Matemática Superior

Textos de Graduação

Cálculo Diferencial e Integral - CDI2

Segunda Edição

Félix Pedro Quispe Gómez

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

DAMAT - Departamento Acadêmico de Matemática

Curitiba, PR - Brasil

Universidade Tecnológica Federal de Paraná
Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT
Câmpus Curitiba - CT
Sede Centro
80230-901 Rebouças
Curitiba - PR - Brasil

No interesse de difusão da cultura e do conhecimento, o autor e os editores envidaram o máximo esforço para localizar os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado, dispondo-se a possíveis acertos posteriores caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Quispe Gómez, Félix Pedro

Monografias p. cm
Inclui Índice
1. Análise 2. Cálculo Diferencial e
Integral I. DAMAT - UTFPR
II. Título III. Série: Textos de Graduação

Impresso no Brasil. Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na Web ou outros), sem permissão expressa do autor.

©2025 by
FPQG - Monografias Técnicas e Científicas Editora ME
Av. Sete de Setembro, 3165 Bloco F
Rebouças
80230-901 Curitiba - PR
Telf./Fax: +55 (41) 3310-4650
E-mail: felixgomez@utfpr.edu.br
http://www.utfpr.edu.br/~gomez

Se a gente não pensar em ter mais, fatalmente se terá menos.

Agradecimentos

Agradeço de maneira muito especial às muitas pessoas que ajudaram de de diversas maneiras, generosamente, na criação desta monografia.

Também faço extensivo meus agradecimentos para o Prof. Jaime E. Muñoz Rivera por suas constantes observações e sugestões na formação deste material. Sou grato a muitos professores do Departamento de Matemática-UFSC, responsaveis por diversas correções e melhoramentos.

Na UFSC, merecem especial destaque os meus alunos de Cálculo, pelas sugestões e reações através dos anos que contribuíram muito para aprofundar meus conhecimentos e minhas ideias de como apresentar o assunto e seu apoio constante nos momentos difíceis.

Agradeço ao LNCC/MCTI pelas facilidades bibliográficas e computacionais, Plataformas SUN e IBM, sem as quais não houve-se podido entrar no mundo maravilhoso da computação. Da mesma maneira ao IMPA/MCT que prestou-me as facilidades de bibliografia e recursos computacionais, SUN e PC's sob a plataforma Windows com ferramentas de excelente qualidade.

Sou imensamente grato a minha família, por levarem vidas íntegras e dedicadas, e por facilitarem as muitas viagens e compromissos fora de casa que precisei assumir.

Também são necessárias algumas linhas de reconhecimento aos artistas anônimos da editoração eletrónica, pelo profundo envolvimento com o material e por suas capacidades, sensibilidades e cuidados ao lidar com a beleza do presente trabalho.

Félix Pedro Quispe Gómez
Fpolis, October 1, 2025

Prefácio

O texto foi escrito do ponto de vista da matemático aplicad0, cujo interesse em cálculo avançado pode ser altamente teórico, intensamente prático ou algo no meio. Procuramos combinar uma exposição correta e precisa das teorias elementares. Tratamos dos principais métodos matemáticos da física e das engenharias. Neste sentido não é uma coleção de de "receitas" que se aplicam mas ou menos de memória. Os entes que nele comparecem são entes matemáticos definidos cuidadosamente. Mostramos sua propriedades elementares e os exemplos, emprestados da física e engenharia, colocam em destaque como devem ser utilizados os mesmos.

Escrevemos o presente trabalho, principalmente para o aluno da graduação em matemática, ciência ou engenharia, o qual, faz uma disciplina de cálculo avançado durante o segundo ano de estudo. O principal pré-requisito para se ler este texto é saber trabalhar com cálculo, o que pode ser obtido através de uma sequência de três semestres ou equivalente.

Este trabalho elemental e conciso não possui a ambição de ser um verdadeiro tratado; nas questões com tratamento extenso somente se enunciam os resultados essenciais, sem demostração.

A presentação do material é rigorosa e explora os métodos práticos para encontrar soluções. As vezes apelamos a métodos heurísticos nos casos que exijam intuição geométrica. O conteúdo é clássico e foi adaptado, sintetizado e estendido de excelentes trabalhos de Churchill [2], Courant e Hilbert [5], Fritz John [6]

Nos capítulos apresentados desenvolveu-se esforço especial para apresentar os assuntos da maneira mais clara e mais rigorosa possível; isto também se aplica a escolha das notações. Em cada capítulo, o nível aumenta gradualmente, evitando-se saltos e acúmulos de considerações teóricas complexas.

Ao final de cada seção propomos uma coleção de exercícios. Estos estão, na medida do possível, classificados por ordem de dificuldade crescente. Alguns são de aplicação direta dos tópicos abordados; outros abordam questões novas, porém todos eles a nível dos conhecimentos correspondentes ao segundo ano de cálculo.

Os conhecimentos para ler este texto com proveito são os exigidos nas disciplinas de cálculo como algumas noções de álgebra linear e a teoria de variável complexa.

Concluímos, antecipando nosso agradecimento a nossos leitores pelo credito e confiança que possam brindar a presente obra e desejamos que nos façam chegar sugestões e ou críticas construtivas para poder corrigir os erros cometidos. Nesse sentido o autor assume a responsabilidade total dos mesmos.

Contents

List of Figures

List of Tables

Chapter 1

Sequências, Séries e Critérios de Convergência

Neste capítulo definimos os conceitos elementares de sequências e séries de numéricas logo explanaremos os testes de convergência e não convergência.

1.1 Sequência de Números Complexos

Uma sequência infinita é uma função com domínio $\mathbb{N}$ e contradomínio $\mathbb{C}$. Isto é, a correspondência para cada número natural n, um número complexo z_n, chamado n-ésimo termo da sequência e representamos a sequência da seguinte maneira:

$$\{z_1, z_2, z_3, \ldots\} \qquad \text{ou simplesmente por} \qquad \{z_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{C}$$

Observação 1. *Podemos escrever também z_0, z_1, $z_2, \ldots$ ou z_2, z_3, $z_4, \ldots$ ou iniciar com outro número inteiro por conveniência.*

Convergência. Uma sequência $\{z_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{C}$ é chamada convergente se possui limite $C \in \mathbb{C}$ e é representada por

$$\lim_{n\to\infty} z_n = C \qquad \text{ou simplesmente} \qquad z_n \to C.$$

O símbolo anterior por ser interpretado por intermédio da definição de limite; para cada $\varepsilon > 0$ dado, devemos encontrar um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$|z_n - C| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad n > N. \tag{1.1}$$

Geometricamente a afirmação anterior significa que todos os termos z_n se encontram num disco (ou bola) aberto de raio ε e centro C a partir de un índice n que supera o número fixo $N \geq N(\varepsilon)$, portanto os termos restantes, numa quantidade finita, ficam fora do disco.

Divergência. Uma sequência é chamada de divergente se ela é não convergente.

Sequência Limitada. Uma sequência $\{z_n\} \subsetneq \mathbb{C}$ limitada, é uma sequência cujos termos se encontram num disco, suficientemente grande porém finito, de raio K com centro na origem, isto é,

$$|z_n| \leq K \quad \text{para todo} \quad n \geq 1.$$

Ponto de Acumulação de uma Sequência. O ponto limite (ponto de acumulação) z_o da sequência $\{z_n\} \subsetneq \mathbb{C}$ é um ponto tal que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem infinitos termos da sequência satisfazendo $|z_n - z_o| < \varepsilon$.

Observamos que o fato anterior não garante a convergência, pois podem existir infinitos termos da sequência que não se encontram no círculo de centro z_o e raio ε.

Exercício 1. Considere a seguinte sequência de números

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{15}{16} \cdots \right\}$$

Identifique seus pontos limite.

Solução. Observando os termos da sequência colocados nas posições ímpares,

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \cdots \right\}$$

tem um comportamento cujo denominador cresce, portanto um dos pontos limite é 0.

De maneira semelhante observando os termos restantes,

$$\left\{\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \cdots \right\}$$

o comportamento é que tanto numerador como denominador estão bem próximos, assim o segundo ponto limite da sequência é o número 1. Portanto a sequência é não convergente (diverge). $\diamondsuit$

Teorema 1.1: Bolzano-Weierstrass

Uma sequência infinita $\{z_n\} \subsetneq \mathbb{C}$ limitada no plano complexo possui ao menos um ponto de acumulação (ou ponto de limite).

Prova : Torema 1.1

Exercício para o leitor.

Exercício 2. Considere as seguintes sequências e determine se são convergentes ou divergentes

(a) $\left\{\dfrac{i^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$

(b) $\{i^n\}_{n\geq 1}$

(c) $\{(1+i)^n\}_{n\geq 1}$

(d) $\left\{\dfrac{(1+i)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$

Solução. A sequência do item (a) possui os termos,

$$\left\{\frac{i^n}{n}\right\}_{n\geq 1} = \left\{i, \frac{-1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \right\}$$

desenhando os pontos no plano complexo, observamos que se aproximam ao ponto zero. Para mostrar isto devemos usar a definição,

$$|z_n - C| = |z_n - 0| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N$$

em nosso caso particular teremos,

$$\left|\frac{i^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Escolhendo $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$ temos a sequência convergente com limite $C = 0$.

A sequência do item (b) possui os termos

$$\{i^n\}_{n\geq 1} = \{i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i, \ldots\}$$

é divergente, para ver isto, escrever seus pontos limite, nota-se que possui muitos.

A sequência do item (c) possui os termos

$$\{(1+i)^n\}_{n\geq 1} = \{1+i,\ (1+i)^2,\ (1+i)^3, \ldots\}$$

também é divergente; proceder da mesma forma que no item anterior ou transforme para sua forma polar.

Finalmente para sequência do item (d) não é tão evidente o comportamento de seus termos, para isto aplicaremos um método mais elaborado, o método da razão. Considere o seguinte quociente,

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{(1+i)^{n+1}/(n+1)}{(1+i)^n/n}\right| = \frac{n}{n+1}|1+i| = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

Examinando a partir de um índice $n > 10$ temos que

$$\frac{n\sqrt{2}}{n+1} > \frac{6}{5} = 1,2 \quad \Rightarrow \quad |z_{n+1}| > (1,2)|z_n|, \qquad \text{para} \qquad n > 10.$$

Sendo assim observamos as seguintes conclusões,

$$|z_{11}| > (1,2)|z_{10}|, \quad |z_{12}| > (1,2)|z_{11}| > (1,2)^2|z_{10}|, \ldots, \ldots$$

em geral pela indução matemática temos,

$$|z_n| > (1,2)^{n-10}|z_{10}|$$

e assim $|z_n|$ pode ser maior que qualquer número dado, não importa quão grande seja, e assim o limite de $|z_n|$ não existe, logo também o limite de z_n não existe. Portanto a sequência diverge. $\Diamond$

Exercício 3. Seja $M \subset \mathbb{C}$ conjunto que possui a propriedade $|z| < 1$. Mostre que a sequência das potências, $\{z^n\}_{n\geq 1}$, é convergente para qualquer $z \in M$.

Solução. Para $z = 0$ é valida a afirmação e portanto o limite $C = 0$. Se $z \neq 0$, consideramos z em sua forma polar $z = r[\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)]$. Por hipótese $0 < |z| < 1$ segue que $0 < r < 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} z^n &= \lim_{n\to\infty}[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^n \\
&= \lim_{n\to\infty}[r^n(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n] \\
&= \lim_{n\to\infty}[r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)]
\end{aligned}$$

Porém temos que a expressão

$$|r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)| = r^n$$

de maneira que

$$\lim_{n\to\infty}|r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)| = \lim_{n\to\infty} r^n = 0, \qquad \text{pois} \qquad 0 < r < 1$$

Da definição de limite e a discussão acima temos

$$\lim_{n\to\infty}[r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)] = 0.$$

Portanto a sequência dada é convergente para zero. $\Diamond$

Exercício 4. Considere a sequência $\{z_n\}_{n\geq 1}$ em $\mathbb{C}$, onde o termo geral é dado por,

$$z_n = x_n + i\,y_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right) + i\left(1 + \frac{2}{n}\right).$$

Mostre que a sequência é convergente e seu limite é $C = 2 + i$.

Solução. Para verificar a nossa afirmação utilizamos a definição (1.1), assim

$$|z_n - C| = \left|\frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} - (2+i)\right| = \left|-\frac{1}{n} + \frac{2i}{n}\right| = \frac{\sqrt{5}}{n}$$

neste nível, dado que o lado direito da igualdade anterior apresenta uma simplificação elementar, estamos em condições de resolver a inequação para n:

$$\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon.$$

Com efeito,

$$\frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$$

após estas contas podemos tomar um inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon) = \dfrac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$

Finalmente reescrevemos da seguinte forma; dado um $\varepsilon > 0$ (ou fornecido) encontramos outro número grande $N \geq N(\varepsilon) = \dfrac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$ tal que,

$$n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad |z_n - C| = \left|\frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} - (2+i)\right| = \left|-\frac{1}{n} + \frac{2i}{n}\right| < \varepsilon.$$

A estrutura da sequência dos números complexos mostra duas sequências de números reais, que formam para cada índice n, a parte real e parte imaginária do número complexo. Isto é, identificamos as sequências $\{x_n\} = \{2-1/n\}$ e $\{y_n\} = \{1+2/n\}$ para cada n e observamos que a primeira converge para $2 = \mathrm{Re}\,[C]$ e a segunda converge para o número $1 = \mathrm{Im}\,[C]$. $\Diamond$

Isso motiva o seguinte Teorema o qual afirma que convergência de uma sequência de números complexos pode ser entendida como a convergência de duas sequências reais, parte real e parte imaginária.

Teorema 1.2: Convergência de Sequências Complexas

Uma sequência de números complexos $\{z_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{C}$ onde $z_n = x_n + i\,y_n$ converge para $C = a + i\,b$ se e somente se a sequência parte real, $\{x_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$, converge para "$a$" e a sequência parte imaginária, $\{y_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$, converge para "$b$".

Prova. Se a sequência de complexos $\{z_n\}_{n\geq 1}$ converge para C então existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$|z_n - C| = |(x_n - a) + i\,(y_n - b)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon, \qquad n > N.$$

Por outro lado temos que

$$|x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2},$$

$$|y_n - b| = \sqrt{(y_n - b)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2},$$

assim temos que

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |x_n - b| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Assim sendo, temos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Recíprocamente, se as sequências $\{x_n\}_{n\geq 1}$ e $\{y_n\}_{n\geq 1}$ convergem para a e b respectivamente, então dado um $\varepsilon > 0$ podemos escolher $N \geq N(\varepsilon)$ bem grande de maneira que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

e com isto os termos z_n da sequência complexa estão dentre de um quadrado de centro C e lado ε. Desejamos que eles se encontrem dentre de uma circunferência com centro C e raio ε, para isso acontecer fazemos,

$$\begin{aligned} |z_n - C| &= |(x_n - a) + i\,(y_n - b)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \\ &< \sqrt{(x_n - a)^2} + \sqrt{(y_n - b)^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N. \end{aligned}$$

Assim obtemos o que desejamos. $\square$

Exercícios Propostos

Resolver os exercícios a seguir,

(1) Escreva os primeiros termos das seguintes sequências,

(a) $z_1 = \frac{1}{3},\ z_2 = \frac{1}{4}, \cdots, z_n = \frac{z_{n-2}}{z_{n-1}},\ n \geq 3$ (b) $\left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \right\}_{n\geq 1}$

(c) $\left\{ \frac{(2i)^n}{3^{n-1}} \right\}_{n\geq 1}, \quad i = \sqrt{-1}$ (d) $\left\{ \frac{2n}{n^2+1} \right\}_{n\geq 1}$

(2) São as seguintes sequências $\{z_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{C}$ limitadas? Convergentes? Encontre seus pontos limites;

(a) $z_n = (-1)^n + 2i$ `R:` Sim, Não, $\pm 1 + 2i$ (b) $z_n = \frac{(3+4i)^n}{n!}$

(c) $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n}$ `R:` Sim, Sim, 0. (d) $z_n = e^{in\pi/2}$

(e) $z_n = (3i)^n - (1+i)^n$ `R:` Não, Não, Nenhum. (f) $z_n = \frac{n\pi}{1+2in}$

(g) $z_n = \frac{(-1)^n}{n+i}$ `R:` Sim, Não, ± 1. (h) $z_n = \frac{\pi}{2} + \frac{e^{in\pi/4}}{n\pi}$

(i) $z_n = i^n \cos(n\pi)$ `R:` Sim, Não, ± 1, $\pm i$.

(3) Mostre que se uma sequência converge, seu limite é único. (`Unicidade do Limite`)

(4) Se a sequência $\{z_n\}_{n\geq 1}$ converge com limite L e a sequência $\{w_n\}_{n\geq 1}$ converge com limite L_1, mostre que a sequência $\{z_n + w_n\}_{n\geq 1}$ converge com limite $L + L_1$.

(5) Com as mesmas hipóteses do problema anterior, mostre que a sequência $\{z_n\, w_n\}_{n\geq 1}$ converge com limite $L\, L_1$.

(6) Mostre que a sequência complexa $\{z_n\}_{n\geq 1}$ é limitada se e somente se as duas sequências parte real e parte imaginária são limitadas.

1.2 Sequência de Números Reais

Nesta seção nos propomos a estudar uma classe especial de funções, chamadas de sequências. Quando lidamos com números reais, chegamos às sequências infinitas. Notamos que exis-tem sequências infinitas de inteiros positivos,

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3, \ldots, \}$$

inteiros pares,

$$\mathbb{N}_P = \{2,\ 4,\ 6, \ldots, \} = \{2n \colon n \in \mathbb{N}\},$$

inteiros ímpares,

$$\mathbb{N}_I = \{1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots, \} = \{2n - 1 \colon n \in \mathbb{N}\},$$

números primos

$$\mathbb{P} = \{2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17, \ldots\}$$

e assim por diante.

Exemplos mais evidentes para a finalidade desta seção surgem quando nos aproximamos a números racionais por intermédio de decimais. Por exemplo, a sequência infinita

$$1;\ 1,7;\ 1,73;\ 1,732;\ 1,7320;\ 1,73205;\ 1,732050; \ldots$$

fornece aproximações decimais sucessivamente melhores para $\sqrt{3}$.

Podemos mostrar também uma outra sequência de aproximações de $\sqrt{3}$ obtida a partir de um método conhecido como Método de Newton; tomando $a_1 = 2$ com a primeira aproximação e aplicando repetidamente a fórmula

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + d}{2a_n}, \qquad \text{com} \qquad d = 3,$$

geramos a sequência infinita

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{a_1^2 + 3}{2a_1} = \frac{7}{4}, \quad a_3 = \frac{a_2^2 + 3}{2a_2} = \frac{97}{56}, \ldots, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}, \ldots$$

Com qualquer destas sequências, poderemos aproximar $\sqrt{3}$ tão bem quanto desejar se avançar suficientemente nas sequências . Observado este fato dizemos que as sequências convergem para $\sqrt{3}$, ou têm limite $\sqrt{3}$.

O conceito de limite sugerido na observação anterior é a ideia fundamental que serve para fornecer uma definição analítica do limite de uma sequência infinita. Também estudaremos a demostração de fatos básicos sobre este limites.

A definição e as demonstrações são mais sutis que as de álgebra e geometria elementar; mas não são difíceis, depois de estar habituados com elas. O primeiro pré-requisito é alguma confiança para trabalhar com desigualdades, logo vamos a necessitar também o axioma de existência do supremo.

Definição 1: Sequência

Uma sequência em um conjunto S é uma função, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e cuja imagem é um subconjunto de S.

Chama-se sequência de números reais a toda função com domínio $\mathbb{N}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ ou cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}$, denotada por

$$a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a(n) = a_n.$$

A partir da definição anterior, podemos afirmar que a sequência faz corresponder a cada número natural n, um único número real. É natural denotar por a_n, o número real correspondente ao número natural n pela sequência a.

Para uma função sequência de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{R}$, o valor desta função em n será denotada por $a(n)$. Porém denotaremos esse valor por a_n. Uma sequência a é assim um conjunto de pares

$$\{(n, a_n)\colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Como o domínio de todas as sequências é o mesmo conjunto, $\mathbb{N}$, portanto a sequência esta completamente determinada se conhecemos a_n para cada natural n. De posse disto, uma maneira de definir uma sequência a, é escrever de forma ordenada os valores que assume a nos inteiros positivos:

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n, \ldots\} \quad \text{ou} \quad \{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Devemos, porém ser cuidadosos para distinguir uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e seu conjunto imagem $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$

Os números a_1, a_2, $a_3 \ldots$ são chamados de termos ou elementos da sequência. Assim, a_1 é primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim por diante, e a_n é o n-ésimo termo da sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

No que segue estaremos lidando unicamente com sequências reais, isto é na definição de sequência anterior, fazemos $S = \mathbb{R}$, logo usaremos o termo sequência para caracterizar uma sequência real.

Uma sequência pode ser caracterizada de muitas maneiras. Podemos listar em ordem os primeiros elementos e observar como vai ficando evidente a regra de formação. Por exemplo $\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots\}$ é uma sequência cujo n-ésimo termo é n^2.

Outro método de caracterizar uma sequência é dar uma fórmula de seu n-ésimo termo. Por exemplo, a sequência $\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots\}$ também pode ser escrita da seguinte maneira

$$\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots, n^2, \ldots\} \quad \text{ou como} \quad \{n^2\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Outro método conveniente para descrever uma sequência é especificar a_1 e uma regra de formação para obter a_{n+1} para $n \geq 2$ em termos de $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$. Tal definição é chamada de definição recursiva. Como um exemplo de definição recursiva temos,

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3\,a_n, \qquad n \geq 1.$$

Pode-se ver que essa definição define uma sequência cujo termo n-ésimo é 3^{n+1}.

Outro exemplo, seja a_1 e a_2 dois números reais positivos e,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \qquad n \geq 2$$

Para cada número natural n podemos determinar a_n em termos de a_1 e a_2 portanto a sequência fica completamente determinada pela relação acima.

Uma sequência pode ser finita ou infinita conforme tenha ou não um número finito de termos.

Exemplo 1 (Sequência Finita)**.** Considere o conjunto $\{1,\ 7,\ 12,\ 17, \cdots, 32\}$ onde a lei de formação esta dada por

$$a(n) = a_n = 2 + 5(n-1) \quad \text{para} \quad n = 1, \cdots, 7.$$

Exemplo 2 (Sequência Infinita)**.** Considere o conjunto $\{1,\ 1/3,\ 1/5,\ 1/7, \cdots ,\}$ onde a sua lei de formação é dada por

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \quad \text{para} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$$

Exercício 5. Em cada um dos exercícios abaixo exibir o elemento a_n das seguintes sequências

(a) $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \ldots,$ R: $a_n = \frac{2}{n}$

(b) $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2, \ldots,$ R: $a_n = n^2$

(c) $-1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots,$ R: $a_n = (-1)^n$

(d) $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5}, \ldots,$ R: $a_n = \sqrt{n}$

(e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots,$ R: $a_n = \frac{n}{n+1}$

(f) $\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \ldots,$ R: $a_n = 3 - \frac{1}{n}$

Como qualquer função, uma sequência $\{a_n\}$ possui um gráfico que consiste dos pontos

$$(1,\ a_1),\ (2,\ a_2),\ (3,\ a_3) \ldots,$$

Uma outra representação gráfica mais conveniente de uma sequência obtém-se marcando simplesmente os pontos $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$ sobre a reta real $\mathbb{R}$. Este tipo de gráfico indica para onde se desloca a sequência. Por exemplo vejamos as seguintes,

(a) $\{a_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}_{n\geq 1}$

(b) $\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n\geq 1}$

(c) $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 1}$

(d) $\{x_n\} = \{n\}_{n\geq 1}$.

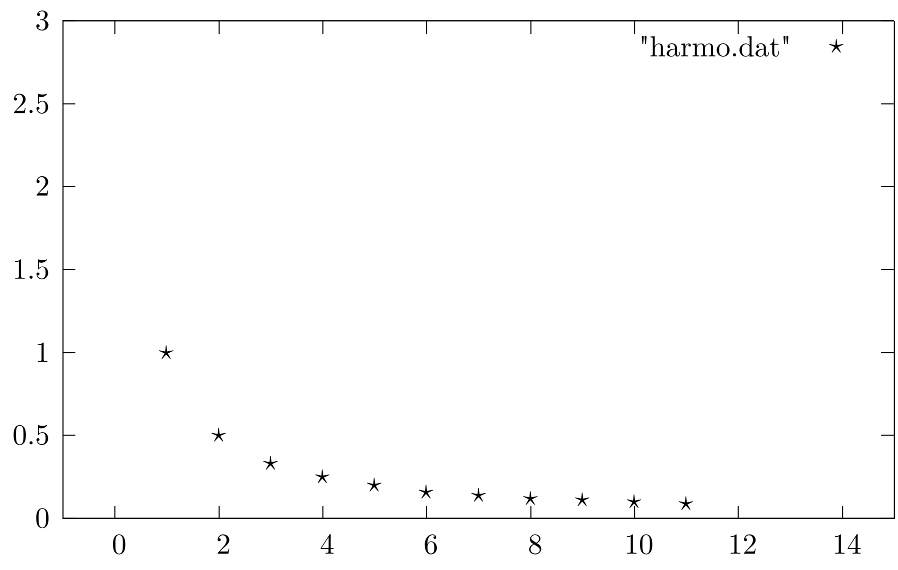


Figure 1.1: Gráfico de uma sequência bem próxima de zero

A definição formal está baseada na ideias de aproximação. Se considerarmos a sequência

$$\{d_n\} = \{1,\ 1,7,\ 1,73,\ 1,732, \ldots\}$$

o n-ésimo termo aproxima $\sqrt{3}$ com um erro menor que 10^{-n}:

(a) $d_0 = 1, \quad |d_0 - \sqrt{3}| < 1 \quad \text{erro} < 10^0$;

(b) $d_1 = 1,7, \quad |d_1 - \sqrt{3}| < 0,1 \quad \text{erro} < 10^{-1}$;

(c) $d_2 = 1,73, \quad |d_2 - \sqrt{3}| < 0,01 \quad \text{erro} < 10^{-2}$;

(d) $d_3 = 1,732, \quad |d_3 - \sqrt{3}| < 0,001 \quad \text{erro} < 10^{-3}$;

(e) $d_3 = 1,732, \quad |d_4 - \sqrt{3}| < 0,0001 \quad \text{erro} < 10^{-4}$;

(f) etc. etc. etc.

Aplicações diferentes exigirão graus diferentes de aproximação; as vezes o erro não deve ser maior que 10^{-2}, ou em outro caso não deve ser maior que 10^{-4}. Mas em qualquer caso apresentado, não importa quão pequeno o erro máximo tolerado (chame-o de ε), poderemos aproximar $\sqrt{3}$ com um erro menor que ε simplesmente tomando um termo d_n com o índice n suficientemente grande.

Quão grande deve ser o índice n depende, naturalmente, de ε; quando ε é muito pequeno, então n talvez deva ser muito grande.

A definição de limite de uma sequência infinita é uma formulação analítica precisa desta ideia.

1.2.1 Convergência de Sequências Reais

É possível apresentar um estudo rigoroso e auto-suficiente da teoria da convergência de sequências, quando aceitamos, como dado, um conjunto $\mathbb{R}$ de objetos, chamado de números reais, com todas sua propriedades conhecidas e além disso satisfaz o denominado *princípio do supremo* que agora estabelecemos

Definição 2: Cotas Superior e Inferior

Considere um subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ não vazio. Um número real, $b \in \mathbb{R}$, é uma **cota superior** do conjunto $\mathcal{S}$ se e somente se

$$s \leq b \qquad \text{para todo} \qquad s \in \mathcal{S}$$

Se, além disso, nenhum número menor que b é uma **cota superior** de $\mathcal{S}$, então diz-se que b é um **supremo** (sup) do conjunto $\mathcal{S}$. Os termos de **cota inferior** e **ínfimo** (inf) são analogamente definidos.

Nestes termos, o príncipio do supremo, que, aliás, é efetivamente um teorema relativo a números reais, assim se enuncia,

Teorema 1.3: Princípio do Supremo

Todo conjunto não-vazio de números reais limitado superiormente tem um supremo.

Existe ainda um enunciado correspondente para o **ínfimo**, o qual omitimos.

Observação 2. *Não é indispensável conhecer a demonstração do princípio, porém é essencial entender muito bem o enunciado e saber utilizar.*

Definição 3: Definição Analítica de Limite

Uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ de números converge para um número $L \in \mathbb{R}$ (n se aproxima do infinito), se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \qquad \text{então} \qquad |a_n - L| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Um número $L \in \mathbb{R}$, da definição acima, é chamado de um limite da sequência $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$, e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L$$

As vezes dizemos a_n se aproxima de L, ou de forma equivalente dizemos que $\{a_n\}$ tem limite L.

Como exemplo, consideremos a sequência $\{x_n\}$ onde

$$x_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esta sequência converge para zero, a diferença $|x_n - 0| = 2^{-n}$, sera menor que o número $\varepsilon > 0$ se

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{isto é, se} \quad n > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(2)}.$$

Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ escolhido, encontramos que $|x_n - 0|$ pode ser menor que ε a partir de um estágio em frente.

Nota. É importante fazer ênfase sobre a dependência do número positivo $N \geq N(\varepsilon)$, em geral depende do número ε fornecido.

A conclusão da afirmação (1.2) é equivalente a $a_n \in]L-\varepsilon,\ L+\varepsilon[$ e diz, fora desse intervalo existem no máximo uma quantidade finita de termos da sequência. Dito de outra forma, todos os termos da sequência a partir do termo com índice maior ou igual a $N \geq N(\varepsilon)$ estão dentro do intervalo $]L - \varepsilon,\ L + \varepsilon[$.

O processo de convergência e o valor do limite não são perturbados quando acrescentamos, omitimos o mudamos o valor numa quantidade finita de termos. Isto é, o comportamento da sequência esta determinada pelo comportamento de sua cauda.

Em fase da discussão anterior, podemos reformular a definição de convergência dizendo: uma sequência $\{x_n\}$ converge para L se e somente se ela se encontra em cada intervalo aberto ao redor de L.

O seguinte teorema mostra que a frase “um limite” na definição de convergência pode ser substituída pela frase “o limite”.

Teorema 1.4: Unicidade

Uma sequência $\{x_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ não pode convergir para mais de um limite.

Prova. Se for possível, seja a sequência $\{x_n\}$ que converge para dois números distintos L e M. Considere $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - M| > 0$, pois $L \neq M$. Como $\{x_n\}$ converge para L e M logo a sequência deve estar em ambos intervalos $]L - \varepsilon,\ L + \varepsilon[$ e $]M - \varepsilon,\ M + \varepsilon[$.

Porém, isto não é possível, porque esses intervalos não possuem um número real em comum. A contradição mostra que a sequência não pode convergir para mais de um limite. □

O fato que uma sequência $\{x_n\}$ converge para o limite L, é representado por

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \quad \text{ou} \quad x_n \to L \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

ou de forma equivalente por

$$\lim x_n = L \quad \text{ou simplesmente} \quad x_n \to L$$

A seguir apresentamos alguns exercícios resolvidos, mostrando como utilizar a Definição 3, para provar que um dado número L é o limite de uma sequência dada. O leitor pode consultar mais exemplos e exercícios em todos os textos de Cálculo elementar.

Exercício 6. Mostre que a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$, onde

$$a_n = \frac{n}{2n+1} \quad \text{possui limite} \quad L = \frac{1}{2}.$$

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que:

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \qquad \text{sempre que} \qquad n > N$$

Com efeito,

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4n+2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 4n+2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} = N.$$

Portanto, devemos escolher n com o primeiro número natural maior que N, é claro que qualquer outro numero natural maior também atende á definição de convergência. Assim sendo, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, temos

$$n > N \geq \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Mostrando assim o que desejávamos. ◊

Observação 3. *Se uma sequência $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ possui limite, se diz que a sequência é **convergente** e dizemos que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge a esse limite. Se a sequência não é convergente se diz que é **divergente**.*

1.2.2 Sequência Oscilatórias

Observamos que as sequências $\{n\}$ e $\{(-1)^n\}$ são ambas divergentes, pois como foi estudado essas sequências possuem comportamentos diferentes. Para sequência $\{n\}$ temos que a sua divergência se deve ao fato de ter termos muito grandes, enquanto $\{(-1)^n\}$ diverge porque seus termos oscilam demais. Assim, nesta seção faremos uma classificação de sequências divergentes.

Definição 4: Oscilante ou Alternada

Se uma sequência de números reais $\{x_n\}$ diverge, porém não diverge para $+\infty$ e não diverge para $-\infty$, dizemos que a sequência $\{x_n\}$ é *oscilante.*

A sequência dada por $\{1,\ -2,\ 3,\ -4, \ldots\}$ não esta próxima nem de $+\infty$ nem de $-\infty$. Porém esta sequência possui subconjuntos especias chamados de subsequências que serão definidos posteriormente, tais como,

$$\begin{aligned} &\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots\} \quad \text{se aproximam para} \quad +\infty \\ &\{-2,\ -4,\ -6, \ldots\} \quad \text{se aproximam para} \quad -\infty \end{aligned}$$

Se mostrará posteriormente, se a sequência $\{x_n\}$ diverge para mais infinito, o mesmo acontece com qualquer subsequência de $\{x_n\}$.

Algumas sequências divergentes nem divergem para mais infinito nem para menos infinito, logo elas são conhecidas como *oscilantes.*

Exercício 7. Considere as seguintes sequências e comente sobre a divergência e a convergência

(a) $\{-2,\ 2,\ -2,\ 2, \ldots, (-1)^n\, 2, \ldots\}$ (b) $\{-1,\ 2,\ -3,\ 4, \ldots, (-1)^n\, n, \ldots\}$

(c) $\{1,\ 1/2,\ 3,\ 1/4, \ldots, 2n-1,\ 1/2n, \ldots\}$ (d) $\{-1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$

Solução. Todas as sequências apresentadas nos vários ítens são oscilantes. ◊

Observação 4. *Podemos inferir, das definições anteriores que se as sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ e os números p e q inteiros positivos satisfazem $x_{p+m} = y_{q+m}$ para todo inteiro positivo m, então as sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergem, divergem ou oscilam juntas.*

Fazemos ênfase que "oscilante" não significa "os termos da sequência vão para cima e para abaixo". A sequência $\{(-1)^{n+1}/n\}$ com termos

$$\left\{1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

sobem e descem alternadamente, porém converge para zero. Logo, pela definição não é oscilante.

O termo "oscilante" é aplicado unicamente para algumas sequências divergentes. De forma intuitiva, uma sequência oscila se seus termos sobem e descem demais.

A seguir ilustramos a Observação 3 e outras afirmações com exemplos interessantes.

Exercício 8. Mostre que a sequência $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ não é convergente, logo é oscilante.

Solução. Suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = M$. Então para $\varepsilon = 1$, existe $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |(-1)^n - M| < 1$$

Tomando n_1 par e $n_1 > N$ tem se $|1 - M| < 1$ e para n_2 ímpar com $n_2 > N$ tem-se $|-1-M| < 1$.

Por outro lado obtemos $|-1-1| \leq |-1-M| + |1-M| < 2$. Então $2 < 2$ é uma contradição. Portanto a sequência dada não é convergente. $\Diamond$

Exercício 9. Um outro exercício é dado pela sequência $\{x_n\}$ definida por,

$$\{1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5, \ldots\}$$

Estude a oscilação da sequência.

Solução. Aplicando o Teorema 1.2.14, esta sequência $\{x_n\}$ diverge pois tem uma subsequência divergente,

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\}$$

Mas ainda, a sequência $\{x_n\}$ não diverge para mais infinito, pois não existe um número $N > 0$ para o qual a afirmação,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad x_n > 2$$

seja verdadeira.

Também, a sequência $\{x_n\}$ de forma equivalente a caso anterior, não diverge para menos infinito. Logo a sequência em questão $\{x_n\}$ é *oscilante*.

Exercício 10. Considere uma sequência $\{x_n\} = \{n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$. Provar que não possui limite.

Solução. Suponhamos que seja convergente, isto é, $x_n \to L$ com $L \in \mathbb{R}$, logo para $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - L| < \varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Em particular podemos apreciar as seguintes desigualdades,

$$|N + 1 - L| < 1/4 \quad \text{e} \quad |N + 2 - L| < 1/4$$

logo a diferença dada por

$$1 = |N + 2 - L - (N + 1 - L)| \leq |N + 2 - L| + |N + 1 - L| < 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

isto é, $1 < 1/2$, é uma contradição.

Exercício 11. Considere uma sequência $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$. Encontre e prove que seu limite é zero.

Solução. Utilizando a definição, para todo $\varepsilon > 0$ devemos encontrar um inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que a implicação a seguir seja verdadeira,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - L| < \varepsilon$$

Neste exemplo temos $x_n = 1/n$ e $L = 0$ portanto a diferença $x_n - L = (1/n) - 0 = 1/n$, logo a implicação, a ser completada (ainda não sabemos o valor de N) será,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Se fazemos a substituição de N por $1/\varepsilon$, obtemos,

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Assim sendo, a definição esta satisfeita se $N \geq N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$. Portanto temos o resultado desejado,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Para ilustrar com um valor numérico, consideremos $\varepsilon = 1/1000 = 0,001 > 0$ acontece a seguinte afirmação,

$$n > 1000 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0,001$$

e é equivalente a $1/n < 1/1000$, se escolhemos o número $n = 1001$.

Exercício 12. Considere uma sequência $\{x_n\} = \{C\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$. Mostre que possui limite ou converge para C.

Solução. Para qualquer $\varepsilon > 0$ temos a seguinte afirmação

$$C - \varepsilon < C < C + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad C - \varepsilon < x_n < C + \varepsilon, \quad n > 1.$$

Neste exemplo o número $N = 1$, não depende de ε; um mesmo valor de N funciona para qulaquer $\varepsilon > 0$.

Exercício 13. Considere a sequência $\{u_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ onde $u_n = 5 + (3/n)$. Verificar que é convergente e o valor de seu limite é $L = 5$.

Solução. Utilizando a definição, dado $\epsilon > 0$ qualquer devemos encontrar $N \geq N(\varepsilon)$ (possivelmente grande se ε for pequeno) tal que

$$|u_n - L| = |5 + (3/n) - 5| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N. \tag{1.3}$$

Isto significa que devemos resolver a seguinte inequação,

$$\frac{3}{n} < \varepsilon \quad \text{resulta que} \quad \frac{3}{\varepsilon} < n \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

É suficiente escolher $N = 3/\varepsilon$. Desse modo obtemos

$$n > N = \frac{3}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{n} < \varepsilon$$

Considerando $\varepsilon = 1/100$ temos que $N \geq 3/\varepsilon = 300$ logo

$$n > N \geq \frac{3}{\varepsilon} = 300 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{n} < \frac{1}{100} = \varepsilon.$$

Podemos por outro lado calcular o valor do limite anterior sem apelar a definição. Do cálculo elementar, o valor do seguinte limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{x} = 5 \quad \text{em particular temos} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n} = 5$$

Portanto é convergente e possui limite. $\Diamond$

Exercício 14. A sequência denotada por $\{2n + 3/(n^2+1)\}_{n\geq 1}$ possui limite e o valor é zero. Verificar esta afirmação.

Solução. Utilizar a seguinte sugestão, considere a função extensão $f(x) = 2x + 3/(x^2+1)$ e tomar o limite quando $x \to \infty$. $\Diamond$

Exercício 15. Provar que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, sempre que $0 < r < 1$.

Solução. Seja $\varepsilon > 0$ dado, devemos encontrar um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |r^n - 0| < \varepsilon.$$

De fato, a distância,

$$|r^n - 0| = |r|^n = r^n < \varepsilon$$

deve ser menor que um erro máximo permitido. Para encontrar o valor de $N \geq N(\varepsilon)$, devemos resolver a desigualdade,

$$r^n < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n\ln(r) < \ln(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(r)} = N(\varepsilon).$$

pois $\ln(r) < 0$ quando $0 < r < 1$. Portanto, se

$$n > N \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(r)} \quad \Rightarrow \quad |r^n - 0| < \varepsilon$$

logo o exercício esta resolvido. $\Diamond$

Exercício 16. Provar que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$, sempre que $|r| < 1$.

Solução. Devemos recordar que dizer convergente significa possuir limite finito!. Para verificar se a sequência possui limite zero, primeiro supomos que $r \neq 0$. Para um $\varepsilon > 0$ dado, como agora $0 < |r| < 1$, temos que a função logarítmo, $\ln|r|$, esta bem definida e é não nulo, além disso,

$$|r^n - 0| = |r^n| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n\ln|r| < \ln(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|r|}$$

pois $\ln|r| < 0$ quando $|r| < 1$. Isto sugere escolher o número inteiro positivo $N \geq \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln|r|}$ e qualquer número natural n maior que N também satisfaz a Definição **??**. Isto é, para cada $\varepsilon >$ dado, existe o número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \geq \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|r|} \quad \Rightarrow \quad |r^n - 0| = |r^n| < \varepsilon.$$

O caso $r = 0$ é simples, a sequência é identicamente nula, isto é, todos seus termos são iguais a zero. Além disso, se os termos de sequência permanecem, a partir de uma certa ordem, constantes, então a sequência é convergente e seu limite é esse valor constante.

Teorema 1.5: Critério da Limitação

Se a sequência $\{x_n\}$ é convergente, então ela é limitada.

Prova

De fato, se $L = \lim_{n\to\infty} x_n$, então escolhendo $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se

$$n > N \quad \text{implica que} \quad |x_n - L| < 1$$

e considerando o valor máximo

$$M = \max\Big\{x_1,\ x_2, \dots x_N, 1 + |L|\Big\}$$

concluímos que

$$|x_n| = |x_n - L + L| \leq |x_n - L| + |L| < 1 + |L| < M, \quad n \geq 1,$$

e isso mostra o teorema. □

Corolário 1.2.0.1. *Uma sequencia $\{x_n\}$ que não é limitada não pode convergir.*

Exercício 17. Estudar a convergência ou divergência das séries

(a) $x_n = n \quad n \geq 1$ (b) $y_n = \ln(n) \quad n \geq 1$

Solução. As sequencias dadas nos itens (a) e (b) são não limitadas, logo aplicando o Corolário 1.2.0.1 nao convergem. ◊

Teorema 1.2.1. *Considere uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$, cujos termos $a_n \geq 0$, não negativos, e existe seu limite $L \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \to L$. Então $L \geq 0$.*

Prova. Suponhamos que $L < 0$, logo para a escolha de $\varepsilon = -L/2$, existe um número $N \in \mathbb{N}$ onde $N \geq N(\varepsilon)$, tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon = -\frac{L}{2}, \quad n > N$$

em particular para o termo a_{N+1} temos

$$|a_{N+1} - L| < \varepsilon = -\frac{L}{2}, \quad n > N$$

e isso implica que

$$a_{N+1} - L < -\frac{L}{2} \quad \text{ou} \quad 0 \leq a_{N+1} < \frac{L}{2}$$

onde a última desigualdade implica que $L > 0$, contradizendo a hipótese. Portanto obtemos $L \geq 0$. □

Corolário 1.2.1.1. *Se $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então $L > 0$.*

Prova. Seguir o mesmo raciocínio do teorema anterior. □

Alguns limites especiais permitem obter outros resultados com ajuda do seguinte Teorema

Teorema 1.2.2 (Comparação)**.** *Sejam as sequências $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ e $\{b_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ que satisfazem,*

$$|a_n| \leq b_n \quad \textit{para todo} \quad n \geq 1 \quad \textit{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Prova. Pela hipótese, convergência da sequência $\{b_n\}$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon) > 0$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |b_n - 0| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Faremos enfâse de utilizar o mesmo N da implicação (1.4) para a sequência $\{a_n\}$, isto é

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - 0| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Para justificar a afirmação (1.5) suponha que $n > N$ e utilize a hipótese $b_n > 0$ e a afirmação (1.4), logo

$$|a_n - 0| \leq b_n = |b_n - 0| < \varepsilon.$$

Portanto a relação (1.5) é verdadeira e $a_n \to 0$ quando n vai ao infinito. □

Exercício 18. Considere a sequência $\{c_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ tal que $c_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Mostre a convergência.

Solução. Fazendo um gráfico 2D podemos afirmar intuitivamente que converge para zero. Para mostrar, utilizamos o teorema anterior, tomando $c_n = a_n = (-1)^n/n^2$ e $b_n = 1/n$. Assim sendo, temos satisfeitas as hipóteses do teorema,

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} = b_n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

de maneira que podemos concluir,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0,$$

pelo resultado do teorema anterior. ♢

Exercício 19. Considere uma sequência $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n}{n + 4\sqrt{n}}\right\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$. Mostre que possui limite L.

Solução. Pelo comportamento de seus termos, podemos afirmar que $L = 2$. Para mostrar, é suficiente a seguinte estimativa

$$\left|\frac{2n}{n+4\sqrt{n}} - 2\right| = \left|\frac{-8n}{n+4\sqrt{n}}\right| < \frac{8\sqrt{n}}{n} = \frac{8}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq 1$$

Portanto usamos o teorema da comparação para concluir o exemplo. $\Diamond$

Da forma como esta enunciado o Teorema da Comparação pode somente mostrar que o limite de alguma expressão é zero. A seguinte formulação nos permite que o Teorema seja aplicado com maior generalidade.

Teorema 1.2.3. *Seja $\{g_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ uma sequência qualquer. Então*

$$\lim_{n\to\infty} g_n = G \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |g_n - G| = 0.$$

Prova. A conclusão do teorema significa, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad ||g_n - G| - 0| < \varepsilon.$$

Porém, isso é precisamente a definição de limite, $\lim g_n = G$, logo

$$||g_n - G| - 0| = |g_n - G| \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

com isso fica mostrado o teorema. $\square$

Exercício 20. Seja $\{d_n\}$ a sequência das aproximações decimais de $\sqrt{3}$ onde $d_o = 1$; $d_1 = 1,7$; $d_2 = 1,73; \ldots$ Demonstre que $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \sqrt{3}$.

Solução. Usando o teorema anterior, temos a seguinte equivalência,

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |d_n - \sqrt{3}| = 0$$

A afirmação da direita pode ser mostrada aplicando o teorema da comparação, pois observamos que,

$$|d_n - \sqrt{3}| < 10^{-n} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} 10^{-n} = \lim_{n\to\infty} 1/10^n = 0$$

Assim sendo, fazemos a identificação, $a_n = d_n - \sqrt{3}$ e $b_n = 10^{-n}$, obtemos,

$$\lim_{n\to\infty} |d_n - \sqrt{3}| = 0$$

e pela equivalência acima colocada, mostramos a aproximação da sequência $\{d_n\}$ para o número irracional $\sqrt{3}$. $\Diamond$

Exercício 21. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Solução. Escrevemos da seguinte maneira,

$$x_n = \sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \quad \text{onde} \quad h_n > 0$$

de maneira que,

$$n = (1 + h_n)^n.$$

Pelo Teorema do Binômio de Newton obtemos,

$$\begin{aligned} n = (1+h_n)^n &= 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots + h_n^n \\ &> \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \quad \text{para todo} \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

tal que

$$h_n^2 < \frac{2}{n-1} \quad \text{sempre que} \quad n \geq 2$$

isto é,

$$|h_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad \text{quando} \quad n \geq 2$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado, então

$$\begin{aligned} |h_n| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon \quad &\text{sempre que} \quad \frac{2}{n-1} < \varepsilon^2 \\ &\text{ou sempre que} \quad n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \end{aligned}$$

Para qualquer inteiro positivo maior que $N \geq N(\varepsilon) = \dfrac{2}{\varepsilon^2} + 1$, então

$$|h_n| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N$$

ou de outra maneira,

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Assim sendo, $\sqrt[n]{n} \to 1$ quando n vai ao infinito. $\Diamond$

Exercício 22. Mostre que sequência $\{x_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ definida por $x_n = r^n$ converge para zero se $|r| < 1$.

Solução. Se o valor absoluto $|r| < 1$, então existe um $h > 0$ tal que

$$|r| = \frac{1}{1+h}.$$

Também, como $h > 0$, então

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n,$$

$$\geq 1 + nh \quad \text{para todo} \quad n \geq 1$$

Portanto, temos a desigualdade,

$$|x_n| = |r^n| = |r|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+nh} \quad \text{para todo} \quad n \geq 1. \tag{1.6}$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado, então,

$$\frac{1}{1+nh} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{h} = N(\varepsilon) \tag{1.7}$$

A partir de (1.6) e (1.7) encontramos que se $N \in \mathbb{N}$ onde $N \geq N(\varepsilon)$, tal que

$$|x_n| = |r^n| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Portanto, a sequência $\{r^n\}$ converge para zero. ♢

1.2.3 Álgebra das Sequências

O seguintes teoremas incrementarão de maneira significativa nossa habilidade para calcular limites.

Teorema 1.2.4 (Desigualdade de Limites). *Suponhamos duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ reais e que satisfazem*

$$a_n \leq b_n \quad \textit{para todo } n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \textit{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = M.$$

Então temos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \leq M = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Prova. Suponhamos que $L > M$. Então para $\varepsilon = (L-M)/2 > 0$, existem os números inteiros positivos N_1 e N_2, tais que

$$n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \frac{L-M}{2}$$

$$n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n - M| < \frac{L-M}{2}$$

Considere o número $N = \max\{N_1,\ N_2\}$, então para $n = N+1 > N$ temos as seguintes afirmações

$$|a_{N+1} - L| < \frac{L-M}{2} \quad \text{e} \quad |b_{N+1} - M| < \frac{L-M}{2}$$

Apartir das estimativas acima deduzimos as seguintes desigualdades

$$-\frac{1}{2}(L-M) < a_{N+1} - L \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(L-M) > b_{N+1} - L$$

Assim sendo, obtemos,

$$a_{N+1} > \frac{1}{2}(L-M) \quad \text{e} \quad b_{N+1} < \frac{1}{2}(L-M).$$

Aplicando a propriedade transitiva, chegamos a uma contradição, $b_{N+1} < a_{N+1}$, a hipótese $a_n \leq b_n$ para $n \geq 1$. Portanto obtemos que $L \leq M$. □

Afirmação. O limite esta univocamente definido, isto é, uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes.

Justificativa. Suponha que $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ converge para dois limites distintos, L e M onde $L > M$. Verificando as hipóteses do teorema anterior, seja sequência $\{y_n\}$ igual a sequência $\{x_n\}$ isto é, $y_n = x_n$ para todo $n \geq 1$, isto permite interpretar a desigualdade $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq 1$. Logo pelo Teorema obtemos $L \leq M$. Isso contradiz a escolha de $L > M$. Portanto não pode existir dois limites diferentes de uma sequência real.

Definição 5

Sejam as sequências $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ e $\{b_n\} \subsetneq \mathbb{R}$. As sequências cujos n-ésimos termos sejam $a_n + b_n$ e $a_n b_n$ são respectivamente chamadas de **soma** e **produto** das sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Essas sequências são respectivamente denotadas pelos símbolos $\{a_n + b_n\}$ e $\{a_n b_n\}$.
Se $b_n \neq 0$ para qualquer n então a sequência cujo n-ésimo termo é $1/b_n$ é a **inversa** da sequência $\{b_n\}$ e a sequência cujo n-termo é $\{a_n/b_n\}$ é chamado do **quociente** da sequência $\{a_n\}$ pela sequência $\{b_n\}$. Essas sequências são denotadas por $\{1/b_n\}$ e $\{a_n/b_n\}$ respectivamente.
Também se K é um número real qualquer, a sequência cujo n-ésimo termo é Ka_n é chamada de **multiplo escalar** de $\{a_n\}$ pela constante K e é denotado pelo símbolo $\{Ka_n\}$.

O teorema dado a seguir estabelece as própriedades básicas para o limite de sequências. Permite a relação de duas sequência convergentes com sua soma, produto, etc. O número $\varepsilon > 0$ que aparece na definição de limite, sendo arbitrário, pode ser substituído por qualquer outra combinação $K\varepsilon$, sendo $K > 0$, sem perturbar a generalidade da definição.

Teorema 1.2.5 (Álgebra de Limites)**.** *Sejam $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ e $\{b_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ duas sequências convergentes e K um número real qualquer. Então*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} K = K$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (Ka_n) = K \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *se* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^P = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^P, \quad P \in \mathbb{R}$

(g) $\lim_{n\to\infty} P^{a_n} = P^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}, \quad P \in \mathbb{R}$ (h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}, \quad a_n \geq 0.$

Prova. Faremos algumas demonstrações, iniciamos pelo item (c). Considere $L \in \mathbb{R}$ o limite da sequência $\{a_n\}$; para $\varepsilon/2 > 0$, existe $N_1 \geq N_1(\varepsilon/2)$ tal que

$$n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon/2.$$

Seja $M \in \mathbb{R}$ o limite da sequência $\{b_n\}$; para $\varepsilon/2 > 0$, existe $N_2 \geq N_2(\varepsilon/2)$ tal que

$$n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n - M| < \varepsilon/2.$$

Escolher o número $N = \max\{N_1,\ N_2\}$. Portanto para

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |(a_n + b_n) - (L + M)| = |a_n - L + b_n - M|$$

$$\leq |a_n - L| + |b_n - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Assim sendo, para cada $\varepsilon > 0$ existe o inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |(a_n + b_n) - (L + M)| < \varepsilon$$

e pela definição de limite teremos,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

Para o item (d) supomos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = M$$

Devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, podemos fazer a diferença bem pequena,

$$|a_n b_n - LM| < \varepsilon.$$

Mas, observe que

$$a_n b_n - LM = a_n b_n - L b_n + L b_n - LM = (a_n - L) b_n + L(b_n - M),$$

e o problema estará resolvido se pudermos fazer,

$$|(a_n - L) b_n| < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad |L(b_n - M)| < \varepsilon/2$$

Para cada $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro positivo $N_1 \geq N_1(\varepsilon)$ tal que,

$$n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2|L| + 1}$$

Por outro lado,

$$b_n = b_n - M + M \quad \Rightarrow \quad |b_n| \leq |M| + |b_n - M|$$

Assim sendo, temos que para

$$n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n| \leq |M| + |b_n - M| < |M| + \frac{\varepsilon}{2|L|+1} = T$$

Observamos que $T > 0$, logo para cada $\dfrac{\varepsilon}{2T} > 0$ existe um número inteiro positivo $N_2 \geq N_2(\varepsilon)$ tal que,

$$n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2T}.$$

Escolha o número $N = \max\{N_1,\ N_2\}$, suponhamos que $n > N$ logo temos,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &= |(a_n - L)b_n + L(b_n - M)| \leq |a_n - L||b_n| + |L||b_n - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2T}T + |L|\frac{\varepsilon}{2|L|+1} = \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{|L|}{2|L|+1}\right) \\ &< \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim para cada $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n b_n - LM| < \varepsilon$$

logo pela definição de limite,

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = LM = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

Nota. Se o número $L \neq 0$ então a estimativa

$$|b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2|L|+1} \quad \text{pode ser trocada por} \quad |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2|L|}$$

Em geral escolhemos,

$$|b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2|L|+1}$$

para evitar uma divisão por zero.

Finalmente o item (5). A ideia é mostrar o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad \text{sempre que} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0. \tag{1.8}$$

Portanto o item (5) resulta de aplicar o item (4) e a relação (1.8), isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}.$$

Seja $M \in \mathbb{R}$ o limite da sequência $\{b_n\} \subsetneq \mathbb{R}$; para cada $\varepsilon > 0$ devemos fazer que a diferença,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| < \varepsilon.$$

Por outro lado estudando a diferença,

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} = \frac{M - b_n}{b_n\, M}$$

mostra que devemos fazer o numerador $|M - b_n|$ bem pequeno e o denominador $|b_n\, M|$ não muito pequeno.

Começamos fazendo estimativas para o denominador. Como $|M| > 0$, existe o número inteiro positivo $N_1 > 0$ tal que

$$n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n - M| < \frac{|M|}{2}$$

Por outro lado a desigualdade anterior implica,

$$||b_n| - |M|| \leq |b_n - M| < \frac{|M|}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{|M|}{2} < |b_n| - |M| < \frac{|M|}{2}$$

Logo obtemos, para,

$$n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n| > \frac{|M|}{2}$$

Multiplicando ambos os lados da conclusão anterior por $|M| > 0$, teremos,

$$n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n\, M| > \frac{|M|^2}{2}$$

esta última desigualdade evitará que $|b_n\, M|$ se torne muito pequena.

Para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe o número inteiro positivo $N_2 > 0$ tal que,

$$n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |M - b_n| < \frac{1}{2}|M|^2\varepsilon.$$

Escolher o número $N = \max\{N_1, N_2\}$ e suponha que,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|M - b_n|}{|b_n\, M|} < \frac{1}{|b_n\, M|}\frac{1}{2}M^2\varepsilon < \frac{1}{2}M^2\varepsilon \cdot \frac{2}{|M|^2} = \varepsilon$$

Portanto a própriedade esta provada. □

Teorema 1.2.6. *Se o limite* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ *e* $L \neq 0$*, então existe um número positivo* $k > 0$ *e um inteiro positivo* $N \in \mathbb{N}$ *tal que,*

$$|x_n| > k \quad \textit{sempre que} \quad n > N$$

Prova. Como $L \neq 0$, podemos tomar $\varepsilon = |L|/2 > 0$ e pelo fato que $x_n \to L$, existe um número $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - L| < \varepsilon$$

Por outro lado temos,

$$|L| = |L - x_n + x_n| \leq |x_n - L| + |x_n| < \varepsilon + |x_n| \quad \text{sempre que} \quad n > N \tag{1.9}$$

Da equação (1.9), obtemos,

$$|x_n| > |L| - \varepsilon \quad \text{implica} \quad |x_n| > |L| - |L|/2 = \frac{|L|}{2} \quad \text{sempre que} \quad n > N$$

Assim sendo, encontramos um número $k = |L|/2 > 0$ e um inteiro positivo N, tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n| > k$$

e logo o teorema esta mostrado. □

Observação 5. *Tomando* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$ *e* $P = 1/2$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -2 \quad \Rightarrow \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{1/2} = (-2)^{1/2} = \sqrt{-2}, \qquad \textit{não existe.}$$

Nesse caso não é válida a propriedade seis.

Corolário 1.2.6.1. *Temos dois enunciados importantes,*

(a) *Se* $a_n < b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, *então* $L < M$*;*

(b) *Se* $a_n \leq K$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, *então* $L \leq K$.

Prova. Pela própriedade da diferença temos,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = M - L$$

Como $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $b_n - a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por um corolário do Teorema 1.2.1, temos,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad M - L > 0$$

de maneira que $L < M$. □

Antes de prosseguir temos uma questão importante: será que uma sequência pode ter mais de um limite? Se a resposta "sim" um símbolo como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{4n}$ poderia representar muitos números diferentes, uma situação muito confusa. Felizmente a resposta é "não".

Teorema 1.2.7 (Unicidade)**.** *O limite de uma sequência se existe é unico.*

Prova. Suponhamos que existam dois limites L_1 e L_2,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = L_2$$

Pela hipótese temos as seguintes desigualdades, para um $\varepsilon > 0$ dado,

$$|u_n - L_1| < \varepsilon/2 \quad \text{quando} \quad n > N \geq N(\varepsilon/2)$$

$$|u_n - L_2| < \varepsilon/2 \quad \text{quando} \quad n > M \geq M(\varepsilon/2).$$

Então se $n > \max\{N, M\}$ e para qualquer $\varepsilon > 0$ temos,

$$0 \leq |L_1 - L_2| = |L_1 - u_n + u_n - L_2| < |L_1 - u_n| + |u_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aplicando a seguinte propriedade: Para qualquer $\varepsilon > 0$ e o número $a \in \mathbb{R}^+$ com $a < \varepsilon$ então $a = 0$. Obtemos que $|L_1 - L_2| = 0$, então $L_1 = L_2$. Portanto o limite é único. □

Nota. Com as propriedades apresentadas no Teorema 1.2.5 fica mais fácil o cálculo de limites, não é mais necessário introduzir a função extensão f, a menos que se faça referência às suas própriedades analíticas: continuidade, derivabilidade etc.

Exercício 23. Calcular o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n}{4n^2 + 1}$$

Solução. Quando n é grande o termo dominante do numerador é $3n^2$ e no denominador $4n^2$ de maneira que podemos esperar o limite igual $3n^2/4n^2 = 3/4$. Um procedimento simples nos permite demonstrar isso, utilizando o Teorema da igualdade de limites. Divida o numerador e o denominador da sequência dada por n^2. Dito de outra forma, coloque em evidência o termo de maior grau, resultando

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n}{4n^2 + 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 1/n}{4 + 1/n^2} = \frac{\lim(3 - 1/n)}{\lim(4 + 1/n^2)} \\ &= \frac{\lim 3 - \lim 1/n}{\lim 4 + \lim 1/n^2} = \frac{\lim 3 - \lim 1/n}{\lim 4 + (\lim 1/n)^2} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

O procedimento ficará melhor esclarecido, calculamos os limites do numerador e do denominador separadamente. Para o denominador, cuidando que não seja nulo, temos

$$\lim_{n\to\infty} (4 + 1/n^2) = \lim_{n\to\infty} 4 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 4 + 0 = 4 \neq 0.$$

Para o numerador , temos,

$$\lim_{n\to\infty} (3 - 1/n) = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3.$$

Assim obtemos o limite da sequência dada. ◊

Exercício 24. A área sob o gráfico de $f(x) = mx$ limitado pelas retas $x = 0$ e $x = b$ é um triângulo de base b e altura $h = mb$. Construir uma soma S_n que aproxima a área triangular pela soma de áreas de rectângulos externos. Isto é, calcular $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Solução. A seguinte soma, chamada de Riemann,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{k} f\left(k\frac{b}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{k}\frac{m\,bk}{n} = \frac{mb^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{mb^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{bh}{n^2}\frac{n(n+1)}{n} \qquad \text{pois} \qquad h = mb$$

fornece a soma das áreas dos retângulos externos à área da região triangular. Podemos calcular também de maneira semelhante a soma das áreas do retangulos inscritos.

