

# Flujos en conductos

Félix Rodríguez Lagonell  
<frodrigue1117@alumno.uned.es>  
Técnicas Experimentales IV - UNED

Septiembre 2021

## Resumen

Verificamos la ley de Hagen-Poiseuille a partir de la experimentación con fluidos newtonianos que circulan a través de conductos capilares. Se comprobará el régimen de circulación del fluido mediante el número de Reynolds para, posteriormente, determinar el coeficiente de rozamiento del conducto capilar.

## 1. Introducción

El flujo de Hagen-Poiseuille es aquel que se establece en un tubo de sección circular por el que circula un fluido en régimen laminar, como consecuencia de la diferencia de presión existente entre los extremos del tubo. Consideremos un tubo de radio  $r$  y espesor  $dr$ , las fuerzas que actúan sobre el mismo son la aquellas debidas a la presión  $F = p\pi r^2$  sobre la sección de entrada y de salida, respectivamente, del fluido en el cilindro, además de la fuerza de rozamiento  $F_R = -\mu A \frac{dv}{dr}$ . En condiciones de flujo estacionario  $\Sigma F = ma = 0$  y admitiendo que el fluido en contacto con las paredes del cilindro se encuentra en reposo, es posible llegar a la ecuación de velocidad del fluido

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (1)$$

Siendo  $\mu$  la viscosidad dinámica del fluido. A partir de este resultado se puede calcular el volumen de líquido que fluye a través del tubo en un tiempo  $t$

$$V = \int_0^R v(r) 2\pi r dr t = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} t \quad (2)$$

De donde se obtiene la ley de Hagen-Poiseuille

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\mu L} \quad (3)$$

A partir de este resultado se puede calcular el número de Reynolds  $Re$

$$Re = \frac{U \rho d}{\mu} \quad (4)$$

Donde  $U = \frac{Q}{\pi R^2}$  es la velocidad promedio,  $\rho$  la densidad y  $d$  el diámetro del cilindro capilar.

El coeficiente de rozamiento  $\lambda$  de una tubería, también conocido como factor de fricción o coeficiente de resistencia de Darcy-Weibach, es una magnitud adimensional que está estrechamente relacionada con el número de Reynolds. En general, en tubos de sección constante con paredes lisas,  $\lambda$  es función exclusivamente del número de Reynolds y de la forma del conducto mientras que en tubos con paredes rugosas,  $\lambda$  también es función de la rugosidad relativa (altura  $h$  dividida por el diámetro  $d$ ). En el caso de un tubo horizontal se satisface la relación

$$\lambda = \frac{2d\Delta p}{L\rho U^2} \quad (5)$$

Los resultados experimentales de  $\lambda$  vs  $Re$  para distintos valores de  $h$  y  $d$  para una forma de conducto fija se representan en gráficas (generalmente log-log) denominadas de Moody. Para tubos horizontales, de sección circular y régimen laminar de fluido, a partir de las ecuaciones (4) y (5) se obtiene

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6)$$

Cuando se alcanza el régimen turbulento, el perfil de velocidades no se puede calcular de forma exacta. En este caso, por razones dimensionales se considera que el perfil de velocidades promedio

lejos de la pared (en regiones próximas al centro del tubo) está dado por un perfil logarítmico mientras que se considera un perfil lineal en la inmediata vecindad de la pared. Se puede obtener así un resultado semi-empírico para  $\lambda$ , conocido como ecuación de Karmann-Prandtl, válida para flujos turbulentos en tubos lisos

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log (Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (7)$$

## 2. Metodología

Contamos con un dispositivo experimental compuesto por un tubo capilar de vidrio de longitud  $L = 25,0 \pm 0,1 \text{ cm}$  y radio  $r^2 = (2,96 \pm 0,14) \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ , un tubo vertical de metacrilato graduado, manguera, balanza, vasos precipitados y cronómetro.

