + Q\epsilon_{32}g^{b3}F_{0b} = 0$
$(0, 3)$	$P\epsilon_{01}g^{11}F_{13} + Q\epsilon_{23}F_{0b}g^{b2} = 0$
$(1, 2)$	$P\epsilon_{10}g^{00}F_{02} + Q\epsilon_{32}F_{1b}g^{b3} = 0$
$(1, 3)$	$P\epsilon_{10}g^{00}F_{03} + Q\epsilon_{23}F_{1b}g^{b2} = 0$

Literatura

[1] C. Bowszyc, J. Konarski, *Wstęp do geometrii różniczkowej,* WUW, Warszawa, 2007.

[2] J.N. Clelland, *From Frenet to Cartan: The Method of Moving Frames,* Rhode Island: Providence, 2017.

[3] L.C. Evans, *Równania różniczkowe cząstkowe,* PWN, Warszawa, 2008.

[4] J. Gancarzewicz, *Geometria różniczkowa,* PWN, Warszawa, 1987.

[5] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics,* Taylor & Francis Group, Great Britain, 2003.

[6] C. Rogers, W.K.Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory,* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[7] A. Szereszewski, J. Tafel, *Perfect fluid spacetimes with two symmetries,* Class. Quantum Grav. **21** No 7 (2004), 1755, gr-qc/031107.

[8] J. Tafel, *Surfaces in $\mathbb{R}^3$ with prescribed curvature,* J. Geom. Phys. **17** (1995), 381-390.

[9] R.M. Wald, *General relativity,* The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.