Agora tomando limites a ambos lados e aplicando o Teorema da igualdade de limites obtemos,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim\left(bh\frac{n(n+1)}{2n^2}\right) = bh\lim\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$= bh\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = bh\left[\lim\frac{1}{2}+\lim\frac{1}{2n}\right]$$

$$= bh\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim\frac{1}{n}\right] = bh\left(\frac{1}{2}+0\right) = \frac{1}{2}bh.$$

Assim obtemos a aproximação desejada. ♢

Observação 6. *Ápos uma leitura cuidadosa do Teorema da Álgebra de limites, as fórmulas de (1) ao (4) se aplicam somente se as sequências do lado direito convergem; assim, a cadeia de igualdades acima não parece justificada. No entanto, uma vez terminada, a cadeia pode ser justificada começando por seu fim e percorrendo-a em sentido contrário, observando que em cada passo as sequências apresentadas convergem realmente. Por exemplo já foi mostrado que* $\lim\frac{1}{n}$ *existe, de maneira que podemos concluir que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad ou \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2 = 0$$

Exercício 25. Defina uma sequência $\{a_n\}$ por recorrência da seguinte maneira

$$a_o = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+13}{2a_n}.$$

Supondo que a sequência $\{a_n\}$ converge, encontre seu limite.

Solução. Suponhamos que $\{a_n\}$ converge para L, isto é, $\lim a_n = L$ então segue também que $\lim a_{n+1} = L$ (exercício no fim da seção). Portanto, tomando limites na relação de recorrência da sequência temos,

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\frac{a_n^2+13}{2a_n} = \frac{\lim a_n^2+13}{2\lim a_n}$$

$$= \frac{(\lim a_n)^2+13}{2\lim a_n} = \frac{L^2+13}{2L}.$$

Isso fornece uma equação para L,

$$L = \frac{L^2 + 13}{2L} \quad \text{ou} \quad 2L^2 = L^2 + 13 \quad \text{ou} \quad L^2 = 13 \quad \text{ou} \quad L = \pm\sqrt{13}.$$

Determinamos o sinal como segue, como $a_o = 1$ todos os demais termos $a_n > 0$ são positivos para todo n. Então aplicando o Teorema da desigualdade $L = \lim a_n \geq 0$, logo $L = \sqrt{13}$ ficando descartado o valor negativo. $\Diamond$

Este último exemplo mostra que o Teorema sobre igualdade de limites possuem uma natureza restrita; supondo que alguns limites existem, outros podem ser deduzidos a partir deles. Outra característica deste exemplo é que não temos pelo momento a demostração de que $\{a_n\}$ converge e portanto os cálculos dependem da demostração de convergência.

Teorema 1.2.8. *Considere a sequência $\{x_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ que converge para zero e $\{y_n\}$ uma sequência limitada (convergente ou não), então a sequência $\{x_n \cdot y_n\}$ converge para zero.*

Prova. Seja $\varepsilon > 0$ dado, existe um inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - 0| < \varepsilon.$$

Por outro lado temos que existe uma constante positiva $K > 0$ tal que,

$$|y_n| \leq K \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

em particular a limitação é válida para índice $n > N$ e assim sendo, teremos,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n \cdot y_n - 0| = |x_n \cdot y_n| = |x_n||y_n| < K\varepsilon.$$

Nota. Reparemos que a sequência $\{y_n\}$ é limitada, é possível que seja convergente ou não, por essa razão não usamos a própriedade do limite do produto das sequências envolvidas.

Exercício 26. Considere a sequência $\{x_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ definida por

$$x_n = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n\pi + 5) + \frac{7}{2^n}$$

Encontre seu limite.

Solução. Podemos descompor o termo geral da seguinte maneira

$$x_n = a_n b_n + 7c_n \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \operatorname{sen}(n\pi + 5), \quad c_n = \frac{1}{2^n}$$

Vejamos o comportamento da cada termo geral das sequências envolvidas. A sequência $\{a_n\}$ converge para zero; a sequência $\{b_n\}$ é limitada, embora não seja convergente; a sequência $\{c_n\}$ também converge para zero, de maneira que a sequência original tem limite zero. Isto é,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n + 7c_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n + 7 \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

Exercício 27. Determinar se a sequência $\left\{n \text{ sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right\}$ é convergente ou divergente.

Solução. Tomando limite obtemos;

$$\lim_{n\to\infty} n\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(\pi/n)}{1/n}.$$

Fazendo a mudança de variável $x = 1/n$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(\pi/n)}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(\pi x)}{x} = \lim_{\pi x\to 0} \pi \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} = \pi \lim_{\pi x\to 0} \frac{\text{sen}\,\pi x}{\pi x} = \pi$$

Portanto a sequência dada é convergente. $\Diamond$

1.2.4 Sequências Divergentes ao Infinito

Definição 1.2.1. Dizemos que uma sequência $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ diverge para $+\infty$ se verificarmos o seguinte; se para cada número positivo $M \gg 0$, ($M \in \mathbb{R}$ muito grande), existe um número inteiro positivo $N \geq N(M)$ tal que

$$n > N \qquad \text{então} \qquad a_n > M.$$

Em símbolos, representamos assim,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{ou simplesmente} \quad a_n \to +\infty$$

Definição 1.2.2. Dizemos que uma sequência $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ diverge para $-\infty$ se verificarmos o seguinte; se para cada número $M \gg 0$ (bem grande), existe um número inteiro positivo $N \geq N(M)$ tal que

$$n > N \qquad \text{então} \qquad a_n < -M.$$

Em símbolos, representamos,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{ou simplesmente} \quad a_n \to -\infty$$

Uma sequência $\{x_n\}$ a qual diverge ou para $+\infty$ ou para $-\infty$ é denotada de sequência divergente.

Exercício 28. Considere as seguintes sequências e comente a sua divergência

(a) $\{2,\ 4,\ 6,\ \ldots, 2n, \ldots\}$
(b) $\{3,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots, 3^n, \ldots\}$
(c) $\{x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots, x^n, \ldots\}, \quad x > 1$
(d) $\{3,\ 6,\ 9,\ \ldots, 3n, \ldots\}$

Solução. Todas as sequências dadas divergem para $+\infty$.

Exercício 29. Considere as seguintes sequências comente a sua divergência.

(a) $\{-2,\ -4,\ -6,\ \ldots, -2n, \ldots\}$
(b) $\{-3,\ -3^2,\ -3^3,\ \ldots, -3^n, \ldots\}$
(c) $\{-x,\ -x^2,\ -x^3,\ \ldots, -x^n, \ldots,\} \quad x > 1$
(d) $\{-3,\ -6,\ -9,\ \ldots, -3n, \ldots\}$

Solução. Todas as sequências dadas divergem para $-\infty$.

Exercício 30. Mostre que as seguintes sequências são divergentes para $+\infty$ ou $-\infty$,

(a) $\{n\}_{n\geq 1}$

(b) $\left\{n^2\right\}_{n\geq 1}$

(c) $\{-2n+10\}_{n\geq 1}$

(d) $\{6n+8\}_{n\geq 1}$

(e) $\left\{\dfrac{n-n^3}{n^2+1}\right\}_{n\geq 1}$

(f) $\{\ln(1/n)\}_{n\geq 1}$

Solução. Vejamos a primeira sequência, dado um real $M > 0$, escolhemos um número inteiro positivo $N \geq N(M)$ tal que $N > M$; suponhamos que

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad a_n = n > N > M.$$

e pela definição temos que, $a_n \to +\infty$.

Para o item (f); dado $M > 0$ devemos encontrar um número $N \geq N(M)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{n}\right) < -M$$

Mas isso é equivalente à,

$$\ln(n) > M \quad \text{implica} \quad n > \exp(M) \quad \text{sempre que} \quad n > N$$

Assim, se escolhemos $N \geq \exp(M)$, então é válida a seguinte afirmação

$$n > N \geq \exp(M) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{n}\right) < -M$$

As outras sequências passam pelo mesmo procedimento. Completar. $\Diamond$

Teorema 1.2.9. *Seja $f\colon [s,\ \infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, então a função restrição ou função sequência definida por $x_n = x(n) = f(n)$ com $n > s$, é convergente e seu limite é igual a L.*

Se o limite $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ então a sequência $\{x_n\}$ é divergente.

Prova. Usando a definição de limite no infinito para funções reais definidas em intervalos; para cada $\varepsilon > 0$ existe um número real $M \geq M(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretando para funções sequência; para o mesmo $\varepsilon > 0$ devemos de escolher o índice inteiro positivo $N \geq M$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |f(n) - L| < \varepsilon$$

logo o teorema esta mostrado. $\square$

Nota. Nos exercícios em que é possível usar o Teorema 1.2.9 o cálculo de limites de sequências é muito mais simples, pricipalmente quando se usam ferramentas de Cálculo como a regra de L´Hôpital.

Exercício 31. Seja a sequência $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ definida pela lei de formação,

$$x_n = \frac{\ln(n)}{n} \qquad \text{para todo} \qquad n \geq 1$$

Calcular o limite da sequência $\{x_n\}$.

Solução. Considere a função extensão f tal que

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \qquad \text{para} \qquad x > 0$$

Vejamos o que acontece sobre o seu limite no infinito. Pela regra de L´Hôpital resulta que,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

e pelo Teorema 1.2.9 concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Por conveniência ao aplicar a regra de L´Hôpital tratamos a variável discreta n, como uma variável contínua x e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = \text{ aplicar L´Hôspital } = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

sendo assim, o exemplo esta concluído. $\Diamond$

Exercício 32. Seja a sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$ definida pela lei de formação,

$$y_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 4n - 7}{-3n^3 + 7n} \qquad \text{para todo} \qquad n \geq 1$$

Calcular o limite da sequência $\{y_n\}$.

Solução. Temos que o termo geral uma função racional de n a sua convergência pode ser estudada utilizando o Teorema 1.2.9, colocando em evidência o termo de maior grau no numerador e no denominador. A função extensão g esta definida por

$$g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 4x - 7}{-3x^3 + 7x} = \frac{1 + 3/x + 4/x^2 - 7}{-3 + 7/x^2} \qquad \text{para todo} \qquad x \geq 1$$

e cada termo na expressão acima de $g(x)$ contendo potências de x no denominador tem limite zero, quando x vai ao infinito. Utilizando própriedades de limites para funções reais, concluímos que,

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\frac{1}{3}$$

portanto a sequência $\{y_n\}$ possui limite $L = -1/3$. $\Diamond$

1.2.5 Sequências Monótonas e Limitadas

Definição 1.2.3. Considerando a sequência $\{a\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ de números reais, dizemos que:

- não decrescente se, $a_n \leq a_{n+1}$, (monótona crescente) para todo $n \in \mathbb{N}$
+ estritamente crescente se, $a_n < a_{n+1}$, (crescente) para todo $n \in \mathbb{N}$
+ não crescente se, $a_n \geq a_{n+1}$ (monótona decrescente) para todo $n \in \mathbb{N}$
- estritamente decrescente se, $a_n > a_{n+1}$ (decrescente) para todo $n \in \mathbb{N}$

O seja a sequência de números reais,

$$\{x_n\} = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}$$

é não-decrescente se,

$$n > k \quad \text{implica} \quad a_n \geq a_k$$

e é não-crescente se,

$$n > k \quad \text{implica} \quad a_n \leq a_k$$

Nota. Se uma sequência $\{a\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ satisfaz uma e somente uma das definições anterio-res é chamada de sequência *monótona.*

Exercício 33. Verificar se as seguintes sequências de números reais são monótonas,

(a) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ (b) $\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ (c) $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$

(d) $\{0^n\}_{n\geq 1}$ (e) $\left\{\dfrac{1}{n}(-1)^{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ (f) $\left\{n^2\right\}_{n\geq 1}$

(g) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ (h) $\left\{\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}_{n\geq 1}$ (i) $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$

Solução. Faremos algumas considerações sobre as sequências dadas. A sequência (a) é estritamente decrescente; a sequência (b) é estritamente crescente; a sequência (c) não é monótona, isto é, não é não-decrescente nem não-crescente, seu termos são alternadamente positivos e negativos, por isso, recebe o nome de sequência alternada ou oscilante; a sequência (d) é não-crescente e não-decrescente; a sequência (e) não é monótona; a sequência (f) é estritamente crescente.

Para a sequência (g) utilizamos a técnica da comparação, comparando os termos x_{n+1} e x_n, isto é,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

isso implica que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \geq 1$. Portanto a sequência $\{x_n\}$ é estritamente crescente.$\Diamond$

Nota. A monotonia de algumas sequências pode ser atingida usando o sinal da derivada da função extensão para $\mathbb{R}^+$, isto é, defimos a função f com lei de formação,

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x \geq 1.$$

Calculando a derivada f' obtemos,

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

isto implica que a função f é não-decrescente, isto se reflete na função restrição x ou função sequência

$$x_n = x(n) \leq x(n+1) = x_{n+1}, \quad n \geq 1$$

Para resolver a sequência (h) usaremos a técnica da comparação entre os termos x_n e x_{n+1}, logo

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \\ &= \frac{n+1}{2n+1} < 1, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim sendo, a sequência $\{x_n\}$ é estritamente decrescente. Neste exemplo a função extensão f não é possível definir. $\Diamond$

Definição 6

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ é *limitada inferiormente* se e somente se, existe uma constante $k_1 \in \mathbb{R}$, chamada de cota inferior, tal que

$$k_1 \leq a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

é *limitada superiormente* se e somente se, existe uma constante $k_2 \in \mathbb{R}$, chamada de cota superior, tal que

$$a_n \leq k_2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

é *limitada* se e somente se, existem duas constantes ou cotas k_1 e k_2 em $\mathbb{R}$ tal que

$$k_1 \leq a_n \leq k_2 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 34. Mostre se as seguintes sequências de números reais possuem cota inferior, superior ou são limitadas,

(a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ (b) $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ (c) $\left\{n^2\right\}_{n\geq 1}$

(d) $\{-2n\}_{n\geq 1}$ (e) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ (f) $\{n\}_{n\geq 1}$

(g) $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ (h) $\left\{-n^3\right\}_{n\geq 1}$ (i) $\{\ln(n)\}_{n\geq 1}$

Solução. A seguir fornecemos respostas sucintas das sequências , o leitor deve completar os detalhes.

A sequência (a) é limitada, 0 cota inferior e 1 cota superior; a sequência (b) é limitada, -1 cota inferior e 0 cota superior; a sequência c) é limitado inferiormente e não superiormente; a sequência (d) não limitada inferiormente porém limitado superiormente; a sequência (e) é limitada, 0 cota inferior, 1 cota superior.

A sequência (f) não é limitada, 1 é cota inferior e não possui cota superior; a sequência g) é limitada possui cota inferior -1 e cota superior 1; a sequência h) não é limitada, possui cota superior -1 e não possui cota inferior, finalmente a sequência (i) não é limitada, possui cota inferior 0 e não tem cota superior. $\Diamond$

Nota. Podemos inferir que se k_2 for uma cota superior de uma sequência $\{x_n\}$, então qualquer número maior do que k_2 também será cota superior. De forma análoga, a sequência $\{x_n\}$ limitada inferiormente possue muitas cotas inferiores.

Definição 7: Infimo

e A é uma *cota inferior* de uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e se A possui a propriedade, que para cada cota inferior C de $\{a_n\}_{n\geq 1}$ temos que $C \leq A$, então A é chamada *máxima (maior) cota inferior* da sequência denotada por $\inf\{x_n\}$

Definição 8: Supremo

e B é uma *cota superior* de uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ e se B possui a propriedade, que para cada cota superior D de $\{a_n\}_{n\geq 1}$ temos que $B \leq D$, então B é chamada *mínima (menor) cota superior* da sequência denotada por $\sup\{x_n\}$

Nota. Devemos recordar que qualquer sequência, $\{x_n\}$ limitada superiormente possui supremo finito de forma semelhante toda sequência limitada inferiormente tem ínfimo finito. Dito de outra forma, para cada $\varepsilon > 0$, o número real $\beta = \sup\{x_n\} - \varepsilon$ é menor que o supremo da sequência, logo não pode ser cota superior, portanto, existe algum termo da sequência, x_{n_2} tal que,

$$\beta = \sup\{x_n\} - \varepsilon < x_{n_2}. \tag{1.10}$$

Para o ínfimo acontece algo semelhante. Seja $\gamma = \inf\{x_n\} + \varepsilon$ um número real, logo é maior do que o ínfimo da sequência $\{x_n\}$, então existe algum termos da sequência x_{n_3}, tal que,

$$\gamma = \inf\{x_n\} + \varepsilon > x_{n_3}. \tag{1.11}$$

Exercício 35. Comente em termos de supremo e ínfimo as seguintes sequências de números reais,

(a) $\{n\}$

(b) $\{2 - n^2\}$

(c) $\{(-1)^n\}$

(d) $\{1/n\}$

(e) $\{(-1)^n n\}$

(f) $\{n/(n+1)\}$

Solução. A sequência $\{x_n\} = \{n\}$, não é limitada superiormente, porém é limitada inferiormente e $\inf\{x_n\} = 1$. A segunda sequência denotada por $\{x_n\} = \{2 - n^2\}$ é limitada superiormente, porém não é inferiormente. Assim temos que o $\sup\{x_n\} = 1$.

A sequência (c) é limitada, e portanto temos que $\sup\{x_n\} = 1$ e $\inf\{x_n\} = -1$; por outro lado a sequência do item d) também é limitada sendo o $\inf\{x_n\} = 0$ e o supremo $\sup\{x_n\} = 1$. Repare que o $\inf\{x_n\} = 0$ não é um termo que pertence a sequência.

A sequência (e) não é limitada nem superiormente nem inferiormente, logo não existe nem supremo nem ínfimo. Finalmente a sequência (f) é limitada, isto é, existem dois números $k_1 = 1/2$ e $K = 1$

tal que,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

neste caso, o $\inf\{x_n\} = 1/2$, o supremo $\sup\{x_n\} = 1$ e não é um termo da sequência. $\Diamond$

Exercício 36. Seja $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ estritamente crescente e não limitada superiormente. Mostre que $a_n \to \infty$.

Solução. Pela hipótese, não esta limitada superiormente, então todo número $K > 0$ existe $N > 0$ tal que $a_N > K$.

Escolhendo $n > N$ e como $\{a_n\}$ é estritamente crescente, concluímos que $a_n > a_N$, portanto $a_n > K$. Assim pela definição, temos que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. $\Diamond$

Exercício 37. Quando $r > 1$. Mostre que a sequência $\{r^n\} \subset \mathbb{R}$ é divergente.

Solução. Podemos escrever $r = 1 + h$ onde $h > 0$, logo

$$r^n = (1+h)^n \geq 1 + nh, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Se mostramos a sequência formada pelo lado direito da desigualdade de Bernoulli (1.12), isto é,

$$\{1+nh\} = \{1+h,\ 1+2h,\ 1+3h, \ldots,\}$$

observamos que se trata de sequência estritamente crescente. Além disso ela limitada inferiormente não é limitada superiormente.

Para verificar a limitação inferior, fazemos,

$$1 < r \quad \Rightarrow \quad r^n < r \cdot r^n \quad \Leftrightarrow \quad r^n < r^{n+1}, \quad n \geq 1$$

logo obtemos,

$$r < r^2 < r^3 < r^4 < \cdots < r^n < \cdots$$

Assim sendo, é válida a relação,

$$r < r^n, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

Portanto, a sequência $\{r^n\}$ é limitada inferiormente, com cota inferior igual a r.

Para mostrar que não é limitada superiormente suponhamos que a sequência seja limitada superiormente, então existe $K > 0$ tal que

$$1 + nh \leq K \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{K-1}{h}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Porém dado qualquer real, neste caso $\frac{K-1}{h}$, sempre vai existir um número natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{K-1}{h} < m$. Com isto a sequência não é limitada superiormente.

Portanto aplicando o exemplo anterior, a sequência $\{1 + nh\}$ que é estritamente crescente e não limitada superiormente, diverge ao infinito, isto é, $1 + nh \to \infty$. Por outro lado

$$r^n \geq 1 + nh \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \Rightarrow \quad r^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

e assim obtemos que $\{r^n\}$ é divergente. $\Diamond$

O Teorema a seguir é fundamental, existem sequências limitadas que não possuem limites, portanto a condição "ser limitada" não garante a convergência. Entretanto, adicionando-se à limitação a condição de monotonia, fica assegurada a convergência. Esse fato é relatado no seguinte enunciado

Teorema 1.2.10 (Convergência Monótona)**.** *Toda sequência limitada e monótona é convergente. Se a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é estritamente crescente (ou estritamente decrescente), então*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_{n\geq 1} \qquad \textit{ou} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_{n\geq 1}.$$

Prova. Suponhamos que a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ seja estritamente crescente e limitada. Pelo axioma do completamento a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ possui uma *miníma cota superior* B. Para $\varepsilon > 0$, $B - \varepsilon$ não é uma cota superior, pois $B - \varepsilon < B$ e B é a mínima cota superior da sequência. Assim para algum inteiro,

$$N > 0, \qquad B - \varepsilon < a_N \tag{1.13}$$

Como B é a mínima cota superior de $\{a_n\}_{n\geq 1}$, então

$$a_n \leq B, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1.14}$$

Já sabemos que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência estritamente crescente, então

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{e, se} \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_N < a_n \text{ sempre que } n > N \tag{1.15}$$

Das relações anteriores (1.13)-(1.15) tem-se:

$$B - \varepsilon < a_N < a_n \leq B < B + \varepsilon \quad \text{ sempre que } \quad n > N$$

Assim

$$-\varepsilon < a_n - B < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - B| < \varepsilon \quad \text{ sempre que } \quad n > N$$

e assim concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = B.$$

Obtendo o que desejamos. Quando $\{a_n\}$ é estritamente decrescente e limitada, então $\{-a_n\}$ é estritamente crescente e limitada, de maneira que $\{-a_n\}$ converge, logo $\{a_n\}$ também converge. $\square$

Por exemplo a sequência de números reais,

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq 1} = \left\{2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4}, \ldots\right\} \to 1$$

é limitada e monótona (porque?). Após a verificação aplicando o Teorema 1.2.10 (Convergência Monótona) concluimos que é convergente.

Observação 7. *Seja uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ estritamente crescente e suponhamos que D é uma cota superior. Então $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq D$.*

Observação 8. *Seja uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é estritamente decrescente e suponhamos que C seja uma cota inferior. Então $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq C$.*

Exercício 38. Considere a seguinte sequência $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}$$

Mostre que é convergênte, usando o Teorema 1.2.10.

Solução. Vejamos que a sequência $\{x_n\}$ é monótona, usando o método de comparação,

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\\ &= \frac{n+1}{2n+1} < 1, \qquad \text{para todo} \qquad n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

a sequência $\{x_n\}$ é estritamente decrescente.

Para concluir que a sequência em questão converge, basta verificar que ela é limitada,

$$0 < x_n = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)} = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{n}{2n-1} \leq 1\cdot 1\cdots 1 = 1$$

provando-se que é limitada. Além disso, temos que o ínfimo, $\inf\{x_n\} = 0$, e pelo Teorema 1.2.10 concluímos que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)} = \inf\{x_n\} = 0$$

Exercício 39. Considere uma sequência definida recursivamente,

$$a_o = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2+13}{2a_n}.$$

Mostre que a sequência $\{a_n\}$ converge e $\lim a_n = \sqrt{13}$.

Solução. Utilizamos o Teorema da convergência monótona; para aplicá-lo mostraremos que,

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > 0 \quad \text{e} \quad L < a_n < M, \quad n \geq 1$$

Observamos que os termos da sequência possuem a própriedade,

$$a_n > 0 \quad \text{para cada} \quad n \geq 1.$$

A seguir mostramos o sinal da seguinte desigualdade

$$a_n^2 - 13 = \left(\frac{a_{n-1}^2 + 13}{2a_{n-1}}\right)^2 - 13 = \frac{a_{n-1}^4 + 26a_{n-2}^2 + 169}{4a_{n-1}^2} - 13$$
$$= \left(\frac{a_{n-1}^4 - 26a_{n-2}^2 + 169}{4a_{n-1}^2}\right) = \left(\frac{a_{n-1} - 13}{2a_{n-1}}\right)^2 > 0$$

e com isso obtemos que

$$a_n^2 - 13 > 0 \quad \text{logo} \quad a_n > \sqrt{13} \tag{1.16}$$

Com os resultados anteriores podemos dizer que existem dois números L e M tal que

$$L = \sqrt{13} < a_n < a_1 = 7 = M \quad \text{para} \quad n \geq 1,$$

e portanto a sequência é limitada, superior e inferiormente.

Finalmente para averiguar a monotonia, devemos pesquisar o sinal da seguinte expresão

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 + 13}{2a_n} = \frac{a_n^2 - 13}{2a_n} > 0.$$

aonde o numerador deste quociente é positivo pela relação (1.16).

Assim $a_{n+1} < a_n$ é estritamente crescente (monótona). Logo a sequência é convergente. $\Diamond$

Exercício 40. Mostre que a sequência $\{x_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ definida por

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

converge.

Solução. Vejamos o sinal da diferença,

$$x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{n+1+1} + \frac{1}{n+1+2} + \frac{1}{n+1+3} + \cdots + \frac{1}{n+1+n+1}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \quad n \geq 1.$$

logo a sequência $\{x_n\}$ é estritamente crescente. Também temos,

$$\begin{aligned} |x_n| &= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right| \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $|x_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim sendo, a sequência $\{x_n\}$ é limitada e monótona, logo é convergente. $\Diamond$

Exercício 41. Prove que a sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$ definida pela relação,

$$y_1 = 1, \quad y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}, \quad n \geq 2$$

converge.

Solução. Novamente da mesma maneira como no exemplo anterior,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right) \\ &= \frac{1}{n!} > 0 \quad \text{para todo} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

logo a sequência $\{y_n\}$ é estritamente crescente. Mostraremos que também é limitada.

Para $n \geq 2$ temos que $n! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n$ tem $n-1$ fatores, cada um dos quais é maior ou igual que dois, de maneira que,

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \text{para todo} \quad n \geq 2.$$

Portanto temos que,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{para todo} \quad n \geq 2.$$

tal que,

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \quad \text{sempre que} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Também, o primeiro termo $y_1 = 1 < 3$. Destes fatos concluímos que, $0 < y_n < 3$ para todo $n \geq 1$. Portanto a sequência $\{y_n\}$ é limitada.

Assim senso, a sequência $\{y_n\}$ é limitada e monótona, logo pelo teorema da convergência monótona, a sequência é convergente. $\Diamond$

Observação 9. *O limite do exemplo anterior é chamado de* $\mathbf{e}$. *O fato, é o que o seguinte limite,*

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\right]$$

é representado escrevendo assim,

$$\mathbf{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

O número $\mathbf{e}$ *é conhecido como número transcendental. Seu valor foi calculado com centenas de casas decimais. Para dez casas, temos,*

$$\mathbf{e} = 2,7182818284.$$

Exercício 42. Prove que o limite,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

existe e se encontra entre 2 e 3.

Solução. Aplicaremos o binômio de Newton para o termo,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Assim , obtemos a seguinte expansão,

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned} \tag{1.17}$$

a partir de (1.17), encontramos que,

$$\begin{aligned} 2 = 1 + 1 < x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 \quad \text{para todo} \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Por outro lado, temos que,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&> 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = x_n
\end{aligned}
$$

de maneira que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \geq 1$.

Assim sendo, a sequência $\{x_n\}$ é monótona e limitada inferiormente e superiormente por 3, logo pelo teorema da convergência monótona, el aé convergente. Isto é, existe o seguinte limite.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R}.$$

Também, como $2 < x_n < 3$ para todo $n \geq 1$, então,

$$2 \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq 3,$$

mostrando que o limite se encontra entre 2 e 3. $\Diamond$

Exercício 43. Prove que o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$$

existe e é igual ao número **e**.

Solução. Considere o termo w_n definido por,

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

logo, $w_n > 0$ para todo $n \geq 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \mathbf{e} > 0$.

Utilizando a o segundo teorema de Cauchy sobre limites,

$$\lim_{n\to\infty}(w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots w_n)^{1/n} = \mathbf{e}$$

existe seu valor é igual ao número **e**.

Por outro lados temos

$$
\begin{aligned}
(w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots w_n)^{1/n} &= \left[2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n} \\
&= \left[\frac{(n+1)^n}{n!}\right]^{1/n} = \frac{n+1}{n}\left[\frac{n^n}{n!}\right]^{1/n} \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

Por outro lado sabemos que o seguintes limites existem,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left[\frac{n^n}{n!}\right]^{1/n} = \mathbf{e}$$

portanto existe o limite do produto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}\left[\frac{n^n}{n!}\right]^{1/n}$$

e sera igual ao seguinte produto de limites,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\left[\frac{n^n}{n!}\right]^{1/n}$$

Assim sendo, temos que limite em questão existe,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n} = \mathbf{e}$$

e é igual ao número **e**. $\Diamond$

Teorema 1.2.11. *Toda sequência $\{x_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ não-decrescente e não limitada superiormente, diverge para $+\infty$.*

Prova. Seja a sequência $\{x_n\}$ não-decrescente que não seja limitada superiormente. Se $K > 0$ é um inteiro muito grande, existe um número positivo $N \geq N(K)$ tal que

$$x_m > K \quad \text{sempre que} \quad m > N$$

Por outro lado, como $\{x_n\}$ é não-decrescente, então,

$$x_n \geq x_m \quad \text{sempre que} \quad n > m.$$

Assim sendo, temos,

$$x_n \geq x_m > K \quad \text{sempre que} \quad n > m > N$$

e portanto $x_n \to +\infty$. $\square$

Teorema 1.2.12. *Uma sequência $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ monótona e convergente é limitada.*

Prova. Suponha uma sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ estritamente crescente e convergente; para $\varepsilon > 0$, dado existe um inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon, \quad \text{para} \quad n > N.$$

Portanto a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é limitada a partir de N. Para contemplar os outros termos excluídos, utilizamos a monotonia da sequência para afirmar a exitência de duas constantes

$$k_1 = \min\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_N,\ L-\varepsilon\} \quad \text{e} \quad k_2 = \max\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_N,\ L+\varepsilon\}$$

logo temos que

$$k_1 \leq a_n \leq k_2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

e com isso obtemos nossa afirmação. □

Nota. Uma maneira de utilizar o Teorema 1.2.12 para verificar que uma dada sequência não converge é mostrar que ela não é limitada. Por exemplo, as sequências $\{x_n\} = \{n\}$ e $\{y_n\} = \{-n\}$ não são limitadas, sendo, portanto, divergentes.

Observação 10. *A recíproca deste Teorema é falsa; sequência limitada não implica a convergência, como pode verificar-se considerando a seguintes sequências,*

$$\{c_n\} = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\} \quad e \quad \{x_n\} = \{(-1)^n\}$$

A sequências acima são limitadas,

$$|c_n| = \left|(-1)^n + \frac{1}{n}\right| < \frac{3}{2} \quad e \quad |x_n| = |(-1)^n| < 2$$

mas não são convergentes. Isto é, existem sequências que são limitadas e divergentes. Isto mostra a diferença entre ser limitada *(Definição* **??***) e* ter limite *(Definição* **??***).*

Exercício 44. Provar que a sequência $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, converge para o número dois.

Solução. Seja $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2a_1}, \cdots, a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, $n > 1$. Devemos mostrar que a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é não-decrescente e limitada superiormente por 2.

A prova será feita por indução matemática, isto é, devemos mostrar os seguintes fatos,

$$a_n \leq 2 \qquad \text{e} \qquad a_n \leq a_{n+1} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ponhamos em andamento a indução;

(i) Para $n = 1$, temos $a_1 = \sqrt{2} < 2$ e $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2a_1} = a_2$

(ii) Suponhamos para $n = h$, (hipótese inductiva) que

$$a_h \leq 2 \qquad \text{e} \qquad a_h \leq a_{h+1}.$$

(iii) Provaremos para $n = h+1$, que

$$a_{h+1} \leq 2 \qquad \text{e} \qquad a_{h+1} \leq a_{h+2}.$$

Com efeito $a_{h+1} = \sqrt{2a_h} \leq \sqrt{4} = 2$, resultado obtido usando $2a_h \leq 4$ da hipótese indutiva. logo obtemos $a_{h+1} \leq 2$. Por outro lado temos

$$a_{h+1} = \sqrt{2a_{h+1}} = \sqrt{2a_h} \leq \sqrt{2a_{h+1}} = a_{h+2}$$

pois $2a_h \leq 2a_{h+1}$ (hipótese indutiva). Portanto $a_{h+1} \leq a_{h+2}$.

Assim, a sequência converge para 2. $\Diamond$

Teorema 1.2.13 (Teorema do Hambúrger). *Considere três sequências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ reais, tais que*

(a) *para algum* $q \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c_n \leq b_n$ *sempre que* $n \geq q$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

então

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Prova. Seja $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, existe $N_1 > 0$ tal que

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon, \quad \text{quando} \quad n > N_1$$

e para $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$, existe $N_2 > 0$ tal que

$$L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon, \quad \text{quando} \quad n > N_2.$$

Considere $N = \max\{N_1, N_2\}$, então

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon, \quad \text{quando} \quad n > N.$$

Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$. $\square$

Exercício 45. Considere a sequência $\{x_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ tal que

$$x_n = \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \quad \text{para todo} \quad n \geq 1$$

Provar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Solução. Temos por propriedade, a função seno é limitada, isto é,

$$-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Além disso pelo Teorema do Hambúrger, os limites, $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0.$$

Isso conclui afirmação. $\Diamond$

1.2.6 Subsequências de Números Reais

Dada a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ podemos obter uma subsequência escolhendo elementos da sequência *sem alterar a sua ordem.* Precisamente, sejam $n(1)$, $n(2)$, $n(3), \ldots, n(k), \cdots$ números naturais tais que

$$n(1) < n(2) < n(3) < \cdots < n(k) < \cdots$$

dito de outra forma, a sequência de inteiros positivos tal que se

$$i > j \qquad \text{então} \qquad n(i) > n(j),$$

então o novo conjunto,

$$\{a_{n(k)}\}_{k\geq 1} = \{a_{n(1)},\ a_{n(2)},\ a_{n(3)},\ a_{n(4)}, \cdots,\ a_{n(k)},\ \cdots\}$$

é chamado de subsequência da sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

$$\begin{aligned} \{a_n\} &= \{a_1,\ \ldots,\ a_{n(1)},\ a_{n(1)+1},\ \ldots,\ a_{n(2)},\ \ldots,\ \ldots a_{n(k)}, \ldots\ldots\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots\ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots \\ \{a_{n_k}\} &= \{\ldots\ldots\ldots a_{n(1)}, \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n(2)}, \ldots\ldots\ldots a_{n(k)}, \ldots\ldots\} \end{aligned}$$

A condição $i > j$ então $n_i > n_j$ expressa o fato que a ordem de aparição dos termos na subsequência é a mesma que na sequência. Vejamos este fato nos seguintes exemplos, as sequências,

$$\{1,\, 3,\, 5,\, 7 \ldots\} \quad \text{e} \quad \{2,\, 4,\, 6,\, 8 \ldots\}$$

são subsequências da sequência $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots\}$

Por outro lado a sequência $\{4,\ 2,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$ não é uma subsequência $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$ pois a ordem em que aparecem o número 4 e o número 2 na sequência $\{4,\ 2,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$ não é o mesmo que na sequência $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$.

Após este raciocínio podemos facilmente dizer que qualquer subsequência de uma subsequência $\{a_{n_k}\}$ de uma sequência $\{a_n\}$ é também uma subsequência de $\{a_n\}$.

De maneira analítica podemos dizer da seguinte forma. Uma sequência é uma função,

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \quad n \mapsto a(n) = a_n.$$

Por outro lado se construimos uma função, estritamente crescente,

$$N\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad k \mapsto N(k) = n(k) = n_k,$$

logo podemos pensar em uma nova função, a composta,

$$\begin{aligned} a \circ N\colon \mathbb{N} &\xrightarrow{N} \mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R} \\ k &\mapsto n_k \mapsto a(n_k) = a_{n_k}, \end{aligned}$$

e que será chamada de subsequência da sequência $\{a_n\}$ e será denotada por

$$a \circ N = \{a_{n_k}\}_{k\geq 1}.$$

onde a função N garante que os termos da sequência $\{a_n\}$ permanecerão.

Em conclusão uma subsequência é um subconjunto infinito de uma sequência de números reais, isto é,

$$\{a_{n_k}\}_{k\geq 1} \subset \{a_n\}$$

onde $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ é uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos.

Exercício 46. Sejam a sequências $x = \{1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1, \cdots\}$ de reais e $N = \{n_k\}$ onde $n_k = n(k) = 2k-1$ para $k \in \mathbb{N}$. Encontre a subsequência correspondente.

Solução. Temos que fazer a composta de x e N para criar a subsequência

$$x \circ N = \{x_{n_k}\} = \{x(n_k)\}_{k\geq 1} = \{x(2k-1)\}_{k\geq 1} = \{x_1,\ x_3,\ x_5, \ldots\} = \{1,\ 1,\ 1,\ \ldots\}$$

Portanto, temos que $x \circ N$ é uma subsequência de x. $\Diamond$

Exercício 47. A sequência infinita de números reais,

$$\{x_{n_k}\}_{k\geq 1} = \{2k\}_{k\geq 1} = \{2,\ 4,\ 6, \cdots\}$$

é uma subsequência de

$$\{x_n\}_{n\geq 1} = \{n\}_{n\geq 1} = \{1,\ 2,\ 3, \cdots\}.$$

onde $N = \{n_k\} = \{n(k)\} = \{2k\}$, logo a função composta $x \circ N$ é dada por

$$x \circ N = \{x_{n_k}\} = \{2k\}$$

Exercício 48. A sequência infinita de números reais,

$$\{x_{n_k}\}_{k\geq 1} = \{(-1)^{2k}\}_{k\geq 1} = \{1,\ 1,\ 1, \cdots\}$$

é uma subsequência, resultado da composta $x \circ N$ onde $N = \{n_k\} = \{2k\}$, da sequência

$$\{x_n\}_{n\geq 1} = \{(-1)^n\}_{n\geq 1} = \{-1,\ 1,\ -1,\ 1, \cdots\}.$$

Exercício 49. Considere a sequências $x = \{x_n\} = \{\sqrt{n}\}$ e $N = \{n_k\} = \{k^4\}$. Encontre uma subsequência da sequência $\{x_n\}$.

Solução. Para encontrar a subsequência solicitada, fazemos a composta das funções sequência x e N,

$$x \circ N = \{x_{n_k}\} = \{\sqrt{k^4}\} = \{k^2\}.$$

Assim sendo, a subsequência solicitada é $\{x_{n_k}\} = \{k^2\}_{k\geq 1}$ $\Diamond$

Exercício 50. Sejam as sequências infinitas de números reais,

(a) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$ (b) $\{3(-1)^n + 1\}$

Obtenha pelo menos duas subsequências de cada sequência.

Solução. Pela definição de subsequência, temos as seguintes sequências de números inteiros positivos, definidas por

$$n_k = n(k) = 2k \qquad \text{e} \qquad n_k = n(k) = 2k-1,$$

estritamente crescentes respectivamente.

Com essas sequências formamos as subsequências requeridas,

$$a_{n_k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$$

$$a_{n_k} = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1}$$

e também as outras,

$$a_{n_k} = 3(-1)^{2k} + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_{n_k} = 3(-1)^{2k-1} + 1 = -3 + 1 = -2.$$

e com isso mostramos o que desejávamos. $\Diamond$

Exercício 51. Escrever uma sequência infinita de números reais, que possua três subsequências que convirjam para limites diferentes.

Solução. Consideremos a seguinte sequência $\{a_n\}$ onde

$$\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}_{n\geq 1} = \{0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1, \ldots,\}$$

observamos que seu valores oscilam entre oas valores -1, 0 e 1. Baseados nesse comportamento podemos construir sequências estritamente crescentes de inteiros positivos

$$\{n_k\}_{k\geq 1} = \{4k\}_{k\geq 1} = \{4, 8, 12, \cdots\}, \quad \{n_k\}_{k\geq 1} = \{4k+1\}_{k\geq 1} = \{5, 9, 13, \cdots\}$$

$$\{n_k\}_{k\geq 1} = \{4k+2\}_{k\geq 1} = \{6, 10, 14, \cdots\},$$

e assim obtemos as subsequências

$$\{a_{n_k}\}_{k\geq 1} = \left\{\cos\frac{4k\pi}{2}\right\}_{k\geq 1} = \{1, 1, \cdots\},$$

$$\{a_{n_k}\}_{k\geq 1} = \left\{\cos\frac{(4k+1)\pi}{2}\right\}_{k\geq 1} = \{0, 0, \cdots\}$$

$$\{a_{n_k}\}_{k\geq 1} = \left\{\cos\frac{(4k+2)\pi}{2}\right\}_{k\geq 1} = \{-1, -1, \cdots\}.$$

Finalmente para mostrar as convergências devemos aplicar limites,

$$\lim_{k\to\infty} \cos\frac{4k\pi}{2} = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} \cos\frac{(4k+1)\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \cos\frac{(4k+2)\pi}{2} = -1,$$

e com isso mostramos o que desejávamos. $\Diamond$

Teorema 1.2.14. *Se a sequência $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ converge para L. Então toda subsequência da sequência $\{a_n\}$ também converge para limite L.*

Prova. Seja $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ a sequência convergente e suponhamos que L seja seu limite. Pela definição de convergência temos que para cada $\varepsilon > 0$ existirá um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - L| < \varepsilon.$$

Pela hipótese, consideramos uma subsequência $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ da sequência convergente, então tomando K tal que $n(K) = n_K > N \geq N(\varepsilon)$ concluímos que se $k > K$, então

$$n_k > n_K > N \geq N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_{n_k} - L| < \varepsilon$$

e disto segue o nosso resultado. $\square$

Corolário 1.2.14.1. *Todas as subsequências de uma sequência convergente convergem para o mesmo limite.* $\triangle$

Observação 11. *O Teorema e seu Corolário anterior podem ser utilizados como um critério para averiguar a divergência de uma sequência, isto é, se encontrarmos duas subsequências que convirjam para limites diferentes então a sequência será divergente.*

Por se tratar de um resultado útil no estudo da convergência de uma sequência apresentamos o enunciado do seguinte teorema

Teorema 1.2.15. *Uma sequência $\{x_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ converge para $L \in \mathbb{R}$ se e somente se, as subsequências $\{x_{2k}\}$ e $\{x_{2k-1}\}$ convergem para L.*

Exercício 52. Utilize o resultado anterior para mostrar que a sequência $\{(-1)^n\}$ é não convergente.

Solução. Pela definição de subsequência se escolhemos as seguintes sequências de números inteiros positivos,

$$n(k) = n_k = 2k \qquad \text{e} \qquad n(k) = n_k = 2k-1,$$

estritamente crescentes respectivamente.

Com essas sequências formamos as subsequências pedidas,

$$a_{n_k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \text{e} \quad a_{n_k} = (-1)^{2k-1} = -1$$

Logo a sequência dada é divergente porque as subsequências par e ímpar convergem para diferentes valores. ◊

Exercício 53. Com base no Teorema 1.2.15, mostre que a sequência $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ é convergente, onde

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \text{para todo} \quad n \geq 1$$

Solução. A sequência $\{x_n\}$, embora possua termos oscilantes, positivos e negativos, converge para zero porque as subsequências pares e ímpares,

$$x_{n_k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k} \quad \text{e} \quad x_{n_k} = \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} = \frac{-1}{2k-1}$$

convergem para zero. ◊

Exercício 54. Considere a sequência $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$ cujos termos são,

$$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \frac{1}{6}, \ldots\right\}$$

Verifique que é divergente.

Solução. Identificando os termos que formam as subsequências pare e ímpares temos,

$$y_{n_k} = y_{2k} = \frac{1}{2k} \qquad \text{converge para zero}$$

$$y_{n_k} = y_{2k-1} = 2k - 1 \qquad \text{diverge}$$

portanto a sequência $\{y_n\}$ é divergente. ◊

Exercício 55. Considere a sequência $\{y_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ cujos termos são dados por

$$\{1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5,\ 1/6,\ 1/7,\ 1/8,\ 9,\ 1/10,\ 1/11,\ 1/12,\ 1/13,\ 1/14,\ 15, \ldots\}$$

Mostre que é divergente.

Solução. Podemos escrever a sequência a partir de seu termo geral, com segue,

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se} \quad n \quad \text{é um número par ou primo} \\ n & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Podemos reparar pelo menos duas subsequências convergentes: uma formada pelos termos de índice par e a segunda com índice os números primos maiores ou iguais a três. Assim, concluimos que a sequência $\{y_n\}$ não é convergente porque não é limitada. ◊

Exercício 56. Considere a sequinte sequência $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ onde

$$a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \qquad \text{para todo} \quad n \geq 1$$

Verificar a divergência.

Solução. Pela observação anterior devemos exibir pelo menos duas subsequências da sequência dada convirgindo para dois limites diferentes.

Pela definição de subsequência, construimos duas sequências estritamente crescentes de números inteiros positivos,

$$\{n_k\} = \{n(k)\} = \{12k\} \qquad \text{e} \qquad \{n_k\} = \{n(k)\} = \{12k+1\},$$

logo podemos formar as subsequências,

$$\begin{aligned}
\{a_{n_k}\} &= \{a_{12k}\} = \{a(12k)\} = \left\{\cos\left(\frac{12k\pi}{6}\right)\right\} = \{\cos(2k\pi)\} \\
&= \{(-1)^{2k}\} = \{1, 1, \ldots\} \\
\{a_{n_k}\} &= \{a_{12k+1}\} = \left\{\cos\left(\frac{(12k+1)\pi}{6}\right)\right\} = \left\{\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right\} \\
&= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \ldots, \right\}.
\end{aligned}$$

de onde concluimos que a sequência $\{a_n\}$ é divergente. $\Diamond$

1.2.7 Teorema de Bolzano - Weierstrass

Antes de formular outra versão deste importante Teorema, introduzimos alguns elementos necessários.

Considere o conjunto S_k formado pelos elementos da sequência $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$, limitada e cujos índices são iguais a k,

$$S_k = \{a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \ldots, \},$$

então o conjunto S_k é limitado; possuirá, portanto, um supremo denotado por U_k e um ínfimo denotado por L_k, isto é,

$$U_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, \} \quad \text{e} \quad L_k = \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, \}$$

Também observamos, que as sequências $\{U_k\}$ e $\{L_k\}$ satisfazem,

$$U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \cdots \quad \text{e} \quad L_1 \leq L_2 \leq L_3 \leq \cdots$$

pois sendo U_k uma cota superior para S_k, é também cota superior de S_{k+1}, assim temos $U_k \geq U_{k+1}$ onde U_{k+1} é supremo de S_{k+1}. Assim a sequência dos supremos é não-crescente,

$$U_k \geq U_{k+1}.$$

De maneira análoga a sequência dos ínfimos, será não-decrescente, isto e,

$$L_k \leq L_{k+1}.$$

Portanto temos duas sequências novamente limitadas, isto é, existem números T e M tal que

$$|U_k| \leq T \quad \text{e} \quad |L_k| \leq M \quad \text{para todo} \quad k \geq 1$$

isso acontece pelo fato que sequência $\{a_n\}$ é também limitada, logo as sequências $\{U_k\}$ e $\{L_k\}$, são convergentes.

Seus limites são chamados de "limite superior" e "limite inferior" da sequência $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ e serão representados por

$$\limsup a_k = \lim_{k\to\infty} [\sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, \}] = \lim_{k\to\infty} U_k$$

$$\liminf a_k = \lim_{k\to\infty} [\inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, \}] = \lim_{k\to\infty} L_k.$$

Temos obviamente que $U_k \geq L_k$ e portanto é válida a seguinte relação,

$$\limsup a_k \geq \liminf a_k$$

Além disso a seguinte conclusão é verdadeira,

$$\limsup a_k = \liminf a_k \quad \Leftrightarrow \quad \{a_k\} \subset \mathbb{R} \quad \text{é convergente}$$

e quando são diferentes, para valores grandes de n a sequência "oscila" entre os valores dos $\liminf a_k$ e $\limsup a_k$. Essa oscilação pode ser caracterizada da seguinte maneira,

- Para valores grandes de n na sequência $\{a_n\}$ sempre existira elementos da sequência bem próximos do $\limsup a_n$ e outros elementos bem próximos de $\liminf a_n$ ou,
- Escolhendo infinitos termos da sequência $\{a_n\}$ podemos obter uma sequência que convirgirá para $\limsup a_n$; escolhendo os outros termos infinitos podemos formar uma sequência que convirgirá para o $\liminf a_n$.

Exercício 57. Considere a sequência $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ definida por

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

Ilustre as conclusões anteriores.

Solução. Para a sequência em questão $\{a_n\}$ o $\limsup a_n = 1$ e $\liminf a_n = -1$. Não importa quão longe avance na sequência existem termos com índices pares $a_{2k} = 1 + 1/2k$ arbitrariamente bem próximos de $\limsup a_n = 1$ e termos ímpares $x_{2k+1} = -1 + 1/(2k+1)$ arbitrariamente próximos de $\liminf a_n = -1$. $\Diamond$

A seguir enunciamos um Lema que descreve de forma precisa uma de nossas conclusões,

Lema 1.2.16. *Seja $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ uma sequência limitada. Dado um inteiro $k \in \mathbb{N}$ e um número $\varepsilon > 0$. Então existirá um termo a_n tal que se,*

$$n \geq k \qquad \Rightarrow \quad |a_n - \limsup a_k| < \varepsilon.$$

Prova. Seja $L = \limsup a_n$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} U_k = L$, para cada $\varepsilon > 0$ existe ou há um número $N(\varepsilon) > 0$, tal que

$$k > N \quad \Rightarrow \quad |U_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.20}$$

Mas como $U_k = \sup\{a_k,\ a_{k+1}, \ldots\}$, temos que $U_k \geq a_k,\ a_{k+1}, \ldots$ e pelo menos um deles, representado por a_n tal que

$$U_k - \frac{\varepsilon}{2} < a_n,$$

pois $U_k - \dfrac{\varepsilon}{2}$ não é cota superior do conjunto $\{a_k,\ a_{k+1}, \ldots\}$.

Existe portanto, um termo, a_n com

$$n \geq k > N \quad \text{e} \quad U_k - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < U_k \tag{1.21}$$

Finalmente, utilizando (1.20) e (1.21) temos

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < U_k - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < U_k < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

logo concluimos

$$n \geq k > N \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - L| < \varepsilon,$$

e assim obtemos a demostração completa. △

Um enunciado de outro Lema semelhante é verdadeiro para o $\liminf a_n$.

Finalmente podemos enunciar o Teorema principal desta seção.

Teorema 1.6: Teorema de Bolzano-Weierstrass

Seja $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ sequência limitada. Então existe uma subsequência $\{a_{n_k}\} \subsetneq \{a_n\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup a_n.$$

Além disso, $n_k \geq k$.

Um enunciado semelhante é verdadeiro para o $\liminf a_n$.

Prova

Novamente consideremos, $L = \limsup a_n$. Aplicamos o Lema 1.2.16 anterior com $k = 1$ e $\varepsilon = 1$, a fim de encontrar um inteiro positivo n_1 tal que,

$$n_1 \geq 1 \quad \text{e} \quad |a_{n_1} - L| < 1.$$

A seguir aplicamos o novamente o Lema 1.2.16 com $k = n_1 + 1 \geq 2$ e $\varepsilon = 1/2$, a fim de encontrar um inteiro positivo n_2 tal que

$$n_2 \geq n_1 + 1 \geq 2 \quad \text{e} \quad |a_{n_2} - L| < 1/2.$$

Continuando de maneira semelhante, obtemos para cada k um inteiro positivo n_k tal que

$$n_k \geq n_{k-1} \geq k \quad \text{e} \quad |a_{n_k} - L| < 1/k.$$

Assim $n_k < n_{k+1}$ é estritamente crescente e

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L,$$

e assim temos o que queríamos mostrar. □

Observação 12. *O Teorema de Bolzano-Weierstrass mostra que toda sequência limitada contém uma subsequência convergente. Este é o ponto chave do Teorema; na maioria das aplicações não é importante conhecer o limite.*

O limite superior $\limsup$ *foi introduzido aqui meramente para mostrar porque há ou existe uma subsequência convergente.*

Exercícios Propostos

Resolver os exercícios a seguir,

(1) Encontre a expressão mais simples para o n-ésimo termo das seguintes sequências. Mostre se as sequências são convergentes ou não convergentes. Em caso de ser convergente encontre o limite

(a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots\right\}_{n\geq 1}$ (b) $\left\{1, \frac{2}{2^2-1^2}, \frac{3}{3^2-2^2}, \frac{4}{4^2-3^2}, \cdots,\right\}_{n\geq 1}$

(c) $\left\{2,\ 1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{7}{4},\ 2,\ \frac{15}{8}, \cdots,\right\}_{n\geq 1}$ **Sugestão:** Use a função,

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad n \quad \text{é ímpar} \\ \dfrac{2^{n/2}-1}{2^{(n-2)/2}} & \text{se} \quad n \quad \text{é par} \end{cases}$$

(2) Determinar se a sequência é convergente ou não convergente. Se a sequência é convergente encontre o limite.

(a) $\{e^{-n}\operatorname{sen}(n)\}$ `R:`

(b) $\{\sqrt[n]{n}\}_{n\geq 1}$ Usar: $n^{1/n} = e^{\ln n/n} \to 1$

(c) $\left\{\sqrt{n^2+n}\right\}_{n\geq 1}$ **Usar:** $(n^2+n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n^2+n)}$ `R:` 1

(3) Determinar o limite da sequência

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$$

`R:` 2.

(4) Prove que a sequência cujo n-ésimo termo $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$;

(a) É monótona decrescente

(b) É limitada inferiormente

(c) É limitada superiormente

(d) possui limite

(5) A sequência $\{u_n\}_{n\geq 1}$ tem a seguinte lei de formação;

$$u_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \cdots + \frac{1}{n+n},$$

prove que existe, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ e se encontra entre 0 e 1.

(6) Se $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ e $u_1 = 1$, prove que;

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(7) Se u_n é monótona crescente (ou monótona decrescente), prove que $\dfrac{S_n}{n}$, onde

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

é também monótona crescente (ou monótona decrescente).

(8) Prove que $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}_{n\geq 1}$ é decrescente e convergente.

(9) Quais das seguintes sequências são monótonas? Quais são convergentes .

(a) $\left\{\dfrac{3n-1}{2n+5}\right\}_{n\geq 1}$

(b) $\left\{\dfrac{2^n}{1+2^n}\right\}_{n\geq 1}$

(c) $\left\{\dfrac{n^3-1}{n}\right\}_{n\geq 1}$

(d) $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$

(10) Mostre que as sequências são não limitadas, crescentes ou não crescentes, convergentes ou divergentes,

(a) $\left\{n + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right\}_{n\geq 1}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$

(c) $\left\{\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}\right\}_{n\geq 1}$ (d) $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}_{n\geq 1}$

(e) $\left\{\sqrt[3]{n^2}\right\}_{n\geq 1}$ (f) $\left\{\dfrac{n!}{10^n}\right\}_{n\geq 1}$

(g) $\left\{\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}_{n\geq 1}$ (h) $\left\{\dfrac{\cos nx}{x^2+n^2}\right\}_{n\geq 1}$

(i) $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}\right\}_{n\geq 1}$

(11) Para a sequência $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ verifique;

(a) A vizinhança $|1-u_n| < 0,01$ contém pelo menos os primeiros 99 termos da sequência.

(b) A sequência é limitada. (c) O limite, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

(12) Prove que toda sequência não limitada é divergente.

(13) Seja $\{u_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência convergindo para um limite L. Prove que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ também converge para L.

1.2.8 Sequências Reais de Cauchy

Nesta seção estabelecemos um critério importante, conhecido como critério de convergência de Cauchy, para saber quando uma sequência deve ser convergente. Os termos de uma sequência convergente para L estão bem próximos de L, então estos termos devem estar uns bem próximos dos outros. A vantagem deste critério esta no fato que ele utiliza unicamente os termos da sequência .

Definição 1.2.4. Uma sequência $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$, é chamada de Cauchy se para cada $\varepsilon > 0$, existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad \text{sempre que} \qquad n,\ m > N(\varepsilon).$$

Esta condição proposta na definição acima, significa que a sequência se agrupa, isto é, os elementos da sequência estão arbitrariamente uns contíguos dos outros. Ilustramos com exemplos como funciona esta definição,

Exercício 58. Mostre que a sequência $\{1/n\}$ é uma sequência de Cauchy.

Solução. Para $n > m$ temos,

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{n-m}{nm} < \frac{1}{m}$$

Se $\epsilon > 0$ dado, então tomando m maior que $N \geq N(\varepsilon) = 1/\epsilon$, encontramos que

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon, \qquad \text{sempre que} \qquad n > m > N$$

Isto mostra que a sequência dada é uma sequência de Cauchy. ◊

Exercício 59. Mostre que a sequência $\{n^2\}_{n\geq 1}$ não é de Cauchy.

Solução. Novamente para $n > m$ temos

$$|n^2 - m^2| = (n-m)(n+m) > 2m > 1, \qquad \text{qualquer} \quad m$$

Tomando $\varepsilon = 1$ descobrimos que não existe um inteiro N para o qual

$$|n^2 - m^2| < \varepsilon, \qquad \text{sempre que} \quad n > m > N$$

Portanto a sequência dada não é uma sequência de Cauchy. $\Diamond$

Exercício 60. Mostre que a sequência $\{1 - 1/2^n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ é de Cauchy.

Solução. Exercício para o leitor. $\Diamond$

Teorema 1.2.17. *Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é limitada.*

Prova. Seja $\{a_n\}$ uma sequência de Cauchy. Podemos tomar $\varepsilon = 1$ e pela definição deve existir um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$|a_n - a_m| < 1 \qquad \text{sempre que} \qquad n > m > N$$

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1 \qquad \text{sempre que} \qquad n > m > N.$$

Se tomarmos $m = N + 1$ temos,

$$a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1 \qquad \text{sempre que} \quad n > m = N + 1 > N.$$

Tomando o seguintes números,

$$k = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1} - 1\} \quad \text{e} \quad K = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N, a_{N+1} + 1\}$$

temos a seguinte desigualdade

$$k \leq a_n \leq K \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Portanto a sequência $\{a_n\}$ é limitada. $\square$

Observação 13. *A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Por exemplo a sequência definida por $a_n = (-1)^n$ é limitada porém não é uma sequência de Cauchy.*

Teorema 1.2.18 (Critério de Convergência de Cauchy)**.** *Uma sequência converge se e somente se ela é uma sequência de Cauchy.*

Prova. Primeiro, suponhamos que $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ seja convergente. Considere o número $L \in \mathbb{R}$ como seu limite.

Dado $\varepsilon > 0$, então existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Em particular para $m > n$ temos
$$|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |(a_m - L) - (a_n - L)| \\
&\leq |a_m - L| + |a_n - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad m > n > N
\end{aligned}$$

Portanto $\{a_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Para mostrar a outra implicação, devemos supor que $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy.

Pelo Teorema 1.2.17, toda sequência de Cauchy é limitada, portanto $\{a_n\}$ é limitada.

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe um inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{sempre que} \quad n > m > N. \tag{1.22}$$

Ponhamos $G = \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Como a sequência $\{a_n\}$ é limitada, também o conjunto G é limitado. Segundo a natureza do conjunto G, infinito ou finito, resultam dois casos diferentes.

Quando G é infinito, usamos o Teorema de Bolzano-Weierstrass: Todo conjunto infinito e limitado de números reais tem pelo menos um ponto de acumulação ou ponto limite.

Assim toda vizinhança de L possui infinitos pontos de G tal que

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para infinitos inteiros positivos n. Em particular podemos encontrar um inteiro positivo k onde $k > m > N \geq N(\varepsilon)$ tal que
$$|a_k - L| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.23}$$

Também, como $k > m$, da relação (1.22) temos,

$$|a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.24}$$

Portanto, aplicando propriedade associativa e desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
|a_n - L| &= |(a_n - a_m) + (a_m - a_k) + (a_k - L)| \\
&\leq |a_n - a_m| + |a_n - a_k| + |a_k - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{sempre que} \quad n > m > N \geq N(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Assim $|a_n - L| < \varepsilon$ sempre que $n > N \geq N(\varepsilon)$, portanto $a_n \to L$.

Quando o conjunto G é finito, então para infinitos índices teremos $a_n = \hat{L}$ onde $\hat{L}$ é algum número real.

Podemos encontrar um inteiro positivo $r > m > N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$|a_r - \hat{L}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.25}$$

Também, posto que $r > m$, por conseguinte de (1.22), temos

$$|a_r - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.26}$$

Das relações (1.22), (1.25) e (1.26) temos

$$|a_n - \hat{L}| \leq |a_n - a_m| + |a_m - a_r| + |a_r - \hat{L}| < \varepsilon,$$

sempre que $n > N \geq N(\varepsilon)$, mostrando que $a_n \to \hat{L}$. □

Exercício 61. Mostre que a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} \quad \text{não converge.}$$

Solução. Suponhamos que converge. Então pelo Critério de Cauchy, a sequência é de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1/2$ e pela definição existe $N \geq N(\varepsilon)$ tal que,

$$|a_n - a_m| < 1/2 \qquad \text{sempre que} \qquad n > m > N$$

Assim sendo obtemos

$$\left|\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right| < 1/2, \qquad \forall\, n > m > N$$

tomando $n = 2m$ vemos que

$$\left|\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} > m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

Portanto chegamos a uma contradição. Logo a sequência é não convergente. ◊

Exercício 62. Se $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}^+$ é uma sequência de números positivos tal que

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \qquad \forall\, n \geq 3,$$

mostre que a sequência $\{a_n\}$ converge e calcule seu limite.

Solução. Se $a_1 = a_2$ podemos inferir que $a_n = a_1$ para qualquer $n \geq 2$, então a sequência $\{a_n\}_{n\geq 2}$ converge para a_1. Logo consideramos unicamente o caso $a_1 \neq a_2$.

Primeiro observamos que,

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_{n-1}| &= \left| \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-1} \right| \\
&= \frac{1}{2}\,|a_{n-1} - a_{n-2}| \\
&= \frac{1}{2^{n-2}}|a_2 - a_1| \qquad \text{quando} \qquad n \geq 3
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

Agora se $n > m$, temos;

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_{m+1} - a_m)| \\
&\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \\
&= \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) |a_2 - a_1|, \quad \text{pela relação} \quad (1.27) \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}} \right) |a_2 - a_1| \\
&< \frac{1}{2^{m-1}}\, 2\, |a_2 - a_1| = \frac{1}{2^{m-2}}|a_2 - a_1|, \quad \text{o somátorio acima}
\end{aligned}
$$

é uma parcela da série geométrica, com razão $r = 1/2$.

Se $\varepsilon > 0$ dado, podemos encontrar um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$
\frac{1}{2^{m-2}}|a_2 - a_1| < \varepsilon \qquad \forall\, m > N
$$

e para essa escolha de $N(\varepsilon)$, concluimos que

$$
|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \quad \forall\, n > m > N.
$$

Portanto a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de Cauchy. Pelo critério de Cauchy segue-se que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge.