El capilar de vidrio se encuentra insertado horizontalmente al tubo vertical, el cual rellenaremos de agua hasta una distancia  $h$ , con la intención de que ésta circule hacia el capilar y sea depositada en un vaso precipitados. Mantendremos el nivel de agua dentro del tubo vertical gracias a una manguera conectada a un grifo que se encontrará abierto hasta que iniciemos el experimento. Al cerrar la manivela, y gracias al vaso de precipitados, registraremos la cantidad de masa de agua que desciende por la columna vertical para circular por el capilar durante un tiempo  $t$ . Así pues, con las medidas de cantidad de agua recogida, la altura de la columna de agua y el tiempo podremos calcular las magnitudes objeto de esta práctica.

El radio del tubo capilar se ha calculado mediante la fórmula  $r^2 = \frac{M}{\pi \rho L}$  donde  $m$  es la cantidad de masa de agua que rellena el tubo capilar y  $\rho$  la densidad del agua. Se ha optado por reflejar el valor  $r^2$  en vez de  $r$  dado que nuestros futuros cálculos conllevarán términos cuadráticos en  $r$ .

Todas aquellas medidas que tengan incertidumbre asociada será explícitamente mencionado. Para aquellas magnitudes indirectas se calculará el error asociado según la fórmula habitual

$$\Delta A = \left| \frac{\partial A}{\partial \alpha_i} \right| \Delta \alpha_i \quad (8)$$

Todos los resultados experimentales, debidamente redondeados y presentados, se encuentran en la

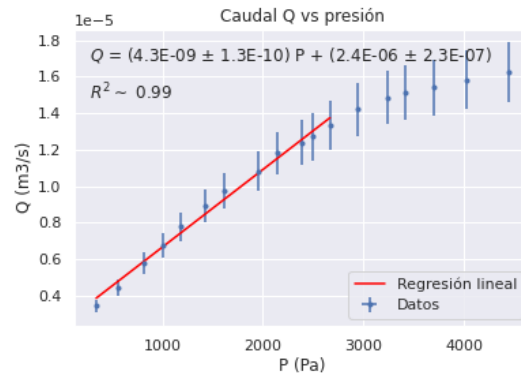


Figura 1: Caudal volumétrico de agua en función de  $\Delta p$

tabla (1) al final del informe.

## 3. Resultados

En primer lugar calcularemos el caudal que circula por el tubo capilar. Para ello aplicamos la ecuación (3) donde el volumen lo calculamos a partir de la densidad del agua  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , de tal forma que tendríamos  $Q = \frac{M}{\rho t}$ . A partir de los datos de altura, calcularemos también la diferencia de presión  $\Delta p$  entre los extremos del capilar, que vendrá dada por  $\Delta p = \rho g h$  siendo  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  la aceleración de la gravedad. Con estos datos representamos la relación entre el caudal y la presión en la figura (1), además del correspondiente ajuste por mínimos cuadrados que corresponden a la región de flujo laminar.

Hay que notar que la recta ajustada no pasa por el origen, sino que predice un caudal nulo para un valor negativo de  $\Delta p$ , por lo tanto debemos corregir el valor de  $\Delta p$  para obtener una recta que efectivamente pase por el origen. En este sentido si identificamos la ecuación de la recta de la figura (1) tal que  $0 = mP + b$  obtenemos un factor de corrección dado por  $P' = \frac{b}{m}$ . Dado que  $\Delta p$  será transformado a  $\Delta p'$ , debemos tener en cuenta la propagación de errores de dicha transformación, es decir  $\epsilon_{p'} = \epsilon_p + \left| \frac{\epsilon_b}{m} \right| + \left| \frac{b \epsilon_m}{m^2} \right|$ . En la figura (2) vemos el nuevo ajuste lineal. En este caso comprobamos que se conserva el valor de la pendiente, que el término independiente es prácticamente cero y que los errores en el eje de presión se han incrementado.

