TD3 : Correction

Félix Martins-Ducasse

Ensembles ordonnés

Rappels. Une relation de *préodre (R)* sur un ensemble A est une endorelation de A qui est réflexive ($Id \subseteq R$) et transitive ($R; R \subseteq R$). Une relation d'*ordre* est une relation de préordre R qui est antisymétrique ($R \cap R^\circ = Id$). Un *ensemble préordonné* (resp. *ordonné*) est un ensemble munie d'une relation de préordre (resp. d'ordre).

Si $(A, \leq)$ est un ensemble pré ordonné et P une partie de A, un *majorant de* P est un élément x de A tel que tous les éléments x' de P vérifient $x' \leq x$. Une *borne supérieure* de P. aussi appelé *supremum de* P, est un majorant x_0 de P tel que pour tout majorant x de P on ait $x_0 \leq x$. Une borne inférieure de P est une borne supérieure de P dans l'ensemble préordonné $(A, \leq^\circ)$. Si $\leq$ est une relation d'ordre, la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie P de A est nécessairement unique lorsqu'elle existe, et on la note alors $\bigvee P$ (resp. $\bigwedge P$).

Soient $(A, \leq_A)$ et $(B. \leq_B)$ deux ensembles préordonnés. Une fonction f de A dans B est *croissante* lorsque pour tout $x \leq_A x'$ on a $f(x) \leq_B f(x')$.

Exercice 1.1 (**)

Énoncé

Dans cet exercice, on démontre un théorème de point fixe essentiel, dû à Stephen Cole Kleene. Dans ce qui suit, A désigne un ensemble ordonné dont on note la relation d'ordre $\leq$.

1. Une partie P de A est dite *filtrante* si tout sous-ensemble fini Q de P admet un majorant dans P. Montrer qu'une partie P de A est filtrante si et seulement si elle est non vide et satisfait la condition
$$\forall x, y \in P, \exists z \in P, x \leq zy \leq z.$$
2. Montrer qu'une partie finie P de A est filtrante si et seulement si elle a un plus grand élément.
3. Montrer qu'une partie P de A qui est non vide et totalement ordonnée est nécessairement filtrante.
4. Un ensemble ordonnée est dit *inductif* si toutes ses parties filtrantes ont un supremum. Pour chacun des ensemble ordonnés ci-dessous, déterminer s'il est inductif. Le cas échéant. le démontrer ; sinon, donner une partie filtrante dépourvue de supremum.

Correction

On utilisera les notations suivante :

$$X \subseteq_{Fini} Y : X \text{partie finie de } Y$$
$$X \subseteq^* Y : X \text{partie non vide de } Y$$
$$X \leq x : x \text{ est un majorant de } X$$

1. Soit $(A, \leq)$ et $P \subseteq A$, P filtrante $\overset{def}{\iff} \forall Q \subseteq_{Fini} P, \exists x \in P, Q \leq x$

$$\text{Mq } P \text{ filtrante } \iff \begin{cases} \exists x, \quad x \in P \\ \forall x, y \in P \quad \exists z \in P, x \leq z \text{ et } y \leq z \end{cases} \qquad (A)$$

Preuve : $\Rightarrow$ Supposons P filtrante
Clairement, P non vide car la partie $\emptyset$ de P a un majorant. Soit $x, y \in P$. La partie $\{x, y\} \subseteq_{Fini} P$ a un majorant qui fournit le z attendu.

Preuve : $\Leftarrow$ Soit P non vide et satisfaisant (A). On va montrer que tout $Q \subseteq_{Fini} P$ a un majorant dans P. On procède par induction sur le nombre d'elt de Q.

Cas $Q = \emptyset$:
Un majorant de A est n'importe quel elt de P et il en existe au moins un car P non vide.

Cas $Q = Q' \uplus \{x\} \leq z$:
Par hypothèse d'induction, on a z_0 majorant de Q'
Par la propriété (A) on obtiens $z \in P, z_0 \leq z$ et $x \leq z$
Donc $Q = Q' \uplus \{x\} \leq z$

Nous avons donc que P filtrante $\iff$ (1) $\square$

2. Soit $P \subseteq_{Fini} A$, Montrer que P filtrante ssi P a un plus grand élément

Preuve : $\Leftarrow$ Supposons que P a un plus grand élément :
c'est-à-dire : $\exists x \in P \quad \forall x' \in P, x' \leq x$
Donc P est non vide, de plus, pour $x_1, x_2 \in P$ on a $x_1 \leq x_2$ et $x_2 \leq x$ donc P satisfait (A), donc P est filtrante.

Preuve : $\Rightarrow$ Supposons P finie et filtrante.
Montrons que P a un plus grand élément par induction sur le cardinal de P :

Cas $P = \emptyset$:
Absurde car $P \neq \emptyset$

Cas P a $n + 1$ éléments :
On choisit $x \in P$ et on pose $P' = P / \{x\}$
Donc P' a m éléments et, par hypothèse d'induction, a un plus grand élément $x_0 \in P'$
La propriété (A) donne $x' \in P$ tel que $x_0 \leq x'$ et $x \leq x'$
Donc x' est un majorant de P qui appartient à P, c'est donc le plus grand élément de P.

Remarque : Le deuxième sens de la preuve peut être fait juste avec la définition trouvé dans la question 1.