Seja o limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Para calcular L fornecemos valores para $n = 3, 4, 5 \ldots, k$ na relação

$$
a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}).
$$

Logo temos

$$\begin{aligned} a_3 =& \frac{1}{2}(a_2 + a_1) \\ a_4 =& \frac{1}{2}(a_3 + a_2) \\ \vdots =& \quad \vdots \\ a_{k-1} =& \frac{1}{2}(a_{k-2} + a_{k-3}) \\ a_k =& \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k-2}) \end{aligned}$$

Somando membro a membro as relações anteriores obtém-se,

$$a_k + \frac{1}{2}a_{k-1} = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2)$$

Tomando limite quando $k \to \infty$, a ambos lados temos

$$\lim_{k\to\infty} a_k + \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} a_{k-1} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}(a_1 + 2a_2)$$

$$L + \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2),$$

finalmente temos o valor do limite,

$$L = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2).$$

Obtendo assim o que queríamos mostrar. $\Diamond$

É interessante observar que este exemplo serve de referência para resolver outros da mesma ou equivalente complexidade propostos na lista de exercícios.

Exercícios Propostos

Resolver os seguintes exercícios sobre sequências de números reais

(1) Escrever os seis primeiros termos das sequências,

(a) $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n\geq 1}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}\right\}_{n\geq 1}$

(c) $\left\{\dfrac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}\right\}_{n\geq 1}$, $x \in \mathbb{R}$

(d) $\left\{\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}_{n\geq 1}$

(e) $\left\{\dfrac{\cos nx}{x^2+n^2}\right\}_{n\geq 1}$

(f) $\left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}\right\}_{n\geq 1}$

(2) Encontrar um possível n-ésimo termo para as sequências cujos primeiros cinco termos se indicam, logo encontrar o sexto termo;

(a) $-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{3}{8},\ -\dfrac{5}{11},\ \dfrac{7}{14},\ -\dfrac{9}{17},\dots$ (b) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\dots$ (c) $\dfrac{2}{3},\ 0,\ \dfrac{3}{4},\ 0,\ \dfrac{4}{5},\dots$

(3) Sequência de Fibonacci é a sequência $\{u_n\}_{n\geq 1}$ com regra de formação;

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{e} \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1$$

(a) Encontrar os primeiros seis termos

(b) Mostrar que o n-ésimo termo é dado por

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \quad \text{onde} \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(4) Por intermédio da definição de limite, prove que;

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-2n}{3n+2} = -\dfrac{2}{3}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-1/\sqrt{n}} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+1}{n^2} = \infty$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$

(5) Determine o menor inteiro $N = N(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left|\frac{3n+2}{n-1} - 3\right| < \epsilon, \qquad \text{para todo} \qquad n > N$$

sempre que

(a) $\epsilon = 0,01$ (b) $\epsilon = 0,001$ (c) $\epsilon = 0,0001$

(6) Usando definição de limite, prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+4} \qquad \text{não pode ser} \qquad \frac{1}{2}.$$

(7) Prove que se, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. É valida a recíproca?

(8) Se $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$, prove que;

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} cu_n = cL \quad c \in \mathbb{R}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^2 = L^2$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^p = L^p, \quad p \in \mathbb{N}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{L}, \quad L \geq 0$

(9) Justifique as seguintes afirmações,

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{1/n} = 1$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/n} = 1$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n} = 0$

(10) Se $r > 1$, prove que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$, explicando cuidadosamente o seu significado.

(11) Se $|r| > 1$, prove que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ não existe.

(12) Calcule os seguintes limites, aplicando teoremas

(13) (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2-5n+4}}{2n-7}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{(3-\sqrt{n})(\sqrt{n}+2)}{8n-4}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot 10^n - 3\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n-1}+2\cdot 10^{2n-1}}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n+3^n)^{1/n}$

(14) Prove, diretamente da definição de limite, que as sequências $\dfrac{1}{n^2+1}$ e $\dfrac{1}{8n^3-7}$ tendem ambas a zero.

(15) Faça o mesmo para a sequência $u_n = \sqrt{n+h}-\sqrt{n}$

(16) Faça o mesmo para a sequência $u_n = a^n$ onde $0 \leq a < 1$.

(17) Prove, igualmente, que

$$u_n = \frac{5n^3-2n^2+1}{2n^3+7n-3} \to \frac{5}{2}.$$

(18) Mostre que a sequência de números reais,

$$\{1/n^2\}_{n\geq 1} \quad \text{converge para zero.}$$

(19) Mostre que a sequência de números reais dada por,

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n\geq 1} \text{ converge para hum.}$$

(20) Determinar se as seguintes sequências são convergentes ou não convergentes. Se a sequência é convergente encontrar seu limite.

(a) $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}_{n\geq 1}$ (b) $\left\{\dfrac{3n^2+1}{3n^2-n}\right\}_{n\geq 1}$

(c) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ (d) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n\geq 1}$

(e) $\left\{\dfrac{n^2}{2n+1}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}\right\}_{n\geq 1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n+1}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n+1}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n}$, regra de L'Hóspital (f) $\left\{\dfrac{\ln n}{n^2}\right\}_{n\geq 1}$

(g) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right\}_{n\geq 1}$ (h) $\left\{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right\}_{n\geq 1}$

(i) $\left\{n\dfrac{1}{n^n}\right\}_{n\geq 1}$

(21) Demostrar cada um dos seguintes limites

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2+\dfrac{(-1)^n}{n} = 2$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{5n-4} = \dfrac{4}{5}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+8n+1}{5+3n-n^2} = -5$

(22) Mostre aplicando o Critério de Convergência de Cauchy que a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por

$$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

é não convergente.

(23) Mostre se as seguintes sequências $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ são de Cauchy

$$a_n = (-1)^n, \qquad\qquad a_n = (-1)^n n$$

(24) Mostre que cada uma das seguintes sequências $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ são de Cauchy

(a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, (b) $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, (c) $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$

1.2.9 Critérios de Convergência

A seguir vamos a enunciar muitos teoremas que garantem a convergência de sequências numéricas.

Teorema 1.7: Teste da Razão

Seja $\{a_n\} \subsetneq \mathbb{R}$ uma sequência de números reais, com $a_n \neq 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L,$$

Se $|L| < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prova. Pela hipótese $|L| < 1$, podemos escolher $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|L| + \varepsilon_0 = h < 1$$

Pela convergência do quociente, existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon_0)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \varepsilon_0$$

Por outro lado temos, a seguinte desigualdade,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L + L\right| \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| + |L| < \varepsilon_0 + |L| = h, \qquad \text{para } \ n > N$$

Substituíndo n por m, $m+1$, $m+2\ldots$, $n-1$ temos as seguintes desigualdades,

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| < h, \quad \left|\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\right| < h, \quad \ldots \quad \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| < h.$$

Multiplicando os correspondentes lados das desigualdades anteriores,

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| \cdot \left|\frac{a_{m+2}}{a_{m+1}}\right| \cdots \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| < h^{n-m}$$

ou de outra forma,

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| < h^{n-m}$$

Logo isolando o termo aprópriado, obtemos,

$$|a_n| < h^n \left(\frac{|a_m|}{h^m} \right) \qquad \text{para todo} \qquad n > m > N. \tag{1.28}$$

Também como $0 < h < 1$ temos que $h^n \to 0$ e consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, existe um número $P \geq P(\varepsilon) > 0$ tal que

$$n > P \quad \Rightarrow \quad |h^n| < \frac{h^m \varepsilon}{|a_m|} \tag{1.29}$$

A partir de (1.28) e (1.29), encontramos que,

$$|a_n| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad n > \max\{N,\ P\}$$

Assim, sendo $a_n \to 0$ quando n vai ao infinito. □

Segunda Demonstração. Suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ exista e seja menor que um. Considere o número r tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r < 1$. Pela definição de limite isto quer dizer que existe $N > 0$ tal que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r$ sempre que $n > N$. Escolher um número $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > N$.
Então

$$|a_{p+1}| < r|a_p|, \qquad |a_{p+2}| < r|a_{p+1}| < r^2|a_p|,$$

em geral para qualquer $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$|a_{p+k}| < r^k|a_p|, \qquad \text{é dizer} \qquad -r^k|a_p| < a_{p+k} < r^k|a_p|,$$

como $r \in]0,1[$, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} r^k = 0$. Portanto de acordo com o teorema anterior

$$\lim_{k\to\infty} a_{p+k} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Obtendo assim o queriamos mostrar. □

Exercício 63. Determinar se a sequência $\left\{ \frac{r^n}{n!} \right\}_{n\geq 1}$ com $r > 0$ é convergente ou divergente.

Solução. Utilizando o teste da razão temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{r^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{(n+1)} n!}{r^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^n \cdot r \cdot n!}{r^n (n+1) n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0$$

Portanto obtemos o seguinte valor, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0$. Logo é convergente. ◊

Exercício 64. Determinar se a sequência $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}_{n\geq 1}$ é convergente ou divergente.

Solução. Utilizando o teste da razão temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathbf{e}} < 1.$$

Portanto obtemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$, logo convergente. $\Diamond$

Exercício 65. Utilizando o critério da razão para sequências prove que a sequência real $\{w_n\}$ tal que

$$w_n = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)} \qquad \text{para} \qquad n\in\mathbb{N}$$

converge para zero.

Solução. Calculando o quociente obtemos

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{2n+1}, \qquad \text{para todo} \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Aplicando limite quando n vai ao infinito teremos,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} = L < 1$$

Assim sendo, pelo Teorema da razão temos que sequência $\{w_n\}$ converge para zero. $\Diamond$

Exercício 66. Considere a sequência $\{x_n\}$ cujo termo geral é dado por

$$x_n = \frac{n^q}{2^n} \qquad \text{para} \qquad n\in\mathbb{N}$$

Prove que a sequência $\{x_n\}$ converge para zero.

Solução. Calculamos o quociente,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^q}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^q} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^q$$

Aplicando limite quando n vai ao infinito, teremos,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^q = \frac{1}{2} = L < 1$$

Assim sendo, pelo Teorema da razão para sequências temos que a sequência $\{x_n\}$ converge para zero. $\Diamond$

Nota. Para calcular o limite com potência q no quociente anterior, utilizamos a própriedade enunciada no Teorema 1.2.5, sexto item, que se justifica pela continuidade a função $x \mapsto x^q$.

O caso geral pode ser enunciado assim: Seja a $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$ com limite L e considere uma função g contínua e $[a,\ b]$, o qual contém os termos da sequência $\{y_n\}$, então

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = g(L).$$

Aplicação. Calcular os seguintes limites,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a^{1/n} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n^{1/n}$$

Solução. Para quando $a > 0$ temos,

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = a^{\lim 1/n} = a^0 = 1.$$

Para o segundo limite, devemos rescrevemos o termo geral,

$$n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)$$

Aplicando limite quando n vai ao infinito,

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(n)\right)$$

Utilizando a regra de L'Hôpital temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

logo, isso implica que

$$\frac{\ln(n)}{n} \to 0 \quad n \to \infty$$

Portanto, utilizando os fatos anteriores concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = e^0 = 1.$$

Com isto, aplicação do resultado fornecido na nota anterior esta concluido. $\Diamond$.

Exercício 67. Determinar se a sequência $\left\{\dfrac{2^n + n^4}{3^n - n^7}\right\}_{n\geq 1}$ é convergente ou divergente.

Solução. Vejamos o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^4}{3^n - n^7} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2/3)^n + n^4/3^n}{1 - n^7/3^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4}{3^n}}{1 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7}{3^n}}$$

Aplicando o teste da razão por separado para cada sequência temos;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^4}{3^n - n^7} = 0$$

logo convergente. Obtendo assim o que desejavamos. $\Diamond$

Exercício 68. Seja a sequência infinita de números reais, $\{b_n\} \subsetneq \mathbb{R}$, onde

$$b_n = \frac{K}{n!}, \qquad \text{para} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Mostre que $b_n \to 0$.

Solução. Exercício para o leitor. $\Diamond$

Antes de prosseguir devemos questionar a situação $L = 1$. Neste caso não podemos dizer nada sobre a convergência da sequência $\{a_n\}$. Por exemplo consideremos as seguintes sequências, $\{a_n\} = \{n\}$ e a sequência $\{b_n\} = \{1/n\}$. Aplicando o Teste da razão,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1,$$

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{1}{n+1}n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n} \to 1.$$

Podemos afirmar convergência quando $L > 1$? A resposta é que a sequência é divergente ao infinito.

Teorema 1.8

Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais, se

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \quad \text{onde} \quad L > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$

Prova. Podemos tomar $r \in \mathbb{R}$ tal que $1 < r < L$, logo existe $N > 0$ tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r, \qquad n > N.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
|a_{N+2}| &> r|a_{N+1}| \\
|a_{N+3}| &> r|a_{N+2}| > r^2|a_{N+1}| \\
|a_{N+4}| &> r|a_{N+3}| > r^3|a_{N+1}| \\
\vdots \quad &> \quad \vdots \quad > \vdots \\
|a_{N+k}| &> r|a_{N+(k-1)}| > r^{k-1}|a_{N+1}|
\end{aligned}$$

Como $r > 1$, concluímos que r^n vai ao infinito e evidentemente

$$r^{k-1}|a_{N+1}| \to \infty, \quad \text{logo} \quad |a_{N+k}| \to \infty \quad \text{assim} \quad |a_n| \to \infty$$

Portanto obtemos o que afirmamos. □

Lema 1.2.19. *Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais, se*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$

Prova. Escolher $r > 1$ e observar que existe N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r, \qquad n > N.$$

A continuação executamos o mesmo raciocínio do teorema anterior. Assim esta completada a demostração do Lema. □

Exemplo 3. Averiguar a convergência ou divergência das seguintes sequências ,

(a) $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}$ (b) $\{b_n\} = \left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$

Solução. Faremos simultaneamente para ambas sequências

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \qquad \text{e} \qquad a_n = \frac{n!}{3^n}$$

$$b_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{2^n}{n}$$

e construindo para ambas sequências as correspondentes quocientes, temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n!}\right| = \left|\frac{n+1}{3}\right| = \frac{n+1}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Pelo lema anterior temos,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} = +\infty.$$

De maneira semelhante com a outra sequência ,

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}}{n+1}\frac{n}{2^n}\right| = 2\frac{n}{n+1} = 2\left(\frac{1}{1+1/n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} L = 2 > 1.$$

Finalmente aplicando o Teorema temos,

$$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty.$$

e assim as duas sequências são divergentes. ◊

Teorema 1.9: Média Aritmética

Seja $\{a_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ e se $\{S_n\}$ é uma sequência definida por,

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L$$

Prova. Considere o seguinte termo, c_n tal que

$$c_n = a_n - L \quad \text{então} \quad c_n \to \infty$$

Também podemos formar a relação,

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{n}{n}L + \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} = L + \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}.$$

A prova do teorema foi reduzida a verificação da seguinte afirmação,

$$c_n \to 0 \quad \text{implica} \quad \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} \to 0.$$

Para $\varepsilon > 0$ dado, existe um número inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |c_n| = |c_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Também com a sequência $\{c_n\}$ é convergente, então é limitada, logo existe um número $K > 0$ tal que

$$|c_n| \leq K \quad \text{para todo} \quad n \geq 1.$$

Logo temos a seguinte estimativa,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}\right| &\leq \frac{|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n|}{n} \\
&= \frac{|c_1| + |c_2| + \cdots + |c_m|}{n} + \frac{|c_{m+1}| + |c_{m+2}| + \cdots + |c_n|}{n} \\
&< \frac{mK}{n} + \frac{\varepsilon}{2n}(n-m) \quad \text{para todo} \quad n > m > N \\
&< \frac{mK}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad n > m > N.
\end{aligned}$$

Se $q \in \mathbb{N}$ maior que $\dfrac{2mK}{\varepsilon}$, então

$$\frac{mK}{n} < \frac{mK}{q} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sempre que} \quad n > q$$

Portanto a desigualdade, anterior

$$\left|\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n > \max\{m, q\}.$$

Assim sendo,

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n} \to 0 \quad \text{sempre que} \quad n \to \infty$$

consequentemente,

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to L \quad \text{sempre que} \quad n \to \infty.$$

e é o desejavamos mostrar. □

Observação 14. *A recíproca do Teorema anterior não é verdadeira, como pode ser visto, utilizando a sequência $\{(-1)^n\}$. Para essa sequência teremos,*

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \begin{cases} 0 & \textit{se} \quad n \quad \textit{é par} \\ -\dfrac{1}{n} & \textit{se} \quad n \quad \textit{é ímpar} \end{cases}$$

e portanto temos que

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty$$

Também sabemos que $\{(-1)^n\}$ não é convergente.

O teorema da média aritmética é conhecido como o *primeiro teorema de Cauchy sobre limites.*

Ilustramos o Teorema da média aritmética com os seguintes exemplos.

Exemplo 4. Determinar se a sequência

$$\left\{\frac{n}{\sqrt{9n^4+1}}\left[\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{9}{3}} + \sqrt{\frac{13}{4}} + \cdots + \sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]\right\}_{n\geq 1}$$

é convergente ou divergente.

Solução. Aplicaremos o Teorema da média aritmética;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{9n^4+1}}\left[\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{9}{3}} + \sqrt{\frac{13}{4}} + \cdots + \sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{9n^4+1}} \cdot \frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{9}{3}} + \sqrt{\frac{13}{4}} + \cdots + \sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{9n^4+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{9}{3}} + \sqrt{\frac{13}{4}} + \cdots + \sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]}{n}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{9n^4+1}} = 1/3$ e pelo Teorema da média aritmética tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}} = 2$$

então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{9n^4+1}}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{9}{3}}+\sqrt{\frac{13}{4}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right] = \frac{2}{3}$$

A sequência dada é convergente. $\Diamond$

Exercício 69. Encontrar o limite da sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$, onde o termo genérico possui a seguinte forma

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+3} - \sqrt{n^2+4n+1} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}}\left[\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\cdots+\frac{7n+1}{n+2}\right].$$

Solução. Temos o seguinte resultado aplicando novamente o Teorema da média aritmética,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+2n^2+3} - \sqrt{n^2+4n+1}\\
&\quad + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+4n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\cdots+\frac{7n+1}{n+2}\right]\\
&= -\frac{4}{3} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+4n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\cdots+\frac{7n+1}{n+2}\right]\\
&= -\frac{4}{3} + 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\cdots+\frac{7n+1}{n+2}\right]
\end{aligned}$$

pelo Teorema da média aritmética

$$= -\frac{4}{3} + 7 = \frac{17}{3}.$$

Portanto trata-se de sequência convergente, pois existe o limite real. $\Diamond$

Como uma importante consequência do teorema da média aritmética podemos deduzir o *segundo teorema de Cauchy sobre limites.*

Teorema 1.10: Média Geométrica

Se $\{b_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais com $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se o limite $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M > 0$ e $P_n = (b_1\cdot b_2\cdots b_n)^{1/n}$. Então

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1\cdots b_2\cdots b_n} = M.$$

Prova. Considere a sequência $\{d_n\}$ definida por

$$d_n = \ln(b_n) \quad \text{para todo} \quad n\in\mathbb{N}$$

Posto que,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L \quad \text{implica que} \quad \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \ln(b_n) = \ln(L)$$

Pelo Teorema da média aritmética temos o seguinte resultado,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{d_1 + d_2 + \cdots d_n}{n} = \ln(L)$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \ln(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n)^{1/n} = \ln(L),$$

consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} (b_1 \cdot b_2 \cdots b_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} P_n = L.$$

e assim fica mostrado o segundo teorema de Cauchy. □

Nota. Na prova do Teorema da média geométrica utilizamos, o seguinte fato,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \ln(b_n) = \ln(L),$$

sempre que $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $L > 0$.

Ilustramos o segundo Teorema de Cauchy sobre limites com o seguinte exemplo

Exercício 70. Determinar se a sequência $\{P_n\} \subset \mathbb{R}$ definida por

$$P_n = \left(\frac{2}{8} \cdot \frac{5}{23} \cdots \frac{n^2+1}{5n^2+3}\right)^{1/n} \qquad \text{para todo} \quad n \geq 1$$

é convergente ou divergente.

Solução. Identificando cada termo, obtemos

$$b_1 = \frac{2}{8}, \quad b_2 = \frac{5}{23}, \ldots, b_n = \frac{n^2+1}{5n^2+3}, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{5}.$$

Logo aplicando o Teorema da Média Geométrica tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{8} \cdot \frac{5}{23} \cdots \frac{n^2+1}{5n^2+3}} = \frac{1}{5}$$

A sequência dada é convergente. ◊

1.2.10 Limites de Sequência e de Funções

Os resultados de limites de sequências são transformados facilmente em resulatados sobre limites de funções, pois a definição de $f(x) \to L$ é feita em base a $x_n \to L$.

Definição 1.2.5. Seja f definida num intervalo aberto contendo x_0, exceto, talvez, no próprio ponto x_0. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1.30}$$

Em símbolos temos,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Comparando com a definição de convergència de uma sequência $\{x_n\}$ para o limite L; para $\varepsilon > 0$ dado, existe inteiro positivo $N \geq N(\varepsilon)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - L| < \varepsilon \tag{1.31}$$

Na implicação (1.31) a desigualdade, $n > N$ significa um valor grande de n acima de N, o termo x_n "está muito longe" na sequência; quando x_n, esta bem longe, então $|x_n - L| < \varepsilon$.

Na implicação (1.30), a desigualdade $0 < |x - x_0| < \delta$ significa que x esta próximo de x_0 mas não é igual a x_0; quando x esta bastante próximo de x_0, mas não é igual a x_0, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Na definição de limite, $\lim f(x) = L$ quando $x \to x_0$, o valor de $f(x_0)$ não necessita estar definido; mesmo que $f(x_0)$ esteja definido não é considerado no cálculo do limite.

Para desenvolver um relacionamento entre sequências e funções, enunciamos o seguintes teoremas,

Teorema 1.11

Suponha que sejam válidas as três condições,

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe (b) $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

(c) para todo n, $x_n \neq x_0$.

Então,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Prova. Pela hipótese (a), dado $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \tag{1.32}$$

Além disso pela condição (b) para o mesmo δ anterior é possível encontrar inteiro positivo $N \geq N(\delta)$ tal que

$$n > N \geq N(\delta) \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| < \delta \tag{1.33}$$

Também por hipótese (c), temos que

$$0 < |x_n - x_0| \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

logo a implicação (1.33) pode ser substítuida pela

$$n > N \geq N(\delta) \quad \Rightarrow \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta \tag{1.34}$$

Combinando os resultados (1.32) e (1.34), obtemos

$$n > N \geq N(\delta) \quad \Rightarrow \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

Como isso é válido para todo $\varepsilon > 0$ segue que,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{existe}$$

e assumimos ser o número $L \in \mathbb{R}$, logo o teorema esta concluído. $\square$

Nota. O teorema se aplica quando $x_0 = +\infty$ e $x_0 = -\infty$; a demonstração é a mesma. Para o limite

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

utilizamos a seguinte definição

Definição 1.2.6. Para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $X = X(\varepsilon)$, tal que

$$x > X \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

O Teorema 1.11 pode ser utilizado para calcular "convergência de sequências" quando se conhece limites de funções; ou para mostrar que alguns "limites de funções não existem". O seguinte exemplo é uma aplicação.

Exercício 71. Encontre, se possível, o limite da função, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

quando x se aproxima para zero.

Solução. Suponhamos que o limite da função f exista e seja igual a $L \in \mathbb{R}$. Considere a sequência $\{x_n\} = \{1/n\}$ e $x_0 = 0$. Além disso, $x_n \neq 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a imagem $f(x_n) = 1$ e o limite, $\lim x_n = \lim(1/n) = 0$. Portanto o Teorema 1.11 permite concluir que,

$$L = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1. \tag{1.35}$$

Por outro lado, fazendo outra escolha, temos $\{y_n\}$ com $y_n = -1/n$, o limite, $\lim y_n = 0$ e $y_n \neq x_0 = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$; portanto, o Teorema 1.11 permite concluir que,

$$L = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0.$$

Mas isto contradiz o resultado (1.35) e assim sendo,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = L \quad \text{não é possível para nenhum} \quad L$$

Neste caso o suposto limite, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, não existe. $\Diamond$

Em alguns casos, é conveniente reformular o Teorema 1.11 como segue,

Teorema 1.12

Suponha que sejam válidas as duas condições,

(a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (b) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Então,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right).$$

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, existe um número, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

A implicação anterior pode ser substituída por outra mais forte,

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{1.36}$$

Em seguida, para $\delta > 0$ dado, existe um número inteiro positivo $N \geq N(\delta)$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| < \delta \tag{1.37}$$

Combinando os resultados (1.36) e (1.37), encontramos que

$$n > N \geq N(\delta) \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

o que mostra que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right).$$

e assim fica demostrado o teorema. □

Exercício 72. Calcular o seguinte limite,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Solução. Aplicando logarítmo, temos

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \tag{1.38}$$

esta identidade permite fazer a escolha da sequência $\{x_n\}$ onde $x_n = \dfrac{1}{n}$ e da função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + x)$$

e o limite, com ajuda da derivada do logarítmo, é dado por

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$$
$$= \frac{d}{dx}\ln(x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Pelo Teorema 1.11, com $x_n = \dfrac{1}{n}$, encontramos que,

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = 1$$

Para concluir, aplicamos a a função inversa do logarítmo, a função exponencial, a ambos os lados da identidade (1.38), obtemos,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

Calculando limite, aplicando o Teorema 1.12, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left[n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty} n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= \exp(1) = \mathbf{e}.$$

portanto, mostramos o limite requerido. $\Diamond$

Exercícios Propostos

Resolver os seguintes exercícios,

(1) Determinar se seguintes sequências são convergentes ou não convergentes. Se são convergentes encontrar seu limite.

(a) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+4n^2+1}$ $\quad R: -5/6$

(b) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[5]{n^5+n^4+1}}{\sqrt[2]{n^2+n+1} - \sqrt[4]{n^4+n^2+1}}$ $\quad R: 2/15$

(c) $a_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ $\quad R: 1/3$

(d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+5n-1} - \sqrt[2]{n^2+3}}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ $\quad R: 0$

(2) Encontra os limites das seguintes sequências

(a) $a_n = \dfrac{(10000)^n}{n!}$ $\quad R: 0$

(b) $a_n = \sqrt[n]{2}$ $\quad R: 1$

(c) $a_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} - \sqrt[2]{\dfrac{n}{n-1}}$ $R:$ (d) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}-1} - \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$ $R:2$

(e) $a_n = \dfrac{3+5+7+\cdots+(2n+1)}{2n+3} - \dfrac{3n+1}{6}$, Sugestão: aplicar a soma de n termos de uma progressão aritmética. R: 1/12

(3) Prove que se $u_n \to L$, então o mesmo é verdade da sequência das médias aritméticas

$$s_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

(4) Mostre que uma sequência só pode convergir para um único limite.

(5) Prove que se $u_n \to L$ e $\{p_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de números positivos, tal que $p_1+\cdots+p_n \to \infty$, então também tende a L a sequência

$$s_n = \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + \cdots + p_n}$$

(6) Prove que se u_n tem limite L, então $|u_n|$ tem limite $|L|$. Mostre que a recíproca só é válida, em geral, no caso $L = 0$.

(7) Prove que se $\{u_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência que converge para zero e $\{v_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência limitada, não necessariamente convergente, então $\{u_n v_n\}_{n\geq 1}$ converge para zero.

(8) Prove que se $\{u_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência convergente, com $u_n \leq b$, então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq b$. Mostre com contra-exemplo que, mesmo que seja $u_n < b$, não é verdade, em geral, que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n < b$. Enuncie e demonstre propriedade análoga no caso $u_n > b$.

(9) Sejam $\{u_n\}_{n\geq 1}$ e $\{v_n\}_{n\geq 1}$ sequências convergentes, com $u_n \leq v_n$. Prove a seguinte desigualdade $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Mostre por meio de contra-exemplo que também aqui pode ocorrer a igualdade dos limites mesmo que seja $u_n < v_n$. (Observe que o exercício anterior é um caso particular deste, com sequência $\{v_n\}_{n\geq 1} = \{b, b, \cdots\}$.

(10) Sejam $\{u_n\}_{n\geq 1}$, $\{v_n\}_{n\geq 1}$ e $\{w_n\}_{n\geq 1}$ três sequências tais que $u_n \leq v_n \leq w_n$, $\{u_n\}_{n\geq 1}$ e $\{w_n\}_{n\geq 1}$ convergindo para o mesmo limite L. Demonstre que $\{v_n\}_{n\geq 1}$ também converge para L.

(11) Prove que $\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

1.3 Séries de Números Complexos

Dada uma sequência de números complexos $\{z_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{C}$ podemos formar uma nova sequência a partir de suas somas,

$$s_1 = z_1 \qquad s_2 = z_1 + z_2 \qquad \cdots \qquad s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \qquad \cdots$$

chamada de **sequência de somas parciais** da série infinita ou simplesmente da série e representamos ela por

$$\sum_{n\geq 1} z_n = z_1 + z_2 + \cdots \tag{1.39}$$

Série Convergente. Uma série de números complexos é chamada de convergente quando a sua sequência de somas parciais converge, isto é quando:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

o número s é chamado de soma ou valor da série e se denota assim:

$$s = \sum_{n\geq 1} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$$

Série Divergente. Uma série é chamada de divergente se não converge.

Se excluímos os n primeiros termos da série (1.39) obtemos,

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \cdots \tag{1.40}$$

chamado de resto da série (1.39) após o termo z_n. Por outro lado se a série (1.39) converge e tem como soma s, então

$$s = s_n + R_n, \qquad \text{assim} \qquad R_n = s - s_n.$$

Pela definição de convergência $s_n \to s$ concluímos que $R_n \to 0$.

Observação 15. *Em aplicações quando s é desconhecido e calculamos uma aproximação s_n de s então $|R_n|$ é chamado de erro e $R_n \to 0$ significa que podemos fazer $|R_n|$ tão pequeno quanto seja necessário escolhendo n suficientemente grande.*

Exercício 73. Seja $M \subset \mathbb{C}$ um conjunto de números complexos que possui a seguinte propriedade $|z| < 1$. Seja $\{z^{n-1}\}_{n\geq 1}$ portanto a série esta dada por $\sum z^{n-1}$ para $z \in M$ Encontre a k-ésima soma parcial associada à série.

Solução. Observando os somandos da série temos

$$(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^k) = 1 - z^{k+1},$$

portanto a soma parcial,

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} z^{i-1} = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

obtendo-se assim o resultado desejado. ◊

Exercício 74. Seja $M \subset \mathbb{C}$ um conjunto de números complexos que possui a seguinte propriedade $|z| < 1$. Mostre que

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + \cdots \equiv \frac{1}{1-z}; \qquad |z| < 1$$

Solução. Pelo exemplo anterior temos

$$(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^k) = 1 - z^{k-1},$$

e que a soma parcial apropriada é:

$$S_k = \frac{1-z^k}{1-z}; \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

A seguir tomado limite temos,

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} z^{i-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1-z^k}{1-z}$$

$$= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z}\lim_{k\to\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

Como $|z| < 1$ segue que o último limite é zero, portanto

$$\sum_{n\geq 1} z^{n-1} = \lim_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{1-z}$$

assim obtemos o que desejávamos. ♢

Exercício 75. Encontre a soma das seguintes séries complexas,

(a) $1 + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$ (b) $1 + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}i\right)^n$

Solução. Usar a série geométrica complexa. ♢

Exercício 76. Prove ou justifique que a série,

$$\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} + \cdots = \sum_{n\geq 1}\frac{z^{n-1}}{2^n} \quad \text{converge para} \quad |z| < 2$$

e encontre o valor de sua soma.

Solução. ♢

Uma aplicação do Teorema 1.2 imediata para as somas parciais relaciona a convergência de séries complexas para a convergência de duas séries de sua parte real e parte imaginária.

Teorema 1.13

A série $\sum z_n$ com $z_n = x_n + iy_n$ converge para a soma $s = u + jv$ se e somente se $\sum x_n$ converge com soma u e $\sum y_n$ converge com soma v.

Prova : Teorema 1.13

Usar a mesma ideia do Teorema 1.2 para sequencias complexas. ♢

1.4 Séries de Números Reais

Seja $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}$ uma sequência de números reais. A soma infinita dos elementos dessa sequência é chamada de série de números reais, isto é,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

é uma série de números reais, onde a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$, são chamados de termos da série infinita. A sequência $\{S_n\}_{n\geq 1}$ definida por:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \cdots \quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \cdots$$

é chamada de sequência de somas parciais da série, onde S_n é a *n-ésima* soma parcial.

Exercício 77. Considere a série,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1} + \cdots$$

Mostre a soma de seus n primeiros termos.

Solução. Utilizando uma identidade do cálculo elementar,

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \tag{1.41}$$

encontramos que a soma de seus n primeiros termos é:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1.$$

Assim a soma parcial da série acima é $\{S_n\}_{n\geq 1}$ onde $S_n = 2^n - 1$. ♢

Definição 9: Série Convergênte

Dizemos que a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$ é somable se a sequência de somas parciais $\{S_n\}_{n\geq 1}$ converge. Neste caso denotaremos,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n\geq 1} a_n,$$

onde S recebe o nome de soma da sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

De outra maneira, se existe um limite finito,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

então, esse valor limite é chamado de soma da série

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.42}$$

e dizemos que a série converge.

Se o limite $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe (poderia ser $a_n \to \infty$), então dizemos que a série (1.42) não converge (diverge) e não possui soma.

Em outra palavras uma série de números reais, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, não converge (diverge) ou oscila se a sequências de somas parciais converge, não converge (diverge) ou oscila.

Observação 16. *Se a sequência $\{S_n\}_{n\geq 1}$ de somas parciais de uma série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge para S, então S será a soma da série $\sum_{n\geq 1} a_n$ e escrevemos*

$$\sum_{n\geq 1} a_n = S < \infty, \qquad \textit{significa que é convergente}$$

e se $\{S_n\}_{n\geq 1}$ é não convergente (divergente), então a série

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \infty \qquad \textit{é não convergente (divergente)}$$

Exercício 78. Mostre que a seguinte série,

$$1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots \tag{1.43}$$

é convergente.

Solução. Utilizando a mesma identidade (1.41) do exemplo anterior, obtemos n-ésima soma parcial,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \\ &= \frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} = 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Como $(2/3) < 1$ então $(2/3)^n$ vai à zero quando n vai ao infinito, por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left[3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 3,$$

logo a sequência $\{S_n\}_{n\geq 1}$ converge para 3, então, a série dada (1.43) é convergente. Isto significa que se $(2/3) < 1$, série dada (1.43) converge e sua soma é $S = 3$. $\Diamond$

Exercício 79. Mostre que a seguinte série,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n + \cdots$$

é não convergente (divergente).

Solução. Construindo as somas parciais,

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{e} \quad S_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

a diferença delas é

$$S_{n+1} - S_n = n + 1 > 0.$$

Observamos que a sequência $\{S_n\}_{n\geq 1}$ é não decrescente (monótona), portanto pode convergir ou não convergir (porém não é oscilante).

Por outro lado para qualquer número escolhido (de preferência bem grande), A, podemos sempre encontrar um inteiro m tal que $(1/2)m(m+1) > A$, istó é, $S_m > A$. Também como $S_n > S_m$ quando $n > m$, então, $S_n > A$, sempre que $n > m$. Logo $\{S_n\}_{n\geq 1}$ não é limitada superiormente, portanto não satisfaz umas das condições do Teorema de Bolzano-Weierstrass e assim a sequência $\{S_n\}_{n\geq 1}$ não converge (diverge) e consequentemente a série dada não converge (diverge). $\Diamond$

Exercício 80. Mostre que a seguinte série,

$$2 - 2 + 2 - 2 + \cdots \qquad \text{é oscilante.}$$

Solução. Estudando as somas parciais temos a seguinte situação:

$$S_n = \begin{cases} 0 & n \quad par \\ 2 & n \quad ímpar \end{cases}$$

Assim a sequência $\{S_n\}_{n\geq 1}$, não converge nem diverge, e consequentemente a série dada oscila. $\Diamond$

Os seguintes teoremas são conseqüências diretas da definição,

Teorema 1.14

A omissão ou alteração de um número finito de termos da série não afeta o resultado de convergência ou não convergência ou oscilação.

Prova

Consequência direta da definição. $\square$

Teorema 1.15

A multiplicação de todos os termos de uma série por um número real fixado não nulo não afeta o resultado de convergência ou não convergência ou oscilação.

Prova

Consequência direta da definição. $\square$

1.4.1 Séries de Termos Não Negativos

Suponhamos a série $sum\, a_n$ de termos não negativos. Se

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad \text{então} \quad S_n - S_{n-1} = a_n$$

Como $a_n \geq 0$ para todo valor de n, então temos que $S_n - S_{n-1} \geq 0$ para qualquer valor de n, isto é, $S_n \geq S_{n-1}$. Isto mostra que a sequência $\{S_n\}_{n\geq 1}$ de somas parciais de uma série de termos não negativos é uma sequência monótona.

Teorema 1.16

A série $\sum a_n$ de termos não negativos converge se e somente se existe um número K tal que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq K, \qquad \forall\, n \geq 1$$

Prova

Exercício para o leitor. $\square$

Observação 17. *Pelo Teorema anterior, mostrar que uma série com termos não negativos converge, é suficiente mostrar que a sequência de somas parciais é limitada. Também para mostrar que uma série de termos não negativos não converge (diverge), temos que mostrar unicamente que a sequência de somas parciais não esta limitada, isto é, para qualquer número A (bem grande) que possamos tomar é possível tomar um inteiro m tal que $S_m > A$.*

Exercício 81. Mostre a seguinte série de termos negativos,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

é convergente.

Solução. Mostraremos, de acordo com a observação acima, que a n-ésima soma parcial seja limitada superiormente.

Pela propiedade dos nuúmeros inteiros temos,

$$n - 1 < n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}.$$

Multiplicando ambos lados por $1/n > 0$ a última desigualdade teremos

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \qquad n \geq 2$$

Isto serve para formar a soma parcial, aplicando somatório,

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)}$$

A seguir fazemos uma mudança de índices no somátorio do lado direito e somamos uma unidade a ambos lados,

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} \tag{1.44}$$

Se acotamos o último somátorio teremos concluído a prova. Observa-se que somátorio final é telescópico, isto é,

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m-1} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$
$$= 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} < 1 \tag{1.45}$$

Combinando as relações (1.44) e (1.45) teremos a soma parcial S_m esta limitada,

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n(n+1)} < 1 + \frac{m-1}{m} < 1 + 1 = 2, \quad m \geq 1$$

Assim a sequência de somas parciais $\{S_m\}$ (termos não negativos) é limitada superiormente e não-decrescente (monótona). Logo pela observação anterior concluímos que a série $\{S_m\}$ é convergente. $\Diamond$

1.4.2 Série Geométrica

A sequência a, ar, $ar^2, \cdots$, ar^{n-1}, $ar^n, \cdots$, com $a \neq 0$, é uma progressão geométrica e a soma;

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n + \cdots$$

é chamada de série geométrica. A seguir construímos uma nova sequência se somas, chamadas de somas parciais o reduzidas.

As somas parciais da série geométrica são

$$\begin{aligned} S_1 &= a \\ S_2 &= a + ar = a(1+r) \\ S_3 &= a + ar + ar^3 = a(1 + r + r^2) \\ \vdots &= \vdots \\ S_n &= a + ar + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \end{aligned}$$

Escrevendo de outra forma, um termo comum em evidência,

$$S_n = a(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) = a\frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1$$

Em geral, a n-ésima soma parcial pode-se escrever:

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a\,r^n}{1-r}, \quad r \neq 1 \tag{1.46}$$

Teorema 1.17

Uma série geométrica $\sum\limits_{n\geq 1} ar^{n-1}$, com $a \neq 0$, converge se,

$$-1 < r < 1 \qquad \text{e não converge (diverge) se} \qquad |r| \geq 1$$

Para o caso convergente obtemos: $\sum\limits_{n\geq 1} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$.

Prova. Podemos inferir da identidade (1.46) obtida anteriormente, as seguintes situações,

Se $|r| < 1$, então r^n vai para zero quando n vai ao infinito, assim

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{1-r} - \frac{a\,r^n}{1-r}\right] = \frac{a}{1-r}.$$

Isto significa que se $|r| < 1$, a série geométrica converge e sua soma é,

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

A segunda análise será quando $|r| > 1$. Nesta circunstância temos r^n vai ao infinito, e portanto

$$a\frac{1-r^n}{1-r} \to \pm\infty, \quad n \to \infty$$

istó é, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ não existe. De maneira que, quando $|r| > 1$, a série geométrica não converge (diverge).

O terceiro fato acontece quando $r = 1$, a série geométrica assume a seguinte forma,

$$a + a + a + a + \cdots$$

Neste caso a n-ésima soma parcial é $S_n = na$ e o limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, istó é, a serie geométrica não converge (diverge).

Finalmente, quando $r = -1$, a série geométrica assume a forma,

$$a - a + a - a + \cdots$$

Neste caso temos que as n-ésimas somas parciais tomam as formas,

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n \text{ par} \\ a, & \text{se} \quad n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Por conseguinte, S_n não possui limite, logo a série geométrica não converge (diverge). $\square$

Exercício 82. Mostre se a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{4}{3^n}$ é convergente ou divergente.

Solução. Acomodando a série fornecida, para poder identificar os termos,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{4}{3^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{3}\frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Assim estamos em condições de identificar os elementos do Teorema anterior, $a = 4/3$ e $r = 1/3 < 1$. Aplicando a conclusão do Teorema obtemos que existe o limite cujo valor esta dado por,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{4}{3^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$$

Portanto a série dada é convergente. ♢

Exercício 83. Determine se a série $0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots + \dfrac{3}{10^n} + \cdots$ é convergente ou divergente.

Solução. Pela forma do n-ésimo termo da série,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3}{10^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{3}{10}\frac{1}{10^{n-1}} = \sum_{n\geq 1} \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Aplicar o Teorema da série geométrica com $a = 3/10$ e $r = 1/10$. Com isso mostramos que se trata se uma série convergente. ♢

Exercício 84. Exprimir cada decimal periódico como quociente de dois números inteiros

(a) $0,535353\ldots$

(b) $0,012012012\ldots$

(c) $0,123123123\ldots$

(d) $0,142857142857142857\ldots$

(e) $1,234234234\ldots$

Solução. Exercício para o leitor. ♢

1.4.3 Série Aritmética

Consideremos a série aritmética,

$$\sum_{n\geq 1} a + b(n-1) = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots$$

Seja S_n a soma parcial dos n primeiros termos, então:

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a+(n-2)b) + (a+(n-1)b)$$

$$S_n = (a+(n-1)b) + (a+(n-2)b) + \cdots + (a+2b) + (a+b) + a$$

somando membro a membro

$$\begin{aligned} 2S_n &= (2a+(n-1)b)+(2a+(n-1)b)+\cdots+(2a+(n-1)b)+(2a+(n-1)b) \\ &= n\{2a+(n-1)b\} \end{aligned}$$

ou seja

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)b\}}{2} \tag{1.47}$$

portanto a série diverge para $+\infty$ ou $-\infty$ e concluímos no seguinte teorema.

Teorema 1.18

Uma série aritmética $\sum a+b(n-1)$ diverge se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a+b(n-1) = \begin{cases} +\infty & \text{se, } b>0 \text{ ou } b=0, \quad a>0 \\ -\infty & \text{se, } b<0 \text{ ou } b=0, \quad a<0 \end{cases}$$

Prova

Aplicando limite na n-ésima soma parcial dada em (1.47), temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\{2a+(n-1)b\}}{2} = +\infty$$

quando $b \geq 0$ e $a > 0$.

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\{2a+(n-1)b\}}{2} = -\infty$$

sempre que $b \leq 0$ e $a < 0$. □

1.4.4 Série Harmônica

Esta série é muito importante e é por isso que tentamos verificar a divergência utilizando somas parciais.

Seja a série harmônica,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Considere, S_n a soma parcial dos primeiros n somandos, então,

$$
\begin{aligned}
&S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\\
&S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + 2\cdot\frac{1}{4} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\
&S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4\cdot\frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\
&S_{16} = S_{2^4} = S_{2^{3+1}} = S_{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \cdots + \frac{1}{2^3+7} + \frac{1}{2^3+2^3}\\
&\quad > S_{2^3} + 8\cdot\frac{1}{2^3+2^3} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Baseados neste comportamento podemos afirmar a hipótese indutiva,

$$S_{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n\text{somandos}} = \frac{n}{2}.$$

O que temos que provar é,

$$
\begin{aligned}
S_{2^{n+1}} &= S_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+(2^n-1)} + \frac{1}{2^n+2^n} > S_{2^n} + 2^n\cdot\frac{1}{2\cdot 2^n}\\
&= S_{2^n} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Logo concluímos que a nossa afirmação é válida para $n+1$ termos,

$$S_{2^{n+1}} > \frac{n+1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Pelo princípio de indução matemática é válida a desigualdade,

$$S_{2^m} > \frac{m}{2}, \qquad m \geq 1.$$

Calculando limite quando n vai ao infinito nessa desigualdade teremos

$$S_{2^n} > \frac{n}{2} \to \infty \qquad \text{quando} \quad n \to \infty$$

então a soma parcial não é limitada e portanto a série diverge a $+\infty$.

Teorema 1.19: Critério do Termo Geral

Se a série $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ é convergente, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Prova. A n-ésima soma parcial da série é,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}, \quad n \geq 2$$

logo, $a_n = S_n - S_{n-1}$ e pela convergência da série existe o limite $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, portanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Obtendo o que desejávamos. □

Vejamos no seguinte exemplo que a conclusão do Teorema anterior é uma *condição necessária* porém não o suficiente para garantir a convergência da série

Exercício 85. Mostre que a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ onde $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, não converge mesmo que o limite de a_n seja nulo.

Solução. Construindo a nova sequência temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1}.$$

Observamos que $\{S_n\}$ cresce de forma que não podemos encontrar uma cota superior, portanto a série não converge.

Para calcular o limite, fazemos seguinte,

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Finalmente tomando limite, obtemos o queriamos. ◊

Corolário 1.4.0.1 (Critério de Divergência)**.** *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, então a série* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *não converge (diverge).*

Prova. Suponhamos que a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ é convergente. Então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ contradição!!! □

Exercício 86. Determinar se as seguintes séries,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}(n)$,

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n \operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)$

são convergentes ou não convergentes.

Solução. Identificando o n-ésimo termo a_n, e tomando limite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1,$$

obtemos um valor limite diferente de zero, portanto não converge (diverge).

Fazendo o mesmo em (b) temos a seguinte afirmação

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n) = \text{ não existe}$$

Com efeito, suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n) = 0$. Assim também $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n+1) = 0$.

Por outro lado,

$$\operatorname{sen}(n+1) = \operatorname{sen}(n)\cos(1) + \cos(n)\operatorname{sen}(1),$$

logo, fazendo tender n ao infinito, resulta

$$0 = \operatorname{sen}(1)\lim_{n\to\infty} \cos(n), \quad \text{isto é,} \quad \lim_{n\to\infty} \cos(n) = 0.$$

Pela identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2(n) + \cos^2(n) = 1,$$

aplicando limite quando n vai ao infinito e utilizando os resultados anteriores segue-se que

$$0^2 + 0^2 = 1$$

o que é uma contradicão com o fato de supor que o limite existe e é igual a zero.

Como conclusão disto a série $\sum\limits_{n\geq 1} \operatorname{sen}(n)$ não converge (diverge).

No exercício (c) aplicando limite ao n-ésimo termo da sequência

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

obtemos um número distinto de zero, obtido como consequência de um limite fundamental,

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

do cálculo elementar. Assim a série é não convergente (divergente).

No exercício (d) utilizamos um limite do cálculo elementar, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Portanto

$$a_n = n\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right) = 2\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\right].$$

Tomando limite sobre a_n quando n vai ao infinito,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\right] = 2$$

Portanto a série dada não converge (diverge). Em todos os casos acima se aplica o critério da Divergência. ◊

Exercício 87. Determinar se a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^2+n+2}{\ln(n+1)}$ é convergente ou divergente.

Solução. Identificando o n-ésimo termo;

$$a_n = \frac{n^2+n+2}{\ln(n+1)} \qquad \text{para todo valor de} \qquad n \geq 1$$

então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\frac{1}{n+1}} = +\infty$$

onde temos aplicado a regra de L'Hôspital. Portanto, a série é divergente. ◊

Exercício 88. Mostre a série de números reais,

$$\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{2}{6}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} + \cdots \qquad \text{é não convergente.}$$

Solução. Identificando o n-ésimo termo da série,

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1/n+1}} \end{aligned}$$

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1/\sqrt{2}$.

Portanto como a_n não vai para zero quando $n \to \infty$, então a série dada é não convergente ou divergente. ◊

Teorema 1.20

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries com somas S e M respectivamente e K é um número real, então

(a) $\sum (a_n + b_n)$ convergente e

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = S + M$$

(b) $\sum K\, a_n$ é convergente e $\sum K\, a_n = K \sum a_n$

Prova. A demostração decorre da aplicação direta das propriedades. □

Exercício 89. Para cada valor da variável real x, podemos considerar as seguintes séries convergentes

$$\sum_{n\geq 0} x^{2n} = S = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n} = M = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1$$

com suas correspondentes somas S e M. Mostre que a série

$$\sum_{n\geq 0}[x^{2n}+(-1)^n x^{2n}] = \sum_{n\geq 0} x^{4n} = S+M$$

é convergente e indique a sua soma.

Solução. A convergência de cada série fornecida na hipóteses esta dada pela convergência da série geométrica,

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad |x|<1$$

mudando a variável x por x^2 e $-x^2$.

Assim sendo teremos que somar membro os desenvolvimentos de cada série,

$$\sum_{n\geq 0} x^{2n} = 1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}+\cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n} = 1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}-\cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

Portanto obtemos a série,

$$2+2x^4+2x^8+2x^{12}+\cdots = \frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}$$

De forma equivalente,

$$2\sum_{n\geq 0} x^{4n} = \frac{2}{1-x^4},$$

e assim mostramos o que desejávamos. $\Diamond$

Exercícios Propostos

Resolver as seguintes questões sobre séries numéricas,

(1) Prove as seguintes afirmações

(a) A série aritmética infinita

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]+\cdots$$

diverge quando $a^2+d^2>0$.

(b) A série geométrica infinita

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

onde $a\neq 0$ converge a $\dfrac{a}{1-r}$ se $|r|<1$ e diverge se $|r|\geq 1$.

(c) A série harmônica

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n + \cdots$$

diverge.

(2) Encontre S_n e S para;

(a) $1/5 + 1/5^2 + 1/5^3 + \cdots$ (b) $1/1{\cdot}2 + 1/2{\cdot}3 + 1/3{\cdot}4 + 1/4{\cdot}5 + \cdots$

(3) A série $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$ converge a 2. Examine a série resultante quando;

(a) Os quatro primeiros termos são extraidos.

(b) Os termos $8 + 4 + 2$ são anexados à série.

(4) Provar que se $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = S$, então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

(5) Mostre que as séries

(a) $1/3 + 2/5 + 3/7 + 4/9 + \cdots$ (b) $1/2 + 3/4 + 7/8 + 15/16 + \cdots$

divergem.

(6) Utilizando a definição de convergência de séries mostre que;

(a) $1/5 + 1/5^2 + 1/5^3 + \cdots$ (b) $1/1{\cdot}2 + 1/2{\cdot}3 + 1/3{\cdot}4 + 1/4{\cdot}5 + \cdots$

convergem.

(7) Examinar a convergência das seguintes séries geométricas. Se a série converge, encontre a sua soma

(a) $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ (b) $4 - 1 + 1/4 - 1/16 + \cdots$

(c) $1 + 3/2 + 9/4 + 27/8 + \cdots$

(8) Encontre a soma das seguintes séries

(a) $\sum\limits_{n\geq 1} 3^{-n}$ (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(c) $\sum\limits_{n\geq 1} \Big(\dfrac{1}{n^p} - \dfrac{1}{(n+1)^p}\Big),\ p > 0$ (d) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+2)}$

(e) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+3)}$ (f) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n}{(n+1)!}$

(g) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ (h) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(i) $\sum\limits_{n\geq 1} \Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n$

(9) Mostre utilizando a definição de convergência que as séries de (a) até (d) convergem.

(10) Mostre que as seguintes séries divergem,

(a) $3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \cdots$

(b) $2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \cdots$

(c) $e + \frac{e^2}{8} + \frac{e^3}{27} + \frac{e^4}{64} + \cdots$

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

(f) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$

(11) Provar que se $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, então $\sum u_n$ diverge.

1.4.5 Critérios de Convergência de Séries Reais

Os seguintes teoremas se aplicaram a séries de termos não negativos para verificar a sua convergência ou não convergência.

Teorema 1.21: Critério de Comparação

Sejam duas séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com termos não negativos,

(a) Se $\sum a_n$ converge e $b_n \leq a_n$, para cada n, então $\sum b_n$ também converge.

(b) Se $\sum a_n$ não converge e $b_n \geq a_n$, para cada n, então $\sum b_n$ também não converge.

Prova. Aplicando a definição de séries, temos as respectivas somas parciais,

$$T_n = b_1 + \cdots + b_n \qquad \text{e} \qquad S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

Pela hipótese, existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ e é igual a S. Como os termos $a_n \geq 0$, o limite S é o supremo da sequência portanto $S_n \leq S$.

Por outro lado

$$T_n = b_1 + \cdots + b_n \leq S_n \leq S \quad \text{ou} \quad 0 \leq T_n \leq S$$

Assim concluímos que a sequência $\{T_n\}$ é não decrescente e limitada, então pelo Teorema de Bolzano-Weiestrass, possui limite, istó, é, a série $\sum b_n$ converge.

De maneira equivalente se prova a outra afirmação. □

Exercício 90. Mostre que as séries,

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$,

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$,

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{4n^3 - 3}$

(d) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$

aplicando o critério da comparação, são convergentes.

Solução. Sabemos da seguinte desigualdade que,

$$n(n+1) = n^2 + n > n^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n \geq 1$$

Portanto a série,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

converge, por comparação com a série,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

A segunda série b) obedece a,

$$2^n < (n+1)! \quad \forall\, n \geq 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n+1)} \qquad \forall\, n \geq 1.$$

A série maiorante converge pois é a série geométrica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ e pelo critério da comparação obtemos o que desejamos.

Na série (c) utilizamos uma desigualdade do cálculo elementar, $\ln x < x$ para todo $x > 1$ e outra dos números interios positivos, $4n^3 - 3 \geq n^3$ para todo $n \geq 1$.

Assim multiplicando membro a membro as seguintes desigualdades

$$\ln n < n \quad \text{e} \quad \frac{1}{4n^3-3} \leq \frac{1}{n^3}$$

obtemos

$$\frac{\ln n}{4n^3-3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Pela mesma conclusão do exemplo (b) mostramos que que a série dada é convergente.

Finalmente no exercício (d) comparamos com a série harmônica,

$$\ln(n) < n, \quad n \geq 1 \quad \text{então} \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}, \quad n \geq 2.$$

Como a série harmônica $\sum 1/n$ não é convergente, pelo teste de comparação a série dada não converge (diverge). ◊

Exercício 91. Verifique que a seguinte série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 7^n + n}$$

é convergente.

Solução. Para aplicar o a propriedade de comparação devemos utilizar outra série cuja convergência seja conhecida. Para este fim teremos que identificar ou determinar alguma desigualdade favorável para aplicar diretamente o critério. Procedemos da seguinte forma,

$$5^n + 7^n + n > 7^n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5^n+7^n+n} < \frac{1}{7^n} \quad n \geq 1$$

Multiplicando ambas desigualdades por $2^n > 0$ teremos

$$\frac{2^n}{5^n + 7^n + n} < \frac{2^n}{7^n} = \left(\frac{2}{7}\right)^n \qquad n \geq 1$$

Como o termo do lado direito é de uma série geométrica com razão $r = 2/7 < 1$,

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

entao ela é convergente, ainda mais, sabemos calcular valor de sua soma.

Portanto pelo critério de comparação a série dada

$$\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{5^n + 7^n + n} < \infty$$

é convergente. $\Diamond$

Exercício 92. Mostre que a série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{2}{\ln(n)}$$

é divergente.

Solução. Utilizaremos o critério de comparação. Como se sabe devemos formular uma desigualdade apropriada para a aplicação deste critério.

Usando uma desigualdade das funções logarítmo e linear teremos

$$\ln(n) < n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}, \qquad n \geq 2$$

Multiplicando por dois, $2 > 0$, ambos lados da desigualdade anterior

$$2\frac{1}{n} < \frac{2}{\ln(n)}, \qquad n \geq 2$$

Observamos que o lado esquerdo possui o n-ésimo termo da série harmônica,

$$\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$$

que diverge. Multiplicada ou incrementada por uma constante também diverge.

Portanto pelo critério da comparação, a série

$$\sum_{n\geq 2} b_n = \sum_{n\geq 2} \frac{2}{\ln(n)}, \qquad n \geq 2$$

diverge. $\Diamond$

Observação 18. *Podemos dizer em função dos fatos e operações executadas neste teste, a prioridade de utilização deveria ser considerada como última, outros testes são mais fáceis de serem implementados ou aplicados.*

Teorema 1.22: Critério do Quociente

Sejam duas séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com termos não negativos e suponhamos que o limite existe,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0, \quad \text{ou pode ser} \quad \infty$$

então ambas convergem ou ambas divergem.

(a) Se $\sum b_n$ converge e $A = 0$, então $\sum a_n$ converge.

(b) Se $\sum b_n$ não converge (diverge) e $A = \infty$ então $\sum a_n$ não converge.

Prova. Pela hipótese temos a existência de limite de um quociente, portanto para $\varepsilon > 0$ dado escolhemos um inteiro N tal que $|(a_n/b_n) - A| < \varepsilon$ sempre que $n > N$. Logo para $n = N+1, N+2, \ldots$ temos

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - A < \varepsilon \quad \text{ou} \quad (A-\varepsilon)b_n < a_n < (A+\varepsilon)b_n.$$

Somando apartir de $N+1$ ate M e logo passando o limite ao infinito temos,

$$(A-\varepsilon)\sum_{n\geq N+1} b_n < \sum_{n\geq N+1} a_n < (A+\varepsilon)\sum_{n\geq N+1} b_n$$

Observando o lado direito da desigualdade anterior e supondo que $(A-\varepsilon) > 0$ temos que $\sum a_n$ converge quando $\sum b_n$ converge. A seguir concluimos do lado esquerdo que $\sum a_n$ quando $\sum b_n$ diverge.

Os demais casos do teorema deixamos como exercício para o leitor. □

Exercício 93. Considere as seguintes séries de termos não negativos,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+4}{4n^3-5}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right).$

Mostre de cada série a sua convergência ou divergência.

Solução. Utilizamos critério do quociente, para isto devemos de formar o seguinte quociente,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n+4}{4n^3-5}}{b_n} = \frac{\frac{n+4}{4n^3-5}}{\frac{1}{2n^2}}$$
$$= \frac{(n+4)2n^2}{4n^3-5} = \frac{2n^3+8n^2}{4n^3-5}.$$

Calculando seu limite quando n vai ao infinito,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+8n^2}{4n^3-5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = A \neq 0$$

Pelo critério do quociente, ambas séries convergem ou ambas divergem. Por outro lado sabemos

que série escolhida
$$\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < \infty$$
converge mesmo que multiplicada por uma constante. Logo a série dada, $\sum a_n$, converge.

Para resolver o item (b) devemos escolher a uma série $\sum b_n$ de termos não nulos de maneira o seguinte quociente,
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{b_n} = \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$
tenha como limite um valor não nulo,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 = A \neq 0$$
lembre-se que estamos utilizando $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

Novamente aplicando o critério do quociente e sabendo que a série escolhida é a série harmônica, divergente, então a série dada, $\sum a_n$ é divergente.

Observação 19. *O critério anterior esta bem próximo ao critério de comparação e as vezes pode ser usado como alternativa a ele. Mesmo assim requer algumas habilidades na escolha da série $\sum b_n$ para comparação.*

A seguir temos outro critério,

Teorema 1.23

Considere a série $\sum a_n$ com $a_n \geq 0$, tal que $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = A$. Então,

(a) a série $\sum a_n$ converge se $p > 1$ e A é finito.

(b) a série $\sum a_n$ não converge (diverge) se $p \leq 1$ e $A \neq 0$ (A pode ser infinito)

Prova

Nesta prova escolhemos a série,
$$\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p} = \begin{cases} < \infty \quad (\textit{converge}) & \text{se} \quad p > 1 \\ \infty \quad (\textit{diverge}) & \text{se} \quad p \leq 1 \end{cases}$$
e aplicamos o critério do quociente. □

Exercício 94. Mostre que a seguinte série, $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{4n^3-2}$ converge.

Solução. Aplicando o teorema anterior vemos que para $p = 2 > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{n}{4n^3 - 2} = 1/4 = A < \infty$$

portanto a série dada é convergente. $\Diamond$

Exercício 95. Mostre que a seguinte série, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}}$ não converge.

Solução. Aplicando novamente o teorema anterior vemos que para $p = 1/2 < 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^{1/2} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} n^{1/2} \frac{\ln(n)}{(n+1)^{1/2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2} \ln(n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{1/2} \ln(n) \right\} = A = \infty
\end{aligned}$$

pois, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = \infty$, portanto a série dada é não convergente (divergente). $\Diamond$

Exercício 96. Considere a seguinte série de termos não negativos,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n^3+5}}$$

Mostre a sua convergência ou divergência.

Solução. Calculando o seguinte quociente, teremos

$$\frac{\dfrac{2}{\sqrt{n^3+5}}}{\dfrac{1}{n^p}} = n^p \frac{2}{\sqrt{n^3+5}} = 2\frac{n^p}{\sqrt{n^3+5}} = 2\sqrt{\frac{n^{2p}}{n^3+5}}.$$

Para encontrar um limite finito, devemos escolher a potência apropriada para p neste caso $p = 3/2 > 1$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\dfrac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} n^p a_n = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^{2p}}{n^3+5}} = 2\sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+5}} = 2 = A < \infty \quad (finito)$$

logo a série dada $\sum a_n$ converge. $\Diamond$

Exercícios Propostos

Resolver as seguintes questões sobre séries numéricas

(1) Se $0 \leq u_n \leq v_n$, para $n \geq 1$ e se $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge. Prove que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ é convergente.

(2) Utilizando o critério anterior prove que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

(3) Verificar a convergência ou divergência da série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$.