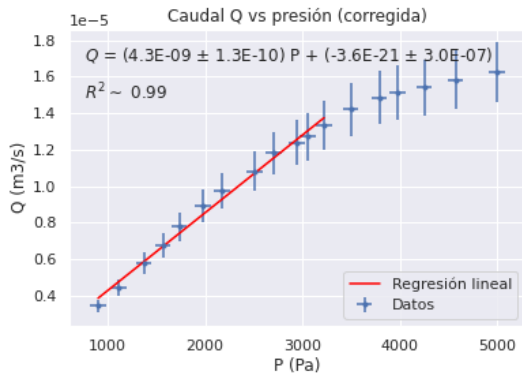


Figura 2: Caudal volumétrico de agua en función de  $\Delta p'$  corregida

En términos generales vemos que el caudal es directamente proporcional a la presión en una región que identificamos con el flujo laminar del fluido, dado por el ajuste de mínimos cuadrados, hasta llegar a un punto de aparición de un codo, el cual representa el punto de transición hacia el régimen turbulento. La propagación de errores hace énfasis en este tramo (turbulento) de la dificultad de hallar un valor de caudal lo suficientemente certero.

Mediante la ley de Hagen-Poiseuille, ecuación (3), identificamos el factor  $\frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \mu L}$  con la pendiente de la regresión lineal, de tal manera que  $\mu = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \alpha L}$  donde  $\alpha = (4.3 \pm 0.13) \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 / \text{Pa} \cdot \text{s}$ . Así pues obtenemos que la viscosidad dinámica es  $\mu = (3.2 \pm 0.4) \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , valor que difiere notablemente de su análogo teórico  $\mu_t = 0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  a una temperatura de  $20^\circ\text{C}$ , siendo el valor experimental tres veces mayor que el valor teórico. Estas diferencias pueden deberse a una discordancia de temperaturas a la que se ha calculado la viscosidad, pues en nuestro caso el laboratorio se encontraba a  $27^\circ\text{C}$ . Además, debido a la propia disposición del dispositivo experimental, no podemos garantizar la exactitud de los valores medidos (distancia, presión, tiempo), que sin un análisis de errores experimentales influye negativamente en los cálculos sucesivos. Por otro lado, la densidad del agua (ideal) para nuestros cálculos no corresponde no el agua utilizada en nuestro experimento.

A partir de estos datos experimentales y gracias a la ecuación (4) podemos calcular el número de Reynolds (recordar que  $U = \frac{Q}{\pi r^2}$ ). Los datos correspon-

dientes los podemos ver en la tabla (1). Los datos inferiores a la línea horizontal central representan aquellos que corresponden al régimen laminar y con los que se llevó a cabo la regresión lineal ( $Q$  vs  $\Delta p'$ ).

Examinando los datos podemos confirmar el comportamiento  $\Delta p \propto Q \propto U$ , pues al aumentar la presión aumentará el caudal y, por consiguiente, la velocidad media del agua dentro del tubo capilar. Además comprobamos el régimen laminar para todos aquellos valores que, sumando su correspondiente incertidumbre, están dentro del límite  $Re < 2000$ . Sin embargo, aunque no obtenemos ningún valor para el número de Reynolds que esté por encima de dicho límite, sí reconocemos la transición al régimen turbulento para todos aquellos valores que sumando la incertidumbre están en el rango  $2000 < Re < 3000$ . Como hemos visto, obtenemos, en general, valores inferiores a los esperados con incertidumbres muy altas (sobre todo en régimen transitorio).

También podemos ver en la tabla (1) los valores calculados para el coeficiente de resistencia  $\lambda$  según la ecuación (5) y (6). Aunque dichos valores tienen una incertidumbre tal que solapan en rango unos con otros, es importante recalcar que tienen una incertidumbre muy alta (pues son función del número de Reynolds), tanto que el error relativo para este coeficiente está en el rango de entre 30 % y el 40 %, cumpliéndose el 30 % para todos los valores de  $\lambda_{64}$ .