(4) Sejam u_n e v_n positivos. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = L \neq 0$, prove que converge ou diverge sempre que $\sum_{n\geq 1} v_n$ seja convergente ou divergente.

(5) Verificar a convergência de:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$ (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1}$ (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2 + 3}$

(6) Examinar a convergência de,

(a) $\sum_{n\geq 1} e^{-n^2}$ (b) $\sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{n}\right)$ (c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$

Teorema 1.24: Critério da Razão

Considera a série $\sum a_n$ de termos não negativos e suponhamos que o limite,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad \text{existe.}$$

Então temos as seguintes conclusões,

(a) a série $\sum a_n$ converge se $L < 1$.

(b) a série $\sum a_n$ não converge se $L > 1$ ou se $L = +\infty$.

(c) não podemos afirmar nada sobre a série se $L = 1$. O critério falha.

Prova. Pela existência do limite L podemos escolher N grande de maneira que para todo $n \geq N$ e o quociente $(a_{n+1}/a_n) < s$ onde $L < s < 1$. Então obtemos as seguintes desigualdades,

$$\begin{aligned} a_{N+2} &< s a_{N+1} \\ a_{N+3} &< s a_{N+2} < s^2 a_{N+1} \\ a_{N+4} &< a s_{N+3} < s^3 a_{N+1} \\ \vdots &< \vdots \end{aligned}$$

Somando membro a membro obtemos,

$$a_{N+2} + a_{N+3} + a_{N+4} + \cdots < a_{N+1}(s + s^2 + s^3 + \cdots)$$

Assim a série dada converge pelo teste de comparação, pois $0 < s < 1$. Os outros casos se mostram de forma equivalente. □

Observação 20. *Aplicar este teste quando o termo a_n envolva fatoriais ou n-ésimas potências.*

Exercício 97. Sejam a seguintes séries,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$,

Aplicar o critério da razão para mostrar a convergência ou não convergência.

Solução. Construindo o quociente e tomando limite ao infinito temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1
\end{aligned}$$

portanto a série não é convergente.

Na segunda série temos,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

portanto a série converge.

Finalmente na última série temos,

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

como essa série converge para $p > 1$ e não converge para $p \leq 1$, o critério da razão possivelmente não possa dar nenhuma informação no caso $L = 1$. ♢

Teorema 1.25: Critério da Raiz n-ésima

Seja a série $\sum a_n$ com termos não negativos e suponhamos que o limite,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \qquad \text{existe.}$$

Então temos as seguintes conclusões,

(a) a série $\sum a_n$ converge se $L < 1$.

(b) a série $\sum a_n$ não converge se $L > 1$.

(c) não podemos afirmar nada sobre a série se $L = 1$. O critério falha.

Observação 21. *Aplicar este teste quando o termo a_n da série envolva n-ésimas potências.*

Exercício 98. Mostre a convergência ou não convergência da seguintes séries

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (n^{1/n}-1)^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{1}{(\ln n)^n}$

Solução. Aplicar o teste da raiz n-ésima e vemos que as três séries são convergentes.

Com efeito, para o exercício (a) temos que,

$$\sqrt[n]{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Aplicando limite quando n vai ao infinito , obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

Como o limite é menor que um, então a série converge, pelo teste da n-ésima raiz.

Para a série b), também procedemos da mesma forma,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n^{1/n}-1)^n} = \lim_{n\to\infty} (n^{1/n}-1)$$

Por outro lado temos o limite,

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^{\lim \frac{\ln(n)}{n}} = e^0 = 1$$

existe, aplicando L'hospital no último limite ou fazendo uso da seguinte desigualdade do cálculo elementar, $\ln x < x$ onde $x = \sqrt{n}$

$$\ln(\sqrt{n}) < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln n < \sqrt{\frac{n^2}{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln n < \frac{n}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{\ln n}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

assim obtemos a desigualdade,

$$0 \leq \frac{\ln n}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Aplicando a desigualdade de Hamburger temos que,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} < \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0,$$

logo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. Assim obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (n^{1/n}-1) = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Portanto a série converge pelo teste da n-ésima raiz.

Finalmente na série c) temos,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln(n)}$$

Tomando limite sobre a_n quando n vai ao infinito temos,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0,$$

logo a série dada converge pelo teste da n-ésima raiz. $\diamondsuit$

Exercícios Propostos

Resolver os seguintes exercícios

(1) Pesquisar a convergência das seguintes séries

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^4 e^{-n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$

(2) Verifique a convergência da série $1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + \cdots$ quando;

(a) $r = \dfrac{2}{3}$ (b) $r = \dfrac{-2}{3}$ (c) $r = \dfrac{4}{3}$

(3) Use o teste da razão para provar que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(3-4j)^n}{n!}$ é convergente.

Teorema 1.26: Critério de Raabe

Seja a série $\sum a_n$ com termos não negativos e suponhamos que o limite,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right], \qquad \text{existe.}$$

Então temos as seguintes conclusões,

(a) a série $\sum a_n$ converge se $L > 1$.

(b) a série $\sum a_n$ não converge se $L < 1$.

(c) não podemos afirmar nada sobre a série se $L = 1$.

Exercício 99. Determinar se as séries,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-1}{2n^3+3}$

são convergentes ou não convergente.

Solução. Aplicando primeiro o critério da razão temos $L = 1$ logo aplicamos o critério de Raabe e obtemos $L = 3$ portanto é convergente. A segunda série é trabalhada de maneira análoga, resultando $L = 0 < 1$, portanto não convergente. $\diamondsuit$

Teorema 1.27: Critério da Integral

Seja uma série $\sum a_n$ de termos não negativos e suponhamos que existe uma função f positiva, contínua e não crescente e no intervalo $[N,\ \infty[$, tal que $f(n) = a_n$ para $n = N,\ N+1,\ N+2,\ N+3, \ldots$. Então

$$\text{a série} \quad \sum_{n=N}^{\infty} a_n \quad \text{e a integral} \quad \int_N^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_N^M f(x)\,dx$$

convergem ou não convergem juntas. Em particular podemos tomar $N = 1$.

Prova. Fazemos a prova para $N = 1$. Pela monotonia de f temos,

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n, \quad n \geq 1.$$

Integrando de $x = n$ ate $x = n+1$ e pela monotonia da integral obtemos,

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n, \quad n \geq 1.$$

Somando de $n = 1$ ate $M - 1$,

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_M \leq \int_1^M f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1}. \tag{1.48}$$

Devemos reparar que se f for estritamente decrescente o sinal de igualdade na desigualdade (1.48) poderia ser omitida.

Estudamos os seguintes casos,

Se o limite $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx$ existe e é igual L, então no lado esquerdo da desigualdade (1.48) a soma parcial $a_2 + a_3 + \cdots + a_M$ é crescente e esta limitada por L, assim pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge.

Se o limite $\lim\limits_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx$ não existe ou é não limitado, então no lado direito da desigualdade (1.48) a soma parcial $a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1}$ é crescente e não limitada, logo o série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ não converge. Portanto a prova esta completada. □

Observação 22. *Aplicar este teste quando for fácil de integrar a função f. Também devemos notar que se a série converge, o valor da integral (em geral) não é o mesmo que a soma da série. Porém a soma aproximada de uma série pode ser obtida exatamente utilizando integrais.*

Exercício 100. Considere as seguintes séries,

(a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$, (c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$,

(d) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1.01}}$, (e) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, (f) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{0.99}}$

e aplique o critério da integral para mostrar a convergência ou a não convergência.

Solução. Nesta primeira série (a) devemos aplicar o critério da integral com $f(x) = 1/x$ para obter,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} [\ln(a)] = \infty$$

Na item (b) temos um caso mais geral pois,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^a, \quad p \neq 1,$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[\frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right]$$

o anterior limite existe quando $-p+1 < 0$ ou $p > 1$, portanto a p-série $\sum 1/n^p$ é convergente se $p > 1$ e não é convergente ou divergente quando $p \leq 1$.

Com este resultado a série (c) e a série (d) são um caso particular da discussão anterior, logo são convergentes. Finalmente pelo mesmo resultado a série (e) e a série (f) são divergentes. $\Diamond$

Exercícios Propostos

Resolver as seguintes questões sobre séries numéricas

(1) Verificar a convergência de,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$, p é constante

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} ne^{-n^2}$

(2) Provar a seguinte desigualdade:

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

(3) Use o critério da integral para provar que a série,

$$\sum_{n=1} ne^{-n} \qquad \text{é convergente.}$$

1.5 Convergência Absoluta

A sequência de somas parciais associada com uma série de termos não negativos é não decrescente, portanto a série converge ou não converge se a sequência esta limitada superiormente ou não. Para séries mais gerais a questão depende sutilmente da magnitude e distribuição termos positivos e negativos. Nesta seção trataremos de séries que são *absolutamente convergentes* e séries cujos termos se alternam em sinal.

Definição 10: absolutamente Convergente

Dizemos que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente, se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ é convergente.

Teorema 1.28

Se a série de valores absolutos $\sum |a_n|$ converge, então a série $\sum a_n$ converge. Simplesmente, a convergência absoluta implica a convergência.

Prova. Considere a seguintes somas parciais,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad Q_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

logo a soma deles é,

$$\begin{aligned} S_n + Q_n &= (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots + (a_n + |a_n|) \\ &\leq 2|a_1| + 2|a_2| + \cdots + |a_n| \end{aligned}$$

Como a série de valores absolutos converge e cada termo $a_n+|a_n| \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$, então a sequência $\{S_n + Q_n\}$ é limitada e monótona, pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass existe seu limite.

Portanto o limite,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[S_n + Q_n - Q_n] = \lim_{n\to\infty}[S_n + Q_n] - \lim_{n\to\infty} Q_n$$

existe, porque cada limite existe, e assim temos provado o Teorema. □

Exercício 101. Analizar a convergência da série

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$$

Solução. Aplicando valor absoluto a cada termo da série dada, temos

$$\sum_{n\geq 1} \left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right| \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$$

Utilizando o teste da raiz obteremos,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$$

logo a série dada é absolutamente convergente. ◊

Corolário 1.5.0.1. *Toda série convergente com termos não negativos,*

$$\sum_{n\geq 0} a_n < \infty, \qquad a_n \geq 0,$$

é absolutamente convergente.

Exercício 102. Mostre que as seguintes séries são absolutamente convergentes,

(a) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}$ (b) $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\dfrac{n^5}{3^n}$.

Solução. Aplicando a definição no item a) teremos que mostrar que a série

$$\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^n\frac{1}{3^n}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n} = 1-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n} = 1-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

de valores absolutos é uma série convergente. Após os cálculos obtemos uma série geométrica convergente. Portanto a série dada é absolutamente convergente.

Para resolver o segundo exemplo (b) aplicamos a mesma definição e assim teremos a série de valores absolutos,

$$\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^n\frac{n^5}{3^n}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{n^5}{3^n}$$

A seguir aplicamos qualquer critério para séries com termos não negativos. Escolhendo o critério da razão teremos,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n^5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} < 1$$

logo é convergente. Assim novamente a série dada é absolutamente convergente. $\diamondsuit$

Exercícios Propostos

Resolver as seguintes questões sobre séries numéricas

(1) Provar que uma série absolutamente convergente é convergente.

(2) Pesquisar a convergência da série

$$\frac{\operatorname{sen}\sqrt{1}}{1^{3/2}} - \frac{\operatorname{sen}\sqrt{2}}{2^{3/2}} + \frac{\operatorname{sen}\sqrt{3}}{3^{3/2}} - \cdots$$

(3) Verificar a convergência absoluta e logo a convergência das seguintes séries;

(a) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ (b) $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$ (c) $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n-1}2^n}{n^2}$

Muitos critérios importantes se aplicam para séries de termos não negativos, porém o Teorema 1.28 fornece um marco apropriado para muitos casos de aplicação destes critérios a *séries arbitrárias*. O Critério da Razão, por exemplo, toma agora a seguinte forma,

Teorema 1.29: Critério da Razão

Considera a série $\sum a_n$ de termos não nulos e suponhamos que o limite,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad \text{existe.}$$

Então temos as seguintes conclusões,

(a) a série $\sum a_n$ converge absolutamente se $L < 1$.

(b) a série $\sum a_n$ não converge (diverge) se $L > 1$ ou $L = \infty$.

(c) não podemos afirmar nada sobre a série se $L = 1$.

Prova

Exercício para o leitor. □

Exercício 103. Determinar o conjunto de valores de x para os que a série,

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n\, n \left(\frac{x}{2}\right)^{3n} = -\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{2}\right)^6 - 3\left(\frac{x}{2}\right)^9 + \cdots$$

converge.

Solução. Dado que $a_n = (-1)^n\, n \left(\frac{x}{2}\right)^{3n}$ temos o seguinte quociente,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(x/2)^{3n+3}}{(-1)^n n(x/2)^{3n}}\right| = \left|\frac{n+1}{n}(x/2)^3\right| = \frac{n+1}{n}\left|\frac{x}{3}\right|^3$$

Logo temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\left|\frac{x}{3}\right|^3 = \left|\frac{x}{3}\right|^3,$$

a série considerada converge se $|x/2|^3 < 1$ e não converge se $|x/2|^3 > 1$ ou equivalentemente a série converge para valores no intervalo $-2 < x < 2$ e não converge para $|x| > 2$. Finalmente, para determinar o comportamento da da série nos pontos $x = \pm 2$ se observa que o termo geral é $\pm(-1)^n\, n$ e neste caso essa quantidade não tende a zero, assim a série não converge em ambos pontos. ◊

É um fato desafortunado é que uma série possa convergir, sem convergir absolutamente, e para tal série, geralmente conhecida como *condicionalmente convergente* não servem os outros critérios de convergência estudados ate agora.

Exercício 104. Considere a seguinte série,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Mostre que é uma série condicional convergente.

Solução. Quando tomamos a série dos valores absolutos,

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n},$$

é não convergente pelo critério da integral.

Inicialmente temos que se trata se uma série harmônica alternada e cujas somas parciais se aproximam a um limite, pelo Teorema 1.30. $\Diamond$

O exemplo anterior é tipico das *séries alternadas* e temos um útil critério de convergência.

1.6 Séries Alternadas, Critérios

Os critérios ate agora estudados foram para séries com termos não negativos. A seguir lidaremos com séries que podem ter termos negativos. Quando uma série possue termos com sinais alternados estamos com uma série chamada de *série alternada*.

Apresentamos o seguintes exemplos,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdots \tag{1.49}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}6}{3^n} = -\frac{6}{3} + \frac{6}{3^2} - \frac{6}{3^3} + \frac{6}{3^4} - \frac{6}{3^5} + \cdots \tag{1.50}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \cdots \tag{1.51}$$

A série (1.49) é conhecida como série harmônica alternada e converge. A série (1.50) é uma série geométrica com $a = -2$ e razão $r = -1/3$ portanto convergente. Finalmente a série (1.51) diverge, aplicando o teste do n-ésimo termo.

Mostramos a convergência das séries alternadas utilizando o seguinte critério

Teorema 1.30: Critério de Séries Alternadas

A série numerica cujos termos possuem sinal alternado

$$\sum_{n=1}^{\infty}, (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

convirgirá se todas as três condições a seguir forem satisfeitas

(a) os elementos a_n devem ser todos positivos, $a_n > 0$

(b) $a_n \geq a_{n+1}$ para $n \geq M$, para algum M inteiro, ou

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$$

(c) o limite do n-ésimo termo é zero, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Prova. Tentamos construir a n-éssima soma parcial, quando $n = 2m$, isto é,

$$\begin{aligned} s_n = s_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} a_k = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \end{aligned}$$

A primeira igualdade mostra, devido a que $a_n \geq a_{n+1}$, que s_{2m} é a soma de m termos nao negativos, pois cada somando agrupado nos parênteses é zero ou positivo, portanto

$$s_{2m+2} \geq s_{2m}$$

logo a sequência de somas parciais $\{s_{2m}\}_{m \geq 1}$ é crescente.

De maneira análoga pela observação da segunda igualdade, o termo s_{2m} é a diferença do processo de substração de a_1 e os demais termos negativos, portanto a sequência de somas parciais esta limitada superiormente, isto é, $s_{2m} \leq a_1$.

Por um resultado já estudado, se sequência esta limitada superiormente e é crescente, tem limite e o denotamos por,

$$\lim_{m \to \infty} s_{2m} = M.$$

Considerando agora um inteiro ímpar, $n = 2m + 1$, então a soma dos n primeiros termos será,

$$\begin{aligned} s_n = s_{2m+1} &= \sum_{k=1}^{2m+1} (-1)^{k+1} a_k = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} a_k + a_{2m+1} \\ &= s_{2m} + a_{2m+1} \end{aligned}$$

Calculando limite,

$$\lim_{n \to \infty} s_{2m+1} = \lim_{n \to \infty} S_{2m} + \lim_{n \to \infty} a_{2m+1} = M + 0 = M$$

pois, pela hipótese, $a_n \to 0$ então temos que $a_{2m+1} \to 0$.

Utilizando o resultado: seja a sequência $\{s_n\}$ aonde os termos pares são denotados por s_{2m} e os termos ímpares por s_{2m+1}. Portanto pelos fatos mostrados $s_{2m} \to M$ e $s_{2m+1} \to M$ podemos inferir que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = M$$

isto quer dizer que a série alternada é convergente. □

Exercício 105. Verificar a convergência das seguintes séries alternadas

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$

Solução. Os termos da primeira série possuem sinais alternados e decrescem em valor absoluto,

$$\frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10} \cdots$$

Além disso,

$$\frac{n}{n^2+1} \to 0.$$

Pelo critério das séries alternadas de Leibnitz a primeira série é convergente.

Na segunda série alternada procedemos da seguinte forma,

$$\sum_{n\geq 2} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}\right| = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$$

neste ponto aplicamos o critério da integral, para isto devemos calcular a integral imprópria, sempre que a função f seja decrescente (verificar!)

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x} dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^2 x} dx \\
= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{\ln^2 x}\, d[\ln(x)] = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln(n)}\Big|_2^b \\
= \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{1}{\ln(b)} + \frac{1}{\ln(2)}\right\} = \frac{1}{\ln(2)} < \infty.
\end{aligned}$$

logo a série $b)$ converge absolutamente, portanto a série dada é convergente. ◊

Exercício 106. Considere a seguinte série,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x+1)^n}{2n+1}$$

para que valores de x a série é convergente?

Solução. Pelo critério da razão aplicado a série em questão temos que converge absolutamente se $|x+1| < 1$ e não converge se $|x+1| > 1$, equivalentemente converge no intervalo $-2 < x < 0$. Nos pontos extremos deste intervalo o critério não da informação.

Substituindo os valores $x = -2$ e $x = 0$ na série, temos as seguintes,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad\qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}$$

respectivamente.

A primeira série converge, é uma série alternada e aplicamos o critério de Leibnitz, Teorema **??**. A segunda série de termos positivos não converge, utilizando em particular o critério da integral.

Assim a série de potências dada converge no intervalo $-2 \leq x < 0$ e não converge fora desse intervalo. $\Diamond$

Exercício 107. Dada a série alternada $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ onde $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Prove as seguintes afirmações:,

(a) A série converge

(b) O erro produzido parando num termo qualquer não é maior que o valor absoluto do seguinte termo.

Solução. Para responder a primeira questão, construimos a sequência de somas parciais,

$$\begin{aligned} S_{2M} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2M-1} - a_{2M}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2M-2} - a_{2M-1}) - a_{2M}. \end{aligned}$$

As quantidades agrupadas são não negativas, pela hipótese. Portanto podemos construir,

$$S_{2M} \geq 0, \quad S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq S_8 \leq \cdots \leq S_{2M} \leq a_1.$$

Logo a sequência $\{S_{2M}\}$ é limitada e monótona, pelo Teorema de Bolzano-Weiertrass possui limite S.

Por outro lado temos que

$$\lim_{M\to\infty} S_{2M+1} = \lim_{M\to\infty} S_{2M} + \lim_{M\to\infty} a_{2M+1} = S + 0 = S$$

onde

$$S_{2M+1} = S_{2M} + a_{2M+1}, \quad \lim_{M\to\infty} a_{2M+1} = 0, \quad \lim_{M\to\infty} S_{2M} = S$$

e o primeiro limite é nulo também pela hipótese sobre o n-ésimo termo da série. Assim as somas parciais se aproximam do limite S e a série é convergente. $\Diamond$

Na segunda questão o erro será analizado em duas situações. O erro cometido ao parar apos $2M$ termos é

$$(a_{2M+1} - a_{2M+2}) + (a_{2M+3} - a_{2M+4}) + \cdots = a_{2M+1} - (a_{2M+2} - a_{2M+3}) - \cdots$$

também é não negativo menor o igual ao termo a_{2M+1}, o primeiro termo não considerado.

De maneira semelhante no outro caso, o erro cometido ao parar após $2M+1$ termos é,

$$-a_{2M+2}+(a_{2M+3}-a_{2M+4})+\cdots=-(a_{2M+2}-a_{2M+3})-(a_{2M+4}-a_{2M+5})-\cdots$$

o qual é não positivo e maior que $-a_{2M+2}$.

Teorema 1.31: Estimativa para Séries Alternadas

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

satisfaz as condições do critério de convergência dado no Teorema 1.30, então o erro de truncamento para a n-ésima soma parcial é menor do que a_{n+1} e tem o mesmo sinal do termo não utilizado. Em outras palavras, se s é a soma da série e s_n é a n-ésima soma parcial, então,

$$|R_n|=|s-s_n|\leq a_{n+1}.$$

Prova. O erro será analizado em duas situações. O erro cometido ao parar após $2m$ termos é

$$S-S_{2m}=(a_{2m+1}-a_{2m+2})+(a_{2m+3}-a_{2m+4})+\cdots=a_{2m+1}-(a_{2m+2}-a_{2m+3})-\cdots$$

também é não negativo menor o igual ao termo a_{2m+1}, o primeiro termo não considerado.

De maneira semelhante no outro caso, o erro cometido ao parar após $2m+1$ termos é,

$$S-S_{2m+1}=-a_{2m+2}+(a_{2m+3}-a_{2m+4})+\cdots=-(a_{2m+2}-a_{2m+3})-(a_{2m+4}-a_{2m+5})-\cdots$$

o qual é não positivo e maior que $-a_{2m+2}$. □

Exercício 108. Considere a série alternada,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}\Bigg|+\frac{1}{256}\cdots$$

Encontre o erro ao se aproximar com os oito primeiros termos. Quantos termos da série são necessários para obter um erro que não exceda o número $0,001$ em valor absoluto?

Solução. Aplicando o critério das séries alternadas a série dada é convergente e possue soma, pois se trata de uma série geométrica cuja razão é $r=-1/2$. O Teorema **??**, Estimativa para séries alternadas, diz que, se truncarmos a série depois do oitavo termo, descartamos um total que é positivo e menor do que o nono termo $1/256$. Implementamos esta afirmação a seguir.

A soma dos primeiros oito termos,

$$S_8=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}=0,6640625$$

A soma infinita, S da série é,

$$S=\frac{2}{3}=\frac{1}{1-(-1/2)}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}$$

Logo a diferença, ou erro

$$R_8 = S - S_8 = \frac{2}{3} - 0,6640625 = 0,002604166\ldots < \frac{1}{256} = 0,00390625$$

observamos que a quantidade procurada R_8 é positiva e menor que $1/256$.

Finalmente, o valor absoluto do erro ao truncar a série depois do k-ésimo termo deve ser menor que $1/2^{k+1}$. Para obter a precisão desejada devemos resolver a inequação,

$$\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{1000}$$

de onde obtemos $k \geq 8,9665$. Assim são necessários pelo menos nove termos. $\lozenge$

Exercícios Propostos

Aplicar o exemplo anterior para resolver a seguinte questão

(1) Considerando uma série alternada,

(a) Prove a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ converge.

(b) Encontre o máximo erro feito ao aproximar-se com os primeiros oito termos e com os primeiros nove termos. **Resp:** positivo e não supera $1/17$.

(c) Quantos termos da série são necessários para obter um erro que não exceda o número $0,001$ em valor absoluto? **Resp:** pelo menos 500 termos.

A seguir temos o equivalente ao critério da Raiz com termos não negativos

Teorema 1.32: Critério da Raiz n-ésima

Seja a série $\sum a_n$ com termos não nulos e suponhamos que o limite,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad \text{existe.}$$

Então temos as seguintes conclusões,

(a) a série $\sum a_n$ converge (absolutamente) se $L < 1$.

(b) a série $\sum a_n$ não converge ou converge condicionalmente se $L > 1$.

(c) não podemos afirmar nada sobre a série se $L = 1$.

Exercício 109. Verificar a convergência da série,

$$1 + 2s + s^2 + 2s^3 + s^4 + 2s^5 + \cdots, \quad \text{onde} \quad s = 2/3,\ s = -2/3,\ s = 4/3.$$

Solução. Utilizando o critério da raiz e observando que os termos de potências ímpares estão multiplicados pela constante 2, obteremos

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2|s^n|} & = \sqrt[n]{2}\,|s|, \quad n \quad \text{ímpar} \\ \sqrt[n]{|s^n|} & = |s|, \qquad n \quad \text{par} \ . \end{cases}$$

Calculando o limite quando n vai para o infinito,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|s|^n} = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} |s| = |s|$$

pois o limite $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$.

Portanto se $|s| < 1$ a série converge, e se $|s| > 1$ a série diverge.

Finalmente as séries convergem para os casos $s = 2/3$, $s = -2/3$ e não converge (diverge) para $s = 4/3$. $\diamondsuit$

Se termina esta seção estabelecendo sem demostração, uma importante propriedade das séries de convergência absoluta que não compartilham as séries *condicionalmente convergentes*.

Teorema 1.33: Critério de Reagrupamento

Se a série $\sum_{n\geq 1} a_n$ é absolutamente convergente e se $\sum_{n\geq 1} b_n$ é qualquer série obtida ao reagrupar os termos da série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$, então a série $\sum_{n\geq 1} b_n$ também é absolutamente convergente e possui a mesma soma.

Numa série condicionalmente convergente, um "reagrupamento de seus termos" pode alterar o valor de sua soma infinita e até tornar-lá divergente.

Exercícios Propostos

Resolver os seguintes exercícios sobre séries numéricas

(1) Considere a série $\sum w_n$. Prove que se $\left|\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right| \leq q < 1$, $\forall\ n$ então o resto

$$R_n = w_{n+1} + w_{n+2} + w_{n+3} + \cdots$$

satisfaz a desigualdade $|R_n| \leq |w_{n+1}|(1/1-q)$. Use isto para calcular o número de termos que deve-se somar na série $\sum q^n$ para aproximar a soma total com um erro de $0,01$ nos casos $q = 0,25$, $q = 0,5$ *e* $q = 0,9$.

(2) Analisar a convergência ou a divergência das seguintes séries,

(a) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots$

(b) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

(c) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots$

(d) $1 + 10i + \dfrac{(10i)^2}{2!} + \dfrac{(10i)^3}{3!} + \cdots$

(e) $1 + \dfrac{i}{2} + \dfrac{i^2}{2^2} + \dfrac{i^3}{2^3} + \cdots$

(f) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^n}{n!}$

(g) $\sum_{n\geq 0} \frac{(10+5i)^n}{n!}$

(h) $\sum_{n\geq 1} \frac{(3-4i)^n}{4}$

(i) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(10i)^{2n}}{(2n)!}$

(j) $\sum_{n\geq 0} i^n$

Ainda sobre o exercício (j) reagrupando a série da seguinte maneira;

$$(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+(1+i-1-i)+\cdots$$

a soma resultará zero, qual é o erro visto que a série é divergente?

1.7 Critério de Convergência de Séries Complexas

Os testes de convergência nos complexos são semelhantes aos testes nos reais e são aplicados as séries antes de usá-las. A divergência as vezes é muito mais simples de verificar, assim podemos perceber no seguinte teorema

Teorema 1.34: Divergência

Se a série $\sum z_n$ converge então $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Se isto não se verifica então a série não converge (diverge).

Prova

Se $\sum z_n$ converge com soma s e por outro lado temos da definição de somas parciais que $z_n = s_n - s_{n-1}$ assim

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

Observação 23. *O limite $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ é uma condição necessária para a convergência porém não suficiente, um exemplo claro disto é a série harmônica que satisfaz $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ porém não converge.*

A dificuldade prática para provar a convergência é que em muitos casos a soma da série é desconhecida. O critério de Cauchy contorna este problema mostrando que a série converge se e somente se os seus termos estão uns bem próximos dos outros.

Teorema 1.35: Critério de Cauchy para Séries

Uma série $\sum z_n$ é convergênte se e somente se para cada $\varepsilon > 0$ (bem pequeno) podemos encontrar um $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon \qquad n > N \quad \text{e} \quad p = 1, 2, \cdots \tag{1.52}$$

Convergência Absoluta. Uma série $\sum z_n$ é chamada de absolutamente convergente se a série dos valores absolutos de seus termos;

$$\sum_{n\geq 1} |z_n| = |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots$$

é convergente.

Convergência Condicional. Se a série $\sum z_n$ converge porém a série $\sum |z_n|$ diverge, então a série $\sum z_n$ é chamada de condicionalmente convergente.

Exercício 110. Considere a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Vefrificar a sua convergência.

Solução. Vemos que ela converge so de forma condicional, aplicando o critério de Leibnitz para séries alternadas. $\Diamond$

Finalmente temos um Teorema que é uma inferência do Critério de Cauchy.

Teorema 1.36: Convergência Absoluta

Se uma série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

O mesmo critério de Cauchy nos leva ao seguinte Teste;

Teorema 1.37: Teste de Comparação

Seja a série $\sum z_n$ dada e se encontramos uma série $\sum b_n$ com termos reais não negativos convergente tal que

$$|z_n| \leq b_n \qquad \forall\ n = 1,\ 2, \cdots$$

então a série dada é absolutamente convergente, logo convergente.

Prova. Pelo princípio de Cauchy como $\sum b_n$ converge, para cada $\varepsilon > 0$ temos um $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + \cdots + b_{n+p}| < \varepsilon, \qquad n > N \quad p = 1, 2, 3, \cdots$$

Da afirmação anterior e $|z_1| \leq b_1,\ |z_2| \leq b_2, \cdots$ chegamos a conclusão

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \cdots + |z_{n+p}| \leq b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon$$

novamente aplicando o princípio de Cauchy $\sum |z_n|$ converge e logo a série $\sum z_n$ é absolutamente convergente. $\square$

Uma boa série de comparação é a série geométrica a qual possui o seguinte comportamento.

Teorema 1.38: Série Geométrica

A série geométrica

$$\sum_{n\geq 1} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + \cdots$$

converge com soma $\dfrac{1}{1-r}$ se $|r| < 1$ e não converge se $|r| \geq 1$

Prova. Se $|r| \geq 1$ então temos que $|r^m| \geq 1$, e tomando um $\varepsilon = 1/2$ não existe um número $N = N(\varepsilon)$ tal que $|r^m| < 1/2$, se fosse assim teriamos $1 < 1/2$. Portanto a série diverge.

Agora para $|r| < 1$, a n-ésima soma parcial é

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$$

$$-rs_n = -r - r^2 - r^3 - \cdots - r^{n-1} - r^n$$

somando membro a membro obtém-se

$$s_n - rs_n = (1-r)s_n = 1 - r^n$$

Resolvendo para s_n e observando que $r - 1 \neq 0$ pois $r \neq 1$ encontramos que

$$s_n = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Como $|r| < 1$ o último limite é zero. Finalmente a série é convergente e a soma é $\dfrac{1}{1-r}$. Isto completa a demonstração. $\square$

Teste da Razão. É teste mais importante em nosso trabalho e obtemos os seguintes resultados tomando a séries geométricas como as séries de comparação.

Teorema 1.39: Primeira Forma

Se a série $\sum z_n$ com $z_n \neq 0$ tem a propriedade que para cada n maior que algum N,

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq q < 1 \qquad n > N \tag{1.53}$$

onde ($q < 1$ é fixado), então esta série converge absolutamente.
Se para cada $n > N$

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq 1 \qquad n > N \tag{1.54}$$

então a série diverge.

Prova. Se a afirmação é valida, então $|z_{n+1}| \geq |z_n| \quad \forall n > N$ logo pelo Teorema (Divergência) a série é divergente.

Se a afirmação (1.54) é valida então $|z_{n+1}| \leq |z_n|\, q \quad \forall\, n > N$ em particular quando

$$|z_{N+2}| \leq |z_{N+1}|\, q, \quad |z_{N+3}| \leq |z_{N+2}|\, q \leq |z_{N+1}|\, q^2, \quad \text{etc.},$$

e em geral obtemos $|z_{N+p}| \leq |z_{N+1}|\, q^{p-1}$. Assim

$$|z_{N+1}| + |z_{N+2}| + |z_{N+3}| + \cdots \leq |z_{N+1}|(1 + q + q^2 + \cdots)$$

A convergência absoluta da série $\sum_{n\geq 1} z_n$ resulta do Teste de comparação e a série geométrica, pois $q < 1$. □

Observação 24. *A desigualdade (1.53) implica* $\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$ *porém isto não implica convergência, isto pode ser verificado se tomamos a série harmônica onde* $\left|\dfrac{n}{n+1}\right| < 1$ *para todo* n *porém ela diverge.*

Se as sequências nas razões (1.53) e (1.54) convergem, temos um teste mais conveniente,

Teorema 1.40: Segunda Forma

Se uma série $\sum_{n\geq 1} z_n$ com $z_n \neq 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L \tag{1.55}$$

(a) Se $L < 1$, então a série converge absolutamente.

(b) Se $L > 1$, a série diverge.

(c) Se $L = 1$, o teste falha, não é possível nenhuma conclusão.

Prova. Para fazer a prova dos três itens procedemos da seguinte forma;

(1) Escrevemos $k_n = |z_{n+1}/z_n|$ a expresão em (1.55). Consideramos $L = 1 - b < 1$. Logo por definição de limite, k_n esta bem perto de $1 - b$ de maneira que para $\varepsilon = b/2$ obtemos:

$$k_n \leq q = 1 - b/2 < 1, \qquad \forall\, n > N$$

com isto pronto podemos aplicar o teorema anterior para garantir a convergência da série $\sum_{n\geq 1} z_n$.

(2) De maneira semelhante para $L = 1 + c > 1$ podemos obter k_n esta bem perto de $1 + c$ de maneira que para $\varepsilon = c/2$ obtemos:

$$k_n \geq q = 1 + c/2 > 1, \qquad \forall\, n > N_1 \text{ muito grande}$$

assim temos que série $\sum_{n\geq 1} z_n$ diverge pelo Teorema anterior.

(3) A série harmônica tem o quociente $z_{n+1}/z_n = n/(n+1)$ tomando limite, temos $L = 1$ porém a série diverge.

Se tomamos a série $\sum\limits_{n\geq 1} 1/n^2$ e aplicando o quociente $z_{n+1}/z_n = n^2/(n+1)^2$, tomando limite, $L = 1$, porém vejamos que ela converge. A convergência é justificada pelo seguinte raciocínio;

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$$

de maneira que as sequências de somas parciais $\{s_n\}_{n\geq 1}$ é limitada e monótona (crescente, todos os termos são positivos), logo estas duas características são suficientes para garantir a convergência. □

Exercício 111. Considere a seguinte série complexa

$$\sum_{n\geq 1} z_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(100+75\,i)^n}{n!} = 1 + (100+75\,i) + \frac{1}{2!}(100+75\,i)^2 + \cdots$$

Verificar se é convergente ou divergente.

Solução. Aplicando o Teorema do critério da razão, em sua segunfda forma, a série dada é convergente, pois

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{|100+75i|^{n+1}/(n+1)!}{|100+75i|^n/n!} = \frac{|100+75i|}{n+1} = \frac{125}{n+1} \to L = 0 < 1$$

portanto obtemos o resultado desejado. ◊

Exercício 112. Seja a série complexa

$$\sum_{n\geq 0} z_n = \sum_{n\geq 0} \Big(\frac{j}{2^{3n}} + \frac{1}{2^{3n+1}}\Big) = \sum_{n\geq 0} \Big(\frac{1}{2^{3n+1}} + \frac{j}{2^{3n}}\Big).$$

Verificar se a série acima é convergente ou divergente.

Solução. Observando os termos da serie complexa

$$\sum_{n\geq 0} z_n = \sum_{n\geq 0} \Big(\frac{j}{2^{3n}} + \frac{1}{2^{3n+1}}\Big) = (x_0+y_0j) + (x_1+y_1j) + (x_2+y_2j) + (x_3+y_3j) + (x_4+y_4j) \cdots$$

$$= j + \frac{1}{2} + \frac{j}{8} + \frac{1}{16} + \frac{j}{64} + \frac{1}{128} + \cdots$$

Aplicamos o critério da razão na sua primeira forma, nossa preocupação é com a razão dos valores absolutos de seus valores sucessivos e estes são

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \ldots$$

escolhendo o valor $q = 1/8$ obtemos a convergência. Em geral temos o quociente

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{z_{n+1}\,\overline{z_n}}{z_n\,\overline{z_n}}\right| = \frac{|z_{n+1}\,\overline{z_n}|}{|z_n|^2} = \frac{1}{5}2^{6n+2}\left[\frac{1}{2^{6n+5}} + \frac{1}{2^{6n+3}}\right] = \frac{1}{8}, \quad n \geq 1.$$

que confirma o resultado obtido para alguns valores de n.

Observamos que a sequência destes valores não possui limite portanto não podemos aplicar o critério da razão na segunda forma.

Podemos utilizar tanbém o Teorema 1.13 para estudar as series parte real e parte imaginária

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \text{com} \quad z_n = x_n + j\, y_n$$

converge e tem a soma infinita $s = a + j\, b$ se e somente

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \to a \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n \to b,$$

isto é, a parte real converge e tem soma a e parte imaginária converge e tem soma b. Para a conclusão do exercício devemos justificar a convergência,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n+1}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}.$$

Por simples inspeção ambas series, parte real e parte imaginaria são séries geometricas e convergentes. ◊

Teste da Raiz. Na prática os testes mais importantes são os testes de raiz e da razão. O teste da razão é geralmente mais simples; o teste da raiz é mais geral.

Teorema 1.41: Primeira Forma

Se a série $\sum_{n\geq 0} z_n$ tal que para cada n maior que algum N,

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1 \qquad n > N \tag{1.56}$$

onde ($q < 1$ é fixado), então esta série converge absolutamente.
Se para qualquer n,

$$\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1 \qquad n > N \tag{1.57}$$

então a série diverge.

Prova. Se a relação (1.56) é válida então $|z_n| \leq q^n < 1, \quad n > N$. Logo a série $\sum |z_n|$ converge por comparação com a série geométrica, assim temos a série $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge absolutamente. Se a relação (1.57) for válida então $|z_n| \geq 1 \quad \forall n$. A divergência de $\sum z_n$ segue do Teorema (Divergência). □

Observação 25. *A equação (1.56) implica $\sqrt[n]{|z_n|} < 1$, porém isto não implica convergência, as séries harmônicas satisfazem $\sqrt[n]{1/n} < 1$ mas ela diverge.*

Se as séries (1.56) e (1.57) convergem, temos um critério mas conveniente.

Teorema 1.7.1 (Segunda Forma). *Se uma série* $\sum_{n\geq 1} z_n$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L \tag{1.58}$$

(a) *Se* $L < 1$*, então a série converge absolutamente.*

(b) *Se* $L > 1$*, a série diverge.*

(c) *Se* $L = 1$*, o critério falha, não é possível nenhuma conclusão.*

Prova. A prova é semelhante ao do critério da Razão e procedemos da seguinte forma;

(1) Consideramos $L = 1 - b_1 < 1$. Logo por definição de limite, $\sqrt[n]{|z_n|}$ esta bem perto de $1 - b_1$ de maneira que para $\varepsilon = b_1/2$ obtemos:

$$\sqrt[n]{|z_n|} < q = 1 - b_1/2 < 1, \qquad \forall n > N_1 \quad \text{muito grande}$$

convergência absoluta da série $\sum z_n$ segue se comparamos com a série geométrica.

(2) De maneira semelhante para $L = 1 + c_1 > 1$ podemos obter $\sqrt[n]{|z_n|}$ esta bem perto de $1 + c_1$ de maneira que para $\varepsilon = c_1/2$ obtemos:

$$\sqrt[n]{|z_n|} \geq q = 1 + c/2 > 1, \qquad \forall n > N_1 \text{ muito grande}$$

logo $|z_n| > 1 \qquad \forall n > N_1$ muito grande , assim temos que série $\sum z_n$ diverge pelo Teorema (Divergência) anterior.

(3) A série harmônica diverge e a série $\sum 1/n^2$ converge. Ambas possuem limite, $L = 1$. Podemos comprovar utilizando o fato que $\dfrac{\ln n}{n}$ converge para zero. Com efeito

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}} \to \frac{1}{e^0}, \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{2\ln n}{n}}} \to \frac{1}{e^0}$$

Obtendo assim o que desejavamos. □

Exercício 113. Seja a seguinte série complexa;

$$\sum_{n\geq 1} z_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n$$

Verificar se é convergente ou divergente.

Solução. Aplicando o critério da raiz, obtem-se

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n\right|} = \sqrt[n]{\frac{|(4-i)^n|}{2^{2n}+3}}$$

$$= \frac{|4-i|}{\sqrt[n]{4^n+3}} \leq \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[n]{4^n}}$$

Tomando limite obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^{2n}+3}(4-i)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{17}}{\sqrt[n]{4^n+3}} \leq \frac{\sqrt{17}}{4} = L > 1,$$

logo diverge. ◊

Exercícios Propostos

Resolver os seguintes exercícios sobre séries numéricas complexas,

(1) Mostre que se uma série converge absolutamente, então ela converge.

(2) Verificar se as seguintes séries são convergentes ou divergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(50+100i)^n}{n!}$ R:

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-j}{3n+2i}$ R:

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{i^n}{n}$ R:

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ R:

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{8i}{9}\right)^n n^4$ R:

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^{2n}+i^{2n}}{n!}$ R:

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2i)^n\, n!}{n^n}$ R:

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(10+7i)^{8n}}{(2n)!}$ R:

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{2^n\, n}$ R:

(3) Suponhamos que $|z_{n+1}/z_n| \leq q < 1$, então a série $\sum z_n$ converge utilizando o critério da razão. Mostre que o resto

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots \quad \text{satisfaz} \quad |R_n| \leq \frac{|z_{n+1}|}{1-q}.$$

Sugestão. Usar o fato que o Teste da razão é uma comparação da série $\sum z_n$ com a série geométrica.

(4) Utilize o resultado do exercício anterior para encontrar os termos necessários da soma s da série (a) com um erro de 0,05.

1.8 Séries de Potências

No análise complexo as séries de potências são muito importantes portanto estudaremos elas com muito afinco.

Uma série em potências de $z - z_0$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{1.59}$$

onde z é variável, a_0, $a_1, \cdots$ são constantes, denominados coeficientes e z_0 constante fixa, chamada de centro.

Se $z_0 = 0$ obtemos um caso particular, uma série de potências em z,

$$\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n = a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + \cdots \tag{1.60}$$

Convergência de Séries de Potências. Anteriormente temos feitos definições sobre as séries que possuem termos constantes. Se agora as séries possuem termos com variáveis, isto é, são funções em z, eles tomam valores definidos se fixamos z, logo aplicamos neste caso todas as definições anteriores. Obviamente neste contexto as somas parciais, restos e somas finitas serão funções de z.

Naturalmente uma série de potências converge para algum z em alguma região e não converge (diverge) para outros valores de z. Geralmente essa região pode ser muito complicada, porém para uma série de potências este problema é simples. Os casos que se apresentam para a série de potências (1.59) são num disco com centro z_0, em todo o plano complexo e num ponto z_0 (esta última circunstância não é muito interessante na prática).

A seguir um Teorema que serve para justificar essas possibilidades;

Teorema 1.42: Convergência de Séries de Potências

Se a série de potências (1.59) converge num ponto $z = z_1 \neq z_0$, então ela converge absolutamente para qualquer ponto z mais próximo de z_0 que de z_1, isto é,

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Se a série de potências (1.59) não converge (diverge) em $z = z_2$, então não converge (diverge) para qualquer z mais afastado de z_2 que de z_0.

Exercício 114. A série geométrica;

$$\sum_{n\geq 0} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

converge no disco $|z| < 1$ e diverge no seu complemento, $|z| \geq 1$.

Exercício 115. Prove que a série de potências

$$\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{2^n}$$

converge para $|z| < 2$ e encontre o valor da soma.

Solução. Para comprovar essa afirmação, observamos que o termo geral da série $u_n(z) = \dfrac{z^n}{2^n}$. Aplicando o teste da razão, temos,

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^n}{2^{n+1}} \frac{2^n}{z^{n-1}} \right| = \frac{|z|}{2}$$

Como o limite $L = \dfrac{|z|}{2}$ não depende do índice n, segue do critério da razão que a série converge absolutamente, qualquer que seja o valor de z sempre que $\dfrac{|z|}{2} < 1$, isto é, converge absolutamente na região $|z| < 2$.

Exercício 116. A série de potências dada por;

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

é absolutamente convergente para todo z no plano complexo.

Solução. Pode-se comprovar fixando z e aplicando o ctitério da Razão da seção anterior,

$$\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Exercício 117. A série de potências dada por,

$$\sum_{n\geq 0} n!\, z^n = 1 + z + 2\,z^2 + 6\,z^3 + \cdots$$

converge unicamente num ponto $z = 0$, porém diverge para qualquer $z \neq 0$.

Solução. A afirmação dada pode ser justificada usando novamente pelo critério da Razão fixando $z \neq 0$ temos,

$$L(x) = \left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = (n+1)|z| \to \begin{cases} \infty & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases} \text{,sempre que } n \to \infty$$

Entao trat-se de uma séride potências que converge para um unico valor de z. $\Diamond$

Exercício 118. Em que conjunto de pontos de $\mathbb{R}$ a seguinte série de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}(x-3)^{n+1}$$

converge?

Solução. Aplicando o critério da razão à série obtemos

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n=\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^{n+1})}\right|$$

$$= |x-3| \lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = |x-3|$$

Assim obtemos as seguintes conclusões

(a) A série dada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}(x-3)^{n+1} < \infty$ absolutamente, quando $L(x) = |x-3| < 1$ ou no intervalo $2 < x < 4$.

(b) A série dada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}(x-3)^{n+1} = \infty$ diverge, quando $L(x) = |x-3| > 1$.

essas são as conclusoes do criterio da razão. Para afirmar a convergência da série de potências no extremos do intervalo ou na fronteira do disco não é informada pelo critério da razão, logo devemos estudar a convergência da série numérica nesses valores.

Quando $L(x) = 1$ obtemos a equaçõa $|x-3| = 1$ com soluções $y = 4$ e $w = 2$ que substituidas na série de potencias dada,

(a) Para $x = 4$ temos a série numerica harmônica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

divergente.

(b) Para o valor $x = 2$ obtemos a série numérica alternada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < \infty$$

condicionalmente convergente. Portanto o conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que tornam a série de potências convergente é o intervalo semiaberto pela direita $E = [2,\ 4[$. $\diamondsuit$

Observação 26. *A série de potências (1.59) converge no centro, pois quando $z = z_0$ a série se reduz para o termo a_o. Se este não é o único ponto de convergência de forma que (1.59) converge para algum $z_1 \neq z_0$, então a série de potências (1.59) converge para qualquer ponto z que esteja mais perto de z_0 que de z_1.*

1.8.1 Raio de Convergência

Considere uma série de potências e os pontos do plano complexo para os quais a série dada converge. Seja $R > 0$, tal que aqueles pontos possuam uma distância do centro z_0 no máximo igual a R e suponhamos que este seja o menor número possível com esta propriedade, assim R é raio da circunferência mais pequena com centro z_0 que contém todos os pontos nos quais a série converge.

O Teorema 1.42 garante a convergência dos pontos interiores situados no círculo, isto é para z tal que

$$|z - z_0| < R \tag{1.61}$$

e como R é suficientemente pequeno, então a série diverge para os z para os quais;

$$|z - z_0| > R.$$

A circunferência

$$|z - z_0| = R$$

é chamada **circunferência de convergência** e seu raio R o **raio de convergência** da série de potências (1.59).

Como foi sugerido nos exercícios anteriores, escrevemos as seguintes notações

(a) $R = \infty$, se a série de potências (1.59) converge em todo o plano complexo.

(b) $R = 0$, se a série de potências (1.59) converge unicamente no centro $z = z_0$.

Para evitar confusões, as afirmações gerais não são feitas com relação à convergência na circunferência de convergência da série em questão. A referida série de potências (1.59) pode convergir em algum, em todos ou em nenhum ponto. Ilustrarmos a idéia com o seguinte exercício resolvido.

Exercício 119. Analisar o comportamento das seguintes séries sobre seu círculo de convergência e todas elas com raio de convergência $R = 1$,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n.$

Solução. (a) Converge em todo o plano, pois a série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge. (b) Converge em $z = -1$ aplicando o critério das séries alternadas de Leibniz, porém diverge em $z = 1$. Finalmente em (c) a série diverge no plano complexo. $\Diamond$

Exercício 120. Encontre a região de convergência da série de potências,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^{34n}}$$

Solução.

Exercício 121. Encotre a região de convergência das seguintes séries de convergência

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{2n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n!\, z^n$

Solução.

Exercício 122. Existirá uma série de pot6encias em potências de z que converge no ponto $z = 30 + 10j$ e não converge em $z = 31 + 6j$. Justificar

Solução. $\Diamond$

Podemos encontrar o raio de convergência R das séries de potências (1.59) a partir dos coeficientes da série.

Teorema 1.43: Raio de Convergência

Considere a série de potências (1.59) tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$$

Então se

(a) Se $L = 0$, então $R = \infty$, existe convergência da série no plano complexo.

(b) Se $L \neq 0$ $(L > 0)$, então

$$R = \frac{1}{L}. \tag{1.62}$$

Podemos também encontrar R da seguinte relação

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{1.63}$$

Se temos o seguinte,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty.$$

então $R = 0$, converge unicamente no centro z_0.

Observação 27. *As fórmulas dadas em (1.62) e (1.63) não ajudam se L não existe, porém poderíamos apelar para extensões do Teorema 1.43, no exemplo a seguir observamos isto;*

Exercício 123. Encontre o raio de convergência R da seguinte série

$$\sum_{n\geq 0}\left[1 + (-1)^n + \frac{1}{2^n}\right] z^n = 3 + 2^{-1}\, z + (2 + 2^{-2})\, z^2$$
$$+ 2^{-3}\, z^3 + (2 + 2^{-4})\, z^4 + \cdots$$

Solução. Escrevendo por extenso a sequência numérica de razões

$$\frac{1}{6}, \quad 2(2 + 2^{-2}), \quad \frac{1}{2^3}(2 + 2^{-2}), \cdots$$

não converge ou não possui limite, pois ela não é monótona, logo o Teorema 1.43 não ajuda. Podemos tentar outro argumento,

$$R = \frac{1}{L^*}, \quad L^* = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

Isso ainda não serve, a sequência $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}_{n\geq 1}$ não converge, pois separando os índices pares e ímpares, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}, \quad n = \text{ímpar}; \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2 + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(2+\frac{1}{2^n})} = 1, \quad n = \text{par}$$

mostramos que possui dois pontos limites $1/2$ e 1. Quando isto acontece utilizamos outro resultado que extende o Teorema 1.43,

$$R = \frac{1}{L^*}, \quad L^* \quad \text{maior ponto limite da sequência } \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}_{n\geq 1}$$

em nosso caso $L^* = 1$, assim $R = 1$. A série converge no disco $|z| < 1$. ◊

Exercício 124. Determine o raio de convergência R da série de potências;

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2}(z - 3\,i)^n$$

Solução. Aplicando a fórmula (1.62) tem-se;

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!/[(n+1)!]^2}{(2n)!/(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4, \qquad R = \frac{1}{L} = \frac{1}{4}.$$

A série converge no disco aberto $|z - 3i| < 1/4$, de raio $1/4$ e centro $3\,i$. Com isto mostramos o que desejavamos. ◊

Exercícios Propostos

Resolver as seguintes questões sobre séries numéricas

(1) Encontre o centro e raio de convergência das seguintes séries de potências,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(z + 4\,i)^n \quad R:$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\pi^n(z - i)^n \quad R:$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n z^{2n} \quad R:$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{n!} \quad R:$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(z-2j)^n}{5^n} \quad R:$

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{n^2} \quad R:$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2^{10n}}{n!}(z+j)^n \quad R:$

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^n(z+1)^n \quad R:$

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(3z - 2i)^n \quad R:$

(j) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}z^{2n} \quad R:$

(k) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{i^n\, n^3}{2^n}z^{2n} \quad R:$

(2) Mostre que se uma série de potências $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ tem raio de convergência $R < \infty$ então

$$\sum_{n\geq 0} a_n\, z^{2n} \quad \text{tem raio de convergência} \quad \sqrt{R}.$$

(3) Existirá uma série de potências em z que converge no ponto $z = 30 + 10i$ e diverge em $z = 31 - 6i$? Fornecer uma justificativa.

1.9 Funções Representadas por Séries de Potências

As séries de potências são fundamentais na análise complexa, e o principal objetivo desta seção é mostrar as razões deste fato. Mostraremos que as séries de potências representarão funções analíticas.

Seja uma série de potências com $z_0 = 0$,

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \qquad |z| < R,$$

arbitrária com raio de convergência R. Então a soma desta série é uma função de z, digamos $f(z)$, e escrevemos

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \qquad |z| < R \tag{1.64}$$

Dizemos que $f(z)$ *é representada por uma série de potências ou que está representada em séries de potências*. Por exemplo, a série geométrica, representa a função de variável complexa $f(z) = 1/(1-z)$ no interior da circunferência unitária $|z| = 1$.

Mostraremos que cada série de potências com um raio de convergência não nulo, representa uma função analítica. Mais adiante provaremos, reciprocamente, que cada função analítica pode ser representada por uma série de potências. Por estas razões as séries de potências representam um papel fundamental em relação às funções analíticas e suas aplicações práticas.

Subdividimos as considerações em várias etapas, iniciando com o seguinte teorema.

Teorema 1.44

A função f representada pela série de potências (1.64) é contínua em $z = 0$.

Prova. Utilizando a definição de continuidade, temos que provar que

$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = a_0, \tag{1.65}$$

isto é, devemos de mostrar que para um $\varepsilon > 0$ dado existe um $\delta > 0$ tal que $|z| < \delta$ implica que $|f(z) - a_o| < \varepsilon$. Escolhemos um número positivo arbitrário $r < R$. Como a, série em (1.64) é absolutamente convergente no disco $|z| < R$, segue-se que a série

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n\geq 1} |a_n| r^n \qquad 0 < r < R$$

é convergente. Seja S a sua soma. Então

$$|f(z) - a_o| = \left| z \sum_{n\geq 1} a_n z^{n-1} \right| \leq |z| \sum_{n\geq 1} |a_n||z|^{n-1} \leq |z| S, \quad 0 < |z| \leq r$$

Sendo dado $\varepsilon > 0$, $|f(z) - a_o| < \varepsilon$ para todo $|z| < \delta$, onde δ é um número real positivo menor que r e ε/S. Por definição de limite, isto significa que (1.65) se verifica, ficando a demonstração completa. □

A seguir consideramos a questão da unicidade e mostramos que a *mesma função f não pode ser representada por duas séries de potências diferentes com o mesmo centro.* Se f pode ser desenvolvida em uma série de potências com centro z_0, o desenvolvimento é único. Este fato importante é freqüentemente empregado na análise real e na análise complexa. Podemos formulá-lo como se segue (supondo que $z_0 = 0$, sem perda de generalidade).

Teorema 1.45: Unicidade de Séries de Potências

Suponhamos que

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

são séries de potências convergentes para $|z| < R$ onde R é positivo, e que possuem a mesma norma para todos estes valores de $|z|$. Então as séries são idênticas, isto é,

$$a_n = b_n, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{1.66}$$

Prova. Procedemos por indução. Por hipótese

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \qquad |z| < R. \tag{1.67}$$

Façamos z se aproximar de zero. Então, de acordo com o Teorema 1.44, $a_0 = b_0$. Suponhamos que $a_n = b_n$, para $n = 0,\ 1, \ldots, m$. Então, omitindo os $m+1$ primeiros termos em ambos os membros de (1.67) e dividindo por $z^{m+1} \neq 0$, obtemos

$$a_{m+1} + a_{m+2} z + a_{z+3} z^2 + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2} z + b_{m+3} z^2 + \cdots$$

De acordo com o Teorema 1.44, cada uma destas séries de potência representa uma função que é contínua em $z = 0$. Então $a_{m+1} = b_{m+1}$, o que completa a demonstração. □

Consideramos agora desenvolvimentos em torno de centros diferentes. Mostremos que a função f representada pela série de potências (1.64) (com raio de convergência não nulo) pode também ser representada por uma série de potências com centro $z = z_0$, onde z_0 é qualquer ponto cuja distância à origem é menor que R.

Para deduzir tal série de potências, fazemos $z - z_0 = Z$. Então $z = z_0 + Z$, e a série de potências (1.64) toma a forma

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n &= \sum_{n\geq 0} a_n (z_0 + Z)^n \\ &= a_0 + a_1(z_0 + Z) + a_2(z_0^2 + 2z_0 Z + Z^2) + \cdots \end{aligned} \tag{1.68}$$

Consideramos a série correspondente

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|(|z_0| + |Z|)^n = |a_0| + |a_1|(|z_0| + |Z|) + |a_2|(|z_0| + |Z|)^2 + \cdots \tag{1.69}$$

Como a série original converge absolutamente quando $|z| < R$, segue-se que se

$$|z_0| + |Z| < R,$$

isto é

$$|Z| = |z - z_0| < R - |z_0|$$

a série (1.69) é convergente. Os valores correspondentes de z se situam no disco aberto D^* na Figura 1.2.

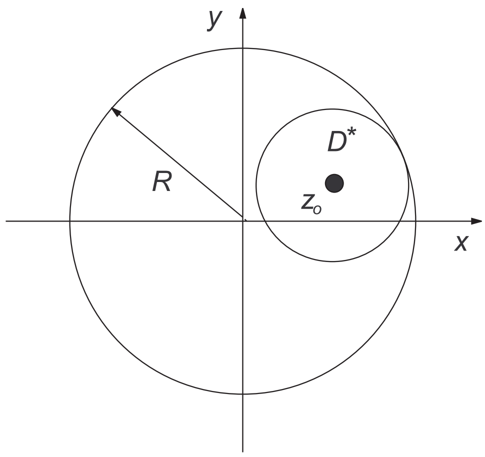


Figure 1.2: Centros diferentes

Para estes valores de z podemos, ordenar a série no último membro de (1.68) em função das potências de $Z = z - z_o$, sem alterar sua soma. Desta maneira obtemos uma representação da forma

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_o)^n \tag{1.70}$$

válida (no mínimo) no disco

$$|z - z_o| < R - |z_o|.$$

Veremos mais tarde que, em geral, o raio de convergência de (1.70) será maior que $R - |z_o|$, de modo que (1.70) fornece um *prolongamento (continuação)* da função f em (1.64) para pontos fora do disco $|z| < R$.

Este processo de prolongar uma função, dada inicialmente por uma série de potências válida em uma região de convergência $|z| < R$, além desta região é chamado prolongamento analítico.

Pelo cálculo direto segue-se que os coeficientes a_n podem ser representados em função dos coeficientes a_n, da representação original (1.64) sob a forma

$$a_n = \sum_{m\geq 0} \binom{m+n}{n} c_{m+n} b^m, \quad \text{onde} \quad \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{n!m!} \tag{1.71}$$

A aplicação prática de (1.71) será em geral difícil. Veremos ulteriormente, que no caso em que f

em (1.64) é uma função conhecida, há vários outros métodos de determinar os coeficientes da série correspondente (1.70).

1.9.1 Séries de Potências Representam Funções Analíticas

Isto será o principal objetivo desta seção. Após uma pequena preparação, deduziremos que cada função analítica pode ser representada por uma série de potências, chamadas de Séries de Taylor.

Adição ou Substração de Séries. A soma ou substração de duas séries de potências com raios de convergência R_1 e R_2 respectivamente, fornecem uma série de potências com raio menor o igual ao mínimo de R_1 e R_2.

Prova. Consideremos as somas parciais $S_n(z)$ e $T_n(z)$. Somando termo a termo e utilizando

$$\lim_{n\to\infty}\{S_n(z)\pm T_n(z)\} = \lim_{n\to\infty} S_n(z)\pm T_n(z),$$

com isso mostramos o que desejamos. □

Multiplicação de Séries de Potências. Consideramos duas séries de potências,

$$f(z)=\sum_{m\geq 0} a_m z^m \qquad g(z)=\sum_{m\geq 0} b_k z^k$$

e entendemos por multiplicação de séries de potências como a multiplicação de cada termo da primeira série com cada termo da segunda série, obtendo-se uma uma série de potências em z chamada de PRODUTO DE CAUCHY das duas séries, e esta representada por

$$f(z)g(z)=\sum_{n\geq 0} c_n z^n, \qquad c_n=\sum_{m+k=n} a_m b_k$$

onde

$$c_n=\sum_{m+k=n} a_m b_k = a_o b_n + a_1 b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_n b_o$$

Esta série converge absolutamente para cada z que se encontra no disco de convergência de cada uma das séries dadas.

Derivação e Integração de Séries de Potências. Examinamos a seguir a derivação e a integração termo a termo das séries de potências. Derivando a série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ obtemos a série

$$\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2+\cdots \tag{1.72}$$

que é chamada a série derivada da série dada.

Teorema 1.46

A série derivada de uma série de potências possui o mesmo raio de convergência que a série original.

Prova. Seja $na_n + a_n^*$. Então $\sqrt[n]{|a_n^*|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}$. Como $\sqrt[n]{n}$ vai para um quando n vai ao infinito segue-se que as sucessões $\sqrt[n]{|a_n^*|}$ e $\sqrt[n]{|a_n|}$, simultaneamente, convergem para um mesmo limite ou então divergem. Se elas divergem, elas são ambas não-limitadas ou limitadas, e neste último caso seus pontos de acumulação máximos são os mesmos. Daí e do Teorema 1.45 da última seção decorre a validade do presente teorema. □

Teorema 1.47

A série de potências,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \cdots$$

obtida integrando a série $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ termo a termo possui o mesmo raio de convergência que a série original.

Prova. A demonstração é semelhante à do Teorema 1.46. □

Exercício 125. Considere série de potências

$$\sum_{n\geq 1} (n+1)\, z^n$$

encontre seu raio de convergência.

Solução. Para encontrar o raio de convergência, integramos termo a termo e obtemos a série geométrica $\sum z^{n+1}$ com raio $R = 1$. ♢

As séries de potências representam funções analíticas. Mais precisamente.

Teorema 1.48

Uma série de potências com raio de convergência não-nulo R, representa uma função analítica em todos os pontos no interior de seu disco de convergência. As derivadas desta função são obtidas, derivando a série original termo a termo; todas as séries assim obtidas possuem o mesmo raio de convergência que a série original.

Prova. Consideramos a representação

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

supondo que o raio de convergência R não é nulo. Então podemos representar f sob a forma (1.70), e do Teorema 1.44 segue-se que f é contínua com centro em z_0. Como z_o é um ponto qualquer no disco $|z| < R$, a função $f(z)$ é contínua em todo o disco. De (1.70) obtemos $f(z_0) = a_0$ e, portanto,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a_1 + a_2(z - z_0) + a_3(z - z_0)^2 + \cdots$$

De acordo com o Teorema 1.44, a função representada pela série de potências no segundo membro é contínua em z_o. Assim, de acordo com (1.71),

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a_1 &= \sum_{m \geq 0} (m+1) a_{m+1} z_0^m \\ &= \sum_{k \geq 1} k a_k z_o^{k-1} \end{aligned} \tag{1.73}$$

Isto mostra que a primeira derivada de f existe em um ponto $z = z_0$ do disco $|z| < R$, e pode ser obtida derivando a série original termo a termo; de fato, a série no último membro possui raio de convergência R, como foi demonstrado no Teorema 1.46. Assim f é analítica no disco $|z| < R$ e a demonstração fica completa. $\square$

Exercício 126. Considere série de potências

$$\sum_{n \geq 2} \binom{n}{2} z^n = z^2 + 3z^3 + 6z^4 + 10z^5 + \cdots$$

encontre seu raio de convergência.

Solução. Para encontrar o raio de convergência, derivamos duas vezes termo a termo a série geométrica $\sum z^{n+1}$ com raio $R = 1$ e multiplicamos o resultado pelo fator $z^2/2$ para obter a série dada, logo o raio procurado é $R = 1$. $\Diamond$

Como a derivada da função f é

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

e é representada por uma série de potências, podemos aplicar o Teorema 1.48 a f', concluir que f'' existe no disco $|z| < R$, e

$$f''(z) = \sum_{n \geq 2} n(n-1)\, a_n z^{n-2}$$

Mais geralmente, a derivada de ordem m, $f^{(m)}$, de f existe no disco e

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n \geq m} n(n-1) \cdots (n-m+1) a_n z^{n-m}. \tag{1.74}$$

Isto significa que f possui derivadas de todas as ordens no disco. Veremos mais tarde que toda função analítica possui derivadas de todas as ordens e, além disso, pode ser representada por uma série de potências.

Exercícios Propostos

Resolver os seguintes exercícios sobre séries de funções,

(1) Utilizando o Teorema 1.45, provar que se $f(z)$ em (1.64) for uma função ímpar, então $a_n = 0$ para $n = 0, 2, 4, \ldots$. Dar exemplos.

(2) Mostrar que se $f(z)$ em (1.64) for par, então $a_n = 0$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$.

(3) Mostrar que $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ não é nem par nem ímpar.

(4) Utilizando a série geométrica, verificar as afirmações dos Teoremas 1.46 e 1.47.

(5) Verificar os Teoremas 1.46 e 1.47 para a série$f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

(6) Empregando a série geométrica e os Teoremas 1.46 e 1.47, determinar os raios de convergência das seguintes séries

(a) $\sum\limits_{n \geq 0} n(z - j)^n \quad R:$

(b) $\sum\limits_{n \geq k} \binom{n}{k} z^n \quad R:$

(c) $\sum\limits_{n \geq k} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{3}\right)^n \quad R:$

(d) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}(z + 1)^n \quad R:$

(e) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{z^n}{2^n n(n - 1)} \quad R:$

(f) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{(z - 2i)^n}{3^n n} \quad R:$

(7) Utilizando o Teorema 1.48, demonstrar as seguintes proposições,

(a) $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ satisfaz a $f'(z) - f(z) = 0$

(b) $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ satisfaz a $f''(z) + f(z) = 0$

(c) $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} z^{2n+1}$ satisfaz a $f''(z) + f(z) = 0$.

1.10 Série de Taylor

Na última seção vimos que séries de potências com raio de convergência não-nulo representam funções analíticas. Veremos agora que toda função analítica pode ser representada por uma série de potências. Estas representações são chamadas séries de Taylor e são semelhantes às séries de Taylor familiares das funções reais. Na verdade, substituindo a variável real nas séries reais por uma variável complexa podemos prolongar funções reais de maneira analítica dentro do domínio complexo.

O desenvolvimento familiar em série de Taylor constitui uma ferramenta eficaz no cálculo real e em suas aplicações. Veremos que na análise complexa o desenvolvimento de Taylor, que é uma generalização do desenvolvimento acima mencionado, é ainda mais importante.

Consideramos uma função f, que é analítica em uma vizinhança de um ponto z. Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência nesta vizinhança e possui o centro z. Podemos então aplicar a fórmula integral de Cauchy,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw = (2\pi j) f(z) \tag{1.75}$$

onde z é um ponto fixo arbitrário no interior de $\mathcal{C}$ e w é a variável complexa de integração. Temos,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{(w-a)(1-\frac{z-a}{w-a})} \tag{1.76}$$

Notamos que como w está sobre $\mathcal{C}$ enquanto z está no interior de $\mathcal{C}$,

$$\left| \frac{z-a}{w-a} \right| < 1 \tag{1.77}$$

Da progressão geométrica

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}, \qquad q \neq 1$$

obtemos a relação

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Fazendo $q = (z-a)/(w-a)$ segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-[(z-a)/(w-a)]} &= 1 + \frac{z-a}{w-a} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + \cdots \\ &\cdots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n + \frac{[(z-a)/(w-a)]^{n+1}}{(w-z)/(w-a)} \end{aligned}$$

Substituímos esta expressão em (1.76), e então (1.76) em (1.75). Como z e a são constantes, podemos retirar do sinal de integral as potências de $(z-a)$, e (1.75) passa a apresentar a forma

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-a} dw &+ \frac{z-a}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + \cdots \\ \cdots &+ \frac{(z-a)^n}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw + R_n(z) \end{aligned} \tag{1.78}$$

onde o último termo é dado pela fórmula

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw. \tag{1.79}$$

Empregando a derivada geral,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i j} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

podemos escrever éste desenvolvimento sob a forma

$$f(z) = f(a) + \frac{(z-a)}{1!} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(z). \tag{1.80}$$

Esta representação constitui a Fórmula de Taylor. $R_n(z)$ é chamado o resto.

Como a função analítica f possui derivadas de todas as ordens, podemos tomar n em (1.80) arbitrariamente grande.

Fazendo n se aproximar do infinito, obtemos de (1.80) a série de potências

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (z-a)^m. \tag{1.81}$$

Esta série é a chamada Série de Taylor de f com centro em a. O caso particular em que $a = 0$ constitui a chamada série de Maclaurin de f.

Evidentemente, a série (1.81) converge e representa f se, e somente, se,

$$\lim_{n \to \infty} R_n(z) = 0. \tag{1.82}$$

Para demonstrar (1.82), consideramos (1.79). Como w se encontra sobre $\mathcal{C}$ enquanto z está no interior de $\mathcal{C}$, temos $|w - z| > 0$. Como f é analítica no interior de $\mathcal{C}$ e sobre $\mathcal{C}$, segue-se que o valor absoluto de $f(w)/(w - z)$ é limitado, digamos

$$\left| \frac{f(w)}{w-z} \right| < T$$

para todo w sobre $\mathcal{C}$. Seja r o raio de $\mathcal{C}$. Então, $\mathcal{C}$ possui o comprimento $2\pi r$, e $|w - a| = r$ para todo w sobre $\mathcal{C}$. Assim, aplicando a fórmula fundamental

$$\left| \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq M \cdot L$$

onde L é o comprimento da traço da curva $\mathcal{C}$ e M é uma constante real tal que $|f(z)| \leq M$ em qualquer ponto de $\mathcal{C}$, a (1.79), obtemos

$$|R_n| = \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi} \left| \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right|$$
$$< \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi} T \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = T\, r \left| \frac{z-a}{r} \right|^{n+1}$$

Observamos que $|z - a| < r$ para z dentro ds circunfêrencia $\mathcal{C}$, assim $|z - a|/r < 1$. Fazendo n se aproximar do infinito, a expressão à direita se aproxima de zero. Isto demonstra (1.82) para todo z no interior de $\mathcal{C}$. Como, pelo Teorema 1.45, a representação de f sob a forma (1.81) é única, no sentido de que (1.81) é a única série de potências com centro em a, que representa a função dada f, podemos resumir o resultado como segue.

Teorema 1.49: Teorema de Taylor

Seja f analítica em um domínio Ω e seja $z = a$ um ponto qualquer em Ω. Existe, então, unicamente uma série de potências com centro em a que representa f; esta série é da forma

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n, \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a), \quad n = 0, 1, \dots \tag{1.83}$$

Esta representação é válida no disco aberto máximo com centro a, contido em Ω. O resto $R_n(z)$ de (1.83) pode ser representado sob a forma (1.79). Os coeficientes satisfazem, à desigualdade

$$|b_n| \leq \frac{M}{r^n} \tag{1.84}$$

onde M é o máximo de $|f(z)|$ sobre o circunferência $|z-a| = r$.

A relação (1.84) decorre da desigualdade

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

chamada de Cauchy.

Em termos práticos, (1.82) significa que para todo z para o qual (1.83) converge, a soma parcial de ordem n de (1.83) se aproxima de f com qualquer precisão estabelecida; temos unicamente que escolher n suficientemente grande.

De acordo com o Teorema de Taylor vemos que o raio de convergência de (1.83) é no mínimo igual à menor distância de a ao contorno de Ω. Ele pode ser maior, mas então a série pode não mais representar f em todos os pontos de Ω que se encontram no interior do disco de convergência.

Comparação com Funções de Variável Real. Uma propriedade surpreendente das funções analíticas complexas, consiste em que elas possuem derivadas, de todas as ordens; outra, que acabamos de expor, consiste em que elas podem ser sempre representadas por séries de potências da forma (1.83). Esta propriedade em geral não é verdadeira para funções reais; há funções reais que possuem derivadas de todas as ordens mas não podem ser representadas por séries de potências. Por exemplo a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

esta função não pode ser representada por uma série de Taylor ao redor de $z = 0$ pois todas a sus derivadas são nulas no ponto $z = 0$.

A relação entre o presente estudo e o assunto da seção anterior sobre séries de potências, pode ser estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema 1.50

Toda série de potência com um raio de convergência não nulo é a série de Taylor da função representada por esta série.

Prova. Seja a série de potências

$$\sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n$$

com um raio de convergência não nulo R. Então ela representa uma certa função analítica f no disco $|z-a|<R$, isto é,

$$f(z) = b_o + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots$$

Do Teorema 1.48 segue-se que

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z-a) + \cdots$$

e mais geralmente

$$f^{(n)}(z) = n!\, b_n + (n+1)\cdot n \cdots 3\cdot 2\cdot 1\, b_{n+1}(z-a) + \cdots ;$$

todas estas séries convergem no disco $|z-a|<R$. Fazendo $z=a$ obtemos as seguintes representações para os coeficientes da série de potências:

$$f(a) = b_o, \quad f'(a) = b_1, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = n!\, b_n, \ldots$$

Estas fórmulas são idênticas às do teorema de Taylor, então a demonstração está completa. □

A fórmula da intergral de Cauchy ajuda para expressar os coeficientes da Série de Taylor

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

onde se integra no sentido anti-horário sobre a curva simples e fechada $\mathcal{C}$, que contem em seu interior o ponto $z=a$.

O ponto em que uma função f deixa de ser analítica é chamado um **ponto singular** de f; podemos também dizer que f possui uma singularidade em tal ponto. Mais precisamente: um ponto $z=z_o$ é chamado um **ponto singular** de f, se f não for derivável em z_o mas, qualquer vizinhança de z_o contém pontos em que f é derivável.

Empregando esse conceito, podemos dizer que existe no mínimo um ponto singular de f no disco de convergência isto é, o raio de convergência de (1.83) é, em geral, igual à distância de a ao ponto singular de f mais próximo, mas pode ser maior; por exemplo, $\ln z$ é singular ao longo do semi-eixo real negativo, e a distância de $a=-1+j$ àquele eixo é 1; entretanto a série de Taylor de $\ln z$ com $a=-1+j$ tem raio de convergência $\sqrt{2}$.

1.10.1 Séries de Taylor das Funções Elementares

Exercício 127 (Série Geométrica)**.** Seja f uma função complexa de variável complexa tal que $f(z)=1/(1-z)$. Encontre o seu desenvolvimento de Maclaurin.

Solução. Temos então $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$, $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$. Assim o desenvolvimento de Maclaurin de $1/(1-z)$ é a série geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad |z| < 1, \tag{1.85}$$

logo f é singular em $z = 1$; este ponto se situa sobre o círculo de convergência. $\Diamond$

Exercício 128 (Função Exponencial)**.** Considere a função exponencial e^z. Analizar suas propriedades.

Solução. A função exponencial e^z é analítica para qualquer z e que $(e^z)' = e^z$. Assim, de acordo com (1.83), com $a = 0$, obtemos a série de Maclaurin

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \tag{1.86}$$

Esta série é também obtida quando substituímos x na série de Maclaurin de e^x, por z. Exprimimos isso afirmando que prolongamos analiticamente a função exponencial real no domínio complexo. $\Diamond$

Provemos a fórmula de multiplicação

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \tag{1.87}$$

empregando (1.86). Temos

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{k\geq 0} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{m\geq 0} \frac{z_2^m}{m!}$$

Como ambas as séries convergem absolutamente, podemos multiplicá-las termo a termo; a soma dos produtos para os quais $k + m = n$ é

$$\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\frac{z_2}{1!} + \cdots + \frac{z_1}{1!}\frac{z_2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z_2^n}{n!} =$$

$$\frac{1}{n!}\left[z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \cdots + z_2^n\right] = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}$$

Então o produto das duas séries pode ser escrito

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}$$

ficando (1.87) demonstrada. $\square$

Além disso, fazendo $z = jy$ em (1.86) e aplicando a propriedade de adição das séries convergentes, obtemos

$$e^{jy} = \sum_{n\geq 0} \frac{(jy)^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + j \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Como as séries do segundo membro são os desenvolvimentos de Maclaurin familiares das funções reais $\cos y$ e $\operatorname{sen} y$, este resultado representa a fórmula de Euler

$$e^{jy} = \cos y + j \operatorname{sen} y; \tag{1.88}$$

Multiplicando por e^x e empregando (1.87), obtemos a fórmula,

$$e^z = e^x(\cos y + j \operatorname{sen} y)$$

que foi empregada para definir e^z. A presente exposição mostra que é possível também empregar (1.86) para definir e^z e deduzir de (1.86) todas as fórmulas obtidas nas seções anteriores. □

Exercício 129 (Funções Trigonométricas e Hiperbólicas)**.** Escrever as fórmulas das funções trigonométricas e hiperbólicas em séries de potências.

Solução. Substituindo o desenvolvimento da exponencial (1.86) nas definições de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$, obtemos

$$\cos(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \tag{1.89}$$

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \tag{1.90}$$

Quando $z = x$ estas séries se transformam nas séries familiares das funções reais $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$. Semelhantemente, substituindo (1.86) em nas definições de $\operatorname{senh} z$ e $\cosh z$ obtemos

$$\cosh(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \tag{1.91}$$

$$\operatorname{senh}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \tag{1.92}$$

Obtendo assim o que desejavamos. ◊

Exercício 130 (Logaritmo)**.** Escrever a função complexa, $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ em séries de potências, utilizando propriedades.

Solução. Pelo Teorema de Taylor, equação (1.83) decorre que

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots, \qquad |z| < 1. \tag{1.93}$$

Substituindo z por $-z$ e multiplicando ambos os lados por -1, obtemos

$$-\ln(1-z) = \ln\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad |z| < 1. \tag{1.94}$$

Adicionando ambas as séries obtemos

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right] \qquad |z| < 1, \tag{1.95}$$

obtemos o que desejamos. $\Diamond$

Exercícios Propostos

Resolva os seguintes exercícios sobre séries de poências complexas.

(1) Deduzir as séries de Taylor, em torno do ponto $z = a$, das funções seguintes, e determinar o raio de convergência.

(a) $\cos(2z), \quad a = 0$

(b) $\operatorname{sen}(z^2), \quad a = 0$

(c) $e^{-z}, \quad a = 0$

(d) $e^z, \quad a = 1$

(e) $e^z, \quad a = \pi i$

(f) $\operatorname{sen}(z), \quad a = \pi/2$

(g) $\cos(z), \quad a = -\pi/4$

(h) $1/(1-z), \quad a = -1$

(i) $1/z, \quad a = 1$

(j) $1/(1-z), \quad a = i$

(k) $\cos^2(z), \quad a = 0$

(l) $\operatorname{sen}^2(z), \quad a = 0$

(2) Determinar os três primeiros termos das séries de Maclaurin das funções seguintes.

(a) $\tan(z)$

(b) $\tan(2z)$

(c) $e^z \operatorname{sen}(z)$

(d) $z \cot(z)$

(3) Determinar as séries de Maclaurin integrando termo a termo as dos integrandos.

(a) $\displaystyle\int_0^z e^t\,dt$

(b) $\displaystyle\int_0^z \cos(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int_0^z \operatorname{sen}(t)\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^z \frac{e^t - 1}{t}\,dt$

(e) $\displaystyle\int_0^z e^{t^2}\,dt$

(f) $\displaystyle\int_0^z \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

(g) $\displaystyle\int_0^z \cos(t^2)\,dt$

(h) $\displaystyle\int_0^z \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

1.11 Métodos para Obtenção de Séries de Potências

Na maioria dos casos práticos, a determinação dos coeficientes de uma série de Taylor por meio da fórmula do teorema de Taylor é complicada, ou consome muito tempo. Existe um certo número de processos práticos mais simples para atingir tal fim, que podem ser ilustrados pelos seguintes exemplos. A unicidade das representações assim obtidas decorre do Teorema da Unicidade de séries de potências.

Exercício 131 (Substituição)**.** Determinar a série de Maclaurin de $f(z) = 1/(1+z^2)$.

Solução. Substituindo $-z^2$ por z em (1.85), obtemos

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n\geq 0}(-z^2)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n} \tag{1.96}$$

$$= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots, \qquad |z| < 1$$

Assim determinamos a série pedida. $\diamondsuit$

Exercício 132 (Integração)**.** Seja $f(z) = \arctan z$. Escreva sua série de potências.

Solução. Temos $f'(z) = 1/(1+z^2)$.

Integrando (1.96) termo a termo e notando que $f(0) = 0$, encontramos

$$\arctan z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots \qquad |z| < 1$$

esta série representa o valor principal de $w = u + jv = \arctan z$, definido como o valor para o qual $|u| < \pi/2$. $\diamondsuit$

Exercício 133 (Série Geométrica)**.** Desenvolver $1/(c - bz)$ em potências de $z - a$ onde $c - ab \neq 0$ e $b \neq 0$.

Solução. Evidentemente

$$\frac{1}{c - bz} = \frac{1}{c - ab - b(z-a)} = \frac{1}{(c-ab)\left[1 - \frac{b(z-a)}{c-ab}\right]}$$

À última expressão aplicamos (1.85) com z substituído por $b(z-a)/(c-ab)$, obtendo

$$\frac{1}{c - bz} = \frac{1}{c - ab} \sum_{n\geq 0} \left[\frac{b(z-a)}{(c-ab)}\right]^n = \sum_{n\geq 0} \frac{b^n}{(c-ab)^{n+1}} (z-a)^n$$

Escrevendo a última série por extenso

$$\frac{1}{c - bz} = \frac{1}{c - ab} + \frac{b}{(c-ab)^2}(z-a) + \frac{b^2}{(c-ab)^3}(z-a)^2 + \cdots$$

Esta série converge para

$$\left|\frac{b(z-a)}{c-ab}\right| < 1 \quad \text{isto é,} \quad |z - a| < \left|\frac{c-ab}{b}\right| = \left|\frac{c}{b} - a\right|$$

Obtendo o desenvolvimento desejado. $\diamondsuit$

Exercício 134 (Série Binomial, Dedução por Frações Parciais)**.** Determinar a série de Taylor da função

$$f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$$

com centro em $z = 1$.

Solução. Dada uma função racional, quando o grau do polinômio do numerador é menor que o grau do polinômio do denominador podemos aplicar a técnica de frações parciais, caso contrário fazemos uma divisão de polinômios até obter que o grau do polinômio do numerador seja menor que o grau do denominador.

Podemos inicialmente representar a função f como uma soma de frações parciais da seguinte maneira,

$$f(z)=\frac{2z^2+9z+5}{z^3+z^2-8z-12}=\frac{2z^2+9z+5}{(z-3)(z^2+4z+4)}=\frac{A}{z-3}+\frac{Bz+C}{z^2+4z+4} \tag{1.97}$$

onde $z=3$ é raiz do denominador. Devemos encontrar as constantes A, B e C. A identiadade acima deve ser válida para quaisquer z.

Para calcular o valor de A, multiplicamos a identidade acima por $z-3$ para obter

$$\frac{2z^2+9z+5}{z^2+4z+4}=A+\frac{(Bz+C)(z-3)}{z^2+4z+4}$$

e avaliando em $z=3$ encontramos que $A=2$.

Multiplicando a identidade (1.97) acima por z^2+4z+4 temos

$$\frac{2z^2+9z+5}{z-3}=\frac{A(z^2+4z+4)}{z-3}+Bz+C$$

e avaliando em $z=0$ temos $C=1$.

Finalmente avaliando em $z=4$ na expressão (1.97), temos $B=0$. Portanto escrevemos

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}+\frac{2}{z-3}=\frac{1}{[3+(z-1)]^2}-\frac{2}{2-(z-1)}$$

e em seguida aplicar a série binomial

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^m}&=\sum_{n\geq 0}\binom{-m}{n}z^n\\&=1-mz+\frac{m(m+1)}{2!}z^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^3+\cdots\end{aligned} \tag{1.98}$$

e como a função do primeiro membro é singular em $z=-1$, a série converge no disco $|z|<1$.

No caso presente obtemos, escrevemos sob a forma

$$f(z)=\frac{1}{9}\frac{1}{\left(1+\dfrac{z-1}{3}\right)^2}-\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}.$$

Utilizando a série do binômio obtemos

$$f(z)=\frac{1}{9}\sum_{n\geq 0}\binom{-2}{n}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n-\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

Podemos adicionar termo a termo as duas séries do segundo membro. Como o coeficiente binomial na primeira série é igual

$$\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)(-2-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{(1)(2)(3)(4)(5)\cdots(n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{n!(n+1)}{n!} = (-1)^n(n+1)$$

obtemos

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \left[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n} \right] (z-1)^n.$$

Escrevendo este resultado por extenso temos

$$f(z) = -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z-1) - \frac{23}{108}(z-1)^2 - \cdots$$

Devemos ressaltar que $z = 3$ é o ponto singular de f que se encontra mais próximo do centro $z = 1$, então a série converge, por propriedade de convergência, no disco aberto $|z-1| < 2$. ◊

Exercício 135 (Equações Diferenciais)**.** Determinar a série de Maclaurin da função de variável complexa, $f(z) = \tan(z)$.

Solução. Derivando temos $f'(z) = \sec^2(z)$, e utilizando a identidade

$$f'(z) = 1 + f^2(z) \qquad \text{então} \qquad f'(0) = 1. \quad \text{onde} \quad f(0) = 0.$$

Derivamos sucessivamente a identidade anterior

$$f''(z) = 2f(z)f'(z), \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(z) = 2[f'(z)]^2 + 2f(z)f''(z), \qquad f'''(0) = 2, \qquad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3},$$

$$f^{(4)}(z) = 6f'(z)f''(z) + 2f(z)f'''(z), \qquad f^{(4)}(0) = 0,$$

$$f^{(5)}(z) = 6[f''(z)]^2 + 8f'(z)f'''(z) + 2f(z)f^{(4)}(z), \qquad f^{(5)}(0) = 16, \qquad \frac{f^{(5)}}{5!} = \frac{2}{15},$$

de forma análoga podemos seguir obtendo os demais coeficientes da série. Portanto, obtemos o resultado

$$\tan(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^{17} + \cdots \qquad |z| < \pi/2. \tag{1.99}$$

Obtemos assim o resultado desejado. ◊

Exercício 136 (Coeficientes a Determinar)**.** Calcular a série de Maclaurin de $\tan z$ utilizando o desenvolvimento em séries de $\operatorname{sen}(z)$ e $\cos(z)$.

Solução. Como $\tan(z)$ é função ímpar, o desenvolvimento desejado será da forma

$$\tan(z) = b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots$$

Utilizando a relação $\operatorname{sen} z = \tan z \cos z$, obtemos substituindo os desenvolvimentos de seno, tangente e cosseno,

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots = (b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots\right).$$

Como $\tan(z)$ é analítica exceto em $z = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$ sua série de Maclaurin converge no disco $|z| < \pi/2$, e para estes valores de z podemos multiplicar as duas séries no segundo membro, termo a termo, ordenando a série resultante segundo as potências crescentes de z segundo o produto de Cauchy das séries.

De acordo com o teorema de unicidade, Teorema 1.45, o coeficiente de cada potência de z é o mesmo em ambas as séries. Assim

$$1 = b_1, \qquad -\frac{1}{3!} = -\frac{b_1}{2!} + b_3, \qquad \frac{1}{5!} = \frac{b_1}{4!} - \frac{b_3}{2!} + b_5$$

Portanto, $b_1 = 1$, $b_3 = 1/3$, $b_5 = 2/15$, $\ldots$.

Mencionamos que existem tabelas dos chamados números de Bernoulli B_n que permitem facilmente o cálculo dos coeficientes da série tangente (1.99).

Os números $\dfrac{B_n}{n!}$ são por definição os coeficientes da série de Maclaurin

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + B_1 z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \ldots \tag{1.100}$$

Pelo método dos coeficientes a determinar obtemos

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}, \qquad B_5 = 0, \qquad B_6 = \frac{1}{42}, \ldots \tag{1.101}$$

Das definições de $\cos(z)$ e $\tan(z)$ segue-se que

$$\tan(z) = \frac{2i}{e^{2iz} - 1} - \frac{4j}{e^{4jz} - 1} - i$$

como o estudante pode verificar. Pelo resultado anterior e a relação (1.100) obtemos

$$\tan(z) = \frac{4 \cdot 3}{2!}B_2 z + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!}B_{2n} z^{2n-1} + \cdots \tag{1.102}$$

Portanto obtemos a série requisitada. $\Diamond$

Exercícios Propostos

Resolver as seguintes questões sobre séries numéricas,

(1) Determinar as séries de Maclaurin das funções seguintes

(a) $\dfrac{1}{1 - z^3}$ (b) $\dfrac{1}{1 + z^3}$

(c) $\dfrac{1}{1-z^6}$ (d) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$

(e) $\operatorname{sen}(z^3)$ (f) $\cos(z^2)$

(g) e^{z^2-z} (h) e^{z^4}

(i) $\dfrac{\sqrt{z}}{2}\displaystyle\int_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ (j) $\dfrac{\sqrt{z}}{2}\displaystyle\int_0^z \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{t}}dt$

(k) $e^{z^2}\displaystyle\int_0^z e^{-t^2}\,dt$

(2) Desenvolvendo $1/\sqrt{1-z^2}$ e integrando, mostrar que

$$\operatorname{arcsen}(z) = z + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\frac{z^5}{5} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\frac{z^7}{7} + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

(3) Determinar os primeiros termos das séries de Maclaurin das funções seguintes.

(a) e^{e^z} (b) $\cos\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$ (c) $e^{1/(1-z)}$

(4) Determinar o desenvolvimento em série de Taylor da função dada em torno de $z = a$.

(a) $\dfrac{1}{2z-j}$, $a = -1$ (b) $\dfrac{1}{4-3z}$, $a = 1+i$

(c) $\dfrac{1}{1-z}$, $a = 2i$ (d) $\dfrac{1}{(1+z)^2}$, $a = -i$

(e) $\dfrac{1}{(2+3z^3)^2}$, $a = 0$ (f) $\tan(z)$, $a = \pi/4$.

(5) **(Números de Euler)** O desenvolvimento

$$\sec(z) = E_0 - \frac{E_2}{2!}z^2 + \frac{E_4}{4!}z^4 - + \cdots$$

define os números de Euler E_{2n}. Mostrar que $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$.

1.12 Convergência Uniforme

Suponhamos que sabemos que uma dada série converge em uma certa região Ω; a questão que resta examinar é se a convergência é suficientemente rápida através de toda a região ou se há pontos em cuja proximidade a convergência se torna lenta. A importância prática desta questão em problemas de cálculo numérico é evidente; veremos entretanto que o aspecto teórico da questão é até mais importante. Para ilustrar a situação vamos iniciar com alguns exemplos.

Exercício 137. Calcular uma tabela de e^x para x real no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Solução. Por exemplo, para $x = 0,\ 0,1,\ 0,2,\ldots$ devendo o valor absoluto do erro de cada valor ser menor que um dado número ε, digamos, menor que meia unidade do sexto algarismo decimal. Podemos empregar uma soma parcial adequada

$$s_n = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

da série de Maclaurin. Então o valor absoluto do erro é igual a $|R_n| = |s - s_n|$ onde $s = e^x$ é a soma da série, e devemos escolher n de tal maneira que

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon(= 5 \times 10^{-7}).$$

Pela relação, $|R_n| \leq |z_{n+1}|/(1-q)$ vemos que quando $x = 1$, para $n = 10$, e portanto para qualquer $n > N = 9$, obtemos a precisão desejada. O resto diminui em valor absoluto quando $x \geq 0$ diminui, e portanto,

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > N(\varepsilon)(= 9) \quad \text{e qualquer} \qquad x \in \mathbb{R}$$

sob consideração. Notamos que, naturalmente, N depende de ε, e se desejarmos valores mais precisos de sorte que ε seja menor, então N será maior. $\Diamond$

Exercício 138. No caso da série geométrica $1 + z + z^2 + \cdots$ Qual é a forma do resto?

Solução. Como a série geometrica é convergente em $|z| < 1$. O resto é

$$R_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{m=n+1}^{\infty} z^m = \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

e se torna arbitrariamente grande para $z = x < 1$ real e suficientemente próxima de um. Assim, sendo fixado um erro máximo ε, não podemos determinar um N dependende unicamente de ε, tal que $|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ para $n > N$ e qualquer x no intervalo $0 \leq x < 1$. $\Diamond$

O resultado do Exemplo 138 anterior não é completamente inesperado, porque a série diverge para $z = 1$. Uma situação realmente surpreendente ocorre no caso da série seguinte.

Exercício 139. Consideremos a série

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} + \cdots$$

Mostre que série possui soma descontínua em $x = 0$.

Solução. Empregando a fórmula para a soma de uma progressão geométrica, o leitor pode verificar prontamente que a soma parcial de ordem n é

$$s_n(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Assim, se $x \neq 0$ a série possui a soma

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 1 + x^2$$

Se $x = 0$, então $s_n = 0$ para todo n e, portanto,

$$s(0) = \lim_{n\to\infty} s_n(0) = 0$$

Isto mostra que a série converge para todo x (de maneira absoluta), mas temos o resultado surpreendente de que a soma é descontínua (em $x = 0$), se bem que todos os termos da série sejam funções contínuas. Além disso, quando $x \neq 0$ o valor absoluto do resto é

$$|R_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

e vemos que para um dado $\varepsilon < 1$ não podemos encontrar um N que dependa somente de ε, e tal que $|R_n| < \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$ e todo x no intervalo $0 \leq x \leq 1$. ♢

Convergência Uniforme

As séries nos exemplos são da forma

$$\sum_{n\geq 0} f_n(z) = f_o(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots \tag{1.103}$$

Supomos que (1.103) seja convergente para todo z em uma região Ω. Seja $s(z)$ a soma e $s_n(z)$ a soma parcial de ordem n de (1.103). Sabemos que a convergência de (1.103) em um ponto z significa que, dado um $\varepsilon > 0$, podemos determinar um $N(\varepsilon, z)$ tal que

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n > N(\varepsilon, z).$$

N depende de ε e dependerá, em geral, também do ponto z escolhido para exame. Casos há em que sendo dado um $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um número $N(\varepsilon)$, *independente* de z, tal que

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n > N(\varepsilon) \quad \text{e todo} \quad z \in \Omega.$$

A série então é dita *uniformemente convergente* em Ω.

A uniformidade da convergência é então uma propriedade que depende de todo um conjunto de valores de z, enquanto a convergência de uma série pode ser considerada para vários valores particulares de z sem referência a outros valores.

A série no Exemplo 137 é uniformemente convergente no intervalo $0 \leq x \leq 1$ (e na realidade em qualquer região limitada do plano $\mathbb{C}$), enquanto a série do Exemplo 139 não é uniformemente convergente em uma região que contém o ponto 0. Isto mostra que uma série absolutamente convergente pode não ser uniformemente convergente. Reciprocamente, as séries uniformemente convergentes podem não ser absolutamente convergentes. Este fato é ilustrado pelo

Exercício 140. A série de potências dada por,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} - + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}$$

é uniformemente convergente para todo x real mas não é absolutamente convergente.

Solução. Utilizando o critério de Leibnitz o resto R_n não excede seu primeiro termo em módulo, pois temos uma série alternada cujos valores absolutos formam uma sequência decrescente com limite zero. Assim para $\varepsilon > 0$ e apara qualquer x, temos que

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$$

e como $N(\varepsilon)$ não depende de x, temos convergência uniforme.

Por outro lado a convergência não é absoluta, pois

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}\right| = \frac{1}{x^2+n} > \frac{k}{n}$$

para uma constante k escolhida apropriadamente, e o termo generico da direita na desigaualdade anterior faz parte da série numérica harmônica que é divergente. $\Diamond$

O Exemplo 138 é típico das séries de potências porque para tais séries a situação é simples, como mostra o

Teorema 1.12.1. *Uma série de potências*

$$\sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n \tag{1.104}$$

com um raio de convergência R não nulo, é uniformemente convergente em todo disco circular $|z-a| \leq r$ de raio $r < R$.

Prova. Para $|z-a| \leq r$ temos

$$\begin{aligned}&|a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(z-a)^{n+p}| \\ &\qquad\qquad \leq |a_{n+1}|r^{n+1} + \cdots + |a_{n+p}|r^{n+p}\end{aligned} \tag{1.105}$$

Como (1.104) converge absolutamente para $z = r$, segue-se do Teorema de Cauchy para convergência se séries que, dado um $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um $N(\varepsilon)$ tal que

$$|a_{n+1}|r^{n+1} + \cdots + |a_{n+p}|r^{n+p} < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > N(\varepsilon) \text{ e } p = 1, 2, \ldots$$

Daí e de (1.105) inferimos que

$$|a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(z-a)^{n+p}| < \varepsilon$$

para todo z no disco $|z-a| \leq r$, todo $n > N(\varepsilon)$ e qualquer $p = 1, 2, \ldots$. Como $N(\varepsilon)$ é independente de z, existe a convergência uniforme, com o que o teorema fica provado. $\square$

Enquanto a soma de um número finito de funções contínuas é contínua, o Exemplo 139 mostra que a soma de uma série infinita de funções contínuas pode ser descontínua, mesmo que a série seja absolutamente convergente. Quando, porém, a série converge de maneira uniforme isto não pode acontecer. De fato, é válido o seguinte.

Teorema 1.12.2. *Seja a série de funções,*

$$\sum_{m\geq 0} f_m(z) = f_o(z) + f_1(z) + \cdots,$$

uniformemente convergente em uma região Ω e seja $F(z)$ a sua soma. Então, se cada termo $f_n(z)$ for contínuo em um ponto z_o em Ω, a função $F(z)$ é contínua em z_o.

Prova. Seja $s_n(z)$ a soma parcial de ordem n da série e $R_n(z)$ o resto correspondente:

$$s_n = f_o + f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \qquad R_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos determinar um $n = N(\varepsilon)$ tal que

$$|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } z \in \Omega,$$

porque a série converge uniformemente. Como $s_N(z)$ é uma soma de um número finito de funções que são contínuas em z_o, esta soma é contínua em z_o. Podemos portanto determinar um $\delta > 0$ tal que

$$|s_N(z) - s_N(z_o)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } z \in \Omega \quad \text{tal que } |z - z_o| < \delta$$

Pela desigualdade do triângulo para estes z obtemos

$$\begin{aligned}|F(z) - F(z_o)| &= |s_N(z) + R_N(z) - [s_N(z_o) + R_N(z_o)]| \\ &\leq |s_N(z) - s_N(z_o)| + |R_N(z)| + |R_N(z_o)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Isto acarreta que $F(z)$ é contínua em z_o, ficando o teorema provado. □

Devemos mencionar que neste teorema a convergência uniforme é uma condição suficiente em lugar de necessária. Isto pode ser ilustrado pelo exemplo seguinte:

Exercício 141. Seja

$$u_m(x) = \frac{mx}{1 + m^2x^2}$$

e consideremos a série

$$\sum_{m \geq 1} f_m(x) \qquad \text{onde} \qquad f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x)$$

Solução. A soma parcial de ordem n é

$$s_n = u_1 - u_o + u_2 - u_1 + \cdots + u_m - u_{n-1} = u_n - u_o = u_n$$

Assim a série possui para soma,

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x) = 0,$$

que é uma função contínua. A série, entretanto, não é uniformemente convergente em um intervalo $0 \leq x \leq a$, onde $a > 0$. De fato, da expressão

$$|F(x) - s_n(x)| = \frac{nx}{1 + n^2x^2} < \varepsilon$$

obtemos
$$\frac{nx}{\varepsilon} < 1 + n^2x^2 \quad \text{ou} \quad n^2x^2 - \frac{nx}{\varepsilon} + 1 > 0$$
e daí
$$n > \frac{1}{2x\varepsilon}(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}).$$
Para um ε fixo o segundo membro se aproxima do infinito quando x se aproxima de zero, o que mostra que a série não é uniformemente convergente naquele intervalo. $\Diamond$

Em que condições podemos integrar uma série termo a termo?

Iniciamos as considerações com um exemplo que ilustra o fato de que a integração termo a termo de uma série nem sempre é permissível.

Exercício 142. Seja o termo genérico
$$u_m(x) = mxe^{-mx^2}$$
e consideremos a série
$$\sum_{m\geq 1} f_m(x) \quad \text{onde} \quad f_m(x) = u_m(x) - u_{m-1}(x) \tag{1.106}$$
no intervalo $0 \leq x \leq 1$.

Solução. A soma parcial de ordem n é
$$s_n = u_1 - u_o + u_2 - u_1 + \cdots + u_m - u_{n-1} = u_n - u_o = u_n$$
Assim a série possui a soma
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$
Daí obtemos
$$\int_0^1 F(x)dx = 0.$$
Por outro lado, mediante integração termo a termo
$$\sum_{m\geq 1} \int_0^1 f_m(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \int_0^1 f_m(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 s_n(x)dx$$
Como $s_n = u_n$ a expressão no último membro se torna em
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2},$$
que é diferente de zero. Isto mostra que a série considerada não pode ser integrada termo a termo de $x = 0$ a $x = 1$. $\Diamond$

A série do (1.106) do Exemplo 142 não é uniformemente convergente naquele intervalo, em seguida provaremos que no caso de uma série uniformemente convergente de funções contínuas poderemos integrar termo a termo.

Teorema 1.12.3. *Seja*

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n(z) = f_o(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots$$

uma série uniformemente convergente de funções contínuas em uma região Ω. Seja $\mathcal{C}$ qualquer caminho em Ω. Então a série

$$\sum_{n\geq 0} \int_{\mathcal{C}} f_n(z)dz = \int_{\mathcal{C}} f_o(z)dz + \int_{\mathcal{C}} f_1(z)dz + \cdots \tag{1.107}$$

é convergente e possui a soma $\int_{\mathcal{C}} F(z)dz$.

Prova. Do Teorema 1.12.2 segue-se que $F(z)$ é contínua. Seja $s_n(z)$ a soma parcial de ordem n da série dada e $R_n(z)$ o resto correspondente. Então $F = s_n + R_n$ e

$$\int_{\mathcal{C}} F(z)dz = \int_{\mathcal{C}} s_n(z)dz + \int_{\mathcal{C}} R_n(z)dz$$

Seja l o comprimento de $\mathcal{C}$. Como a série dada converge uniformemente, para um dado $\varepsilon > 0$ qualquer, podemos determinar um número N tal que

$$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{l} \quad \text{para todo} \quad n > N \text{ e todo} \quad z \in \Omega$$

Aplicando uma estimativa do valor absoluto de uma integral de linha, obtemos

$$\left|\int_{\mathcal{C}} R_n(z)dz\right| < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n > N.$$

Como $R_n = F - s_n$, isto significa que

$$\left|\int_{\mathcal{C}} F(z)dz - \int_{\mathcal{C}} s_n(z)dz\right| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n > N.$$

Desta maneira a série (1.107) converge e possui a soma indicada no teorema. Fica assim completa a demonstração. □

Os Teoremas 1.12.2 e 1.12.3 caracterizam as duas mais importantes propriedades das séries uniformemente convergentes.

Naturalmente, como a derivação e a integração são processos inversos, concluímos prontamente do Teorema 1.12.3 que uma série convergente pode ser derivada termo a termo, desde que os termos da série dada possuam derivadas contínuas e a série resultante seja uniformemente convergente; de maneira mais precisa:

Teorema 1.12.4. *Suponhamos que a série $f_o(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots$, seja convergente em uma região Ω com soma $F(z)$, as derivadas $f_n'(z)$ sejam contínuas em Ω, e a série $f_o'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots$ seja uniformemente convergente em Ω. Então*

$$F'(z) = f_o'(z) + f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots, \qquad z \in \Omega.$$

Prova. A demonstração, que é simples, fica a cargo do leitor. □

Normalmente a convergência uniforme é estabelecida por meio de um critério de comparação que é o

Critério M de Weierstrass. Considere uma série de funções (1.103) num domínio Ω do plano complexo. Suponhamos que podemos exibir uma série convergente de termos constantes,

$$\sum_{k\geq 0} M_k = M_o + M_1 + M_2 + \cdots, \tag{1.108}$$

tal que $|f_k(z)| \leq M_k \quad \forall\, z \in \Omega \quad k \geq 0$. Então (1.103) é uniformemente convergente em Ω.

Dito em outras palavras; se, para todos os valores de z em uma região Ω, o valor absoluto dos termos de uma dada série da forma (1.103) são, respectivamente, menores que os termos correspondentes em uma série convergente, de termos constantes,

$$M_o + M_1 + M_2 + \cdots,$$

então a série (1.103) converge uniformemente em Ω.

Prova. A demonstração, que é simples, fica a cargo do leitor. □

Exercício 143. O critério de Weierstras mostra que a série

$$\sum_{m\geq 1} \frac{\operatorname{sen}^5(mx)}{m^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

converge de maneira uniforme em qualquer intervalo.

Solução. Para x variável real

$$\left|\frac{\operatorname{sen}^5(mx)}{m^2}\right| \leq \frac{1}{m^2}$$

obtemos uma série numérica cujos termos geradores são da série 2-harmônica $\sum m^{-2}$, que é convergente. Portanto a série em questão converge uniformemente. ♢

Observação 28. *Derivando a série termo a termo, obtemos*

$$\sum_{m\geq 1} \frac{\cos(mx)}{m}$$

Para $x = 0$ esta série se transforma na série harmônica que não é convergente. Isto mostra que a última hipótese do Teorema 1.12.4 não pode ser suprimida.

Exercício 144. Verificar se a seguinte série,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k - 1}{k^2 + \operatorname{senh}(k|z|)}$$

converge uniformemente no disco $|z| \leq 1$.

Solução. Calculando o valor do módulo do termo geral da série de potências dada,

$$\left|\frac{z^k - 1}{k^2 + \operatorname{senh} k|z|}\right| \leq \frac{|z|^k + 1}{k^2} \leq \frac{2}{k^2}$$

obtemos no lado direito um termo geral de uma série numérica convergente, logo pelo critério de M-Weierstrass, a série dada converge uniformemente. ◊

Exercícios Propostos

Resolva os seguintes exercícios sobre séries complexas,

(1) Determinar o menor inteiro n tal que $|R_n| < 0,01$ no Exemplo 138, quando se toma os valores $x = 0,5,\ 0,6,\ 0,7,\ 0,8,\ 0,9$. Qual o significado do resultado no cálculo de $1/(1-x)$ com um erro absoluto menor que $0,01$ por meio da série geométrica?

(2) Fazer o gráfico de $s_1, s_2, \dots, s_5$ e s no Exemplo 2 para $-1 < x < 1$.

(3) No Exemplo 138, mostrar que $\lim\limits_{x\to -1} R_{2n}(x) = -1/2$ enquanto $\lim\limits_{x\to -1} R_{2n+1}(x) = 1/2$ e concluir do resultado que a convergência da série geométrica não é uniforme no intervalo $-1 < x < 0$.

(4) Provar que a série do Exemplo 139 não é uniformemente convergente em qualquer intervalo que contém o ponto $x = 0$.

(5) Provar que se a série (1.103) é uniformemente convergente em uma dada região R ela é uniformemente convergente em qualquer porção de R.

(6) Demonstrar a afirmação feita no Exemplo 140.

(7) Dar uma demonstração do critério M de Weierstrass.

(8) Deduzir o Teorema 1.12.4 do Teorema 1.12.3.

(9) Mostrar que $1 + \sum\limits_{n\geq 1}(x^n - x^{n-1})$ não é uniformemente convergente em $0 \leq x \leq 1$. Fazer o gráfico das somas parciais s_1, s_2, s_3, s_4.

(10) Mostrar que

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} - \frac{x^{2n-2}}{1+x^{2n-2}}\right) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{se} \quad x = \pm 1 \\ 0 & \text{se,} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Sugestão. Considerar as somas parciais.

(11) Demonstrar que as séries seguintes convergem uniformemente nas regiões dadas Ω, onde $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\sum_{n\geq 0} z^n, \quad \Omega\colon |z| < 0,99$

(b) $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad \Omega\colon x \in \mathbb{R}$

(c) $\sum_{n\geq 0} \frac{\tanh^n x}{n!}, \quad \Omega\colon x \in \mathbb{R}$

(d) $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos^n x}{n^2}, \quad \Omega\colon x \in \mathbb{R}$

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z| + n^2}, \quad \Omega\colon z \in \mathbb{C}$

(f) $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} n|z|}{n(n+1)}, \quad \Omega\colon z \in \mathbb{C}$

(g) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}, \quad \Omega\colon |z| \leq 1$

(h) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}, \quad \Omega\colon |z| \leq 10^{60}$

(12) Mostrar que a série

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} v_n(x,t) = \sum_{n\geq 1} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad \lambda_n = \frac{c\,n\pi}{L} \tag{1.109}$$

com coeficientes

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L v_o(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n \geq 1 \tag{1.110}$$

é uma solução da equação do calor para $t > 0$, supondo que a temperatura inicial $v_o(x)$ é contínua no intervalo $0 \leq x \leq L$ e possui derivadas unilaterais em todos os pontos interiores do intervalo. Proceder da seguinte maneira.

(a) Mostrar que $|B_n|$ é limitada, digamos, $|B_n| < K$ para qualquer n. Concluir que

$$|v_n| < Ke^{-\lambda_n^2 t_o} \qquad \text{quando} \qquad t \geq t_o > 0$$

e, de acordo com o critério de Weierstrass, a série (1.109) converge de maneira uniforme em relação a x e t quando $t \geq t_o$, $0 \leq x \leq L$. Empregando o Teorema 1.12.2, mostrar que $v(x,t)$ é contínua quando $t \geq t_o$ e então satisfaz às condições de contorno

$$v(0,t) = 0, \qquad v(L,t) = 0, \quad \text{quando} \quad t \geq t_o \tag{1.111}$$

(b) Mostrar que $|\partial_t v_n| < \lambda_n^2 K e^{-\lambda_n^2 t_o}$ quando $t \geq t_o$ e as séries das expressões à direita convergem, de acordo com o critério da razão. Daí, do critério de Weierstrass, e do Teorema 1.12.4 concluir que a série (1.109) pode ser derivada termo a termo com relação a t e que a série resultante possui a soma $\partial_t v$. Mostrar que (1.109) pode ser derivada duas vezes em relação a x e que a série resultante possui a soma $\partial_x^2 v$. Concluir daí e dos resultados do problema anterior e o atual que (1.109) é uma solução da equação do calor para todo $t \geq t_o$. Fica também claro a demonstração de que (1.109) satisfaz à condição inicial dada.

1.13 Séries de Laurent

Em várias aplicações há necessidade de desenvolver uma função f de variável complexa em torno de pontos onde f é singular. O Teorema de Taylor não pode ser aplicado em tais casos. Há necessidade de um novo tipo de série, conhecida como série de Laurent. Esta série é uma representação que é válida em uma coroa limitada por duas circunferéncias concéntricas $\mathcal{C}_1$, e $\mathcal{C}_2$ tal que f seja analítica no anel e em todos os pontos de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ver Figura 1.3.

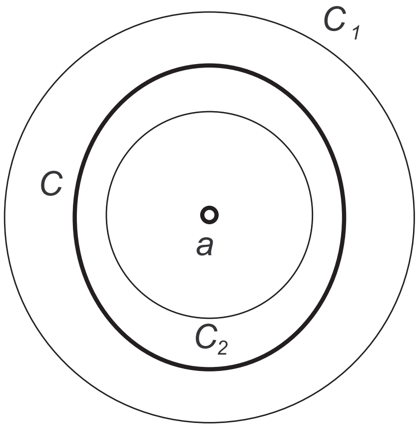


Figure 1.3: Teorema de Laurent

Como no caso da série de Taylor, f pode ser singular em alguns pontos no exterior de $\mathcal{C}_1$ e constituindo uma característica nova essencial $f(z)$ pode ser singular em alguns pontos no interior de $\mathcal{C}_2$.

Teorema 1.51: Teorema de Laurent

Se f for analítica e unívoca sobre duas circunferências concêntricas $\mathcal{C}_1$, e $\mathcal{C}_2$ com centro em a e na coroa por elas limitada, então f pode ser representada pela série de Laurent

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n + \sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{(z-a)^n} \\ &= b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots \end{aligned} \tag{1.112}$$

onde

$$b_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}} (w-a)^{n-1} f(w)dw \tag{1.113}$$

cada integral sendo calculada no sentido direto em torno de qualquer caminho fechado simples $\mathcal{C}$, que se situa na coroa e envolve a circunferência menor ver Figura 1.3.

Esta série converge e representa $f(z)$ na coroa aberta que se obtém da coroa dada aumetando continuamente a circunferência $\mathcal{C}_1$ e diminuindo $\mathcal{C}_2$ até que cada uma delas atinja um ponto onde f seja singular.

Observação 29. *Evidentemente, em lugar de (1.112) e (1.113) podemos escrever simplesmente*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n(z-a)^n \tag{1.114}$$

onde

$$A_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \tag{1.115}$$

Prova. do Teorema de Laurent. Seja z qualquer ponto na coroa dada. Então, de acordo com a fórmula integral de Cauchy no caso de um domínio de conexão múltipla segue-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}_2}\frac{f(w)}{w-z}dw \tag{1.116}$$

onde ambas as integrais são calculadas no sentido direto. Estas integrais serão agora transformadas de uma maneira semelhante à empregada no desenvolvimento de Taylor. Como z se situa no interior de $\mathcal{C}_1$ a primeira destas integrais é precisamente do mesmo tipo que a integral (1.75). Desenvolvendo e estimando o resto, obtemos

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n \tag{1.117}$$

onde os coeficientes são dados pela fórmula

$$b_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw, \tag{1.118}$$

representamos a variável de integração por w, já que z é empregada em $f(z)$, e a integral é tomada no sentido direto. Como a não é um ponto da coroa, as funções $f(w)/(w-a)^{n+1}$ são analíticas na coroa. Assim, podemos integrar ao longo do caminho $\mathcal{C}$, em lugar de $\mathcal{C}_1$ sem alterar o valor de b_n. Isto demonstra (1.113) para todo $n \geq 0$.

No caso da última integral, a situação é diferente já que z se situa no exterior de $\mathcal{C}_2$. Em lugar de (1.77), temos que

$$\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1 \tag{1.119}$$

isto é, temos que desenvolver $1/(w-z)$ em potências de $(w-a)/(z-a)$ para a série resultante ser convergente. Obtemos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{-1}{(z-a)\left(1-\frac{w-z}{z-a}\right)}$$

Aplicando a fórmula para uma progressão geométrica finita à última expressão ela se toma

$$\frac{1}{w-a} = -\frac{1}{z-a}\left\{1+\frac{w-a}{z-a}+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n\right\}$$
$$-\frac{1}{z-w}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^{n+1}$$

Deste desenvolvimento prontamente obtemos

$$-\frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}_2}\frac{f(w)}{w-z}dw$$
$$=\frac{1}{2\pi j}\left\{\frac{1}{z-a}\int_{\mathcal{C}_2}f(w)dw+\frac{1}{(z-a)^2}\int_{\mathcal{C}_2}(w-a)f(w)dw+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int_{\mathcal{C}_2}(w-a)^n f(w)dw\right\}+R_n^*(z);$$

nesta representação o último termo é da forma

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi j(z-a)^{n+1}}\int_{\mathcal{C}_2}\frac{(w-a)^{n+1}}{z-w}f(w)dw \tag{1.120}$$

Nas integrais do segundo membro podemos substituir a circunferência $\mathcal{C}_2$ pelo anteriormente mencionado caminho $\mathcal{C}$, sem alterar seus valores. Assim, o teorema de Laurent fica demonstrado se provarmos que

$$\lim_{n\to\infty}R_n(z)=0. \tag{1.121}$$

Demonstremos (1.121). Como $z-w\neq 0$ e f é analítica na coroa e sobre $\mathcal{C}_2$, o valor absoluto da expressão $f(w)/(z-w)$ é limitado, digamos

$$\left|\frac{f(w)}{z-w}\right|<\tilde{M},\quad \text{para qualquer}\quad w\in\mathcal{C}_2.$$

Aplicando estimativa de valor absoluto a uma integral de linha à (1.120), e representando o comprimento de $\mathcal{C}_2$ por l, obtemos

$$|R_n^*(z)|<\frac{1}{2\pi|z-a|^{n+1}}|w-a|^{n+1}\tilde{M}l=\frac{\tilde{M}l}{2\pi}\left|\frac{w-a}{z-a}\right|^{n+1}$$

De (1.119) concluímos que a expressão da direita se aproxima de zero à medida que n se aproxima do infinito. Assim, (1.121) fica demonstrada. A representação (1.112) com coeficientes (1.113) fica estabelecida na coroa dada.

Finalmente, vamos demonstrar a convergência de (1.112) na coroa aberta caracterizada no fim do teorema.

Representamos as somas das duas séries em (1.112) por $g(z)$ e $h(z)$ e os raios de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ por r_1 e r_2 respectivamente. Assim, $f=g+h$. A primeira série é uma série de potências. De vez que ela converge na coroa, ela deve convergir em todo o disco limitado por $\mathcal{C}_1$ e g é analítica no disco.

Fazendo $Z=1/(z-a)$, a última série se transforma numa série de potências em Z. A coroa $r_2<|z-a|<r_1$, então corresponde à coroa $1/r_1<|Z|<1/r_2$, a nova série converge na coroa e, portanto, em todo o disco $|Z|<1/r_2$. Agora, como o disco corresponde a $|z-a|>r_2$, o exterior de $\mathcal{C}_2$, a série dada converge para todo z no exterior de $\mathcal{C}_2$ e h é analítica para todos estes valores de z.

Como $f=g+h$, segue-se que g deve ser singular em todos aqueles pontos no exterior de $\mathcal{C}_2$, onde f é singular, e h deve ser singular em todos aqueles pontos no interior de $\mathcal{C}_2$ onde f é singular.

Conseqüentemente, o raio de convergência da primeira série é igual à distância da singularidade de f, no exterior de $\mathcal{C}_1$ que é mais próxima de a. Semelhantemente, a segunda série converge para todo z no exterior de uma circunferência com centro em a cujo raio é igual à distância máxima das singularidades de f no interior de $\mathcal{C}_2$.

O domínio comum a ambos estes domínios é a coroa aberta caracterizada no fim do teorema; assim a demonstração fica completa.

Segue-se que, se f for analítica no interior de $\mathcal{C}_2$, a série de Laurent se reduz à série de Taylor de f com centro em a. Realmente, aplicando o teorema integral de Cauchy a (1.113), vemos que, neste caso, todos os coeficientes das potências negativas em (1.112) são zero.

Além disso, se $z = a$ for o único ponto singular de f em $\mathcal{C}_2$, então o desenvolvimento de Laurent (1.112) converge para todo z em $\mathcal{C}_1$ exceto em $z = a$. Este caso ocorre freqüentemente e possui, portanto, particular importância.

A série de Laurent de uma dada função analítica f em sua coroa de convergência é única (veja os exercícios desta seção). Entretanto, f pode possuir séries de Laurent diferentes em duas coroas com o mesmo centro (veja Exemplo 146, abaixo).

A unicidade é importante, porque a série de Laurent em geral não é obtida empregando (1.113) para calcular os coeficientes, mas por vários outros métodos. Alguns destes métodos são ilustrados nos exemplos que se seguem. Se uma série de Laurent for determinada por um destes processos, ela deve ser a série de Laurent da função dada na coroa fixada. □

Exercício 145. Obtenha a série de Laurent de $z^2e^{1/z}$ com centro em 0.

Solução. Pode ser obtida de (1.86). Substituindo z por $1/z$ naquela série vem

$$\begin{aligned} z^2 e^{1/z} &= z^2\left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right) \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z} + \cdots, \qquad |z| > 0. \end{aligned}$$

Assim obtemos a série de Laurent. ◊

Exercício 146. Determinar todas as séries de Laurent de $f(z) = 1/(1-z^2)$ com centro em $z = 1$.

Solução. Temos $1 - z^2 = -(z-1)(z+1)$. Empregando a série geométrica

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n\geq 0} q^n \qquad |q| < 1,$$

empregamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left[1 - \left(-\frac{z-1}{2}\right)\right]} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^n \end{aligned} \tag{1.122}$$

esta série converge no disco $|(z-1)/2| < 1$, isto é, $|z-1| < 2$. Semelhantemente,

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2}{z-1}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}} \tag{1.123}$$

esta série converge para $|2/(z-1)| < 1$, isto é, $|z-1| > 2$. Portanto, de (1.122) obtemos

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z+1)} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}$$

$$= \frac{-1/2}{z-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 - + \cdots ;$$

esta série converge no domínio $0 < |z-1| < 2$. De (1.123)

$$f(z) = -\sum_{n\geq 0}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}} = -\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{4}{(z-1)^4} + - \cdots , \quad |z-1| > 2$$

Portanto existem varias séries de Laurent. ◊

Exercício 147. Utilizando o exercício do fim da seção séries de Taylor das funções elementares, obtenha a série de Laurent da função $\cot z$.

Solução. Com efeito,

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \cdots , \quad 0 < |z| < \pi.$$

Obtendo a série pedida. ◊

Exercícios Propostos

Resolver os seguintes exercícios sobre funções complexas

(1) Desenvolver as seguintes funções em séries de Laurent; convergentes para a desigualdade $0 < |z| < R$ e determinar precisamente a região de convergência.

(2) Demonstrar que o desenvolvimento de Laurent de uma dada função analítica em uma dada coroa é único.

(3) Determinar todas as séries de Taylor e de Laurent com centro em $z = a$ e determinar precisamente as regiões de convergência:

1.14 Comportamento de Funções no Infinito

Veremos na próxima seção que a série de Laurent pode ser empregada para classificar as singularidades das funções analíticas. Dentro desta ordem de idéias também consideraremos o comportamento das funções analíticas f quando $|z|$ se aproxima do infinito.

Para investigar o comportamento de uma função f para $|z|$ grande, parece natural introduzir uma nova variável w fazendo $z = 1/w$ porque, então, $|z|$ grande corresponde a $|w|$ pequeno, e $|z|$ vai ao infinito corresponde a $|w|$ vai ao zero.

A transformação $w = 1/z$ foi considerada no plano complexo prolongado que foi obtido vinculando ao plano complexo finito, um ponto impróprio (o ponto no infinito). Podemos então fazer $z = \infty$ corresponder a $w = 0$ (e $w = \infty$ corresponder a $z = 0$). O procedimento de prolongar o plano complexo pode ser também motivado pela consideração geométrica simples que se segue.

A representação usual dos números complexos $\mathbb{C}$ no plano complexo é conveniente enquanto os valores absolutos dos números não forem dema, siado grandes. Para $|z|$ grande a situação se toma inconveniente, e neste caso, podemos preferir uma representação dos números complexos sobre uma esfera, a qual foi sugerida por Riemann e se obtém da seguinte maneira.

Seja $\mathcal{S}$ uma esfera de diâmetro um que tangencia o plano complexo $\mathbb{C}$ na origem, ver Figura 1.4.

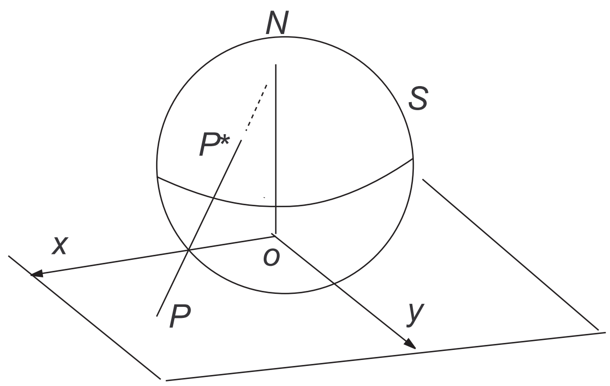


Figure 1.4: Esfera de Riemann

Seja N o Pólo Norte de $\mathcal{S}$ (o ponto diametralmente oposto ao ponto de contato entre a esfera e o plano). Seja P qualquer ponto no plano complexo. Então a reta definida por P e N intercepta $\mathcal{S}$ no ponto P^*. Fazemos P e P^* corresponderem um ao outro. Desta maneira obtemos uma correspondéncia entre os pontos do plano complexo e os pontos sobre S, e P^* é a imagem do ponto P nesta representação. Os números complexos, primeiramente representados no plano, são agora, representados por pontos sobre $\mathcal{S}$. A cada z corresponde um ponto sobre $\mathcal{S}$. Reciprocamente, cada ponto sobre $\mathcal{S}$ representa um número complexo z, exceto o ponto N que não corresponde a nenhum ponto no plano complexo.