En la figura (3) hemos representado los datos para  $\lambda$  en función de  $Re$ . Las líneas representan las soluciones a la ecuación (7) característica del régimen turbulento. Se ha preferido graficar dichas líneas para el régimen laminar (donde no son válidas) para observar su comportamiento. Podemos identificar entonces que la solución de la ecuación trascendente que más se asemeja a nuestros datos es la línea (morada) que está justo por encima de nuestros puntos experimentales para los valores más altos del número de Reynolds.

Podemos hacer énfasis en el régimen turbulento mediante una presentación logarítmica de nuestros datos. En la figura (4) podemos ver el comportamiento lineal de  $\log(\lambda)$  frente a  $\log(Re)$  para el régimen laminar y su correspondiente punto de inflexión hacia el régimen turbulento, marcado por un cambio de tendencia con pendiente positiva.

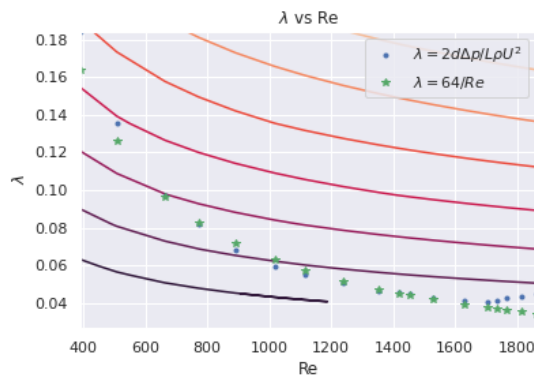


Figura 3: Diagrama de Moody. Comportamiento del coeficiente de resistencia  $\lambda$  según el número de Reynolds. Las líneas representan las soluciones a la ecuación (7) de Karmann-Prandtl. No se incluyen barras de error debido a su gran tamaño.

## 4. Conclusiones

Se ha determinado la viscosidad del agua de manera experimental mediante el estudio de un caudal que fluye a través de un tubo capilar. Se ha obtenido un valor tres veces superior al valor teórico con un error relativo de entorno al 13 %, diferencias significativas debido a que se ha utilizado agua corriente que difiere en densidad frente al agua ideal (valor que hemos utilizado para nuestros cálculos) y posiblemente también debido a una diferencia de temperaturas para las cuales comparamos la viscosidad. Unido a esto, no podemos obviar la disposición experimental y posibles errores sistemáticos (no considerados) y aleatorios que podrían haber causado un desbarajuste en nuestros cálculos.

Sabiendo que todos estos errores se trasladarían a nuestros sucesivos cálculos, hemos caracterizado el régimen del fluido mediante el número de Reynolds a través de la velocidad media del fluido dentro del tubo capilar. Observamos pues el comportamiento laminar del fluido y su correspondiente paso a un régimen de semiturbulento. No hemos visto un flujo claramente turbulento, pues se exige un número de Reynolds  $Re > 3000$ , valor que se consigue en circunstancias de baja viscosidad, altas velocidades o tuberías de gran sección. Aún así vemos que los valores obtenidos están en concordancia con la teoría expuesta en la introducción de este experimento.

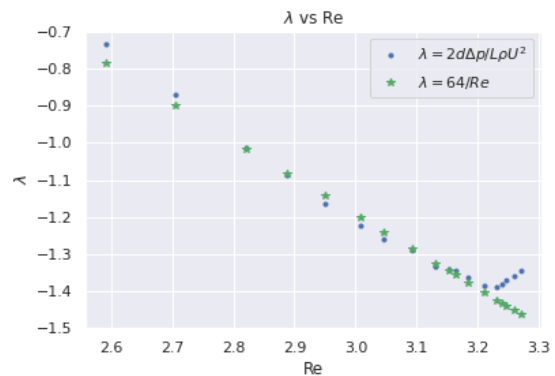


Figura 4: Diagrama de Moody logarítmico para el coeficiente de resistencia. No se incluyen barras de error debido a su gran tamaño.