Se, entretanto, introduzirmos o ponto impróprio $z = \infty$ e fizermos este ponto corresponder a N, a representação se transforma em uma representação unívoca do plano prolongado sobre $\mathcal{S}$. A esfera $\mathcal{S}$ é chamada a esfera dos números de Riemann. A representação particular que empregamos é chamada uma projeção estereográfica.

Evidentemente, a circunferência unitária é representada sobre, o “equador” de $\mathcal{S}$. O interior da circunferência unitária corresponde ao “Hemisfério Sul" e o exterior ao “Hemisfério Norte” Os números z, cujos valores absolutos são grandes, se situam próximo ao Pólo Norte N. Os eixos dos x e dos y (e, em geral, as retas que passam pela origem) são representadas sobre os “meridianos”, enquanto as circunferências com centro na origem são representadas sobre os “paralelos”.

Podemos demonstrar que qualquer circunferência ou reta no plano $\mathbb{C}$ é representada sobre uma circunferência em $\mathcal{S}$; além disso, podemos provar que a *projeção estereográfica* é conforme, isto é, duas curvas quaisquer que se interceptam possuem imagens cujo ângulo de interseção é igual ao ângulo de interseção das curvas.

Dada uma função f a ser investigada para $|z|$ grande, podemos fazer $z = 1/w$ e investigar $f(z) = f(1/w) \equiv g(w)$ em uma vizinhança de $w = 0$. Definimos

$$g(0) = \lim_{w\to 0} g(w),$$

e dizemos que $f(z)b$ é analítica ou singular no infinito, conforme $g(w)$ seja analítica ou singular, respectivamente, em $w = 0$.

Exercício 148. A função $f(z) = 1/z^2$ é analítica no infinito, já que $g(w) = f(1/w) = w^2$ é analítica em $w = 0$. A função $f(z) = z^3$ é singular no infinito porque $g(w) = f(1/w) = 1/w^2$ é singular em $w = 0$. A função exponencial e^z é singular no infinito já que $e^{1/w}$ é singular em $w = 0$. Semelhantemente, as funções trigonométricas $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são singulares no infinito.

Seja $f(z)$ analítica no exterior de uma circunferência $\mathcal{C}$, digamos, no domínio $|z-a| > R$, e também no infinito. Se fizermos

$$z = \frac{1}{w} + a, \qquad \text{então} \qquad z - a = \frac{1}{w}$$

e

$$f(z) = f\left(\frac{1}{w} + a\right) \equiv h(w)$$

é analítica no disco $|w| < 1/R$. Seja a série de Maclaurin de $h(w)$

$$h(w) = \sum_{n\geq 0} c_n w^n = c_o + c_1 w + c_2 w_2 + \cdots \qquad |w| < \frac{1}{R}$$

Então, substituindo $w = 1/(z-a)$ obtemos a série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{(z-a)^n} = c_o + \frac{c_1}{(z-a)} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots, \quad |z-a| > R. \tag{1.124}$$

Obtendo o que desejavamos. $\Diamond$

Exercícios Propostos

Resolver as questões a seguir sobre as funções analíticas

(1) As funções seguintes são analíticas no infinito ou não?

(a) $z^2 + z^{-2}$ (b) $z^{-3} + z^{-1}$

(c) $e^z, \quad e^{z^2}, \quad e^{-z}$ (d) $e^{1/z}, \quad e^{1/z^2}$

(e) $\cos(z), \quad \operatorname{sen}(z)$ (f) $\cosh(z), \quad \operatorname{senh}(z)$

(g) $ze^{1/z}$ (h) $1/(z^2 - 3z)$

(2) Descrever e esboçar as imagens das regiões seguintes sobre a esfera dos, números de Riemann.

(a) $\operatorname{Re} z \leq 0$ (b) $\operatorname{Im} z \geq 0$

(c) $|z| \geq 5$ (d) $|z| \leq 2$

(e) $1/2 \leq |z| \leq 2$ (f) $|z| \leq 3, \quad |arg\ z| < \pi/2$

(3) Empregando o método descrito no fim desta seção, mostrar que

$$\frac{1}{z^4} = \sum_{n \geq 0} \binom{-4}{n} (z-1)^{-n-4} = \frac{1}{(z-1)^4} - \frac{4}{(z-1)^5} + \cdots, \qquad |z-1| > 1$$

Chapter 2

Sequências e Séries de Funções

2.1 Sequência de Funções: Convergência Pontual

O tipo mais natural de convergência para uma sucessão de funções provavelmente é pontual (ou simples) convergência, definido como segue.

Definição 11: Convergência Pontual de Sequência de Funções

Uma sequência de funções de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^m$ é uma função cujo domínio é o conjunto dos interios positivos e cuja imagem é um conjunto de funções de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^m$. A sequência de funções de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^m$ é representada por $\{f_n\}$.

Para cada ponto x do domínio de todos os termos da sequência de funções $\{f_n\}$, existe uma sequência de pontos $\{f_n(x)\}$. Se $\{f_n(x)\}$ converge para cada ponto x de um conjunto $\mathcal{E}$ e fazemos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

então dizemos que $\{f_n\}$ **converge pontualmente** a f sobre $\mathcal{E}$.

De forma equivalente em dimensões menores. Uma sequência $\{f_n\}$ onde cada elemento é uma função $f_n\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *converge pontualmente em* I se existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$$

relativamente a cada x_0 de I.

Exercício 149. Seja $f_n(x) = x^n, \quad 0 \leq x \leq 1,\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ Verifique a convergência pontual.

Solução. Para $0 \leq x_0 < 1$ temos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_0^n = 0,$$

ao passo que, quando $x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.

A sequência dada, portanto, converge pontualmente no intervalo $0 \leq x \leq 1$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

veja o lado esquerdo da Figura 2.1.

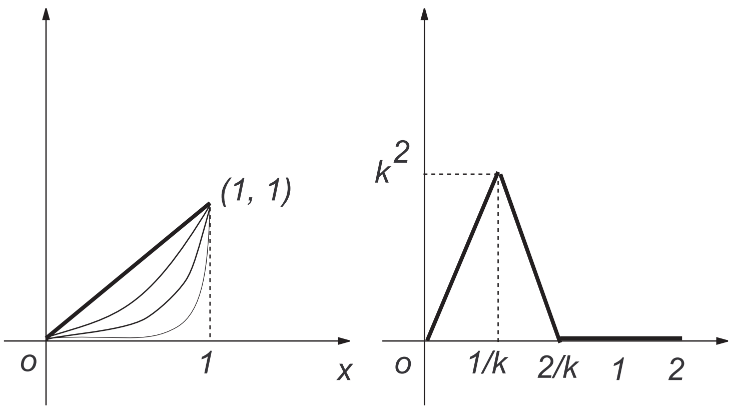


Figure 2.1: Convergência Pontual

Observemos que, enquanto cada uma das f_n é contínua no intervalo inteiro $0 \leq x \leq 1$, a função limite f não é contínua neste intervalo (ela é descontínua em $x = 1$).

Em no caso geral a sequência $\{x^n\}$ para $x \in \mathbb{R}$ converge para zero se $x \in]-1,\ 1[$, converge para um se $x = 1$, e diverge se $x \in]-\infty,\ -1] \cup]1,\ \infty[$. Portanto a sequência converge pontualmente sobre $\mathcal{E} =]-1,\ 1]$ para a função f onde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Observamos que cada termos da sequência de funções é uma função contínua, a função limite f não é contínua. $\square$

Mesmo que a convergência uniforme é suficiente para garantir que o limite de uma sequência de funções contínuas é contínua, não é uma condição necessária para este resultado. No seguinte exemplo, a sequência de funções contínuas não converge uniformemente e mesmo assim a função limite f é contínua

Exercício 150. Seja a sequência $\{f_k\}$ onde cada função esta definida em $0 \leq x \leq 2$, onde

$$f_1(x) = k^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

e para $k \geq 2$ seja

$$f_k(x) = \begin{cases} k^3 x & \text{se,} \quad 0 \leq x \leq 1/k \\ 2k^2 - k^3 x & \text{se,} \quad 1/k < x \leq 2/k \\ 0 & \text{se,} \quad 2/k < x \leq 2 \end{cases}$$

cujo gráfico esta indicado no lado direito da Figura 2.1. Discutir a convergência pontual.

Solução. Evidentemente, $f_k(0) = 0$ para todo k, donde $\lim_{n\to\infty} f_k(0) = 0$. Mais ainda, se $0 < x_o \leq 2$, então existe algum valor de k, digamos N, tal que $2/N < x_o$ e, assim, $f_k(x_o) = 0$ para todo $k \geq N(\varepsilon)$.

Portanto, $\lim_{k\to\infty} f_k(x_o) = 0$, e concluímos que $\{f_k(x)\}$ converge pontualmente para a função identicamente nula no intervalo $0 \leq x \leq 2$ e portanto contínua. Porém a convergência não é uniforme, pois para qualquer k se $x = 1/k$, então $|f_k(x) - f(x)| = k^2$.

Desta vez, a sequência de funções contínuas converge para um *limite contínuo*. Apesar disto, as funções f_k, não importa a que distância elas estejam na sequência, podem diferir, por grande margem, da função limite $f(x) \equiv 0$. Por conseguinte, os elementos da sequência não são “aproximações" do limite da sequência no sentido que se espera do termo. E as integrais dos termos da sequência refletem êste comportamento peculiar, deixando de tender para a integral da função limite $f(x)$.

De fato, $\int_0^2 f(x)dx = 0$, enquanto que

$$\int_0^2 f_k(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k} \cdot k^2 = k$$

e tendem para infinito, não-zero, quando k vai ao infinito. ◊

A fim de eliminar esta espécie de comportamento, introduzamos agora um tipo de convergência mais forte, denominada *convergência uniforme*.

2.2 Sequência de Funções: Convergência Uniforme

Muitas das funções que nós estudamos serão definidas por meio de sucessões infinitas ou séries. Para estudar tais funções precisamos entender o conceito de convergência uniforme de uma sucessão ou série de funções (contínuas). Para lidar efetivamente com situações concretas e exemplos, nós também consideraremos vários importantes testes de convergência uniforme.

Talvez o teste mais útil em exemplos particulares são o M-teste de Weierstrass para séries. Outro teste é o Critério de Cauchy que é principalmente de uso teórico. Nós também incluímos os testes mais refinados de Dirichlet e Abel.

Em conexão com a convergência uniforme introduzimos um espaço cujos pontos são funções. Neste espaço nós introduzimos uma norma e mostramos que a convergência nesta esta norma é precisamente a convergência uniforme. O espaço é completo no sentido que sucessões de Cauchy convergem. Uma segunda propriedade básica deste espaço, chamada de teorema de Arzela-Ascoli, estabelece a compacidade de um subconjunto (no sentido de possuir a propriedade de Bolzano-Weierstrass). Outro resultado importante, chamado de teorema o Stone-Weierstrass também é provado. Este teorema permite aproximar funções contínuas através de polinômios, ou por funções de outras classes apropriadas. Finalmente, algumas aplicações desta maquinaria são fornecidas para equações diferenciais e integrais.

Definição 12

Uma sequência de funções $\{f_n\}$ **converge uniformemente** para a função f sobre o conjunto $\mathcal{E} = [a, b]$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro positivo $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, dependente de ε mas não de x, tal que para todo $x \in \mathcal{E}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N(\varepsilon).$$

É claro, evidentemente, que, se $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em $a \leq x \leq b$, então ela também converge *pontualmente* para f neste intervalo. Porém a convergência pontual de $\{f_n\}$ para f sobre $\mathcal{E}$ não implica a convergência uniforme da sequência para f sobre $\mathcal{E}$.

Realmente podemos alcançar a convergência uniforme a partir da convergência pontual se e somente se para cada $\varepsilon > 0$ existe um conjunto de números $\{N(x) \colon x \in \mathcal{E}\}$ superiormente limitado (acotado). Se $\{f_n\}$ converge pontualmente para f sobre $\mathcal{E}$ e N é uma cota superior (majorante) do conjunto $\{N(x) \colon x \in \mathcal{E}\}$, então para todo $x \in \mathcal{E}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Assim, $\{f_n\}$ é uniformemente convergente para f sobre $\mathcal{E}$. Além disso, se $\{f_n\}$ é uniformemente convergente a f sobre $\mathcal{E}$ e N corresponde para $\varepsilon > 0$, então para cada $x \in \mathcal{E}$ podemos tomar $N(x) = N$ e o conjunto $\{N(x) \colon x \in \mathcal{E}\}$ ficara (acotado) limitado superiormente por N.

No caso, da convergência uniforme, pode-se escolher n de modo tal que

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

para cada x no intervalo $a \leq x \leq b$. Portanto, f_n é uma aproximação de f com diferença inferior a ε, no intervalo todo, como o mostra a Figura 2.2.

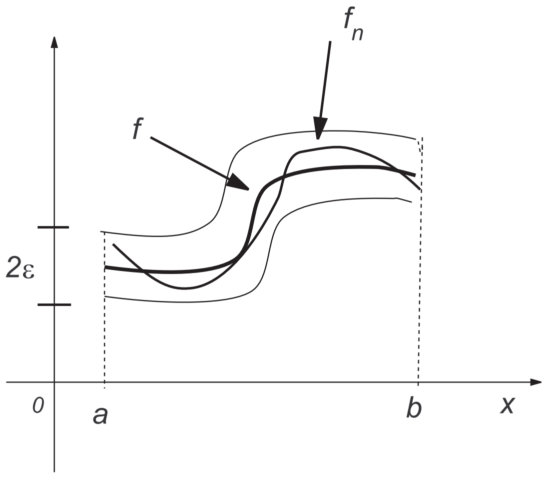


Figure 2.2: Convergência Uniforme

Observamos, no Exemplo 150, que no caso de convergência pontual nenhum dos termos da sequência é, necessáriamente, uma aproximação da função limite, nesse sentido.

Exercício 151. Escrever cuidadosamente as definições de convergência pontual (ou simples) e convergência uniforme. Com as definições anteriores verifique a seguinte implicação,

$$\text{Convergência uniforme} \Rightarrow \text{Convergência Pontual}$$

Solução. A sequência de funções $u_n\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge pontualmente para a $u\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $(u_n \to u)$ sobre o conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se para cada ε e para cada $x \in I$ existe um número, $N = N(x, \varepsilon)$ tal que,

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Definimos a convergência uniforme: a sequência de funções $u_n\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $u\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(u_n \rightrightarrows u)$ sobre o conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se para cada ε existe um número, $N = N(\varepsilon)$ tal que se para todo $x \in I$,

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Observamos que $u_n \rightrightarrows u(\rightrightarrows)$ implica $u_n \to u$. Pois se funciona para todo $x \in I$, em particular para cada $x \in I$, e para $\varepsilon > 0$ dado, temos $N = N(x, \varepsilon)$ tal que

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Assim obtemos a convergência simples, $u_n \to u$. □

No contexto da convergência uniforme temos que:

$$\text{Limite uniforme} = \text{Limite pontual}$$

Lembremos também que convergência pontual não implica convergência uniforme como será ilustrado no seguinte contra-exemplo;

Exercício 152. Seja a seguinte sequência de funções $\{f_n\}$ aonde cada termo é

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que não converge uniformemente em qualquer intervalo $[a,b]$ tendo o zero como seu ponto interior.

Solução. Como podemos ver, aplicando resultados de convergência simples, a sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente com limite pontual f tal que

$$f(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A seguir mostramos que a convergência não é uniforme em qualquer intervalo $[a,b]$ que contenha o ponto zero como ponto interior.

Suponhamos que a convergência seja uniforme sobre $[a,b]$ de forma que o limite pontual seja também limite uniforme.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existe N tal que para todo $n > N$ e para todo $x \in [a,b]$,

$$\left|\frac{nx}{1+(nx)^2} - 0\right| < \varepsilon.$$

Tomar $\varepsilon = 1/8$. Também existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$k > N \qquad \text{e} \qquad 1/k \in [a,b].$$

Tomando $n = k$ e $x = 1/k$, temos

$$\frac{nx}{1+(nx)^2} = \frac{1}{2}$$

resultado que não é menor que $1/8$.

Assim chegamos a uma contradição e vemos que a convergência não é uniforme em qualquer intervalo que contenha o ponto zero como ponto interior, mesmo que nele exista a convergência clásica ou pontual. $\Diamond$

Teorema 2.1: Critério de Cauchy

A condição necessária e suficiente para que uma sequência de funções $\{f_n\}$ definidas em I seja *uniformemente convergente* é que para cada $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N, \quad \forall\, p \geq 0, \quad \forall\, x \in I, \quad \text{implica}, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Prova. (A condição Necessária ($\Rightarrow$)) Seja a sequência $\{f_n\}$ uniformemente convergente com f como seu limite uniforme.

Seja $\varepsilon > 0$ fornecido. Então existe N tal que se $n \geq N$ e para todo $x \in I$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

Também como $n > N$ e para todo $p \geq 0$ e para todo $x \in I$,

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2,$$

disto segue que para $n > N$, para todo $p \geq 0$ e para todo $x \in I$,

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

(A condição Suficiente ($\Leftarrow$)) Pelo princípio de convergência de Cauchy, segue que a sequência converge pontualmente. Todo o que temos a mostrar é que convergência seja uniforme. Considere f o limite pontual da sequência $\{f_n\}$. Seja $\varepsilon > 0$ dado, então existe N tal que para $n > N$, para todo $p \geq 0$ e para todo $x \in I$,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{implica} \quad f_n(x) - \varepsilon/2 < f_{n+p}(x) < f_n(x) + \varepsilon/2.$$

Mantendo n fixo e fazendo p tender para o infinito, vemos que para $n > N$ e para todo $x \in I$,

$$f_n(x) - \varepsilon/2 \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon/2 \quad \text{implica} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Assim a convergência é uniforme. □

Exercício 153. Prove que a sequência de funções $\{x^n\}$ convergente uniformemente sobre $[-a,\ a]$, onde $0 < a < 1$.

Solução. Para cada $x \in [-a,\ a]$ temos

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad \text{e} \quad |x^n - 0| = |x^n| \leq a^n.$$

Para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $a^n < \varepsilon$ sempre que $n > \ln(\varepsilon)/\ln a$.

Assim, se escolhemos $N = ln(\varepsilon)/ln\, a$, temos que para qualquer $x \in [-a,\ a]$,

$$|x^n - 0| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

O que mostra que $\{x^n\}$ converge uniformemente para zero sobre o conjunto $[-a,\ a]$. ◊

Exercício 154. Prove que a sequência de funções $\{x^n\}$ não converge uniformemente sobre $]-1,\ 1[$.

Solução. Tomar um ε qualquer tal que $0 < \varepsilon < 1$. Para cada $x \in]-1, 1[$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

e portanto existe um número $N(\varepsilon, x)$ tal que

$$|x^n - 0| = |x^n| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad n > N(\varepsilon, x).$$

Como a desigualdade $|x|^n = |x^n| < \varepsilon$, então se e somente se $n > \ln\varepsilon/\ln|x|$ e como

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\varepsilon}{\ln x} = \infty,$$

o conjunto $\{N(x)\colon x \in \mathcal{E} =]-1,1[\}$ não pode ser acotado superiormente. Isto é, não pode existir nenhum número N tal que para todo $x \in]-1,1[$

$$|x^n - 0| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Obtemos assim o resultado desejado. $\Diamond$

Agora provaremos que uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas converge a uma função contínua.

Exercício 155. Considere a sequência de funções $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ onde o n-ésimo termo tem a seguinte lei de formação;

$$u_n(x) = x^n \quad \text{onde,} \quad 0 \leq x \leq 0,888.$$

Mostrar que converge uniformemente.

Solução. Vejamos que tem convergência pontual; por propriedade anteriormente estudada, tem-se

$$u_n(x) \to u(x) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < 1$$

Para encontrar convergência uniforme tomamos esse limite $u(x) = 0$ e aplicamos definição; no intervalo $[0, 0,888]$, isto é, para $\varepsilon > 0$, devemos mostrar a existência do número $N(\varepsilon) > 0$. Sendo assim, fazemos os seguintes cálculos

$$|u_n(x) - u(x)| = |u_n(x) - 0| = |u_n(x)| = |x^n| = |x|^n < (0,888)^n \tag{2.1}$$

Utilizando a relação (2.1) e resolvendo a inequação $(0,888)^n < \varepsilon$ para n temos;

$$(0,888)^n < \varepsilon \Rightarrow n\ln 0,888 < \ln\varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln 0,888}, \quad \text{pois} \quad \ln 0,888 < 0$$

e assim podemos tomar o número $N(\varepsilon) = \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 0,888}$. $\Diamond$

Exercício 156. Considere a sequência de funções, $\{u_n\}$ onde,

$$\left\{\left(x - \frac{2}{n}\right)^2\right\}_{n\geq 1}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Fazer os cálculos correspondentes para verificar a sua convergência uniforme.

Solução. Desenvolvendo o quadrado para melhor cálculo da convergência pontual;

$$u_n(x) = x^2 - \frac{4x}{n} + \frac{4}{n^2} \to x^2,$$

para cada x fixo. Escolhemos a função limite $u(x) = x^2$. Para mostrar convergência uniforme, utilizamos a definição, isto é para $\varepsilon > 0$, devemos mostrar a existência do número $N(\varepsilon) > 0$. Sendo assim, fazemos os seguintes cálculos;

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u(x)| = \left| -\frac{4x}{n} + \frac{4}{n^2} \right| &\leq \frac{4|x|}{n} + \frac{4}{n^2} \\ &< \frac{4}{n} + \frac{4}{n} = \frac{8}{n} \end{aligned} \tag{2.2}$$

sempre que $|x| \leq 1$ e $n^2 > n$.

Da relação (2.2) resolvendo uma inequação $\frac{8}{n} < \varepsilon$ para n, temos que

$$\frac{8}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{8} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{8}{\varepsilon}$$

e assim podemos tomar o número $N(\varepsilon) = \frac{8}{\varepsilon}$. ◊

Teorema 2.2

Se uma sequência $\{f_n\}$ de funções contínuas converge uniformemente para f sobre $\mathcal{E} = [a, b]$, então a função limite f é também contínua neste intervalo.

Prova. Devemos mostrar que, para qualquer $x_o \in [a, b]$, e qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$|f_n(x) - f(x_o)| < \varepsilon \quad \text{quando} \quad a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad |x - x_o| < \delta.$$

Agora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_o)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_o) + f_n(x_o) - f(x_o)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_o)| + |f_n(x_o) - f(x_o)|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mas como a convergéncia é uniforme, podemos escolher um inteiro k de modo que o primeiro e o terceiro termo do segundo membro de (2.3) sejam, cada um, menores que $\varepsilon/3$ para todo x no intervalo $a \leq x \leq b$. Mais ainda, como a função escolhida f_n é contínua, podemos também escolher $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(x_o)| < \varepsilon/3 \quad \text{quando} \quad a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad |x - x_o| < \delta.$$

A conclusão desejada é agora imediata. □

A convergência uniforme é suficiente porém não é necessária como veremos no seguinte exemplo

Exercício 157. Seja a sequência de funções $\{f_n\}$ tal que

$$f_1(x) = 1, \quad x \in [0, 2]$$

e para $n \geq 2$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se,} \quad 0 \leq x \leq 1/n \\ 2 - nx & \text{se,} \quad 1/n < x \leq 2/n \\ 0 & \text{se,} \quad 2/n < x \leq 2 \end{cases}$$

Solução. Para cada $x \in [0,\ 2]$ temos

$$f_n(x) = 0, \qquad \text{para} \qquad n > 2/x, \qquad \text{com} \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

e para $x = 0$

$$f_n(0) = 0 \quad \text{para todo} \quad n > 1.$$

Assim a função limite f é a função zero sobre o conjunto $\mathcal{E} = [0, 1]$ e que é contínua. A convergência não é uniforme, já que para qualquer n se $x = 1/n$ então $|f_n(x) - f(x)| = 1$. $\Diamond$

Teorema 2.3

Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções contínuas a qual converge uniformemente sobre $\mathcal{E} = [a, b]$ para a função limite (contínua) f, então para todo x deste intervalo

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt,$$

e esta convergência é uniforme em $a \leq x \leq b$.

Prova. Devemos mostrar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um N tal que

$$\left| \int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| < \varepsilon$$

quando $n > N$ e x está no intervalo $a \leq x \leq b$. Para éste fim, utilizamos a convergência uniforme de $\{f_n\}$ para escolher N de modo tal que

$$|f_n(x) - f(x_o)| < \varepsilon/(b - a) \qquad \text{quando} \qquad a \leq x \leq b \qquad \text{e} \qquad n > N.$$

Então,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(f)dt\right| &= \left|\int_a^x [f_n(t) - f(t)]dt\right| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \\ &< \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \\ &< (b-a) = \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $n > N$ e todo x em $a \leq x \leq b$. □

Exercício 158. Mostrar que a sequência de funções $\{u_n\}_{n\geq 1}$, onde $u_n(x) = n^3x^n(1-x)$ converge pontualmente para $u(x) = 0$ no intervalo $[0,1]$, e por intermédio do Teorema sobre integração mostre que não converge uniformemente.

Solução. Primeiro vamos calcular a sua convergência pontual;

(a) Para $x = 0, 1 \quad \Rightarrow \quad u_n(x) = n^3x^n(1-x) \to 0$

(b) Para $x < 1$, temos que mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} n^3x^n = 0$, porém com ajuda das séries numéricas, utilizando o teste da razão para a série $\sum\limits_{n\geq 1} n^3x^n$, obtemos o limite anterior.

(c) Assim $u_n(x) \to u(x) = 0$, pontualmente no intervalo $[0,1]$.

Com o auxílio do Teorema de integração, calculamos as seguintes quantidades;

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_n(x)dx = \int_0^1 n^3x^n(1-x)dx &= n^3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{n^3}{(n+1)(n+2)} \to \infty\end{aligned}$$

e

$$\int_0^1 u(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

logo não existe a convergência uniforme, pois os limites não são iguais. ◊

Seria útil ter um resultado semelhante ao Teorema 2.3, que se aplicasse à derivação em vez da integração. Infelizmente, isto é impossível, pois existem sequências uniformemente convergentes de funções diferenciáveis cuja função limite, embora contínua, não é diferenciável em *nenhum* ponto (Veja, Rudin [7]). No entanto, vale o seguinte teorema.

Observação 30. *Lembramos que se f_n é contínua sobre $[a,b]$, então f_n é integrável sobre $[a,b]$.*

O Teorema 2.3 mostra que a convergência uniforme de uma sequência de funções integraveis $\{f_n\}$ para f sobre $[a,b]$ implica que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx. \tag{2.4}$$

Porém (2.4) pode ser verdadeiro para uma sequência de funções que não converge uniformemente. Considere a sequência de funções definida no Exemplo 157, então

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Considerando a diferenciação dos termos de uma sequência de funções, encontramos que se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções diferenciaveis que converge uniformemente para uma função limite f, não necessariamente é verdade que $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Exercício 159. Considere a sequência de funções $\{f_n\}$ tal que

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

Mostre que $f'(x) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Solução. A sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente para zero sobre $\mathbb{R}$. Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nx}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}|\operatorname{sen} nx| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Assim $\{f_n\}$ converge uniformemente para $f = 0$ sobre $\mathbb{R}$ e a função limite é $f' = 0$. Por outro lado a derivada $f_n'(x) = \cos nx$ e portanto a sequência de funções derivadas $\{f_n'\}$ não converge sobre $\mathbb{R}$; isto é, para um valor particular de $x = \pi/4$, a sequência $\{\cos(n\pi/4)\}$ não converge. Com isto mostramos que $f' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$. □

O seguinte Teorema fornece condições suficientes para que f' seja o limite da sequência de funções $\{f_n'\}$.

Teorema 2.4

Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções continuamente diferenciáveis a qual converge pontualmente para um limite f relativamente a $x \in [a, b]$, e se a sequência $\{f_n'\}$ converge uniformemente em $a \leq x \leq b$, então existe f' para todo x no intervalo e

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Prova. Seja g a função limite para a qual $\{f_n'\}$ converge uniformemente. Então, aplicando o Teorema 2.3, temos

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)dt \\ &= \lim_{n\to\infty}[f_n(x) - f_n(a)] \\ &= f(x) - f(a),\end{aligned}$$

e do teorema fundamental do Cálculo segue-se que

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x),$$

como queríamos. $\square$

Exercício 160. A sequência de funções $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ tem a seguinte lei de formação;

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2} \qquad \text{onde,} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Encontrar o limite uniforme e logo calcular a sua integral.

Solução. Primeiro vamos a calcular a sua convergência pontual;

(a) Para $x = 0$, $\Rightarrow \quad u_n(x) = nx/(1+nx^2) \to 0$

(b) Para $x = 1$, $\Rightarrow \quad u_n(x) = nx/(1+nx^2) \to 1$

(c) Para $0 < x$ temos que encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1+nx^2}$, Com efeito;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{nx}{n}}{\frac{1+nx^2}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

logo o candidato a ser limite uniforme seria de natureza descontínua;

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0, \end{cases}$$

mesmo que cada termo da série é contínua no intervalo $[0,1]$, isto é um inconveniente da convergência pontual, ela não garante que seu limite seja contínuo, assim não temos convergência uniforme. Sendo assim não podemos calcular a integral, por exemplo em o intervalo fechado $[0,1]$. Porém poderiamos calcular a integral no intervalo $[\delta, 1]$ com $\delta > 0$. $\Diamond$

Todos os resultados sobre sequência de funções podem ser revistos no contexto de séries de funções. Como de costume, escrevemos

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x), \qquad a \leq x \leq b, \tag{2.5}$$

e diremos que a série converge (pontualmente) para f, se a sequência das suas somas parciais converge pontualmente para f.

Finalmente, se cada termo da série (2.5) é contínuamente diferenciável, e se a série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'(x)$ que se obtém derivando-se cada termo é uniformemente convergente, então

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x).$$

Neste caso, resulta imediatamente do Teorema 2.4 e Teorema 2.3 que, se cada termo da série é contínuo, então sua soma f também é contínua e

$$\int_a^x f(t)dt = \sum_{n\geq 1} \int_a^x f_n(t)\, dt. \tag{2.6}$$

Vejamos a seguir mais detalhes.

2.3 Séries de Funções

A definição de uma série de funções é análoga a de uma série de pontos ou números: se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções de $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^m$, então a série $\sum f_n$ é a sequência $\{s_n\}$ onde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Observamos agora que s_n é uma função: é a função com domínio $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathcal{D}_{f_k}$ e a regra de correspondência $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Se para cada x num conjunto $\mathcal{E}$, a sequência $\{s_n(x)\}_{n\geq 1}$ converge para um ponto $f(x)$, então dizemos que que a série $\sum f_n$ converge pontualmente a f sobre $\mathcal{E}$.

Exercício 161. Encontrar o conjunto sobre o qual a série $\sum x^n$ converge e mostre o valor da soma.

Solução. Temos a série geométrica, que converge para $1/(1-x)$ sobre o conjunto $]-1,\ 1[$ e diverge no complemento, $|x| > 1$. Portanto a série dada converge pontualmente sobre $]-1,\ 1[$ e a soma da série é a função $f(x) = 1/(1-x)$ com domínio restringido a $]-1,\ 1[$. $\Diamond$

Definição 13: Convergência Uniforme sobre um Conjunto

A série $\sum f_n$ **converge uniformemente** a f sobre o conjunto $\mathcal{E}$ se para cada $\varepsilon > 0$, existe um número $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathcal{E}$

$$|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n \geq N.$$

Isto é, $\sum f_n$ converge uniformemente a f sobre $\mathcal{E}$ se a sequência das suas somas parciais, $\{s_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a f sobre $\mathcal{E}$.

Observação 31. *Por causa da íntima conexão entre a série de funções $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ e as séries de valores de funções $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, frequentemente nos referimos as séries de valores da função como se fossem séries de funções.*

Exercício 162. Provar que a séries de funções $\sum e^{-nx}$ converge uniformemente para a função $1/(1-e^{-x})$ sobre o conjunto $\mathcal{E} = [1,\ 5]$.

Solução. Seja um $\varepsilon > 0$ qualquer e $x \in [1,\ 5]$. Consideremos o seguinte raciocínio

$$|s_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{1-e^{-x}}\right| = \left|\frac{-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\right|$$

$$= \frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}} \leq \frac{e^{-n}}{1-e^{-1}} < 2e^{-n}, \quad 1/(1-e^{-1}) < 2.$$

Por outro lado $2e^{-n} < \varepsilon$ sempre que $n > -\ln(\varepsilon/2)$. Logo se escolhemos $N = -\ln(\varepsilon/2)$, para qualquer $x \in [1, 5]$, temos

$$\left|s_n(x) - \frac{1}{1-e^{-x}}\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Isto mostra que a séries de funções $\sum e^{-nx}$ converge uniformemente sobre $[1,\ 5]$. □

Teorema 2.5

Suponhamos que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de funções definidas em I tal que f_n converge pontualmente para f em I. Se fazemos

$$U_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Então f_n converge uniformente para f se e somente se U_n converge para zero quando n vai ao infinito. Ou equivalentemente para cada $\varepsilon > 0$ existe um número $N(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$n > N \qquad \text{implica} \qquad \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Prova. Trata-se de uma consequência inmediata da definição de convergência uniforme sobre o intervalo I. □

Em conclusão, estabelecemos o seguinte e importante critério de convergência uniforme de séries, que análogo ao critério de comparação para a convergência de uma série de pontos. Este critério, chamado de *Critério M de Weierstrass*, se dâ na seguinte forma,

Teorema 2.6: Teste M de Weierstrass

Se $\sum M_n$ é uma série convergente de números reais positivos e se $\sum f_n$ é uma série de funções tais que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo n e todo x no intervalo $a \leq x \leq b$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{é uniforme e absolutamente convergente em} \quad a \leq x \leq b.$$

Prova. Decorre do *critério de comparação* que para qualquer x_o no intervalo dado, a série $\sum_{n\geq 1} f_n(x_o)$

converge absolutamente. Portanto, a série converge para uma função limite f em $a \leq x \leq b$. Agora

$$\left| f_n(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(x)|$$

$$\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} M_n - \sum_{n=1}^{k} M_n$$

e esta última expressão tende para zero quando k vai ao infinito. Como ela é independente de x, a convergência de $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ é uniforme. $\square$

Observação 32. *O critério M de Weierstrass fornece uma condição suficiente pórem não necessária para a convergência uniforme, isto é, a série pode ser uniformemente convergente mesmo quando não possa ser aplicado o critério. Podemos ser induzidos pelo critério a acreditar que a convergência uniforme implica a convergência absoluta e vice-versa. Não obstante, as duas propriedades são independentes, isto é, a série pode ser uniformemente independente sem ser absolutamente convergente e vice-versa.*

A seguir ilustramos com exemplos o teorema anterior,

Exercício 163. Consideremos a série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} n^2 x}{n^2} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 9x}{9} + \cdots \tag{2.7}$$

Mostre que a série dada converge uniformemente em $\mathbb{R}$, e examine os resultados de integração e derivação termo a termo desta série.

Solução. Como é valida a seguinte relação

$$\left| \frac{\operatorname{sen} n^2 x}{n^2} \right| = \frac{|\operatorname{sen} n^2 x|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

para todo x, e como $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, segue-se, do teste M de Weierstrass, que a série dada converge uniformemente em $-\infty < x < \infty$.

Seja f função limite, isto é

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen} n^2 x}{n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Então, pelo Teorema 2.3,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^x \frac{\operatorname{sen} n^2 x}{n^2} dt = 1 - \sum_{n\geq 1} \frac{\cos n^2 x}{n^4}$$

$$= 1 - \cos x - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 9x}{81} - \cdots$$

onde a convergência é uniforme sobre $\mathbb{R}$.

Se, por outro lado, derivarmos os termos de (2.7), obteremos a série

$$\sum_{n\geq 1} \cos n^2 x = \cos x + \cos 4x + \cdots ,$$

que evidentemente não converge para alguns valores de x, por exemplo $x = \pi/4$, portanto não existe convergência uniforme da série formada pelas derivadas. $\Diamond$

Exercício 164. Verifique se a série de funções,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \text{onde} \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

possui convergência uniforme.

Solução. Aplicaremos o teste de Weierstrass para o n-ésimo termo da série; onde para cada n temos uma função contínua, assim;

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = M_n \quad \forall\, x \in [0, 1]$$

Por outro lado tem-se;

$$\sum_{n\geq 1} M_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

é convergente.

Portanto obtemos a convergência uniforme da série dada. $\Diamond$

Exercício 165. Calcular convergência uniforme da série;

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Solução. Novamente pelo Critério M-Weierstrass para o n-ésimo termo da série; onde para cada n temos uma função contínua, assim;

$$|u_n(x)| = \left|\frac{1}{x^2 + n^2}\right| = \frac{1}{|x^2 + n^2|} = \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} = M_n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

onde $x^2 + n^2 > n^2$ para $n \geq 1$, e para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado tem-se;

$$\sum_{n\geq 1} M_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

é convergente. Portanto obtemos a convergência uniforme da série dada. $\Diamond$

Agora provaremos que se uma série de funções contínuas converge uniformemente para uma função f sobre algum conjunto $\mathcal{E}$, então f é contínua sobre $\mathcal{E}$.

Teorema 2.7

Se a séries de funções $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente sobre o conjunto $\mathcal{E}$ e cada um dos termos f_n é uma função contínua sobre $\mathcal{E}$, então a soma da série é uma função contínua sobre $\mathcal{E}$.

Prova. A convergência uniforme da $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ para f é equivalente a convergência uniforme da sequência $\{s_n\}_{n\geq 1}$ para f. Como cada um dos termos f_n da série é uma função contínua sobre $\mathcal{E}$, disto resulta que cada um dos termos s_n é uma função contínua sobre $\mathcal{E}$, onde a continuidade de f sobre $\mathcal{E}$ segue do Teorema 2.2. □

Exercício 166. Provar que a soma da série de funções $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ é uma função contínua.

Solução. Determinamos o conjunto sobre o qual a série converge e os valores de x para os que a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge. Utilizando o critério da razão temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x|,$$

portanto, a série converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Se $x = \pm 1$, o critério da razão falha. Porém sabemos que as séries

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

convergem ambas. Assim a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge sobre o intervalo $[-1, 1]$. Como cada um destos termos é contínuo sobre o intervalo $[-1, 1]$, se provarmos que a convergência é uniforme sobre o intervalo $[-1, 1]$, então saberemos que a soma é contínua nesse intervalo.

Por outro lado como

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{para todo} \qquad x \in [-1,\ 1], \qquad n \geq 1$$

e além disso a série numérica, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge. Logo pelo critério M-Weierstrass a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge uniformemente sobre o intervalo $[-1,\ 1]$ e, portanto a soma é contínua sobre $[-1,\ 1]$. ◊

Exercício 167. Considere a série de funções,

$$u(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{x^{n/2}}{n(n!)^2}, \qquad \text{onde} \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Verifique que a função $u(x)$ é contínua.

Solução. Para provar que a funcão $u(x)$ seja contínua, devemos mostrar que as somas parciais convergem uniformemente para $u(x)$;

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k/2}}{k(k!)^2}$$

uniformemente para a função $u(x)$.

Com efeito

$$\begin{aligned} |s_n(x) - u(x)| \leq \sum_{k\geq n+1} \frac{|x|^{k/2}}{k(k!)^2} &\leq \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k(k!)^2} \\ &< \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{k^2} = R_k \to 0 \quad \text{independente de} \quad x \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde R_k é o resto da série convergente $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ que resulta das seguintes estimativas,

$$k(k!)^2 = k\Big(1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots (k-1)^2 \cdot k^2\Big) > k \cdot k^2 > k^2$$

o que implica

$$\frac{1}{k(k!)^2} < \frac{1}{k^2}.$$

Também as somas parciais $S_n(x)$ são contínuas, logo a função $u(x)$ é contínua. □

Exercício 168. Examinar a convergência uniforme de

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \cdots$$

Solução. Suponhamos $x \neq 0$ não nulo. Então a série dada é uma série geométrica cuja razão é $1/(1+x^2)$ e a soma dela é

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - 1/(1+x^2)} = 1 + x^2$$

Se $x = 0$ for nulo temos que a n-ésima soma parcial é $s_n(0) = 0$, tomando limite, quando n vai ao infinito $s(0) = \lim_{n\to\infty} s_n(0) = 0$.

Por outro lado $\lim_{x\to 0} s(x) = 1 \neq s(0)$, portanto $s(x)$ é descontínuo em $x = 0$. Assim a série não pode ser uniformemente convergente em qualquer intervalo que contenha $x = 0$ apesar de que ela convergente (absolutamente) em qualquer intervalo. Entretanto, é `uniformemente convergente` em qualquer intervalo que exclui $x = 0$. □

Teorema 2.8

Se a série $\sum f_n$ converge uniformemente a f sobre o intervalo fechado $[a, b]$ e cada um dos termos f_n é integrável sobre $[a, b]$, então f é integrável sobre $[a, b]$. Além disso, se $g_n(x) = \int_a^x f_n$ e $g(x) = \int_a^x f$ para $x \in [a,\ b]$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \quad \text{converge uniformemente à} \quad g \quad \text{em} \quad [a,\ b].$$

Prova. É uma consequência imediata do Teorema 2.3 sobre sequências de funções, usando o fato que de que cada f_n é integrável sobre $[a, b]$, então $s_n = \sum f_n$ é integrável sobre $[a, b]$ e

$$\int_a^x s_n = \sum_{n\geq 1} \int_a^x f_n$$

portanto concluído o teorema. □

O Teorema 2.8 implica que se $\sum f_n$ converge uniformemente para f sobre $[a, b]$ e cada um dos termos f_n é integrável sobre $[a, b]$ e

$$\int_a^b f = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n.$$

O resultado anterior é as vezes enunciado como segue: uma série uniformemente convergente de funções integráveis sobre um intervalo fechado pode integrar-se termo a termo sobre esse intervalo.

Exercício 169. Provar que a seguinte igualdade é válida

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in]-1,\ 1[.$$

Solução. Pela discusão sobre série geométrica sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad x \in]-1,\ 1[.$$

Suponhamos que $x \in [0,\ 1[$. Para qualquer $t \in [0,\ x]$, temos $|t^k| \leq x^k$ e $\sum x^k$ converge, portanto $\sum t^k$ é uniformemente convergente sobre $[0, x]$ segundo o critério M-Weierstrass. Assim temos o caminho livre para integrar termo a termo sobre o intervalo $[0, x]$ obtendo

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n\geq 0} \int_0^x t^n dt$$

portanto

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$$

Trabalhando no complemento do intervalo em questão, se $x \in]-1, 0[$, então podemos provar que $\sum x^k$ é uniformemente convergente sobre $[x, 0]$ de maneira análoga: para qualquer $t \in [x, 0]$,

$|t^k| \leq |x|^k$ e $\sum x^k$ converge. Portanto

$$\int_x^0 \frac{1}{1-t}dt = \sum_{n\geq 0} \int_x^0 t^n dt = -\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

portanto

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

Exercício 170. Provar que a seguinte igualdade é válida

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in [-1, 0[.$$

Solução. De maneira semelhante, temos que a série geométrica,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad x \in\ [-1,\ 1[.$$

Neste exemplo quando incluímos o ponto $x = -1$ no intervalo, a resolução exige mais que uma simples aplicação direta do Teorema 2.8.

Se $x \in [-1,\ 0[$, então a série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ é uma série alternante que converge para alguma função f. De acordo com propriedade de séries alternantes temos,

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Assim para, $\varepsilon > 0$ existe um número $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$ tal que para todo $x \in [-1,\ 0[$

$$|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad n > N.$$

Isto prova que $\sum \frac{x^k}{k}$ é uniformemente convergente sobre $[-1,\ 0[$ e, portanto a soma é contínua sobre $[-1, 0[$. Por isso,

$$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln\frac{1}{1-x} = \ln\frac{1}{2}.$$

Assim temos provado que

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in [-1, 0[,$$

em particular

$$\ln\frac{1}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{implica} \quad \ln 2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

e assim encontramos o que desejávamos. ◊

Exercício 171. Verificar e justificar a identidade,

$$\int_0^x \operatorname{sen} t\, dt = 1 - \cos x,$$

utilizando,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Solução. Aplicaremos à risca o Teorema de integração para séries de funções, primeiro devemos mostrar que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

converge uniformemente para a função $\operatorname{sen} x$ no intervalo $0 \leq x \leq a$ com o extremo a arbitrário. Para fazer isto estimamos a diferença;

$$|S_n(x) - \operatorname{sen} x| = \left| \sum_{k \geq n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \sum_{k \geq n+1} (-1)^k \frac{(a)^{2k+1}}{(2k+1)!} = R_k \to 0$$

onde R_k é o resto de uma série convergente, independente de x. Assim a convergência é uniforme e o $\operatorname{sen} x$ é contínua em todo $\mathbb{R}$.

Calculando a integral tem-se;

$$\begin{aligned}
\int_0^x \operatorname{sen} t\, dt &= \int_0^x \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\, dt \\
&= \sum_{n \geq 0} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\, dt = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}
\end{aligned}$$

fazendo uma mudança de índices, $u = n + 1$ temos,

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = \sum_{u \geq 1} (-1)^{u-1} \frac{x^{2u}}{(2u)!} = -\sum_{u \geq 1} (-1)^u \frac{x^{2u}}{(2u)!} = 1 - \cos x$$

assim concluímos a aplicação do Teorema da integração. ◊

Teorema 2.9

Se a série $\sum f_n$ converge (pontualmente) a f sobre o intervalo fechado $[a, b]$, se cada uma das derivadas f_n' é contínua sobre $[a, b]$, e se $\sum f_n'$ converge uniformemente sobre $[a,\ b]$, então

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n' \quad \text{sobre} \quad [a,\ b].$$

Prova. Como a derivada de uma soma é a soma de derivadas, este teorema é uma consequência imediata do Teorema 2.4 □

Exercício 172. Verificar e justificar a identidade,

$$\operatorname{sen}' x = \cos x$$

Utilizando a série do problema anterior e o Teorema da derivação.

Solução. Aplicando Teorema da derivação de séries; istó é, cada termo da série;

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

é diferenciável e a derivada de $u_n(x)$ dada por;

$$u_n'(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

e é contínua. A série

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

converge pontualmente (e converge uniformemente) portanto a série das derivadas;

$$\sum_{n\geq 0} u_n'(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

converge uniformente para a função $\cos x$, verifica-se isto utilizando o mesmo argumento do $\operatorname{sen} x$, feito na questão anterior.

Portanto,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)'$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left[(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]' = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

assim temos nossa conclusão. ◊

Exercício 173. Provar que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Solução. Sabemos que a série geométrica é convergente com soma,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \qquad x \in]-1, 1[.$$

Consideramos a série de derivadas, $\sum n x^{n-1}$. Pelo critério da razão temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) |x| = |x|$$

e, portanto, $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$ converge para $x \in]-1,\ 1[$.

Agora tomemos um ponto qualquer $x \in]-1,\ 1[$ e un número a tal que $|x| < a < 1$. Como para qualquer $t \in [-a,\ a]$ temos $n\, t^{n-1} \leq n\, a^{n-1}$ e a série $\sum n\, a^{n-1}$ converge, logo o critério M-Weierstrass diz que $\sum n\, x^{n-1}$ é uniformemente convergente sobre $[-a,\ a]$. Portanto, pelo Teorema 2.9,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}, \qquad x \in [-a,\ a].$$

Assim, para cada $x \in]-1,\ 1[$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Assim o exercício esta concluído. $\Diamond$

O critério M-Weierstrass é uma ótima ferramenta para estabelecer convergência uniforme de algumas séries. Entretanto, ele só resolve as situações aonde existe convergência absoluta.

Precisamos desenvolver critérios para decidir convergência uniforme de sequências de funções que não convergem absolutamente.

Critério de Dirichlet. Suponhamos que

(a) A sequência $\{a_n\}_{n\geq 1} \subsetneq \mathbb{R}^+$ de termos não negativos seja descrescente com limite zero,

(b) existe uma constante K tal que para $x \in [a,\ b]$

$$|f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)| < K \quad \text{para todo} \quad n > N.$$

Então a série,

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, f_n(x)$$

é uniformemente convergente em $[a,\ b]$.

Exercícios Propostos

(1) Sejam as funções $u_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Mostre que $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente para zero quando $n \to \infty$.

(2) Considere a série para o $\operatorname{sen} x$;

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Verifique que converge uniformemente em x no intervalo $[0, r]$.

(3) Considere $u_n(x) = x^n$, para $0 \leq x \leq 1$. Em que subintervalos converge uniformemente ?

(4) Considere a sequência de funções $u_n(x) = \left(x - \dfrac{1}{n}\right)^2$ onde $0 \leq x \leq 1$. Verificar que u_n converge uniformemente .

(5) Considere a sequência de funções $u_n(x) = x - x^n$, onde $0 \leq x \leq 1$. Verificar que u_n converge uniformemente .

(6) Considere a sequência de funções $u_n(x) = x^n$, onde $0 \leq x \leq 0,999$. Verificar que u_n converge uniformemente .

(7) Considere a série $u(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^{n/2}}{n(n!)^2}$, onde $0 \leq x \leq 1$. Discutir como podemos provar que u seja contínua.

(8) Mostre que

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(\operatorname{sen} nx)^2}{n^2}$$

converge uniformemente .

(9) Mostre que

$$u(x) = \sum_{n\geq 0} \Big(\frac{x^n}{n!}\Big)^2$$

é contínua em todo $\mathbb{R}$.

(10) Suponha que sequência $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ com $0 \leq x \leq 1$ converge uniformemente onde u_n é diferenciável. Será que $u'_n(x)$ converge uniformemente ?

(11) Discutir a convergência uniforme das seguintes sequências ,

(a) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n + x^n}, \quad x \geq 1, \quad n \geq 1$ (b) $u_n = \dfrac{e^{-x^2/n}}{n}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1$

(12) Provar que $u(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ é contínua em $[0,\ 1]$.

(13) Discutir a convergência uniforme de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2} \quad \text{em} \quad [0,\ 1].$$

(14) Discutir a convergência uniforme de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}$$

(15) Se $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ é absolutamente convergente, provar que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n \operatorname{sen}(nx)$é uniformemente convergente.

2.4 Séries de Potências

São séries de potências as séries de funções do tipo,

$$a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + a_4(x-b)^4 + \cdots + a_n(x-b)^n + \cdots$$

representadas simbolicamente por,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$$

onde, por simplicidade, convencionamos $(x-b)^0 = 1$, quando $x = b$. Se considerarmos na série $a_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a série se torna uma série geométrica de razão $x - b$, convergente quando $|x - b| < 1$. O número real b denomina-se centro da série e os números a_n os coeficientes. Um caso particular ocorre quando $b = 0$ e, neste caso, a série de potências resultante será, particular importância, entre as séries de funções denominadas séries de potências

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

mais uma vez $x^0 = 1$ quando $x = 0$, os valores a_o, $a_1, \ldots$, são constantes.

Quando estanos frente a séries de potências, duas perguntas naturais que surgem são: para que valores reais atribuídos a x a série de potências é convergente? Se f é a função representada pela série, qual a relação entre f e os coeficientes a_n da série?

Por outro lado, é claro que toda série de potências,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n < \infty, \tag{2.9}$$

é convergente quando $x = b$, sendo, neste caso, a soma da série igual a a_0.

O conjunto dos valores reais atribuídos a x que tornam a série de potências convergente é, portanto, não vazio e para tal x a série representa um número real que é a sua soma. Dessa forma, a série de potências (2.9) define uma função real f cujo valor em x é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$$

e cujo domínio D_f é precisamente o conjunto dos números x para os quais a série converge. Uma série de potências se assemelha a um polinômio, com a diferença de possuir uma infinidade de termos, e a função que ela representa é aproximada em seu domínio (intervalo de convergência) pelos polinômios $s_n(x)$, que são as somas parciais da série.

As relações entre a função f e os coeficientes a_n da série serão estabelecidas quando estudemos as series de Taylor e MacLaurin.

Os valores de x que tornam uma série de potências convergente serão determinados pelo "Critério da Razão", sendo o caso extremo $(L = 1)$ analisado em separado.

Para ilustrar algumas situações, admitiremos "convergencia uniforme" e as operações Derivação e Integração sejam possíveis termo a termo para séries. É claro que podemos derivar e integrar termo a termo no caso de uma soma finita e as generalizações para somas infinitas são jutificadas.

Estas séries de potências gozam de propriedades especiais de convergência, as quais provém do seguinte teorema.

Teorema 2.10

Se a série de potências $\sum a_n\, x^n$ converge para algum valor de x, digamos $x = x_0$, então ela converge absolutamente para todo x que satisfaça $|x| < |x_0|$, e **converge uniformemente** em todo intervalo definido por

$$|x| \leq |x_1| < |x_0|.$$

Prova. Como a série $\sum a_n\, x^n$ converge, sabemos que $a_n x^n \to 0$ quando n vai ao infinito e, daí, que existe um número M tal que $|a_n\, x_0^n| < M$ com $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$. Agora, se $|x| < |x_0|$, então temos

$$|a_n\, x^n| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Logo, como a série $\sum M\, |x/x_0|^n$ é uma série geométrica convergente, resulta, pelo teste de comparação, que $\sum a_n x^n$ converge absolutamente no intervalo $|x| < |x_0|$. Em particular, para qualquer x_1 fixo, $|x_1| < |x_0|$, a série $\sum a_n\, x_1^n$ converge. Portanto, para $|x| < |x_1|$, temos $|a_n\, x^n| \leq |a_n x_1^n|$, e pelo critério M-Weierstrass temos que a série $\sum a_n\, x^n$ converge uniformemente no intervalo $-x_1 \leq x \leq x_1$. $\square$

Ora, para qualquer série de potências $\sum a_n\, x^n$ uma das seguintes afirmações é verdadeira,

(a) $\sum\limits_{n \geq 0} a_n\, x^n$ converge, para todo valor de x.

(b) $\sum\limits_{n \geq 0} a_n\, x^n$ converge, apenas, para $x = 0$.

(c) $\sum\limits_{n \geq 0} a_n\, x^n$ converge, para algum valor não-nulo de x mas não para todos os valores.

No terceiro caso, o conjunto dos números positivos x, para os quais $\sum a_n\, x^n$ converge, é limitado superiormente, porque, em caso contrário, de acordo com o Teorema 2.10, verificai-se-ia o caso (a). Fazendo R o supremo deste conjunto, concluímos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad \text{converge se} \quad |x| < R \quad \text{e diverge se} \quad |x| > R.$$

Para as séries de potencias $\sum a_n x^n$ onde o centro $b = 0$ o intervalo de convergência pode ser de qualquer um dos tipos

$$[-R,\ R], \quad [R,\ R[, \quad]-R,\ R], \quad]R,\ R[\subseteq \mathbb{R}.$$

Na tabela abaixo ilustramos essas situações com algumas séries apresentadas na introdução, indicando as respectivas funções que elas representam no intervalo de convergência.

Combinando os casos acima, temos o

Teorema 2.11

Para qualquer série de potências $\sum a_n\, x^n$ existe um número positivo R ($R = 0$ e $R = \infty$ inclusive), denominado **raio de convergência** da série, tal que a série converge (absolutamente), se $|x| < R$ e diverge, se $|x| > R$. Além disso, se R_1, é um número qualquer, tal que $0 < R_1 < R$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{converge uniformemente em} \quad -R_1 \leq x \leq R_1.$$

Prova

Tarefa para o estudante □

Nos exercícios resolvidos apresentados nesta seção, verificamos que uma série de potências em geral, $\sum a_n\,(x-b)^n$ ou pode ser absolutamente convergente em um intervalo $|x-b| < R$ e divergente quando $|x-b| > R$, podendo ser convergente ou não nos extremos desse intervalo. Esse número real R, que é o raio do intervalo, é denominado **raio de convergência** da série e o intervalo correspondente é o **intervalo de convergência**. O intervalo de convergência de uma série de potências pode ser de qualquer um dos seguintes tipos,

$$]b-R,\ b+R[,\quad [b-R,\ b+R[,\quad]b-R,\ b+R],\quad [b-R,\ b+R] \subseteq \mathbb{R}$$

dependendo da convergência ou não da série nos `extremos do intervalo`. As informações fornecidas pelo critério da razão estão ilustradas na Figura 2.3

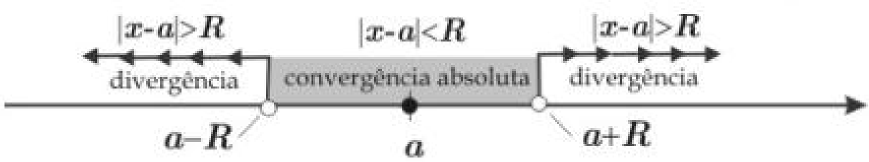


Figure 2.3: Intervalos de Convergência com centro $a = b$

Teorema 2.12

As séries de potências $\sum a_n(x-b)^n$ satisfazen apenas uma das seguintes condições

(a) a série converge apenas quando $x = b$;

(b) a série converge absolutamente para qualquer valor que se atribua a x;

(c) existe um número real $R > 0$, denominado raio de convergência, tal que a série converge absolutamente $|x-b| < R$ e diverge quando $|x-b| > R$.

Com relação ao raio de convergência R estabelecido no Teorema 2.12, nos casos em que ocorrer a condição (a) diremos que o raio de convergência é $R = 0$ e quando a série for convergente em qualquer valor de x diremos que o raio de convergência da série é $R = \infty$. Assim, toda série de potências tem um raio de convergência que pode ser zero, um número real positivo ou ∞.

Uma maneira prática de calcular o raio de convergência de uma série de potências é estabelecida no seguinte critério.

Teorema 2.13: Critério da Razão

Se o limite do quociente

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$$

então o raio de convergência R da serie de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^{kn+p} \quad \text{é} \quad R = \left(\frac{1}{l}\right)^{1/k}, \quad k > 0$$

(a) Se o valor de $l = 0$, então $R = \infty$ (b) Se o valor de $l = \infty$, então $R = 0$

Prova

Representando por a_n o termo geral da série, então $z_n(x) = a_n(x-b)^{kn+p}$ e temos,

$$L(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}(x)}{z_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-b)^{kn+k+p}}{a_n(x-b)^{kn+p}}\right| = |x-b|^k \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-b|^k \cdot l$$

e usando o critério da razão deduzimos que,

(a) se $l = 0$, então $L = 0$ e a série converge absolutamente em qualquer valor que se atribua a x e, neste caso, $R = \infty$;

(b) se $l = \infty$, então a única possibilidade de se ter $L < 1$ ocorre quando $x = b$ e, neste caso, $R = 0$;

(c) finalmente, se $0 < l < \infty$, então a série converge absolutamente se $|x-b|^k \cdot l < 1$, isto é, $|x-b| < (1/l)^{1/k}$ e diverge se $|x-b|^k \cdot l > 1$, isto é, $|x-b| \cdot l > (1/l)^{1/k}$. Neste caso deduzimos que $R = (1/l)^{1/k}$. □

Exercício 174. Consideremos a série de potências,

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{1}{n!}.$$

Mostre que é absolutamente convergente em $\mathbb{R}$.

Solução. Aplicando o critério da razão, temos

$$\left|\frac{[1/(n+1)!]x^{n+1}}{(1/n!)x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$

e, para qualquer x, esta razão tende para zero quando n vai ao infinito. Portanto, a série dada converge absolutamente em $-\infty < x < \infty$ e uniformemente em todo intervalo finito fechado $-R_1 \leq x \leq R_1$. ◊

Exercício 175. Se para $\sum a_n x^n$ existe o limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

então o raio de convergência da série é $R = 1/L$.

Solução. Neste caso obtemos a razão

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|$$

que converge para $L|x|$ quando n vai ao infinito. Portanto, a série converge se $L|x| < 1$ e diverge se $L|x| > 1$, isto e, converge se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$. $\Diamond$

Exercício 176. Encontrar o intervalo de convergência das seguintes séries,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-2)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n\, x^n}{(2n-1)\, 3^{2n-1}}$

Solução. Resolveremos o primeiro, pelo critério da razão temos que o quociente,

$$\left| (-2)^{n+1} \left(\frac{n+3}{n+2}\right) x^{n+1} \cdot \frac{1}{(-2)^n} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \frac{1}{x^n} \right| = 2\frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)^2}|x|,$$

converge para $2|x|$ quando n vai ao infinito. Pelo critério citado a série será absolutamente convergente quando $|x| < 1/2$ e diverge para $|x| > 1/2$. Os casos onde $|x| = \pm 1/2$ são estudados por separado.

Quando $x = \pm 1/2$ temos as séries numéricas:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

respectivamente, e pelo critério do limite do n-ésimo termo (critério da divergência) ambas são divergentes. Em conclusão a série dada converge no intervalo $|x| < 1/2$. Para as outras séries fazemos o mesmo estudo. $\Diamond$

Os teoremas concernentes à derivação e à integração de séries de potências são obtidos facilmente a partir do Teorema 2.11.

Teorema 2.14

Se a série de potências

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$$

tem raio de convergência R, então $\displaystyle\int_c^d F(x)dx$ existe para $-R < c < d < R$ e

$$\int_c^d F(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_c^d a_n x^n dx = \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{n+1}\right). \tag{2.10}$$

Prova. Conforme o Teorema 2.11, a série converge uniformemente no intervalo $c < x < d$. Portanto, (2.10) decorre dos resultados gerais relativos à integração de séries uniformemente convergentes. □

Teorema 2.15

Se a série de potências $F(x) = \sum a_n x^n$ tem raio de convergência R, então $F'(x)$ existe em $-R < x < R$ e sua derivada é,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}. \tag{2.11}$$

Prova. De acordo com o teorema geral sobre derivação de séries, precisamos apenas mostrar que a série derivada (2.11) converge uniformemente em todo intervalo $-R_1 < x < R_1$, para os quais $R_1 < R$. Para este fim, escolhamos x_1, tal que $R_1 < x_1 < R$. Então, $\sum a_n\, x_1^n$ converge absolutamente, e, consequentemente, existe um número M, tal que $|a_n\, x_1^n| < M$ para todo n. Então, para $|x_1| < R_1$, temos

$$\begin{aligned}|na_n x^{n-1}| &= n|a_n||x|^{n-1} \leq n|a_n|R_1^{n-1} \\ &\leq n\frac{M}{|x_1|^n}R_1^{n-1} = n\frac{M}{|x_1|}\left|\frac{R_1}{x_1}\right|^{n-1}\end{aligned}$$

No entanto, a série

$$\sum_{n\geq 1} n\frac{M}{|x_1|}\left|\frac{R_1}{x_1}\right|^{n-1},$$

converge pelo teste da razão, e a convergência uniforme de (2.11) resulta agora do critério M-Weierstrass. □

Exercício 177. Encontre uma série de Maclaurin que defina a função dada, e determine o raio de convergência.