Finalmente y gracias a los valores del número de Reynolds hemos calculado el coeficiente  $\lambda$ , para luego hacer un estudio en base al régimen del fluido mediante los diagramas de Moody, confirmando visualmente el punto crítico de transición aunque sin satisfacer la condición dada por Karmann-Prandtl en la ecuación (7).

Dicho esto, podemos concluir un satisfactorio estudio cualitativo del fenómeno estudiado, más no cuantitativo, pues los sucesivos errores, su consecuente propagación además de las condiciones de laboratorio nos impide afirmar que tengamos unos buenos resultados para los parámetros del agua ideal.

## Referencias

- [1] F. H. A. A. Liñán Martínez, M. Rodríguez Fernández. *Mecánica de Fluidos*. ETSI UPM, 2002.
- [2] E. L. D. Landau. *Mecánica de Fluidos*. Reverté, 1991.
- [3] F. M. White. *Mecánica de Fluidos*. McGraw Hill, 2004.

## A. Tablas

$Q(m^3/s) \cdot 10^{-5}$	$\Delta p'(Pa) \cdot 10^2$	$U(m/s)$	$Re \cdot 10^{-3}$	$\lambda_U$	$\lambda_{64}$
$1,62 \pm 0,16$	$49,9 \pm 0,8$	$1,7 \pm 0,3$	$1,9 \pm 0,6$	$0,045 \pm 0,015$	$0,034 \pm 0,010$
$1,58 \pm 0,16$	$45,8 \pm 0,8$	$1,7 \pm 0,3$	$1,8 \pm 0,5$	$0,043 \pm 0,015$	$0,035 \pm 0,011$
$1,54 \pm 0,16$	$42,5 \pm 0,8$	$1,7 \pm 0,2$	$1,8 \pm 0,5$	$0,043 \pm 0,015$	$0,036 \pm 0,011$
$1,51 \pm 0,15$	$39,8 \pm 0,8$	$1,6 \pm 0,2$	$1,7 \pm 0,5$	$0,041 \pm 0,014$	$0,037 \pm 0,011$
$1,49 \pm 0,15$	$37,9 \pm 0,8$	$1,6 \pm 0,2$	$1,7 \pm 0,5$	$0,041 \pm 0,014$	$0,038 \pm 0,011$
$1,42 \pm 0,14$	$35,0 \pm 0,8$	$1,5 \pm 0,2$	$1,6 \pm 0,5$	$0,041 \pm 0,014$	$0,039 \pm 0,012$
Régimen laminar correspondientes a regresión lineal					
$1,33 \pm 0,13$	$32,2 \pm 0,8$	$1,4 \pm 0,2$	$1,5 \pm 0,5$	$0,043 \pm 0,015$	$0,042 \pm 0,013$
$1,27 \pm 0,13$	$30,6 \pm 0,8$	$1,4 \pm 0,2$	$1,5 \pm 0,4$	$0,045 \pm 0,016$	$0,044 \pm 0,013$
$1,24 \pm 0,13$	$29,4 \pm 0,8$	$1,33 \pm 0,19$	$1,4 \pm 0,4$	$0,046 \pm 0,016$	$0,045 \pm 0,014$
$1,18 \pm 0,12$	$27,0 \pm 0,8$	$1,27 \pm 0,19$	$1,4 \pm 0,4$	$0,046 \pm 0,016$	$0,047 \pm 0,014$
$1,08 \pm 0,11$	$25,1 \pm 0,8$	$1,16 \pm 0,17$	$1,2 \pm 0,4$	$0,051 \pm 0,018$	$0,052 \pm 0,015$
$0,97 \pm 0,09$	$21,7 \pm 0,8$	$1,05 \pm 0,15$	$1,1 \pm 0,3$	$0,05 \pm 0,02$	$0,057 \pm 0,017$
$0,88 \pm 0,09$	$19,8 \pm 0,8$	$0,95 \pm 0,14$	$1,0 \pm 0,3$	$0,06 \pm 0,02$	$0,063 \pm 0,019$
$0,77 \pm 0,08$	$17,3 \pm 0,8$	$0,84 \pm 0,12$	$0,9 \pm 0,3$	$0,07 \pm 0,03$	$0,07 \pm 0,02$
$0,67 \pm 0,07$	$15,7 \pm 0,8$	$0,72 \pm 0,11$	$0,8 \pm 0,2$	$0,08 \pm 0,03$	$0,08 \pm 0,02$
$0,58 \pm 0,06$	$13,7 \pm 0,8$	$0,62 \pm 0,09$	$0,7 \pm 0,2$	$0,10 \pm 0,04$	$0,09 \pm 0,03$
$0,44 \pm 0,05$	$11,2 \pm 0,8$	$0,48 \pm 0,07$	$0,51 \pm 0,15$	$0,14 \pm 0,05$	$0,13 \pm 0,04$
$0,34 \pm 0,04$	$9,0 \pm 0,8$	$0,37 \pm 0,05$	$0,39 \pm 0,12$	$0,18 \pm 0,08$	$0,16 \pm 0,05$