(a) $\ln(1+x)$ (b) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ (c) $\displaystyle\int_o^x e^{-t^2}\,dt$

Solução. Resolvemos a primeira questão (a), lembrando a série geométrica e integrando ambos lados,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n, \qquad |t| < 1$$

integrando de 0 até x, $-1 < x < 1$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}\int_0^x (-1)^n t^n\,dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad |x| < 1.$$

onde seu raio de convergência é $R = 1$. Para o segundo exercício (b) tomamos a expressão acima obtida e multiplicamos pela série geométrica,

$$\ln(1+x)=\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad |x|<1$$

por outro lado

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}, \qquad |x|<1$$

Multiplicando termo a termo obtemos,

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}=\sum_{k\geq 0}c_k\,x^k=x-\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{13}{15}x^5+\cdots\,, \qquad |x|<1$$

onde $c_k=\displaystyle\sum_{l+m=k}a_lb_m$ e o raio de convergência é $R=1$.

Finalmente no último exercício (c) utilizamos a expressão da série exponencial

$$e^{-x}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^n}{n!}, \qquad x\in\mathbb{R}$$

substituindo o argumento

$$e^{-t^2}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

A seguir e integramos termo a termo, de 0 até x, com $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t^2}dt &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}\\ &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!5}+\frac{x^7}{3!7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\cdots \qquad x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

logo o raio de convergência é $R=\infty$. $\Diamond$

Informalmente, os dois teoremas precedentes afirmam que se pode integrar ou derivar uma série de potências, *termo a termo*, sem afetar o raio de convergência. A convergência em $|x|=R$ pode ser desfeita por derivação ou adquirida por integração, mas isto só pode ser comprovado, examinando-se cada série, individualmente. $\Diamond$

Exercício 178. Consideremos as seguintes séries de funções

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x+\frac{x^2}{2}+\cdots$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots$

Examine cada uma e responda sobre sua convergência ou divergência.

Solução. Cada uma destas séries tem raio de convergência $R = 1$, porque (a) é uma série geométrica, (b) e (c) se obtém de (a) por integração. Vemos, porém, que a série (a) diverge tanto em $x = 1$ como em $x = -1$, a série (b) converge em $x = -1$, mas diverge em $x = 1$, e a série (c) converge nos dois extremos. ♢

Existem muitas implicações interessantes do teorema referente à derivação de séries de potências. Se $\sum a_n x^n$ converge em $-R < x < R$, então ela representa (converge para) uma função contínua,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

E mais, $F'(x)$, $F''(x) \ldots$ existem neste intervalo e

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}, \quad -R < x < R,$$

$$F''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2}, \quad -R < x < R,$$

$$F'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n\,(n-1)(n-2)\, a_n x^{n-3}, \quad -R < x < R,$$

Repetindo o processo de derivação até a ordem n, obtemos

$$F^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)...(k-n+1)a_k x^{k-n}, \quad -R < x < R.$$

para $n \geq 1$ e, por conseguinte, $F^{(n)}(0) = n!\, a_n$. Com isto demonstramos o

Teorema 2.16

Se uma função F pode ser representada por uma série de potências $\sum a_n x^n$ no intervalo $-R < x < R$, então F tem derivadas de todas as ordens em $-R < x < R$ e os coeficientes da série são unívocamente determinados pela relação

$$a_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0), \quad a_0 = F(0).$$

O Teorema 2.16 estabelece a *unicidade* do desenvolvimento em série de potências de uma função F num dado intervalo $-R < x < R$. A existência de tal série é problema mais difícil, e o estudaremos na próxima seção. Observamos, naturalmente, que, para que uma função F tenha uma representação em série de potências, é necessário que F tenha derivadas de todas as ordens. Esta condição exclui, por exemplo, a função $\ln |x|$ que não seja definida em $x = 0$ e a função $x^8/3$ para a qual a derivada de terceira ordem deixe de existir em $x = 0$. Infelizmente, a existência de uma infinidade de derivadas, de F em $-R < x < R$ não é o suficiente para garantir a representabilidade de F por uma série de potências.

Exercício 179. Seja função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se} \quad x\neq 0\\ \\ 0 & \text{se} \quad x=0. \end{cases}$$

Mostre que não converge para uma função não nula.

Solução. Vejamos que a função dada possui derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$. Todavia,

$$f^{(n)}(0)=0 \quad \text{para todo} \quad n,$$

e a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

converge em $\mathbb{R}$ para a função que seja identicamente nula, e não para f. ◊

Encerramos esta seção com vários resultados aritméticos concernentes a séries de potências.

Teorema 2.4.1. *Se a seguintes funções*

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n \qquad e \qquad g(x)=\sum_{n\geq 0}b_nx^n$$

em $-R<x<R$, então, para quaisquer constantes α, β a série $\sum(\alpha a_n+\beta b_n)x^n$ tem raio de convergência pelo menos R e representa a função $\alpha f(x)+\beta g(x)$ em $-R<x<R$.

Prova. A demonstração do teorema é uma consequência imediata do Teorema de sequências convergentes. □

Teorema 2.17

Se as funções

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n \qquad \text{e} \qquad g(x)=\sum_{n\geq 0}b_nx^n \quad \text{em} \quad -R<x<R,$$

então a série $\sum c_n\,x^n$, onde

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=a_0\,b_n+a_1\,b_{n-1}+\cdots+a_nb_0, \tag{2.12}$$

converge para o produto fg em $-R<x<R$.

O leitor notará que os coeficientes (2.12) são exatamente aqueles que se obtém mediante a "multiplicação formal", das séries dadas, considerando-as como polinômios.

Exercício 180. Encontrar a expansão em séries de potências das funções

(a) e^{x^2-1} (b) $\dfrac{1-x}{1+2x+x^2}$

Solução. Resolvendo o primeiro item (a) por médio de

$$e^{x^2-1} = e^{x^2}e^{-1} = e^{-1}\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n}}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

onde o raio de convergência é $R = \infty$. O segundo item (b) do exercício exige alguma modificação antes de encontrar a série,

$$\frac{1-x}{1+2x+x^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+2x+x^2)(1+x)} = \frac{1-x^2}{(1+x)^3} = (1-x^2)(1+x)^{-3}.$$

Utilizando a série binômial, uma expansão em séries de potências, com $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

válida no intervalo $|x| < 1$. Usando $\alpha = -3$ temos

$$\frac{1-x}{1+2x+x^2} = (1-x^2)(1+x)^{-3} = (1-x^2)(1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-84x^5+\cdots),$$

$$= 1-3x+5x^2-16x^3+9x^4-74x^5+\cdots, \qquad |x| < 1.$$

com raio de convergência $R = 1$. $\Diamond$

Como último comentário, observamos que, até agora, temos estudado série de potências $\sum a_n x^n$ cujo intervalo de convergência se encontra centrado no ponto $x = 0$. Toda a discussão pode muito bem ser estendida a séries da forma $\sum a_n(x-b)^n$. O intervalo de convergência destas séries é da forma $b - R < x < b + R$ (com ou sem os extremos) e se calcula o raio de convergência R com as mesmas técnicas apresentadas anteriormente.

Em particular, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n \quad \text{em} \quad b-R < x < b+R,$$

então f possui uma infinidade de derivadas nesse intervalo e os coeficientes são

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(b).$$

Exercício 181. Encontrar as séries de potências para as funções dadas

(a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ em potências de x.

(b) $g(x) = \operatorname{senh} x$ em potências de x.

(c) $h(x) = e^{x/2}$ em potências de $x-2$.

Solução. Feito em sala de aula. $\Diamond$

Exercícios Propostos

(1) Encontre um exemplo de uma sequência $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que converge para zero pontualmente, porém a integral $\int_0^1 u_n(x)\,dx$ não converge para zero.

(2) Considere a sequência $u_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, $0 \leq x \leq 1$. Em que subintervalos existe a convergência da derivada? A funcão limite é diferenciável em $x = 0$?

(3) Verificar o valor de $\displaystyle\int_0^x e^t dt = e^x - 1$, usando $e^x = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}$.

(4) Mostre que a sequência $\{u_n\}_{n\geq 1}$ definida por

$$u_n(x) = n^3 x^n (1-x),$$

converge pontualmente para $u = 0$ no intervalo $[0,1]$ e mostre que a convergência não é uniforme.

(5) Verificar que $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t dt = 1 - \cos x$, utilizando a seguinte relação:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(6) Encontre o intervalo de convergência das seguintes séries,

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n!\, x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x}{n!}$

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$ (j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x}{n!}$

(7) Mostre que se o raio da convergência da série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n x^n$ é igual a r, então o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n x^{2n}$ é igual a $\sqrt{r}$.

(8) Mostre que se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L$, $(L \neq 0)$, então o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n x^n$ é igual a $\dfrac{1}{L}$.

(9) Considere a função f definida por uma série de potências, a seguir faça o seguinte:

(a) Encontre o raio de convergência e o domínio de f; (b) Escreva a série que define a f' e encontre seu raio de convergência ; (c) Encontre o domínio de f'.

(i) $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (ii) $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

(iii) $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n-1}}$ (iv) $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

(v) $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ (vi) $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(x-1)^n}{n\,3^n}$

(10) Execute os seguintes passos;

(a) Encontre uma série de potências representando a função $\dfrac{e^x - 1}{x}$.

(b) Por diferenciação termo a termo da série de potências do item anterior mostre que a série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n}{(n+1)!} = 1$.

(11) Execute os seguintes passos;

(a) Encontre uma série de potências representando a função $x^2 e^{-x}$.

(b) Por diferenciação termo a termo da série de potências do item anterior mostre que a série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \dfrac{n+2}{n!} = 4$.

2.5 Polinômios e Séries de Taylor

Na seção anterior vimos que, se uma função f puder ser desenvolvida em uma série de potências da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$$

num intervalo $|x-b| < R$, então f terá derivadas de todas as ordens, e

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(b), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mas existem funções que não podem ser expandidas em séries de potências. Na verdade, as funções que podem ser representadas em séries de potências são as que possuem infinitas derivadas e que se encontram bem próximas do seu *polinômio de Taylor*.

Definição 14: Polinômio de Taylor

Dada uma função f real que possui derivadas até a ordem n num intervalo contendo b, o polinômio de Taylor de f de grau n em torno de $x = b$ é o polinômio,

$$P_n(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \tag{2.13}$$

Quando o centro $b = 0$ obtemos a partir da equação (2.13) o polinômio de MacLaurin

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{2.14}$$

Exercício 182. Determinar o polinomio de Maclaurin e o resto da expansão da função real f dada por $f(x) = \exp(x)$.

Solução. Na situação de ter a função $f(x) = \exp(x)$, o correspondente polinômio de Maclaurin esta dado por

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = s_n(x) \tag{2.15}$$

e coincide com a n-ésima reduzida ou soma parcial $s_n(x)$, da série $\sum x^n/n!$ que representa a função real $\exp(x)$. Para essa função exponencial, temos o fato

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo} \quad b \in \mathbb{R}$$

Deduzimos que para o número ξ com $0 < \xi < x$ o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-b)^{n+1} = e^{\xi} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}(x-b)^{n+1} = 0. \tag{2.16}$$

O termo dado pela expressão,

$$R_n(x,\ \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-b)^{n+1}$$

que aparece no limite (2.16) é chamado de *resto da aproximação* da função f pelo seu polinômio de Taylor. O resultado a seguir, conhecido como *Fórmula de Taylor com Resto*, afirma que uma função derivável de classe C^{n+1} em torno de um ponto tem a propriedade (2.16) se, e somente se, ela puder ser aproximada pelo seu polinômio de Taylor. $\Diamond$

Consideremos agora a questão da *existência* de uma tal representação em série de potências para uma dada função f.

Teorema 2.18: Fórmula de Taylor com Resto I

Seja f uma função real de classe C^{n+1} num intervalo que contém b. Dado qualquer x nesse intervalo, existe um número ξ entre b e x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x,\ \xi) \tag{2.17}$$

onde $P_n(x)$ ó polinômio de Taylor de f. Além disso para sequência $\{P_n(x)\}$, temos

$$P_n(x) \to f(x) \qquad \text{se e somente se} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-b)^{n+1} = 0 \tag{2.18}$$

Prova. Feito em sala de aula. $\square$

Denotando pelo símbolo $\{s_n(x)\}$ a sequência de somas parciais da série,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \quad \text{onde a função } f \text{ é de classe} \quad C^{\infty}(I),\ b \in I$$

e assim deduzimos,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

isto quer dizer que a série converge para $f(x)$ em cada x do intervalo de convergência. Assim sendo, temos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \tag{2.19}$$

A série de potências (2.19) é chamada de *Série de Taylor* de f em torno de $x = b$. Quando $b = 0$, a série correspondente é chamada *Série de Maclaurin* de f.

Exercício 183. Ilustre o Teorema 2.18 (Fórmula de Taylor com Resto) anterior considerando a função $f(x) = \exp(x)$

Solução. As derivadas da função f no ponto $x = 0$ é dada pela fórmula $f^{(k)}(0) = 1$. Portanto o polinômio de Taylor e seu resto

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n, \quad R_n(x,\ \xi) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x-b)^{n+1}$$

para algum número ξ entre 0 e x. De maneira que

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x-b)^{n+1}$$

Aplicando limite quando n vai ao infinito na seguinte diferença,

$$\exp(x) - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x-b)^{n+1}$$

para obter,

$$\lim_{n\to\infty}[\exp(x) - P_n(x)] = 0 \quad \text{implica} \quad \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \exp(x)$$

Exercício 184. Ilustre o Teorema 2.18 (Fórmula de Taylor com Resto) anterior considerando a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Solução. Para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ temos as suas derivadas avaliadas no ponto $x = 0$

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f'''(0) = -1 \qquad f^{(iv)}(0) = 0 \qquad \cdots$$

Além disso o comportamento da derivada de ordem $n+1$ no ponto ξ é,

$$f^{(n+1)}(\xi) = \begin{cases} \pm \operatorname{sen} \xi & \text{se n for par} \\ \pm \cos \xi & \text{se n for ímpar} \end{cases}$$

Assim temos,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$$

Aplicando limite a diferença em valor absoluto, quando n vai ao infinito

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}\right|$$

Portanto o resto,

$$R_n(x,\ \xi) = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}\right| \leq \frac{|x-\xi|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

quando n vai ao infinito. Verificando que a série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| = 0 \quad \text{implica} \quad \operatorname{sen} x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

com isto, fica concluído o exercício. ♢

Exercício 185. Encontre as séries das funções reais dadas por,

(a) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ (b) $g(x) = \cos^2(x)$ (c) $h(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$

Solução. Combinando as séries de $sen(x)$ e $cos(x)$ e usando alguns artifícios simples encontramos séries que representam as funções dos itens deste exercicio, no item (a) é resolvido usando a relação

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right]$$

que lineariza a função $\operatorname{sen}^2(x)$ juntamente com a série de potencias que representa $cos(x)$, com o argumento $2x$ no lugar de x.

Para item (b) usamos a linearização da função cosseno dada por,

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2x)\right]$$

Finalmente para o item (c) a série de potencias da função h é obtida simplesmente multiplicando a série de $sen(x)$ por x^2. Neste caso, obtemos,

$$h(x) = x^2 \operatorname{sen}(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+3}$$

e isso conclui o exercício. ♢

Exercício 186. A partir da série geométrica no intevalo $|x| < 1$ obtenha a representação em séries de poteêcias da função

(a) $w(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ (b) $\theta(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Solução. Considerando a série geométrica, para o item (a),

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1.$$

Derivando termo a termo num subintervalo fechado de $|x| < 1$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,x^{n-1}$$

e assim obtemos a representação,

$$w(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1}, \quad |x| < 1.$$

Finalmente o item (b) é obtido multiplicando a última série por x,

$$\theta(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n}, \quad |x| < 1.$$

e assim concluimos o exercício. ♢

Teorema 2.19: Fórmula de Taylor com Resto II

Suponhamos que f e suas $n+1$ derivadas sejam definidas e contínuas no intervalo I definido por $|x-a| < R$. Então, para todo x em I, temos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k + R_n(x), \tag{2.20}$$

onde o resto é dado por

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_b^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt. \tag{2.21}$$

Prova. Comecemos com a fórmula

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Transpondo $f(b)$ para o segundo membro desta equação e integrando por partes [com $u = f'(t)$, $\quad dv = dt$] obtemos

$$f(x) = f(a) + [f'(t)(t-x)]_a^x - \int_a^x (t-x) f^{(2)}(t)\, dt$$

ou

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (t-x) f^{(2)}(t)dt$$

onde a fórmula de integração por partes foi escrita na forma $\displaystyle\int udv = u(v+c) - \int (v+c)du$ em que c e é uma constante arbitrária.

Integremos novamente por partes, fazendo $u = f^{(2)}(t)$ e $dv = (x-t)dt$, para obter

$$\begin{aligned} f(x) &= f(b) + f'(b)(x-a) + \left[f^{(2)}(t) \cdot \frac{-(x-t)^2}{2!} \right]_a^x - \int_b^x \frac{-(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)\, dt \\ &= f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f^{(2)}(b)}{2!}(x-b)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Continuando a integrar por partes (demonstração por indução matemática), chegaremos às fórmulas desejadas, depois de n integrações. (Observemos que se podem efetuar as integrações, desde que os integrandos sejam contínuos.) □

Exercício 187. A função $f(x) = x^{8/3}$ tem derivadas contínuas até a ordem dois no intervalo $-\infty < x < \infty$.

Solução. Portanto, quando $b = 8$, a fórmula de Taylor fornece

$$\begin{aligned} f(x) = x^{8/3} &= f(8) + f'(8)(x-8) + \int_8^x (x-t) f^{(2)}(t)\, dt \\ &= 256 + \frac{256}{3}(x-8) + \frac{40}{9}\int_8^x (x-t)t^{2/3}\, dt \end{aligned}$$

Se f tem derivadas de todas as ordens no ponto b é natural considerar a série de *Taylor infinita*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n \tag{2.22}$$

e perguntar se esta série converge para f num intervalo $|x-b| < R$. Aplicando o Teorema 2.19, podemos afirmar que (2.22) converge para f quando $|x-b| < R$ se, e somenente se,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

para todo x do intervalo. Logo, para resolver esta questão, basta determinar o comportamento de $R_n(x)$ quando n vai ao infinito. ◊

Para isto, o seguinte resultado é particularmente útil.

Teorema 2.20

Se f satisfizer às condições do Teorema 2.19 e se existir um número M positivo, tal que $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ para $|x-b| < R$, então

$$|R_n(x)| \le M\frac{|x-b|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.23}$$

Prova. Suponhamos, primeiro, que $x \ge b$; então,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1}{n!}\int_b^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt\right| = M\frac{(x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Se, por outro lado, $x \le b$, então

$$|R_n(x)| \le \frac{M}{n!}\int_x^b (t-x)^n\, dt = M\,\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

A combinação destes resultados dá (2.23). □

Exercício 188. Se $f(x) = e^x$, a fórmula de Taylor fornecerá

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad \text{com} \quad R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n\, e^t\, dt.$$

Como $|f^{n+1}(x)| = |e^x| \leq e^R$ no intervalo $|x| < R$, o Teorema 2.20 fornece

$$|R_n(x)| \leq e^R \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad -R < x < R. \tag{2.24}$$

Portanto, para qualquer x desse intervalo,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Pois, para x fixo, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} < \infty$$

converge pelo teste da razão. Logo, seu termo geral tende para zero.

Como R é arbitrário, segue-se que

$$e^x = \sum_{n,=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.25}$$

isto é, que o número e, é representado pela sua série de Taylor na reta real.

Pode-se aplicar a, estimativa (2.24) também para efeito de cálculos. Por exemplo, encontremos o número de termos de (2.25) necessários para calcular e com uma precisão de sete casas decimais. Neste caso, temos (com $R = 1$)

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + R_n(1) \quad \text{ e } \quad |R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Podemos fazer esta última expressão tornar-se menor do que 10^{-7}, escolhendo $n = 10$.

Exercício 189. Como as derivadas de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são limitadas, cada uma, por $M = 1$ em $\mathbb{R}$, os restos de suas séries de Taylor são limitados por $|x|/(n+1)!$. Portanto, a série de Taylor converge, em cada caso, para a respectiva função no intervalo $-\infty < x < \infty$.

O leitor pode, com facilidade, mostrar que as séries resultantes são

$$\operatorname{sen} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Exercício 190. Combinando o Exemplo 188 com o Teorema 2.4.1, obtemos

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

2.5.1 Aproximação por Polinômios

Ao aproximar uma função real $f(x)$ pelo polinômio de Taylor $P_n(x)$ gerado por ela devemos ter em mente dois aspectos: (a) se a aproximação atende as expectativas e (b) que grau deve ter o polinômio $P_n(x)$ para obtermos a precisão desejada.

O grau do polinômio determina o número de termos que devem ser considerados na aproximação e o erro é estimado usando relação

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|\,.$$

Se a série for alternada a estimativa de Leibniz para séries alternadas pode ser utilizada para medir o tamanho do erro. Em qualquer caso podemos usar a Fórmula de Taylor para obtermos,

$$|R_n(x)| \leq \frac{M\,|x-b|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{onde} \quad |f^{(n+1)}| \leq M.$$

Exercício 191 (Aproximação Linear)**.** Encontrar os valores positivos de x de maneira que ao aproximar $\ln(1+x)$ pela função $g(x) = x$ o erro cometido não ultrapasse 1% do valor de $g(x)$.

Solução. Sabemos que a identidade pontual

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{em} \quad |x| < 1.$$

se fazemos $f(x) = \ln(1+x)$ e escolhemos ξ entre 0 e x tal que $0 < \xi < x < 1$, então obtemos

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x,\ \xi) \quad \text{ou} \quad f(x) - P_1(x) = R_1(x,\ \xi)$$

a seguir calculamos a a seguinte estimativa

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2\right| = \left|\frac{1}{(1+\xi^2)} \cdot \frac{x^2}{2!}\right| = \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{x^2}{2!} \leq \frac{x^2}{2!},$$

pois, $1 + \xi^2 > 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Finalizando de acordo as hipoteses, não superar o 1% de $g(x)$ é o mesmo que

$$\frac{x^2}{2} < 1\% \cdot g(x) = \frac{1}{100} \cdot x = \frac{x}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{2} < \frac{x}{100},$$

e isso implica resolver a desigualdade anterior, isto é, $x < 0,02$. $\Diamond$

Exercício 192 (Aproximação Quadrática)**.** Estimar o erro ao aproximar a função $f(x) = \exp(x)$ por polinômio quadrático em $|x| < 0,1$.

Solução. Sabemos pela fórmula de Taylor I,

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x,\ \xi) \quad \text{ou} \quad f(x) - P_2(x) = R_2(x,\ \xi), \quad \text{no intervalo} \quad |x| < 0,1.$$

com ξ que esta entre b e x. Ou seja,

$$f(x) = e^x = P_2(x) + R_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 \quad |x| < 0,1.$$

Portanto devemos estimar o resto

$$|R_2(x,\ \xi)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3\right| = \frac{e^{\xi}}{3!}x^3 \leq e^{0,1}\frac{1}{6}(0,1)^3 \approx (1,77)\cdot 10^{-4}$$

e oisso conclui o exercício. $\Diamond$

Exercício 193 (Critério da Segunda Derivada)**.** Utilizando aproximação por polinomios deduzir o Critério da segunda derivada para extremos locais,

Solução. Pelas hipoteses da Fórmula de Taylor I, temos $f \in C^2(E)$ tal que $b \in E$ e consideremos a relação de aproximação linear com seu respectivo resto,

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x,\ \xi) \quad \text{ou} \quad f(x) - P_1(x) = R_1(x,\ \xi) \tag{2.26}$$

com ξ que esta entre b e x. Ou seja,

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-b)^2$$

Observando a expressão acima (2.26) deduzimos o critério da Segunda Derivada para extremos locais,

(a) Se $f'(b) = 0$ e $f''(\xi) < 0$ em E então $f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in E$, logo a função real f tem um máximo local no ponto $x = b$;

(b) Se $f'(b) = 0$ e $f''(\xi) > 0$ em E então $f(x) \geq f(b)$ para todo $x \in E$, logo a função real f tem um mínimo local no ponto $x = b$.

com isso concluimos o exercício. $\Diamond$

Uma função real f denomina-se analítica em $x = b$ quando ela puder ser representada por sua Série de Taylor em algum intervalo aberto contendo b. De acordo com o Teorema de Taylor, uma função infinitamente derivável em uma vizinhança de b é aí analítica se, e somente se, o resto de sua aproximação de Taylor tende para zero, com $n \to \infty$.

Assim, a soma e o produto de funções analíticas são analíticas, como também são analíticas, além dos polinômios, as demais funções elementares,

$$\exp(x), \quad \ln(x), \quad \text{sen}(x), \quad \cos(x), \quad \text{senh}(x), \quad \cosh(x), \quad \text{etc.}$$

em seus respectivos domínios. Um fato crucial, porém não tão óbvio, é que se uma função f é analítica em um intervalo E, onde ela nunca se anula, então a função $1/f$ é também analítica em E. Com isto queremos enfatizar que as funções racionais são analíticas em todo intervalo onde o denominador é diferente de zero.

Exercícios Propostos

(1) Encontrar a série de Taylor com centro fornecido abaixo, e dar a resposta na forma de somátorio,

(a) $\ln(1+x)$, com centro em $x_0 = 0$

(b) $(1+x)^{-3}$, com centro em $x_0 = 0$

(c) $(1+x)^{1/2}$, com centro em $x_0 = 0$

(d) $\ln x$, com centro em $x_0 = 2$

(e) $\operatorname{sen} x$, com centro em $x_0 = 1$

(f) e^x, com centro em $x_0 = 1$

(g) $(1+x)^{-1}$, com centro em $x_0 = 1$.

(2) Seja a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{para} \quad x = 0. \end{cases}$$

Encontre a série de Maclaurin para f e mostre que ela converge para todo valor de x, mas que representa $f(x)$ só quando $x = 0$.

(3) Demonstre que a série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ representa $\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(4) Demonstre que a série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ representa $\operatorname{senh} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(5) Demonstre que a série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ representa $\cosh x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(6) Obtenha série de Maclaurin para a função $\cos x$, por diferenciação da série de Maclaurin da função $\operatorname{sen} x$. Depois obtenha a série de Maclaurin para a função $\operatorname{sen} x$, diferenciando a série de Maclaurin da função $\cos x$.

(7) Encontre a série de Taylor para e^x centrada em 4, usando a série de Maclaurin da função exponencial e^x.

(8) Use a série de Maclaurin de $\ln(1+x)$, para encontrar a série de Taylor de $\ln x$ centrada no ponto 2.

2.6 Série Binomial

A partir da expansão binomial, para cada $n \in \mathbb{N}$ obtemos a fórmula,

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$$

de maneira mais compacta a fórmula fica reduzida para,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$$

Substituindo $y = 1$ na fórmula obtemos uma versão modificada

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-j+1)}{j!}x^j + \cdots + x^n$$

que serve de motivação para procurar uma expansão em séries de potências da seguinte função

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad \text{onde} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Para a série binomial,

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \tag{2.27}$$

aplicando o critério da razão absoluta

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| = |x|$$

onde o termo n-ésimo é dado por $u_n(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$. Assim, a série binomial pelo critério da razão, converge quando $|x| < 1$ e diverge quando $|x| > 1$.

Se a função h é representada pela série de potências (2.27) no intervalo $-1 < x < 1$, escrevemos da seguinte forma

$$h(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

e derivando termo a termo deduzimos que,

$$h'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \cdots + \frac{\alpha n(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n-1} + \cdots$$

Assim formamos a seguinte equação,

$$(1+x)h'(x) - \alpha h(x) = 0 \tag{2.28}$$

Para mostrar que $h(x) = (1+x)^\alpha$ fazemos o seguinte, primeriro derivamos o quociente em relação a variável x

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{h(x)}{(1+x)^\alpha}\right] = \frac{(1+x)h'(x) - \alpha h(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0 \quad \text{em} \quad -1 < x < 1$$

Portanto,

$$\frac{h(x)}{(1+x)^\alpha} = C \quad \text{como} \quad h(0) = 1 \quad \text{temos} \quad C = 1$$

e portanto, $h(x) = (1+x)^\alpha$. Com isso, obtemos a expansão em séries de potências,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

válida no intervalo $|x| < 1$.

Exercício 194. Obter um valor aproximado da função $f(x) = \sqrt{1+x}$ no intervalo $|x| < 1$.

Solução. Utilizando a série binomial, identificamos $\alpha = 1/2$ e portanto obtemos

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$

e dependendo do problema podemos considerar apenas os dois ou três primeiros termos da série para a aproximação. Seja $x = 0,3$ e aproximando a série por esu três termos,

$$\sqrt{1,3} = 1 + \frac{1}{2}(0,3) - \frac{1}{8}(0,3)^2 \approx 1,13875$$

Exercícios Propostos

(1) Utilizando a série binomial para a função $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, mostre que,

$$\operatorname{arcsen} x = x + \sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!(2n+1)2^n} x^{2n+1} \qquad \text{para} \qquad |x| < 1$$

(2) Utilzando a série binomial $(1+x)^{1/3}$, calcule o valor aproximado de $\sqrt[3]{25}$ com quatro casas decimais e compare o valor com o resultado obtido numa calculadora.

(3) Calcule a integral definida,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx$$

com três casas decimais

(4) Para que valores de x podemos substituir a função $\operatorname{sen} x$ pela função x, sem que o erro exceda 5×10^{-4}?

(5) Substituindo a função $\cos x$ pela soma $1 - x^2/2$ no intervalo $|x| < 0,1$, qual a estimativa do erro?

(6) Se $|x| < 0,001$, qual o erro cometido ao substituir $(1+x)^{1/2}$ por $1 + x/2$?

Chapter 3

Funções a Valores Vetoriais

Muitas vezes pensamos em uma curva como uma linha desenhada no papel, como uma reta, um círculo ou uma curva de seno. É útil pensar em uma curva matematicamente como o conjunto de valores de uma função que aplica um intervalo de números reais no plano ou espaço.

Chamaremos tal aplicação de percurso ou caminho. Na maioria das vezes denotamos um caminho por α ou pelo símbolo **c**. A imagem do caminho corresponde então a uma reta que vemos no papel (ver Figura 3.1).

Frequentemente, escrevemos t para a variável independente e imaginamos que seja o tempo, de modo que $\alpha(t)$ é a posição no tempo t de uma partícula em movimento, que traça uma curva $\mathcal{C}$ à medida que t varia.

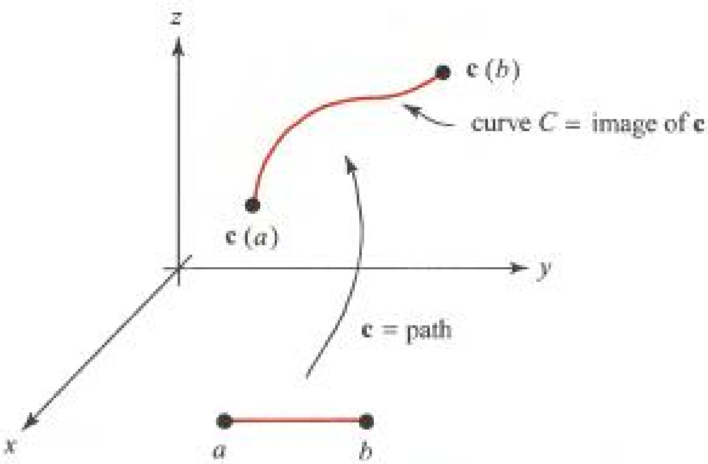


Figure 3.1: O percurso é α; a sua imagem é a curva $\mathcal{C}$

Enfatizando estritamente, devemos distinguir entre $\alpha(t)$ como um ponto no espaço e como um vetor baseado na origem. No entanto, não fazer isso não deve causar confusão. Vejamos algumas ideias,

Diz-se que um vetor α é a função vetorial de um argumento escalar t se cada valor do escalar escolhido do domínio de valores admissíveis estiver associado a um valor definido do vetor α. Isso pode ser escrito da seguinte forma,

$$\alpha = \alpha(t).$$

Se o vetor α for uma função do argumento escalar t, $\alpha = \alpha(t)$, então as coordenadas x, y, z do vetor r também são funções de t com valores em $\mathbb{R}$,

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Por outro lado, se as coordenadas do vetor α são funções de t, então o próprio vetor α também é uma função de t,

$$\alpha = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3.$$

Portanto, determinar uma função vetorial $\alpha(t)$ é o mesmo que determinar três funções escalares ou reais $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Um caminho ou percurso em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\alpha\colon [a,\ b] \to \mathbb{R}^n$; é um caminho no plano se $n = 2$ e um caminho no espaço se $n = 3$. A coleção de pontos $\alpha(t)$ quando t varia no intervalo fechado $[a,\ b]$ é chamada de curva, e $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são seus pontos finais. Diz-se que o caminho α parametriza essa curva.

Se α é um caminho em $\mathbb{R}^3$, podemos escrever $\alpha(t) = \langle x(t),\ y(t),\ z(t)\rangle$ e chamar $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ de funções componentes de α. Distinguimos as funções de componentes de forma semelhante em $\mathbb{R}^2$ ou, geralmente, em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.0.1 (Hodógrafo)**.** O hodógrafo da função vetorial $\alpha(t)$ de um argumento escalar é o lugar geométrico descrito pelo extremo do vetor $\alpha(t)$, à medida que o escalar t varia, quando a origem do vetor $\alpha(t)$ é fixada em um ponto 0 no espaço. Veja Figura 3.2

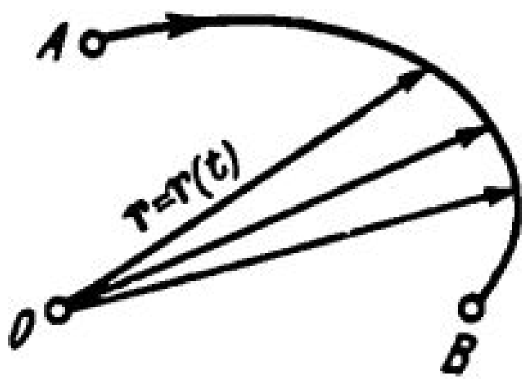


Figure 3.2: Hodógrafo de uma função vetorial $r = \alpha$

O hodógrafo de um raio vetor $\alpha = \alpha(t)$ de um ponto em movimento é a trajetória $\mathcal{C}$ desse ponto. Outra reta $\mathcal{C}_1$ é o hodógrafo da velocidade $v = v(t)$ daquele ponto. Veja a Figura 3.3

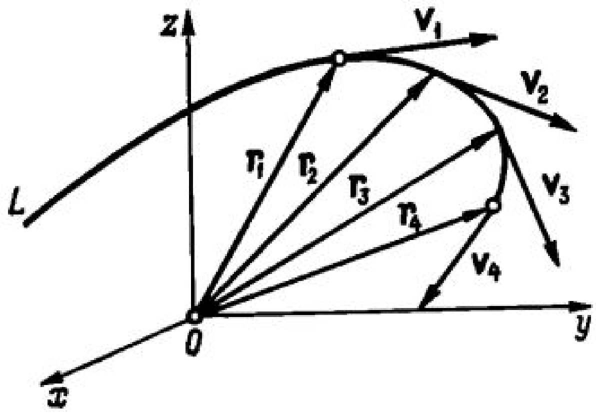


Figure 3.3: Hodógrafo $\mathcal{C} = L$ de um raio vetor $\alpha = \alpha(t) = r(t)$

Assim, se um ponto material (partícula) está em movimento ao redor de um círculo com velocidade constante, $\|v\| =$ constante, então seu hodógrafo de velocidades é igualmente um circunferência com centro em 0_1 e raio igual a $\|v\|$. Veja a Figura 3.4

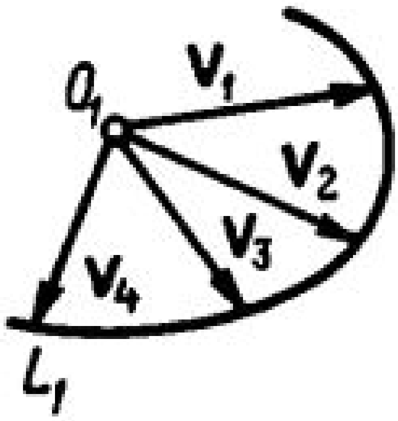


Figure 3.4: Hodógrafo $\mathcal{C}_1 = L_1$ de um raio vetor $\alpha = \alpha(t) =$ constante

Exercício 3.0.1. Encontre a função vetorial que descreve a linha reta $\mathcal{L}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa através do ponto $P_0 = (x_0,\ y_0,\ z_0)$ na direção do vetor $\boldsymbol{\nu}$.

Solução. Trata-se da imagem do caminho ou percurso

$$\alpha(t) = P_0 + t\,\boldsymbol{\nu}$$

para $t \in \mathbb{R}$, utilizando ideias de geometria analitica, forma ponto vetor direção. Veja a Figura 3.5). Assim, nossa noção de curva inclui linhas retas como casos especiais. $\Diamond$

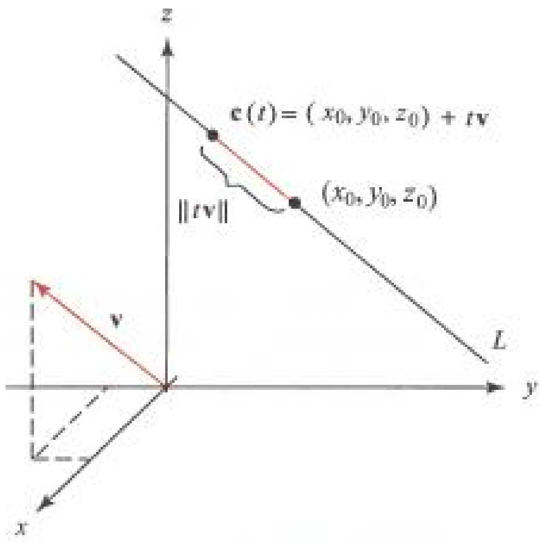


Figure 3.5: $\mathcal{L}$ é a linha reta no espaço através de P_0 e na direção $\boldsymbol{\nu}$; sua equação é $\alpha(t) = P_0 + t\,\boldsymbol{\nu}$.

Exercício 3.0.2. Encontre a função vetorial da circunferência unitária $\mathcal{C}\colon x^2 + y^2 = 1$ no plano $\mathbb{R}^2$.

Solução. Trata-se a imagem do caminho ou percurso, $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\alpha(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t \rangle, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(veja a Figura 3.6).

O círculo unitário também é a imagem do caminho $\widetilde{\alpha}(t) = \langle \cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leq t \leq \pi$. Assim, caminhos diferentes podem parametrizar a mesma curva. $\Diamond$

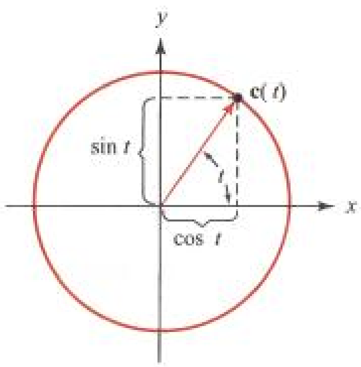


Figure 3.6: $\alpha(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t \rangle$ é um caminho cuja imagem $\mathcal{C}$ é a circunferência unitária.

Exercício 3.0.3. O caminho o percurso $\alpha(t) = \langle t,\ t^2 \rangle$ traça um arco parabólico. Esta curva coincide com o gráfico de $f(x) = x^2$. Veja a Figura 3.7.

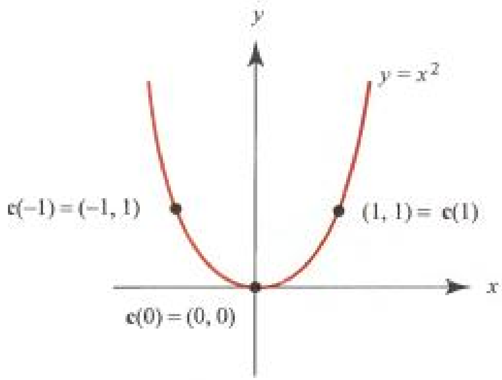


Figure 3.7: A imagem de $\alpha(t) = \langle t,\ t^2\rangle$ é a parábola $y = x^2$.

Exercício 3.0.4. Construa o hodógrafo do vetor $\alpha = \alpha(t)$ onde

$$\alpha(t) = t\, e_1 + t\, e_2 + t^2 e_3.$$

Solução. Esta construção pode ser realizada usando pontos e montando uma tabela,

t	0	1	2	3	4
α	0	$\langle 1,\ 1,\ 1\rangle$	$\langle 2,\ 2,\ 4\rangle$	$\langle 3,\ 3,\ 9\rangle$	$\langle 4,\ 4,\ 16\rangle$

Solução alternativa. Denote por x, y, z as coordenadas do vetor α; temos

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t^2.$$

Eliminando o parâmetro t dessas equações, obtemos as equações das superfícies

$$y = x, \quad z = x^2,$$

cuja reta $\mathcal{L}$ de intersecção define o hodógrafo do vetor $\alpha(t)$ Veja a Figura 3.8.

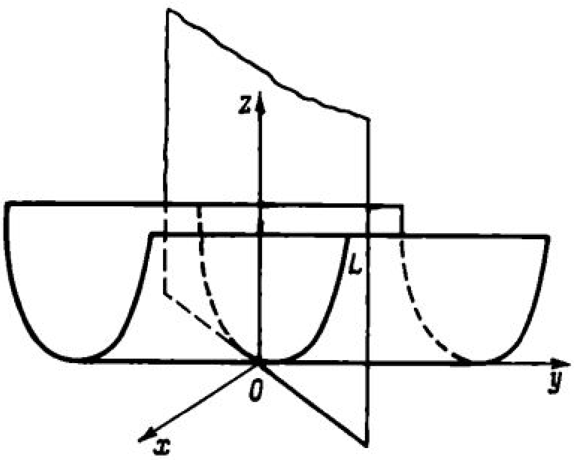


Figure 3.8: Reta $\mathcal{L}$ de intersecção que define o hodógrafo do vetor

Exercício 3.0.5. Seja α uma função vetorial definida por

$$\alpha(t) = \sqrt{t-3}\,\boldsymbol{i} + (t-2)^{-1}\,\boldsymbol{j}.$$

Identifique as funções componente e encontre o domínio comum a ambas.

Solução. (a) As funções componentes $f(t) = \sqrt{t-3}$ e $g(t) = (t-2)^{-1}$, são funções reais.

(b) O domínio de α é o conjunto de valores de t para os quais as funções f e g são definidas. O valor da função f é definido para t ≥ 3 e g é definida para todos os números reais, exceto 2.

Portanto, o domínio de α é dado por conjunto

$$\{t\,:\;t \geq 3\} \cap \{t\,:\;t \neq 2\} = \{t\,:\;t \geq 3 \quad \text{e} \quad t \neq 2\} = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geq 3\}.$$

Exercício 3.0.6. Seja dada uma função vetorial definida por

$$\alpha(t) = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\boldsymbol{j}.$$

(a) Encontre o domínio da função vetorial; (b) Faça um esboço do gráfico dessa equação; (c) Encontre a equação cartesiana do gráfico.

Solução. (a) O domínio de α é o conjunto de todos os números reais. Poderíamos tabular os valores de x e y para valores particulares de t.

(b) Calculemos a magnitude ou módulo do vetor posição, temos para cada t

$$\|\alpha(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2\,t} = 2\sqrt{\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\,t} = 2.$$

Portanto, o ponto final da representação da posição de cada vetor $\alpha(t)$ está a duas unidades da origem.

Ao deixar t assumir todos os números no intervalo fechado $[0,\; 2\pi]$, obtemos uma circunferência com seu centro na origem e raio 2. Com isto completamos o gráfico inteiro porque qualquer valor de t dará um ponto nesta circunferência. Um esboço do círculo é mostrado na Figura 3.9.

As equações paramétricas do gráfico são

$$x = 2\cos t \quad \text{e} \quad y = 2\,\mathrm{sen}\,t$$

(c) Uma equação cartesiana do gráfico pode ser encontrada eliminando o parâmetro t das duas equações paramétricas, que ao elevar os dois lados de cada equação ao quadrado e adicionar

$$x^2 + y^2 = 4$$

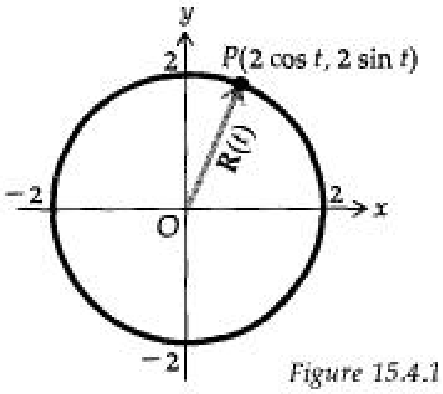


Figure 3.9: Esboço da curva circunferência com $\alpha(t) = R(t)$

Exercício 3.0.7. Dadas as equações paramétricas

$$x = \cosh t \quad \text{e} \quad y = \operatorname{senh} t$$

(a) Faça um esboço do gráfico dessa equação (b) Encontre a equação cartesiana do gráfico (c) Encontre o domínio da função vetorial dada.

Solução. (a) Elevando ao quadrado em ambos os lados das equações dadas e subtraindo, teremos

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t$$

A partir da identidade $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, esta equação torna-se

$$x^2 - y^2 = 1$$

A equação resultante é uma equação de uma hipérbole equilátera. Entretanto observe que para todo t número real, $\cosh t$ nunca é menor do que 1.

Assim, a curva definida pelas equações paramétricas consiste apenas nos pontos do ramo direito da hipérbole. Um esboço dessa curva é mostrado na Figura 3.10.

(b) Uma equação cartesiana é

$$x^2 - y^2 = 1, \quad \text{onde} \quad x > 1.$$

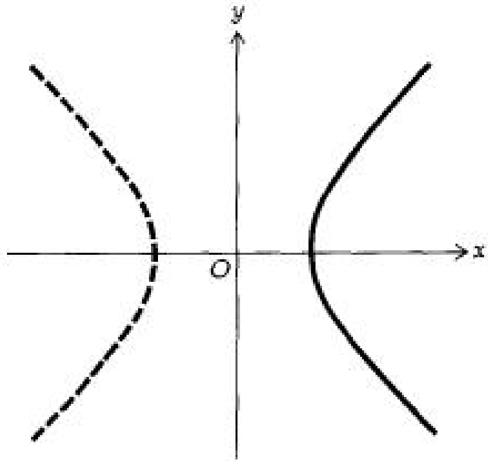


Figure 3.10: Equação Cartesiana do gráfico

Observação. Conforme afirmado anteriormente, ao eliminar t das equações paramétricas obtemos uma equação cartesiana. A equação cartesiana resultante, implícita ou explicitamente, define y como uma ou mais funções dependentes de x.

Ou seja, se $x = f(t)$ e $y = g(t)$, então $y = h(x)$. Se h é uma função diferenciável de x e f é uma função diferenciável de t, segue-se da regra da cadeia usando operadores

$$D_t y = (D_x y)\ (D_t x)$$

ou

$$g'(t) = (h'(x))\,(f'(t))$$

ou, usando notação diferencial,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Se $dx/dt \neq 0$, podemos dividir em ambos os lados da equação acima por dx/dt e obter

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{3.1}$$

A equação (3.1) nos permite encontrar a derivada de y em relação a x diretamente a partir das equações paramétricas.

Por outro lado, obtemos a segunda derivada de y utilizando as equações paramétricas

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

então

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\,(y')$$

Assim, substituindo a fórmula da primeira derivada, obtemos a fórmula para a segunda derivada,

$$\frac{d^2\,y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

Exercício 3.0.8. Dados as equações paramétricas

$$x = 3t^2 \quad \text{e} \quad y = 4t^3,$$

encontre dy/dx e d^2y/dx^2 sem eliminar o parâmetro t.

Solução. Calculando as derivadas do numerador e denominador da fórmula,

$$\frac{dy}{dt} = 12t^2, \qquad \frac{dx}{dt} = 6t \neq 0$$

Substituindo na fórmula deduzida anteriormente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12t^2}{6t} = 2t.$$

Para calcular a segunda derivada, usando o resultado da primeira derivada $dy/dx = y' = 2t$ e assim,

$$\frac{d\,y'}{dt} = \frac{d}{dt}2t = 2.$$

Então, novamente substituindo na fórmula,

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{\dfrac{d(y')}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}, \quad t \neq 0$$

Exercício 3.0.9. Escreva os detalhes da resolução dos itens

(a) Desenhe um esboço do gráfico da curva definida por as equações paramétricas

$$x = f(t) = 3t^2 \quad \text{e} \quad y = g(t) = 4t^3$$

(b) Encontre uma equação cartesiana do gráfico.

Solução. Sabemos a forma das equações paramétricas, a saber,

$$x = f(t) = 3t^2 \quad \text{e} \quad y = g(t) = 4t^3$$

(a) Como $x = 3t^2$, concluímos que x nunca é negativo. Assim o gráfico esta confinado no primeiro e quarto quadrante. A Tabela 3.1 fornece os valores de x ey para valores particulares de t.

t	x	y
0	0	0
1/2	3/4	1/2
1	3	4
2	12	32
-1/2	3/4	-1/2
-1	3	-4
-2	12	-32

Table 3.1: Tabela com valores particulares de t

Como $D_x y = 2t$, então que quando $t = 0$, obtemos $D_x y = 0$; portanto, a reta tangente é horizontal no ponto origem $(0,\ 0)$. Um esboço do gráfico é mostrado na Figura 3.11.

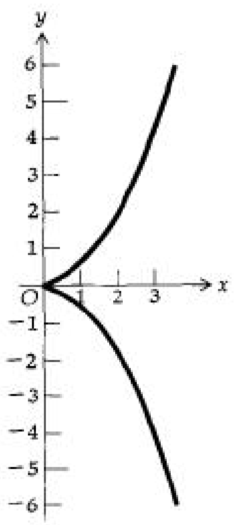


Figure 3.11: Esboço do Gráfico das equações Paramétricas

(b) A partir das duas equações paramétricas $x = 3t^2$ e $y = 4t^3$, obtemos

$$x^3 = 27\,t^6 \quad \text{e} \quad y^2 = 16\,t^6.$$

Resolvendo essa equações para o valor t^6 e posteriormente eliminado t^6, obtemos,

$$\frac{x^3}{27} = \frac{y^2}{16} \quad \Rightarrow \quad 16\,x^3 = 27\,y^2$$

qual é a equação cartesiana desejada.

O que acontece se derivamos implicitamente a equação cartesiana obtida no item (b)

$$48x^2 = 54\,y\,\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8x^2}{9y}$$

Substituindo x e y em termos do parâmetro t a partir das equações paramétricas fornecidas, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^2}{9y} = \frac{8(3t^2)^2}{9(4t^3} = \frac{72t^4}{36t^3} = 2t$$

o resultado obtido coincide com el valor fornecido pela fórmula de derivação a partir das equações paramétricas, isto é sem conhecer o formato cartesiano da função.

3.1 Cálculo com Funções Vetoriais

Todas as definições de limites, continuidade, derivação e integração indefinida de funções com valores vetoriais envolvem as definições correspondentes para funções reais do Cálculo Diferencial.

Suponha que uma função vetorial $\alpha = \alpha(t)$ de um argumento escalar t seja definida em alguma vizinhança do valor t_1 do argumento t, exceto talvez para o próprio valor t_1.

Um vetor constante B é dito ser o limite do vetor $\alpha(t)$, quando $t \to t_1$, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todos os $t \neq t_1$ que satisfazem a condição $0 < |t - t_1| < \delta$ a seguinte desigualdade é verdadeira,

$$|\alpha(t) - B| < \varepsilon.$$

Como no caso do cálculo I, escrevemos

$$\lim_{t \to t_1} \alpha(t) = B.$$

Geometricamente, isso significa que o vetor $\alpha(t)$ tende, quando $t \to t_1$, ao vetor B tanto em comprimento quanto em direção. Veja a Figura 5.2

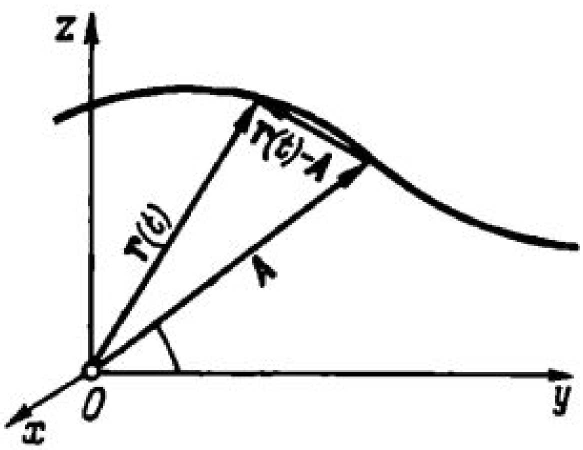


Figure 3.12: Interpretação geometricamente do limite

Definição 3.1.1 (Limite em termos de Componentes)**.** Seja α uma função com valor vetorial, cujos valores de função são dados por

$$\alpha(t) = f(t)\, e_1 + g(t)\, e_2 = f(t)\, \boldsymbol{i} + g(t)\, \boldsymbol{j}.$$

Então, o limite de $\alpha(t)$ quando t se aproxima de t_1 é definido por

$$\lim_{t\to t_1}\alpha(t)=\left[\lim_{t\to t_1}f(t)\right]e_1+\left[\lim_{t\to t_1}g(t)\right]e_2$$

se $\lim f(t)$ e $\lim g(t)$ existem quando $t\to t_1$.

Exercício 3.1.1. Encontre o limite função vetorial,

$$\alpha(t)=\frac{1-\sqrt{t+1}}{1-t}e_1+\frac{t}{t+1}e_2 \quad \text{quando} \quad t_1=0$$

Solução. Como cada função componente possui limite em t_1, logo existe o limite da função vetorial, isto,

$$\lim_{t\to t_1}\frac{1-\sqrt{t+1}}{1-t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{t+1}}{1-t}=0$$

Por outro lado calculamos o limite da função racional

$$\lim_{t\to t_1}\frac{t}{t+1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t+1}=0$$

Finalmente o limite da função vetorial

$$\lim_{t\to 0}\alpha(t)=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{t+1}}{1-t}\,e_1+\lim_{t\to 0}\frac{t}{t+1}\,e_2$$

e como cada limite da funções componentes foi calculado temos,

$$\lim_{t\to 0}\alpha(t)=0\,e_1+0\,e_2=(0,\ 0).$$

Definição 3.1.2 (Continuidade)**.** A função de valor vetorial α é contínua no ponto t_1 se e somente se as três condições a seguir forem satisfeitas;

(a) $\alpha(t_1)$ existe;

(b) existe $\lim\alpha(t)$, quando $t\to t_1$;

(c) $\lim\alpha(t)=\alpha(t_1)$ quando $t\to t_1$.

Observação Importante

A partir Definição 3.1.1 e Definição 3.1.2, segue-se que a função vetorial α, definida por

$$\alpha(t)=f(t)\,e_1+g(t)\,e_2,$$

é contínua em t_1 se e somente se f e g forem contínuas em t_1.

Suponha que uma função vetorial $\alpha=\alpha(t)$ seja definida para todo t no intervalo $]a,\ b[$. Tome algum valor $t\in\,]a,\ b[$, então dê a t um incremento Δt tal que $t+\Delta t\in\,]a,\ b[$ e encontre o incremento correspondente $\Delta\alpha=\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$ na função vetorial $\alpha(t)$. Agora considere a razão

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

Se, a razão $\Delta\alpha/\Delta t$ tem um limite, quando $\Delta t \to 0$ então esse limite é chamado de `derivada` da função vetorial $\alpha = \alpha(t)$ em relação ao argumento escalar t para um dado valor t do argumento e é denotado como $d\alpha(t)/dt$ ou $\alpha'(t)$ ou $\dot{\alpha}(t)$. Assim,

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}.$$

Neste caso, a função vetorial $\alpha = \alpha(t)$ é dita diferenciável.

Definição 3.1.3 (Derivada)**.** Se α é uma função vetorial, então a derivada de α é outra função vetorial, denotada por α' e definida por

$$\alpha'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

se esse limite existir.

Na definição anterior, a expressão

$$\frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

foi usada para representar divisão de um vetor por um escalar que ainda não foi definida. Por esta expressão queremos dizer

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)\right]$$

A notação com operadores $D_t\alpha(t)$ às vezes é usada no lugar de $\alpha'(t)$.

Uma interpretação geométrica da Definição 3.1.3 é obtida por considerando representações dos vetores $\alpha(t)$, $\alpha(t+h)$ e $\alpha'(t)$. Consulte a Figura 3.13.

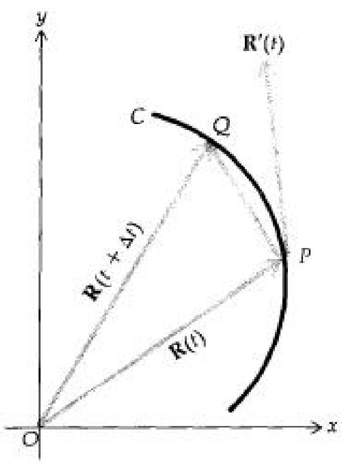


Figure 3.13: Representação Geométrica da derivação de funções Vetoriais

A curva $\mathcal{C}$ é traçada pelo ponto final da representação da posição de $\alpha(t)$, pois t assume todos os valores no domínio de α. Seja $\overrightarrow{OP}$ a representação da posição de $\alpha(t)$ e $\overrightarrow{OQ}$ seja a representação da posição de $\alpha(t+\Delta t)$. Então $\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$ é um vetor para o qual $\overrightarrow{PQ}$ é uma representação. Se o vetor $\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$ é multiplicado pelo escalar $1/\Delta t$, obtemos um vetor com a mesma direção e cuja magnitude é $1/\Delta t$ vezes a magnitude de $\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$.

À medida que Δt se aproxima de zero, o vetor $[\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)]/\Delta t$ se aproxima de um vetor tendo uma de suas representações tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto P.

O seguinte teorema segue da Definição 3.1.3 e da definição da derivada de uma função real.

Teorema 3.1.1. *Se α é uma função vetorial definida por*

$$\alpha(t) = f(t)\, e_1 + g(t)\, e_2$$

então

$$\alpha'(t) = f'(t)\, e_1 + g'(t)\, e_2$$

se $f'(t)$ e $g'(t)$ existirem.

Derivadas de ordem superior de funções com valor vetorial são definidas como derivadas de ordem superior de funções com valor real. Portanto, se α é uma função de valor vetorial definida por

$$\alpha(t) = f(t)\, i + g(t)\, j,$$

a segunda derivada de α, denotada por $\alpha''(t)$, é dada por

$$\alpha''(t) = D_t[\alpha'(t)]$$

Também temos a notação $D_t^2\alpha(t)$ no lugar de $\alpha''(t)$. Aplicando o Teorema 3.1.1 a $\alpha'(t)$, obtemos

$$\mathbf{a}(t) = \alpha''(t) = f''(t)\, i + g''(t)\, j$$

se $f''(t)$ e $g''(t)$ existirem.

Se pensarmos em $\alpha(t)$ como o caminho traçado por uma partícula e como t é o tempo, é razoável definir o vetor velocidade da seguinte maneira.

Vetor de Velocidade. A velocidade de um caminho α é definida por

$$\alpha'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

Normalmente desenhamos o vetor $\alpha'(t)$ com seu inicio no ponto $\alpha(t)$. A velocidade do caminho $\alpha(t)$ é $s = |\alpha'(t)|$, o comprimento do vetor velocidade. Se $\alpha(t) = \langle x(t),\ y(t)\rangle$ em $\mathbb{R}^2$, então

$$\alpha'(t) = \langle x'(t),\ y'(t)\rangle = x'(t)\, i + y'(t)\, j = x'(t)\, e_1 + y'(t)\, e_2$$

e se $\alpha(t) = \langle x(t),\ y(t),\ z'(t)\rangle$ em $\mathbb{R}^3$, então

$$\alpha'(t) = \langle x'(t),\ y'(t),\ z(t)\rangle = x'(t)\, i + y'(t)\, j + z'(t)\, k = x'(t)\, e_1 + y'(t)\, e_2 + z'(t)\, e_3$$

A teoria dos limites segue a ideia do cálculo de uma variável. Aqui, $x'(t)$ é a derivada de uma variável comum dx/dt. Se aceitarmos limites de vetores interpretados por componentes, as fórmulas para o vetor velocidade vêm da definição da derivada.

No entanto, o limite também pode ser interpretado no sentido de vetores. Na Figura 3.14, vemos que

$$\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t} \quad \text{se torna tangente à curva quando} \quad \Delta t \to 0.$$

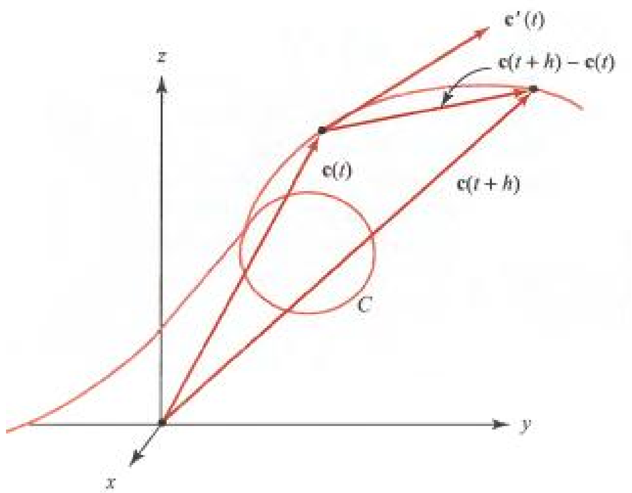


Figure 3.14: O vetor $\alpha'(t)$ é tangente ao caminho $\alpha(t)$.

Vetor Tangente. A velocidade $\alpha'(t)$ é um vetor tangente ao caminho $\alpha(t)$ no tempo t. Se $\mathcal{C}$ for uma curva traçada por α e se $\alpha'(t)$ não for igual a 0, então $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $\alpha(t)$.