Cuadro 1: Resultados experimentales. Los valores de  $Re$  se encuentran redondeados a una cifra significativa. Todos los resultados se han llevado a cabo con el mayor número de decimales posibles marcados por la precisión del ordenador.

## B. Tratamiento de incertidumbres

### ■ Volumen agua

$$\Delta V = \left| \frac{1}{\rho} \Delta m \right|$$

### ■ Caudal

$$\Delta Q = \left| \frac{1}{t} \Delta V \right| + \left| \frac{-V}{t^2} \Delta t \right|$$

### ■ Presión

$$\Delta p = |\rho g \Delta h|$$

### ■ Presión corregida

$$\Delta p' = \Delta p + \left| \frac{1}{m} \Delta b \right| + \left| \frac{-b}{m^2} \Delta m \right|$$

### ■ Radio al cuadrado

$$\Delta r^2 = \left| \frac{M}{\pi \rho L} \Delta M \right| + \left| \frac{-M}{\pi \rho L^2} \Delta L \right|$$

### ■ Viscosidad

$$\Delta \mu = \left| \frac{2\pi (r^2)}{8mL} \Delta r^2 \right| + \left| \frac{-\pi (r^2)^2}{8mL^2} \Delta L \right| + \left| \frac{-\pi (r^2)^2}{8m^2L} \Delta m \right|$$

### ■ Velocidad

$$\Delta U = \left| \frac{1}{\pi r^2} \Delta Q \right| + \left| \frac{-Q}{\pi (r^2)^2} \Delta r^2 \right|$$

### ■ Diámetro $d = 2\sqrt{(r^2)}$

$$\Delta d = \left| \frac{1}{\sqrt{(r^2)}} \Delta r^2 \right|$$

### ■ Número de Reynolds

$$\Delta (Re) = \left| \frac{\rho d}{\mu} \Delta U \right| + \left| \frac{U \rho}{\mu} \Delta d \right| + \left| \frac{-U \rho d}{\mu^2} \Delta \mu \right|$$

### ■ Coeficiente de rozamiento $\lambda_U$

$$\Delta \lambda_U = \left| \frac{2d}{\rho L U^2} \Delta p' \right| + \left| \frac{2p'}{\rho L U^2} \Delta d \right| + \left| \frac{-2dp'}{\rho L^2 U^2} \Delta L \right| + \left| \frac{-4dp'U}{\rho L U^4} \Delta U \right|$$

- **Coeficiente de rozamiento**  $\lambda_{64}$

$$\Delta\lambda_{64} = \left| \frac{-64}{\text{Re}^2} \Delta(\text{Re}) \right|$$