A velocidade $\alpha'(t)$ é um vetor tangente ao caminho $\alpha(t)$. Se pensarmos na derivada $D\alpha(t)$ como uma matriz, ela será um vetor coluna com as entradas $x'(t)$, $y'(t)$ e $z'(t)$, isto é,

$$D\alpha(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

Lembre-se de que um caminho em $\mathbb{R}^n$ é uma função α de $\mathbb{R}$ ou um intervalo J de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$. Se o caminho é diferenciável, sua derivada em cada instante t é uma matriz $n \times 1$. Especificamente, se $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ são as funções componentes de α, a matriz derivada é

$$\alpha'(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix}$$

que também pode ser escrito em forma de vetor como

$$\left\langle \frac{d}{dt}x_1(t),\ \frac{d}{dt}x_2(t), \ldots, \frac{d}{dt}x_n(t) \right\rangle \quad \text{ou} \quad \langle x_1'(t),\ x_2'(t), \ldots, x_n'(t) \rangle\,.$$

Lembre-se de que $\alpha'(t)$ é o vetor tangente ao percurso no ponto $\alpha(t)$. Lembre-se também de que se α representa o percurso de uma partícula em movimento, então seu vetor de velocidade é

$$v = \alpha'(t)$$

e sua velocidade é $s = \|v\|$. Portanto, a derivada pensada é consistente com nossa noção anterior.

Exercício 3.1.2. Calcule o vetor tangente ao caminho

$$\alpha(t) = \langle t,\ t^2,\ e^t\rangle \quad \text{em} \quad t = 0;$$

Solução. Derivando uma vez α obtemos

$$\alpha'(t) = \langle 1,\ 2t,\ e^t\rangle,$$

e assim em $t = 0$ obtemos o vetor tangente representado pela tripla $\langle 1,\ 0,\ 1\rangle$.

Exercício 3.1.3. Descreva o caminho $\alpha(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t\rangle$. Encontre o vetor de velocidade no ponto da curva imagem onde $t = \pi/2$.

Solução. Para um dado t, o ponto $(\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 0)$ está no círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy. Portanto, o ponto $\langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t\rangle$ encontra-se t unidades acima do ponto $\langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 0\rangle$ se t for positivo e $-t$ unidades abaixo $\langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 0\rangle$ se t for negativo.

À medida que t aumenta, $\langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t\rangle$ envolve o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o aumento da coordenada z.

A curva que isso traça é chamada de **hélice**, que é representada na Figura 3.15. Em $t = \pi/2$,

$$\alpha'(\pi/2) = \left\langle -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2},\ 1\right\rangle = \langle -1,\ 0,\ 1\rangle = -i + k.$$

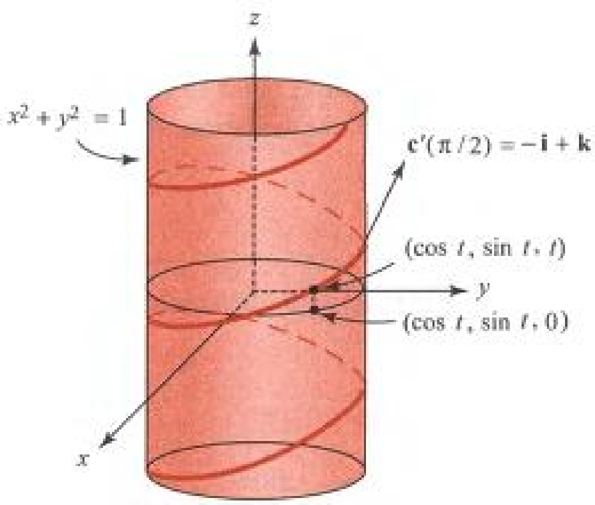


Figure 3.15: A hélice $\alpha(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t)$ envolve o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Reta Tangente a um Percurso.

A reta tangente a um caminho em um ponto é a reta que passa pelo ponto na direção do vetor tangente. Usando a forma ponto-direção da equação de uma reta, obtemos a equação paramétrica para a reta tangente.

Se $\alpha(t)$ é um caminho, sua reta tangente no ponto $\alpha(t_0)$ é

$$l(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0).$$

Por conveniência, escrevemos a equação de forma que l passe por $\alpha(t_0)$ em $t = t_0$ (em vez de $t = 0$). Veja a Figura 3.16

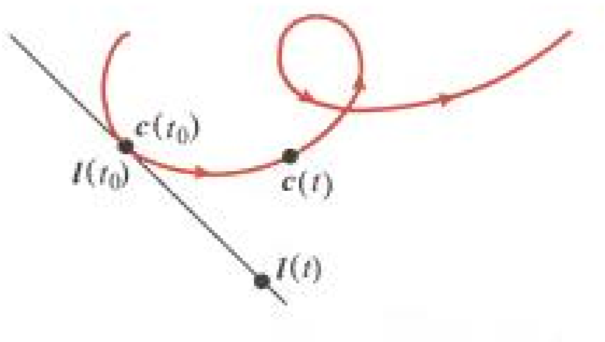


Figure 3.16: A reta tangente a um caminho.

Exercício 3.1.4. Um caminho em $\mathbb{R}^3$ passa pelo ponto $(3,\ 6,\ 5)$ em $t = 0$ com vetor tangente $i - j$. Encontre a equação da reta tangente.

Solução. A equação da reta tangente pela definição é

$$l(t) = (3,\ 6,\ 5) + t(i - j) = (3,\ 6,\ 5) + t(1,\ -1,\ 0) = (3 + t,\ 6 - t,\ 5).$$

Nas coordenadas $(x,\ y,\ z)$, a reta tangente é $x = 3 + t$, $y = 6 - t$, $z = 5$.

Fisicamente, podemos interpretar o movimento ao longo da reta tangente como o caminho que uma partícula em uma curva seguiria se fosse liberada em um determinado momento.

Exercício 3.1.5. Suponha que uma partícula siga o caminho $\alpha(t) = \langle e^t,\ e^{-t},\ \cos t\rangle$ até que voe pela tangente em $t = 1$. Onde se encontra em $t = 3$?

Solução. Após a derivação de α obtemos o vetor velocidade,

$$(e^t,\ -e^{-t},\ -\operatorname{sen} t),$$

que em $t = 1$ é o vetor $(e,\ -1/e, -\operatorname{sen} 1)$. A partícula está em $(e,\ 1/e,\ \cos 1)$ em $t = 1$.

A equação da reta tangente é

$$l(t) = \left(e,\ \frac{1}{e}, \cos 1\right) + (t - 1)\left(e,\ -\frac{1}{e},\ -\operatorname{sen} 1\right).$$

Em $t = 3$, a posição nesta linha é

$$l(3) = \left(e,\ \frac{1}{e},\ \cos 1\right) + 2\left(e,\ \frac{1}{e},\ -\operatorname{sen} 1\right) = \left(3e,\ -\frac{1}{e},\ \cos 1 - 2\operatorname{sen} 1\right)$$

e assim conclui-se o exercício. ♢

Exercício 3.1.6. Calcular a segunda derivada das seguintes funções vetoriais,

(a) $\alpha(t) = (4 + \operatorname{sen} t)\, i + \cos t\, j$ (b) $\beta(t) = \ln t\, i + (1/t)\, j$

Solução. Derivando as funções vetoriais utilizando as regras de derivação

(a)

$$\alpha'(t) = \cos t\, i - \operatorname{sen} t\, j$$

e segunda derivada resulta em

$$\alpha''(t) = -\operatorname{sen} t\, i - \cos t\, j$$

(b)

$$\beta'(t) = (1/t)\, i - (1/t^2)\, j$$

e a sua segunda derivada,

$$\beta''(t) = -(1/t^2)\, i + (2/t^3)\, j$$

Definição 3.1.4. [Derivada num intervalo] Uma função de valor vetorial α é dita como diferenciável em um intervalo se $\alpha'(t)$ existe para todos os valores de t no intervalo.

Os teoremas a seguir fornecem fórmulas de diferenciação para funções com valor vetorial. As provas são baseadas no Teorema 3.1.1 e teoremas sobre diferenciação de funções de valor real.

Teorema 3.1.2 (Derivada da Soma). *Se α e β são funções com valor vetorial diferenciável em um intervalo, então $\alpha + \beta$ é diferenciável no intervalo, e*

$$D_t[\alpha(t) + \beta(t)] = D_t\alpha(t) + D_t\beta(t)$$

A prova desse teorema é deixada para o estudante da disciplina.

Exercício 3.1.7. Calcule por separado cada lado da conclusão do Teorema 3.1.2 para duas funções vetoriais dadas por,

$$\alpha(t) = t^2\, i + (t - 2)\, j \quad \text{e} \quad \beta(t) = \operatorname{sen} t\, i + \cos t\, j.$$

Solução. Primeiro somando a duas funções vetoriais, componente a componente

$$\alpha(t) + \beta(t) = (t^2 + \operatorname{sen} t)\, i + (t - 2 + \cos t)\, j$$

Derivando a soma $\alpha + \beta$ temos,

$$D_t[\alpha(t) + \beta(t)] = D_t[\alpha(t)]\, i + D_t[\beta(t)]\, j = (2t + \cos t)\, i + (1 - \operatorname{sen} t)\, j$$

Por outro lado derivando separadamente cada função vetorial,

$$D_t[\alpha(t)] = (2t)\, i + j \quad \text{e} \quad D_t[\beta(t)] = \cos t\, i - \operatorname{sen} t\, j$$

Calculando a soma de derivadas,

$$D_t[\alpha(t)] + D_t[\beta(t)] = (2t + \cos t)\, i + (1 - \operatorname{sen} t)\, j$$

Assim sendo temos verificado a válido a fórmula da conclusão do Teorema, isto é,

$$D_t[\alpha(t) + \beta(t)] = D_t\alpha(t) + D_t\beta(t)$$

Teorema 3.1.3. *Se α e β são funções com valor vetorial diferenciável em um intervalo, então $\alpha \cdot \beta$ é diferenciável no intervalo, e*

$$D_t[\alpha(t) \cdot \beta(t)] = [D_t\alpha(t)] \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot [D_t\beta(t)]$$

Exercício 3.1.8. Considere as funções vetoriais dadas por, $\alpha(t) = t^2\, i + (t-2)\, j$ e $\beta(t) = \operatorname{sen} t\, i + \cos t\, j$. Verificar a validade da conclusão do Teorema 3.1.3

Solução. Se observa que nas hipóteses do teorema existe a operação de produto interno de funções vetoriais. Portanto devemos calcular o produto interno logo derivar, isto é,

$$\alpha(t) \cdot \beta(t) = (t^2,\ (t-2)) \cdot (\operatorname{sen} t,\ \cos t) = t^2 \operatorname{sen} t + (t-2)\cos t$$

A seguir derivamos a função real resultante,

$$D_t[\alpha(t) \cdot \beta(t)] = D_t[t^2 \operatorname{sen} t + (t-2)\cos t] = (t^2+1)\cos t + (t+2)\operatorname{sen} t$$

Derivando por separado cada função vetorial, obtemos

$$D_t[\alpha(t)] = 2t\, i + j \quad \text{e} \quad D_t[\beta(t)] = \cos t\, i - \operatorname{sen} t\, j$$

Logo temos a soma derivadas das funções vetoriais com as funções respectivamente, isto é,

$$[D_t\alpha(t)] \cdot \beta(t) = (2t\, i + j) \cdot (\operatorname{sen} t\, i + \cos t\, j) = 2t \operatorname{sen} t + \cos t$$

e o segundo produto,

$$\alpha(t) \cdot [D_t\beta(t)] = [t^2\, i + (t-2)\, j] \cdot (\cos t\, i - \operatorname{sen} t\, j) = t^2 \cos t - (t-2)\operatorname{sen} t$$

Somando os resultados obtido em cada somando,

$$[D_t\alpha(t)] \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot [D_t\beta(t)] = (t^2+1)\cos t + (t+2)\operatorname{sen} t.$$

Assim obtemos a igualdade desejada.

Teorema 3.1.4. *Se α é uma função com valor vetorial diferenciável em um intervalo e f é uma função com valor real diferenciável no intervalo, então*

$$D_t([f(t)][\alpha(t)] = [D_t f(t)]\alpha(t) + f(t)D_t\alpha(t)$$

A prova é deixada para o estudante da disciplina.

A seguir temos a regra da cadeia para funções vetoriais, sua justificação esta baseada na derivada de uma função vetorial e a regra da cadeia de funções reais.

Teorema 3.1.5 (Regra da Cadeia)**.** *Suponha que F seja uma função vetorial, considere h uma função real e G, uma função vetorial definida por*

$$G(t) = F(h(t)).$$

Se $\phi = h(t)$ e ambas $\phi'(t)$ e $D\phi G(t)$ existirem, então $D_t G(t)$ existe e é dada por

$$D_t G(t) = [D_\phi G(t)]\,\phi'(t)$$

Exercício 3.1.9. Seja F uma função vetorial e considere uma segunda função h real, definidas por

$$F(\phi) = \phi^2\, i + e^{\phi}\, j \quad \text{e} \quad h(t) = \operatorname{sen} t$$

Se $\phi = h(t)$ e $G(t) = F(h(t))$. Calcular a derivada $D_t G(t)$.

Solução. Pelas hipóteses temos $\phi = \operatorname{sen} t$ a função vetorial $G(t) = \operatorname{sen}^2 t\, i + e^{\operatorname{sen} t}\, j$. Calculando a derivada de $G(t)$ usando a definição, obtemos

$$D_t G(t) = 2\cos t \operatorname{sen} t\, i + e^{\operatorname{sen} t} \cos t\, j \tag{3.2}$$

Resta verificar o resultado anterior usando a regra da cadeia para funções vetoriais, Devemos obter o mesmo resultado como e (3.2). Tarefa para o estudante da disciplina.

A diferenciação de caminhos ou percursos planos ou tridimensionais é facilitada pelas seguintes regras.

Resumo das Regras de Diferenciação. Sejam $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^3$ e $p(t)$ e $q(t)$ sejam funções escalares diferenciáveis

Essas regras se justificam aplicando as regras usuais de diferenciação as funções componentes da função vetorial.

Integrais de Funções Vetoriais

Uma função vetorial diferenciável $\psi(t)$ é uma antiderivada de uma função vetorial $\alpha(t)$ em um intervalo J se

$$\frac{d\,\psi}{dt} = \alpha \quad \text{em cada ponto de} \quad J.$$

Soma	$\frac{d}{dt}[\alpha(t)+\beta(t)] = \alpha'(t)+\beta'(t)$
Multiplicação por escalar	$\frac{d}{dt}[p(t)\beta(t)] = p'(t)\beta(t)+p(t)\alpha'(t)$
Produto Ponto	$\frac{d}{dt}[\alpha(t)\cdot\beta(t)] = \alpha'(t)\cdot\beta(t)+\alpha(t)\cdot\beta'(t)$
Produto Cruz	$\frac{d}{dt}[\alpha(t)\times\beta(t)] = \alpha'(t)\times\beta(t)+\alpha(t)\times\beta'(t)$
Regra da Cadeia	$\frac{d}{dt}[\alpha(q(t))] = q'(t)\alpha'(q(t))$

Table 3.2: Resumo de Regras de Derivação

Se ψ é uma antiderivada de α em J, pode-se mostrar, mostrando cada componente por vez, que toda antiderivada de α em J tem a forma $\psi + C$ para algum vetor constante C. O conjunto de todas as antiderivadas de α em J é a integral indefinida de α em J.

A integral indefinida de α com respeito a t é o conjunto de todas as antiderivadas de α, denotadas por

$$\int \alpha(t)\,dt.$$

Se ψ for qualquer antiderivada de α, então

$$\int \alpha(t)\,dt = \psi(t) + C.$$

Agora definimos uma integral indefinida (ou antiderivada) de uma função com valor vetorial.

Definição 3.1.5 (Integral Indefinida)**.** Se ψ é a função de valor vetorial dada por

$$\psi(t) = f(t)\,e_1 + g(t)\,e_2$$

então a integral indefinida de $\psi(t)$ é definida por

$$\int \psi(t)\,dt = e_1\int f(t)dt + e_2\int g(t)\,dt \tag{3.3}$$

Esta definição é consistente com a definição de uma integral indefinida de uma função de valor real porque se tomarmos a derivada em ambos os lados de (3.3) em relação a t, temos

$$D_t\int \psi(t)\;dt = e_1\,D_t\int f(t)dt + e_2\,D_t\int g(t)dt$$

o que fornece

$$D_t\int \psi(t)\;dt = e_1\,f(t) + e_2\,g(t) = \psi(t)$$

Para cada uma das integrais indefinidas no lado direito de (3.3), ocorre uma constante escalar arbitrária. Quando cada um desses escalares é multiplicado por $i = e_1$ ou $j = e_2$, ocorre um vetor constante arbitrário na soma. Então obtemos

$$\int \psi(t)dt = \alpha(t) + C,$$

onde $D_t\alpha(t) = \psi(t)$ e C é um vetor constante arbitrário.

As regras aritméticas usuais do cálculo diferencial para integrais indefinidas se aplicam.

Integrais definidas de funções vetoriais são definidas em termos de componentes.

Definição 3.1.6 (Integral Definida)**.** Se os componentes de $\alpha(t) = f(t)\,i + g(t)\,j + h(t)\,k$ são integráveis sobre $[a,\ b]$, então α também é, e a integral definida de α de a para b é

$$\int_a^b \alpha(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right) i + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right) j + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right) k$$

As regras aritméticas usuais do cálculo diferencial para integrais definidas se aplicam

Exercício 3.1.10. Encontre a função de valor vetorial mais geral cuja derivada é

$$\psi(t) = \cos t\, e_1 + 5\,\mathrm{sen}\, t\, e_2$$

Solução. Se $D_t\alpha(t) = \psi(t)$, então $\alpha(t) = \displaystyle\int \psi(t)\,dt$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= i\int \cos t\,dt - 5j\int \mathrm{sen}\, t\,dt \\
&= i(\mathrm{sen}\, t + C_1) - 5j(-\cos t + C_2) \\
&= \mathrm{sen}\, t\, i + 5\cos t\, j + (C_1\, i - 5C_2\, j) \\
&= \mathrm{sen}\, t\, i + 5\cos t\, j + C,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante vetorial. ◊

Exercício 3.1.11. Encontre o vetor $\alpha(t)$ para o qual

$$D_t\alpha(t) = e^{-t}\, i + e^t\, j \quad \text{e} \quad \alpha(0) = i + j$$

Solução. Integrando indefinidamente,

$$\alpha(t) = i\int e^{-t}\,dt + j\int e^t\,dt$$

Então obtemos

$$\alpha(t) = i\int e^{-t}\,dt + j\int e^t\,dt = i\,(-e^{-t} + C_1) + j\,(e^t + C_2)$$

Because $\alpha(0) = i + j$, temos

$$i + j = i\,(-1 + C_1) + j\,(1 + C_2)$$

Assim

$$C_1 - 1 = 1 \quad \text{e} \quad C_2 + 1 = 1$$

Portanto,

$$C_1 = 2 \quad \text{e} \quad C_2 = 0$$

Assim sendo

$$\alpha(t) = (-e^{-t} + 2)\, i + e^{t}\, j$$

é o resultado da integração. $\Diamond$

Exercício 3.1.12. Calcular a integral definida de uma função vetorial,

$$\int_0^{\pi} (\cos t\, i + j - 2t\, k)\ dt$$

Solução. Aplicando a definição de integral definida de funções vetoriais,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (\cos t\, i + j - 2t\, k)\ dt &= \left(\int_0^{\pi} \cos t\, dt\right) i + \left(\int_0^{\pi} 1 dt\right) j + \left(\int_0^{\pi} -2t\, dt\right) k \\
&= \operatorname{sen} t\Big|_0^{\pi}\, i + t\Big|_0^{\pi} - t^2\Big|_0^{\pi} \\
&= [0-0]\, i + [\pi - 0]\, j - [\pi^2 - 0^2]\, k \\
&= \pi\, j - \pi^2\, k,
\end{aligned}$$

e isso conclui e exercício. $\Diamond$

Exercício 3.1.13. Encontrar a função de posição de uma partícula a partir de sua função de velocidade e posição inicial. A velocidade de uma partícula se movendo no espaço é

$$\frac{d}{dt}\alpha = (\cos t)\, i - (\operatorname{sen} t)\, j + k.$$

Encontre a posição da partícula em função de t se $\alpha(t) = 2\, i + k$ quando $t = 0$.

Solução. Nosso objetivo é resolver o problema de valor inicial que consiste em

$$\frac{d}{dt}\alpha = (\cos t)\, i - (\operatorname{sen} t)\, j + k, \qquad \alpha(0) = 2\, i + k.$$

Integrar ambos os lados da equação diferencial em relação a t fornece

$$\alpha(t) = (\operatorname{sen} t)\, i + (\cos t)\, j + t\, k + C.$$

Em seguida, usamos a condição inicial para encontrar o valor certo para C,

$$(\operatorname{sen} 0)\, i + (\cos 0)\, j + (0)\, k + C = 2\, i + k = \alpha(0)$$

logo

$$j + C = 2\, i + k \quad \text{implica} \quad C = 2\, i - j + k.$$

A posição da partícula em função de t é

$$\alpha(t) = (\operatorname{sen} t + 2)\, i + (\cos t - 1)\, j + (t+1)\, k.$$

Para verificar (sempre uma boa ideia), podemos ver a partir desta fórmula que

$$D_t\alpha(t) = (\cos t + 0)\, i + (-\operatorname{sen} t - 0)\, j + (1 + 0)\, k$$

$$= (\cos t)\, i - (\operatorname{sen} t)\, j + k$$

portanto,

$$\alpha(0) = (\operatorname{sen} 0 + 2)\, i + (\cos 0 - 1)\, j + (0 + 1)\, k = 2\, i + k.$$

e isto conclui o exercício. $\Diamond$

O seguinte teorema será útil mais adiante para entender novos conceitos e resolver alguns exercícios.

Teorema 3.1.6. *Se α é uma função com valor vetorial diferenciável em um intervalo e $|\alpha(t)|$ é um vetor diferente de zero de magnitude constante para todo t no intervalo, então os vetores $\alpha(t)$ e $D_t\alpha(t)$ são ortogonais, isto é,*

$$\alpha(t) \ \perp \ D_t\alpha(t).$$

Prova. Pela hipóteses $|\alpha(t)| = k$ é constante, então o seu quadrado $|\alpha(t)|^2 = \alpha(t) \cdot \alpha(t) = k^2$. A derivada a ambos os lados desta e portanto, pela regra do produto escalar,

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\alpha(t) \cdot \alpha(t)\right] = D_t\alpha(t) \cdot \alpha(t) + \alpha(t) \cdot D_t\alpha(t) = 2\alpha(t) D_t\alpha(t);$$

então $\alpha(t) \cdot D_t\alpha(t) = 0$, ou seja, $D_t\alpha(t)$ é perpendicular a $\alpha(t)$. $\square$

A interpretação geométrica do Teorema 3.1.6 é evidente. Se o vetor $\alpha(t)$ tem magnitude constante, então a representação da posição $\overrightarrow{OP}$ de $\alpha(t)$ tem seu ponto terminal P na circunferência com seu centro na origem e raio k. Portanto, o gráfico de α é esta circunferência. Como $D_t\alpha(t)$ e $\alpha(t)$ são ortogonais, $\overrightarrow{OP}$ é perpendicular a uma representação de $D_t\alpha(t)$.

A Figura 3.17 mostra um esboço de um quarto da circunferência, a representação de posição $\overrightarrow{OP}$ de $\alpha(t)$ e a representação PB de $D_t\alpha(t)$.

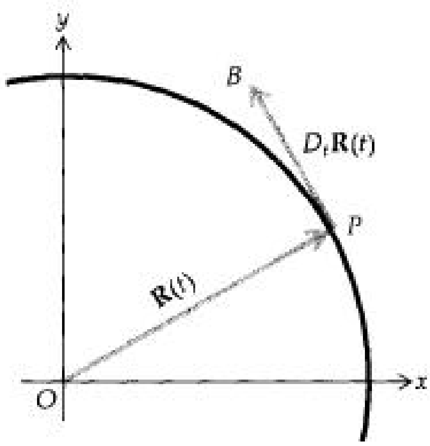


Figure 3.17: Esboço de um parte da Circunferência

Para uma curva que descreve um movimento retilíneo uniforme, o vetor velocidade é constante. Em geral, o vetor velocidade é uma função vetorial $v = \alpha'(t)$ que depende de t. A derivada

$a = dv/dt = \alpha''(t)$ é chamada de vetor de aceleração da curva. Se a curva for $(x(t),\, y(t),\, z(t))$, então o vetor de aceleração é

$$\boxed{\mathbf{a} = x''(t)e_1 + y''(t)e_2 + z''(t)e_3}$$

Exercício 3.1.14. Uma partícula se move de tal maneira que sua aceleração é constantemente igual a $-e_3$. Se a posição quando $t = 0$ é $(0,\, 0,\, 1)$ e a velocidade em $t = 0$ é $e_1 + e_2$, quando e onde a partícula cai abaixo do plano $z = 0$? Descreva o caminho percorrido pela partícula.

Solução. Seja $(x(t),\, y(t),\, z(t))$ a curva paramétrica traçada pela partícula, de modo que o vetor velocidade seja

$$\alpha'(t) = x'(t)e_1 + y'(t)e_2 + z'(t)e_3.$$

Com a aceleração é $\alpha''(t) = -e_3$, então $x''(t) = 0$, $y''(t) = 0$ e $z''(t) = -1$. Segue-se que $x'(t)$ e $y'(t)$ são funções constantes e $z'(t)$ é uma função linear com inclinação -1.

Como $\alpha'(0) = e_1 + e_2$, obtemos $\alpha'(t) = e_1 + e_2 - t\, e_3$.

Integrando novamente e usando a posição inicial $(0,\, 0,\, 1)$, encontramos que

$$(x(t),\ y(t),\ z(t)) = \left(t,\ t,\ 1 - (1/2)t^2\right).$$

A partícula cai abaixo do plano $z = 0$ quando $1 - (1/2)t^2 = 0$; ou seja, $t = 2$. Nesse momento, a posição é $\left(\sqrt{2},\, \sqrt{2},\, 0\right)$.

O caminho percorrido pela partícula é uma parábola no plano $y = x$ (ver Figura 3.18) porque neste plano a equação dessa parábola é descrita por $z = 1 - (1/2)x^2$. ◊

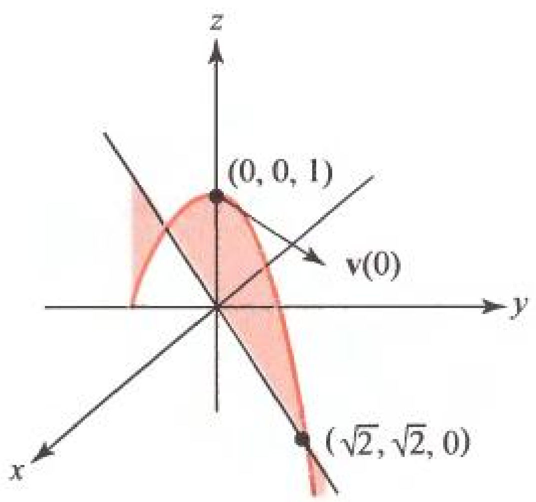


Figure 3.18: O caminho da parábola com posição inicial $(0,\, 0,\, 1)$, velocidade inicial $e_1 + e_2$ e a aceleração constante $-e_3$ é uma parábola no plano $y = x$.

A imagem de um caminho C^1 não é necessariamente “muito regular”; na verdade, ele pode ter curvas acentuadas ou mudanças de direção.

Por exemplo, o cicloide $\alpha(t) = (t - \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t)$ mostrado na Figura 3.27 tem cúspides em todos os pontos onde α toca o eixo x (isto é, quando $1 - \cos t = 0$, que acontece quando $t = 2\pi\, n$ com $n = 0, \pm 1, \ldots$).

Outro exemplo é o hipocicloide de nossas cúspides, $\alpha\colon [0,\ 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos^3 t,\ \operatorname{sen}^3 t)$, que possui cúspides em quatro pontos (Figura 3.19).

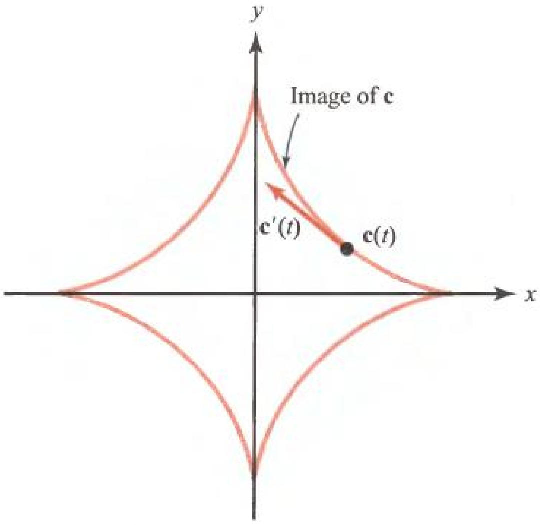


Figure 3.19: A imagem do caminho regular $\alpha(t) = (\cos 3t,\ \operatorname{sen} 3t)$, um hipocicloide, não "parece regular".

Em todos esses pontos, entretanto, $\alpha'(t) = 0$, e a reta tangente não está bem definida. Evidentemente, a direção de $\alpha'(t)$ pode mudar abruptamente em pontos onde ele desacelera para o repouso.

Um caminho diferenciável α é considerado regular em $t = t_0$ se $\alpha'(t_0) \neq 0$. Se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t, dizemos que α é um caminho regular. Nesse caso, a curva da imagem parece bem regular.

Exercício 3.1.15. Uma partícula se move ao longo de um hipocicloide de acordo com as equações paramétricas,

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad a \leq t \leq b.$$

Quais são a velocidade e velocidade da partícula?

Solução. O vetor velocidade da partícula é

$$v = \frac{d\,x}{dt}\, i + \frac{d\,y}{dt}\, j = -\left(3 \operatorname{sen} t \cos^2 t\right)\, i + \left(3 \cos t \operatorname{sen}^2 t\right)\, j,$$

e sua velocidade escalar, o modulo do vetor velocidade, é

$$s = |v| = \left(9 \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 t \operatorname{sen}^4 t\right)^{1/2} = 3|\operatorname{sen} t||\cos t|.$$

e assim conclui-se o exercício. $\Diamond$

Segunda Lei de Newton. Se uma partícula de massa m se move em $\mathbb{R}^3$, a força $\mathbf{F}$ agindo sobre ela no ponto $\alpha(t)$ está relacionada à aceleração pela segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F}(\alpha(t)) = m\, \mathbf{a}(t).$$

Em particular, se nenhuma força atuar sobre uma partícula, então $\mathbf{a}(t) = 0$, então $\alpha'(t)$ é constante e a partícula segue uma linha reta.

Aceleração e Segunda Lei de Newton. A aceleração de um percurso $\alpha(t)$ é

$$\mathbf{a}(t) = \alpha''(t).$$

Se $\mathbf{F}$ é a força atuante e m é a massa da partícula, então

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

No problema de determinar o caminho $\alpha(t)$ de uma partícula, a lei de Newton torna-se uma equação diferencial (ou seja, uma equação envolvendo derivadas) para $\alpha(t)$.

Exemplo 5. Um planeta se movendo em torno do Sol (considerado como localizado na origem em $\mathbb{R}^3$) ao longo de um caminho $r(t)$ obedece à lei

$$m\,\mathbf{r}'' = -\frac{G\,m\,M}{r^3}\,\mathbf{r}$$

onde M é a massa do sol, m a do planeta, $r = |r|$ e G é a constante gravitacional.

Solução. A relação usada na determinação da força,

$$\mathbf{F} = -\frac{G\,m\,M}{r^3}\,\mathbf{r},$$

é chamada de lei da gravitação de Newton (ver Figura 3.20).

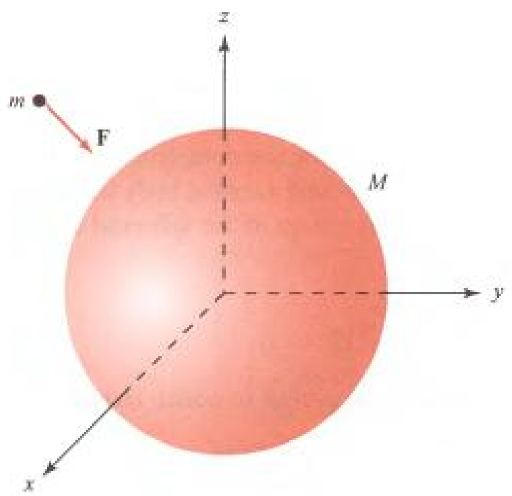


Figure 3.20: Uma massa M atrai uma massa m com uma força $\mathbf{F}$ dada pela lei da gravitação de Newton: $\mathbf{F} = -G\,m\,M\,\mathbf{r}/r^3$.

Não faremos um estudo geral de tais equações neste texto guia, mas nos contentaremos com o caso especial das órbitas circulares. (Órbitas mais gerais -as seções cônicas- são discutidas e estudadas num suplemento mais avançado.)

Órbitas Circulares. Considere uma partícula de massa m movendo-se a velocidade constante s em um caminho circular de raio r_0. Supondo que ele se mova no plano xy, podemos suprimir a terceira componente e escrever

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_0 \cos \frac{s\,t}{r_0},\ r_0 \operatorname{sen} \frac{s\,t}{r_0} \right),$$

uma vez que este é um círculo de raio r_0 e $|\mathbf{r}'(t)| = s$. Então

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left(-\frac{s^2}{r_0} \cos \frac{s\,t}{r_0},\ -\frac{s^2}{r_0} \operatorname{sen} \frac{s\,t}{r_0} \right) = -\frac{s^2}{r_0^2}\,\mathbf{r}(t).$$

Assim, a aceleração está na direção oposta a $\mathbf{r}(t)$; isto é, ele é direcionado para o centro do círculo (veja a Figura 3.21).

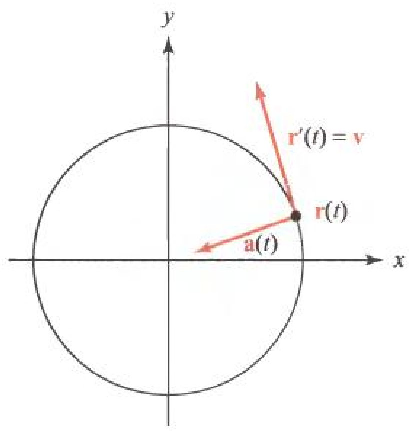


Figure 3.21: A posição, velocidade e aceleração de um partícula em movimento circular.

Essa aceleração multiplicada pela massa da partícula é chamada de força centrípeta. Mesmo que a velocidade escalar é constante, a direção da velocidade está mudando continuamente, a aceleração é uma taxa de mudança na velocidade escalar ou direção ou em ambas.

A lei de Newton nos ajuda a descobrir uma relação entre o raio da órbita de um corpo giratório e o período, ou seja, o tempo que leva para uma revolução completa. Considere um satélite de massa m movendo-se com velocidade escalar s em torno de um corpo central de massa M em uma órbita circular de raio r_0 (distância do centro do corpo central esférico). Pela segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, obtemos

$$-\frac{s^2\,m}{r_0^2}\,\mathbf{r}(t) = -\frac{G\,m\,M}{r_0^3}\,\mathbf{r}(t).$$

Os comprimentos dos vetores em ambos os lados desta equação devem ser iguais. Por isso

$$s^2 = \frac{G\,M}{r_0}.$$

Se T denota o período, então $s = 2\pi\,r_0/T$, substituindo este valor por s na equação acima e resolvendo para T, obtemos a seguinte lei,

Lei de Kepler.

$$T^2 = r_0^3\,\frac{(2\pi)^2}{G\,M}.$$

Assim, o quadrado do período é proporcional ao cubo do raio.

Definimos dois conceitos básicos associados a um caminho ou percurso; sua velocidade e sua aceleração. Ambos envolvem cálculo diferencial. O conceito básico do comprimento de um caminho, que envolve cálculo integral, será abordado na próxima seção.

Exercício 3.1.16. Suponha que um satélite esteja em uma órbita circular em torno da Terra de forma que fique fixo no céu sobre um ponto no equador. Qual é o raio dessa órbita geossíncrona? (A massa da Terra é 5.98×10^{24} quilogramas e $G = 6.67 \times 10^{-11}$ no sistema de unidades metro-quilograma-segundo.)

Solução. O período do satélite deve ser de 1 dia, então $T = 60 \times 60 \times 24 = 86,400$ segundos. Da fórmula

$$T^2 = \frac{r_0^3\,(2\pi)^2}{G\,M} \quad \text{obtemos} \quad r_0^3 = \frac{T^2\,G\,M}{(2\pi)^2}$$

e assim substituindo os valores dados,

$$\begin{aligned} r_0^3 &= \frac{T^2\,G\,M}{(2\pi)^2} = \frac{(86,400)^2 \times (6.67 \times 10^{-11}) \times (5.98 \times 10^{24})}{(2\pi)^2} \\ &\approx 7.54 \times 10^{22}\,metros^3 \end{aligned}$$

Assim, o raio da órbita é $r_0 \approx 4.23 \times 10^7$ metros $= 42,300$ quilômetros $\approx 26,200$ milhas.

3.2 Comprimento de Arco

Na disciplina de Cálculo Diferencial obtivemos uma fórmula para encontrar o comprimento do arco de uma curva com uma equação da forma $y = f(x)$. Este é um tipo especial de curva porque o gráfico de uma função f não pode ser cruzado por uma linha vertical em mais de um ponto.

Qual é o comprimento de um percurso $\alpha(t)$? Já que a velocidade escalar $\|\alpha'(t)\|$ é a taxa de variação da distância percorrida em relação ao tempo, a distância percorrida por um ponto que se move ao longo da curva é a integral da velocidade escalar em relação ao tempo no intervalo $[t_0,\ t_1]$ do tempo de viagem; ou seja, o comprimento do caminho, também chamado de comprimento do arco, é

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\|\,dt.$$

A seguir desenvolvemos um método para encontrar o comprimento do arco de alguns outros tipos de curvas. Seja $\mathcal{C}$ a curva com equações paramétricas

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

e suponha que f e g são contínuas no intervalo fechado $[a,\ b]$.

Desejamos atribuir um número L para representar o número de unidades para o comprimento do arco de $\mathcal{C}$ de $t = a$ a $t = b$.

Seja P uma partição do intervalo fechado $[a,\ b]$ formado pela divisão do intervalo em n subintervalos escolhendo $n - 1$ números entre a e b.

Associado a cada número t_i está um ponto $P_i(f(t_i),\ g(t_i))$ em $\mathcal{C}$. De cada ponto P_{i-1} se desenha um segmento de reta para o próximo ponto P_i (veja a Figura 3.22).

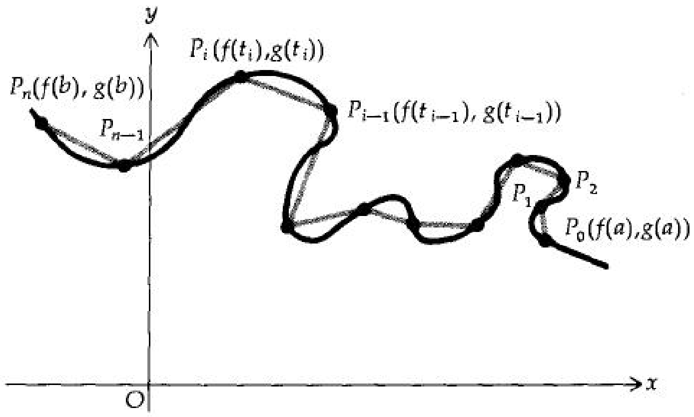


Figure 3.22: Noção Geométrica de Comprimento de Arco

O número de unidades para comprimento do segmento de reta de P_{i-1} a P_i é denotado por $\|\overline{P_{i-1}P_i}\|$. Da fórmula da distância temos

$$\|\overline{P_{i-1}P_i}\| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

A soma dos números das unidades de comprimento dos n segmentos de linha é

$$\sum_{i=1}^{n} \|\overline{P_{i-1}P_i}\|$$

Definição 3.2.1 (Comprimento de Arco)**.** Suponha que a curva $\mathcal{C}$ tenha equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Então, se existe um número L tendo a propriedade de que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \|\overline{P_{i-1}P_i}\| - L \right| < \varepsilon$$

para cada partição P do intervalo $[a,\ b]$ para a qual a norma $\|P\| < \delta$, escrevemos

$$L = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|\overline{P_{i-1}P_i}\|$$

e L é denominado comprimento do arco da curva $\mathcal{C}$ do ponto $(f(a),\ g(a))$ ao ponto $(f(b),\ g(b))$.

O arco da curva é **retificável** se o limite na Definição 3.2.1 existir. Se f' e g' são contínuas em $[a,\ b]$, podemos encontrar uma fórmula para calcular o limite L.

Nossa noção intuitiva do *comprimento do arco* de $t = a$ até $t = b$ nos leva a definir o número de unidades do comprimento do arco como o limite da soma quando a norma da partição $|P|$ se aproxima de zero. Uma outra forma mais analítica é a seguinte.

Seja $\mathcal{C}$ uma curva descrita pela transformação α de um intervalo fechado $[a,\ b]$ em $\mathbb{R}^n$. Considere uma partição $P = \{t_i \in E : i = 0, \dots, k\}$ de $[a,\ b]$ onde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. Toda partição P de $[a,\ b]$ define uma poligonal que consiste nos segmentos de reta de $f(t_0)$ a $f(t_1)$, de $f(t_1)$ a $f(t_2), \dots$, de $f(t_{k-1})$ a $f(t_k)$. (Isso é ilustrado na Figura 3.23 para o caso $P = \{t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5\}$.) Denotamos o comprimento deste arco poligonal por L_P, ou seja,

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

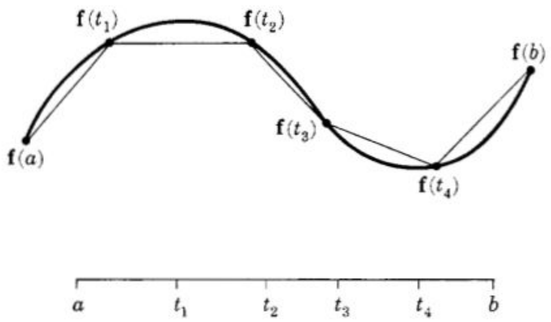


Figure 3.23: Um partição P do intervalo E com $\boldsymbol{f} = \alpha$

Nossa ideia intuitiva de qual será o comprimento de $\mathcal{C}$ nos diz que deveríamos ser capazes de aproximar o comprimento de $\mathcal{C}$ o máximo que desejarmos medindo os comprimentos L_P de arcos poligonais como os descritos. Além disso, como a distância ao longo de uma reta deve ser a menor distância entre pontos, L_P ela deve ser menor que o comprimento de $\mathcal{C}$, e se adicionarmos pontos à partição P, o comprimento do novo arco poligonal deve ser uma aproximação melhor do que o original para o comprimento do arco $\mathcal{C}$. Isso sugere a seguinte definição. Denotemos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as partições do intervalo $[a,\ b]$.

Definição 3.2.2 (Curva Retificável)**.** A curva $\mathcal{C}$ descrita por uma transformação α de $[a,\ b]$ é dita retificável se $\{L_P : P \in \mathcal{P}\}$ tem um limite superior. Se $\mathcal{C}$ é retificável, o comprimento L de $\mathcal{C}$ é o supremo de $\{L_P : P \in \mathcal{P}\}$; ou seja,

$$L = \sup\{L_P : P \in \mathcal{P}\}.$$

Este comprimento de uma curva está em conformidade com as ideias intuitivas mencionadas acima. Como L é um limite superior em $\{L_P : P \in \mathcal{P}\}$, L é maior ou igual ao comprimento L_P de qualquer arco poligonal obtido tomando uma partição P de $[a,\ b]$. Além disso, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,\ b]$ tal que $L - \varepsilon < L_P \leq L$; caso contrário, L não seria o supremo (o menor limite superior) de $\{Lp : P \in \mathcal{P}\}$.

Agora mostramos que, se obtivermos uma partição P_2 de $[a,\ b]$ adicionando alguns pontos à partição P_1 de $[a,\ b]$, então $L_{P_1} \leq L_{P_2}$. Chamamos P_2 de `refinamento` de P_1.

Lema 3.2.1. *Se P_2 é um refinamento de P_1, então*

$$L_{P_1} \leq L_{P_2}.$$

Prova. Este lema é uma consequência simples da desigualdade triangular. Seja τ_j o primeiro ponto em P_2 que não está em P_1. Então, para algum i, temos $t_{i-1} < \tau_j < t_i$ e

$$\begin{aligned} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| &= \|\alpha(t_i) - \alpha(\tau_j) + \alpha(\tau_j) - \alpha(t_{i-1})\| \\ &\leq \|\alpha(t_i) - \alpha(\tau_j)\| + \|\alpha(\tau_j) - \alpha(t_{i-1})\| \end{aligned}$$

Por um número finito de passos, podemos adicionar todos os pontos em P_2 a P_1 e obter $L_{P_1} \leq L_{P_2}$. $\square$

Se tivéssemos que usar a definição para calcular o comprimento de uma curva, nossa tarefa não seria fácil. No entanto, para a maioria das curvas de interesse, podemos encontrar o comprimento calculando uma integral.

Consideremos a curva $\mathcal{C}$ descrita pela transformação α de $[a,\ b]$ como a trajetória de uma partícula, onde $\alpha(t)$ é a posição da partícula no instante t. Suponha que α seja diferenciável em $[a,\ b]$. Então $\alpha'(t)$ é a velocidade da partícula no instante t e $|\alpha'(t)|$ é a "velocidade" da partícula no instante t.

Suponhamos que tomemos uma partição P de $[a,\ b]$ tal que a velocidade "muda muito pouco" em cada arco de $f(t_{i-1})$ a $f(t_i)$; digamos que seja aproximadamente $\alpha'(t^*)$ neste arco, onde $t^* \in [t_{i-1},\ t_i]$.

Então, usando a noção elementar de que distância é igual a "velocidade" multiplicada pelo tempo, o comprimento de $\mathcal{C}$ é aproximadamente

$$S_P = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha'(\tau^*)\|(t_i - t_{i-1}).$$

Reconhecemos a S_P como a soma aproximada da integral $\displaystyle\int \|\alpha'(t)\|\, dt$, isto é,

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt = \lim_{|P|\to 0} S_P$$

onde $|P|$ denota a norma da partição P,

$$|P| = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \ldots, k\},$$

e esse limite significa,

Para $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se

$$|P| < \delta \quad \text{implica} \quad \left| S_P - \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt \right| < \varepsilon$$

Na discussão anterior, era necessário que a velocidade "mudasse muito pouco" no arco. Isso significa que precisamos que α' seja contínua em $[a,\ b]$. Para funções do mundo real, sabemos que se uma função g é contínua em um intervalo fechado, então g é `uniformemente contínua` em $[a,\ b]$: isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|g(x) - g(y)\| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x,\ y \in [a,\ b] \quad \text{sempre que} \quad |x - y| < \delta.$$

Definimos `continuidade uniforme` para funções vetoriais da mesma forma e podemos provar que, se uma função vetorial é contínua em um intervalo fechado $[a,\ b]$, então ela é uniformemente contínua em $[a,\ b]$.

Agora estamos em condições de provar a fórmula integral para o comprimento de uma curva.

Teorema 3.2.2 (Curva Retificável)**.** *Se α tem uma derivada contínua em $[a,\ b]$, então a curva $\mathcal{C}$ descrita por α é retificável e*

$$L(\mathcal{C}) = L = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt.$$

Prova. Na demonstração, consideramos $\mathcal{C}$ como uma curva em $\mathbb{R}^3$, embora o método possa ser aplicado independentemente da dimensão do espaço em que a curva é definida. Seja $P = \{t_0, \ldots, t_k\}$ uma partição de $[a,\ b]$. Pelo teorema do valor médio, □

Formulamos um resultado particular do Teorema 3.2.2 que fornece a fórmula do cálculo na forma de um teorema em $\mathbb{R}^2$

Teorema 3.2.3. *Seja $\mathcal{C}$ a curva com equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, e suponha que f' e g' sejam contínuas no intervalo fechado $[a,\ b]$. Então, o comprimento do arco L da curva $\mathcal{C}$ do ponto $(f(a),\ g(a))$ ao ponto $(f(b),\ g(b))$ é determinado por*

$$\boxed{L = L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt}$$

Exercício 3.2.1. Seja $\mathcal{C}$ a hélice cilíndrica descrita por

$$\alpha(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t/2 \rangle.$$

Determine o comprimento L do arco de $\mathcal{C}$ de $(1,\ 0,\ 0)$ a $(-1,\ 0,\ \pi/2)$.

Solução. Como $\alpha(0) = \langle 1,\ 0,\ 0 \rangle$ e $\alpha(\pi) = \langle -1,\ 0,\ \pi/2 \rangle$, aplicando a fórmula,

$$L = L(\mathcal{C}) = \int_0^\pi \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1/4}\,dt = \int_0^\pi \frac{\sqrt{5}}{2}\,dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\pi.$$

e isso concluí o exercício. ◊

Exercício 3.2.2. Determine o comprimento da curva $\mathcal{C}$ descrita por

$$\alpha(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t \rangle, \quad t \in [0,\ 4\pi].$$

Solução. A curva $\mathcal{C}$ é o círculo unitário $C(0,\ 1)$ percorrido duas vezes sob a transformação α de $[0,\ 4\pi]$. Usando o Teorema 3.2.2, obtemos

$$L = L(\mathcal{C}) = \int_0^{4\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \int_0^{4\pi} dt = 4\pi.$$

logo obtemos o resultado desejado. ◊

Exercício 3.2.3. Encontre o comprimento do arco da curva com equações paramétricas

$$x = t^3 \quad \text{e} \quad y = 2\,t^2,$$

em cada um dos seguintes casos:

(a) de $t = 0$ a $t = 1$; (b) de $t = -2$ a $t = 0$.

Solução. Um esboço da curva é mostrado na Figura 3.24.

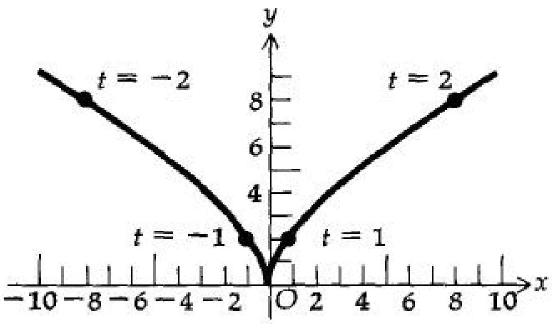


Figure 3.24: Esboço da Curva

(a) Fazendo $x = f(t)$, derivando $f'(t) = D_t x = 3t^2$; de forma semelhante $y = g(t)$, derivando $g'(t) = D_t y = 4t$.

Portanto, a partir da fórmula dada no Teorema 3.2.3, se L é o comprimento do arco da curva de $t = 0$ a $t = 1$,

$$L = \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 16t^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t^2}\sqrt{9t^2 + 16}\, dt$$

$$= \int_0^1 t\,\sqrt{9t^2 + 16}\, dt = \frac{1}{18}\frac{2}{3}\left(9t^2 + 16\right)^{3/2}\Big|_{t=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{27}\left[(25)^{3/2} + (16)^{3/2}\right] = \frac{1}{27}\,(125 - 64) = \frac{61}{27}$$

(b) Se L for o comprimento do arco da curva de $t = -2$ a $t = 0$, obtemos novamente usando a fórmula do Teorema 3.2.3

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{-2}^{0} \sqrt{9t^4 + 16t^2}\, dt = \int_{-2}^{0} \sqrt{t^2}\sqrt{9t^2+16}\, dt \\
&= \int_{-2}^{0} -t\sqrt{9t^2+16}\, dt = -\frac{1}{18}\frac{2}{3}\left(9t^2+16\right)^{3/2}\Bigg|_{t=-2}^{0} \\
&= -\frac{1}{27}\left[(16)^{3/2} - (52)^{3/2}\right] = \frac{1}{27}\left(104\sqrt{13} - 64\right) \approx 11,5
\end{aligned}
$$

Utilizamos no item (a) a propriedade $\sqrt{t^2} = t$ pois $0 \leq t \leq 1$ e no item (b) o fato $\sqrt{t^2} = -t$, pois $-2 \leq t \leq 0$. $\diamondsuit$

Para a curva $\mathcal{C}$ tendo como equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, seja s o comprimento do arco de $\mathcal{C}$ do ponto $(f(t_0),\ g(t_0))$ ao ponto $(f(t),\ g(t))$, e vamos supor que s seja crescente à medida que t aumenta. Então $s = s(t)$ é uma função de t e é dado por

$$
s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2}\, du
$$

Pelo primeiro Teorema fundamental do Cálculo

$$
\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \tag{3.4}
$$

A equação vetorial α da curva $\mathcal{C}$ e a sua derivada α' são dadas por

$$
\alpha(t) = f(t)\, e_1 + g(t)\, e_2 \quad \text{e} \quad \alpha'(t) = f'(t)\, e_1 + g'(t)\, e_2 \tag{3.5}
$$

então o modulo do vetor velocidade é,

$$
\|\alpha'(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}. \tag{3.6}
$$

Substituindo o resultado dado em (3.6) num resultado prévio (3.4) obtemos uma nova fórmula

$$
\boxed{\|\alpha'(t)\| = \frac{ds}{dt}.}
$$

Da fórmula acima concluímos que se s for o comprimento do arco da curva $\mathcal{C}$ tendo a equação vetorial α medido entre algum ponto fixo ao ponto $(f(t),\ g(t))$ onde s é crescente à medida que t aumenta, então a derivada de s em relação a t é a magnitude da derivada do vetor posição no ponto $(f(t),\ g(t))$.

Se substituímos a relação (3.6) na fórmula proposta pelo Teorema 3.2.3, obtemos

$$
L = L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.
$$

Então o Teorema 3.2.3 pode ter seu formato vetorial proposto no seguinte teorema,

Teorema 3.2.4. *Seja a curva $\mathcal{C}$ com equação vetorial $\alpha(t) = f(t)\, e_1 + g(t)\, e_2$, e suponha que f' e g' sejam contínuos no intervalo fechado $[a,\ b]$. Então, o comprimento do arco de $\mathcal{C}$, traçado pelo ponto terminal da representação posicional de $\alpha(t)$ conforme t cresce a partir do extremo a para o extremo b, é determinado por*

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt.$$

Prova. Tarefa para o leitor. ◊

Exercício 3.2.4. Encontre o comprimento do arco traçado pelo ponto terminal da representação da posição de $\alpha(t)$ quando t cresce de $t = 1$ para $t = 4$ se

$$\alpha(t) = e^t \operatorname{sen} t\, i + e^t \cos t\, j$$

Solução. Calculando o vetor velocidade,

$$\alpha'(t) = \left(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t\right)\, i + \left(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t\right)\, j.$$

A seguir calculamos a velocidade escalar,

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t)\|^2 &= \left(e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t\right)^2 + \left(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t\right)^2 \\
&= e^{2t}\left(\operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2 \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen}^2 t\right) \\
&= 2\, e^{2t}
\end{aligned}$$

Aplicado a fórmula na forma vetorial

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^4 \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_1^4 \sqrt{2\, e^{2t}}\, dt = \int_1^4 \sqrt{2}\, e^t\, dt \\
&= \sqrt{2}\, e^t \Big|_{t=1}^{4} = \sqrt{2}\left(e^4 - e^1\right) = \sqrt{2}\left(e^4 - e\right).
\end{aligned}$$

e isso concluí o exercício. ◊

Uma forma alternativa da fórmula dada pelo Teorema 3.2.3 para o comprimento de um arco de uma curva $\mathcal{C}$, tendo equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, é obtida substituindo $f'(t)$ por dx/dt e $g'(t)$ por dy/dt, ou seja, pelo formato diferencial, o que fornece,

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Exercício 3.2.5. Calcular comprimento do arco do caminho

$$\alpha(t) = \langle r \cos t,\ r \operatorname{sen} t\rangle \quad \text{para} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solução. Aplicando a fórmula de comprimento de arco uma vez calculo as derivadas das funções componentes obtemos,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-r \operatorname{sen} t]^2 + [r\cos t]^2}\, dt = 2\pi r,$$

a circunferência de um círculo de raio r.

Se tivéssemos permitido um domínio de $0 \leq t \leq 4\pi$, teríamos obtido $L = 4\pi r$, porque o caminho percorre a mesma circunferência duas vezes (ver Figura 3.25)

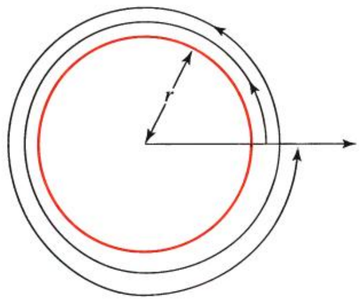


Figure 3.25: O comprimento do arco de uma circunferência percorrido duas vezes é $4\pi r$

Comprimento do Arco no Espaço. O comprimento da curva (caminho) $\alpha(t) = \langle x(t),\ y(t),\ z(t)\rangle$ para $t_0 \leq t \leq t_1$, é

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

Para curvas planas, omite-se o termo $z'(t)$.

Exercício 3.2.6. Encontre o comprimento do arco da curva representada por

$$\alpha(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t^2\rangle, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Solução. A função vetorial $\alpha(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t^2\rangle$ tem o vetor velocidade dado por $v = \alpha'(t) = \langle -\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 2t\rangle$. Posto que

$$\|\alpha(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2} = 2\sqrt{t^2 + (1/2)^2}$$

o comprimento do arco é

$$L = \int_0^{\pi} 2\sqrt{t^2 + (1/2)^2}\, dt.$$

Para calcular a integral usamos a seguinte formula

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right] + C$$

Assim

$$
\begin{aligned}
L &= 2 \cdot \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2+a^2} + (1/2)^2 \ln\left(t+\sqrt{t^2+a^2}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{\pi} \\
&= \pi\sqrt{\pi^2+1/4} + \frac{1}{4}\ln\left(\pi+\sqrt{\pi^2+1/4}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{1/4}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right) \approx 10,63.
\end{aligned}
$$

Para verificar nossa resposta, podemos notar que o caminho α conecta os pontos $(1,\ 0,\ 0)$ e $(-1,\ 0,\ \pi^2)$. A distância entre esses pontos é $\sqrt{4+\pi^4} \approx 10,06$, que é menor que $10,63$, como deveria ser.

Se uma curva é composta por um número finito de peças, cada uma das quais C^1 (com derivada limitada), calculamos o comprimento do arco adicionando os comprimentos das peças componentes. Essas curvas são chamadas de C^1 por partes. Às vezes, apenas dizemos por “regular por partes”.

Exercício 3.2.7. Uma bola de bilhar em uma mesa quadrada segue o caminho $\alpha\colon [-1,\ 1] \to \mathbb{R}^3$ definido por $\alpha(t) = \langle x(t),\ y(t),\ z(t)\rangle = \langle |t|,\ |t-1/2|,\ 0\rangle$. Encontre a distância percorrida pela bola.

Solução. Este percurso não é regular, porque $x(t) = |t|$ não é diferenciável em 0, nem é $y(t) = |t - 1/2|$ diferenciável em $1/2$. No entanto, se dividirmos o intervalo $[-1,\ 1]$ em partes ou subintervalos,

$$[-1,\ 0], \quad [0,\ 1/2], \quad [1/2,\ 1],$$

vemos que $x(t)$ e $y(t)$ têm derivadas contínuas em cada um dos intervalos $[-1,\ 0]$, $[0,\ 1/2]$ e $[1/2,\ 1]$, (Veja a Figura 3.26)

Em $[-1,\ 0]$, $x(t) = -t$, $y(t) = -t + 1/2$ e $z(t) = 0$, então $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$. Portanto, o comprimento do arco de α entre -1 e 0 é dado pela integral definida,

$$\int_{-1}^{0} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}.$$

Da mesma forma, em $[0,\ 1/2]$, $x(t) = t$, $y(t) = -t + 1/2$, $z(t) = 0$, e novamente $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}$, de modo que o comprimento do arco de α entre 0 e $1/2$ é,

$$\int_{0}^{1/2} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{0}^{1/2} \sqrt{2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Finalmente, em $[1/2,\ 1]$ temos $x(t) = t$, $y(t) = t - 1/2$, $z(t) = 0$, então $|\alpha'(t)| = \sqrt{2}$, de modo que o comprimento do arco de α entre $1/2$ e 1 é,

$$\int_{1/2}^{1} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{1/2}^{1} \sqrt{2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Assim, o comprimento total do arco de α,

$$\int_{-1}^{1} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{2}\, dt + \int_{0}^{1/2} \sqrt{2}\, dt + \int_{1/2}^{1} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2},$$

é o resultado que procuramos. $\Diamond$

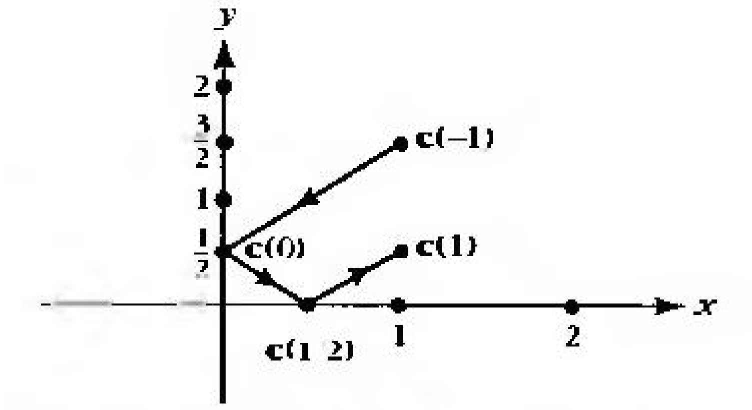


Figure 3.26: Percurso regular por partes

Exercício 3.2.8. Considere o ponto com função de posição

$$\alpha(t) = \langle t - \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t \rangle,$$

que traça o cicloide (veja a Figura 3.27). Encontre o vetor velocidade, a velocidade escalar e o comprimento de um arco.

Solução. O vetor velocidade é $\alpha'(t) = \langle 1 - \cos t,\ \operatorname{sen} t \rangle$, então a velocidade escalar do ponto $\alpha(t)$ é

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Consequentemente, $\alpha(t)$ se move a uma velocidade variável, embora o círculo role a uma velocidade constante. Além disso, a velocidade de $\alpha(t)$ é zero quando t é um múltiplo inteiro de 2π. Com esses valores de t, a coordenada y do ponto $\alpha(t)$ é zero e, portanto, o ponto está no eixo x. O comprimento do arco de um ciclo é

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = 4\left(-\cos \frac{t}{2}\right)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8$$

Utilizamos a seguintes identidades trigonométricas

$$1 - \cos t = 2\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \frac{t}{2} \geq 0 \quad \text{sobre} \quad [0,\ 2\pi]$$

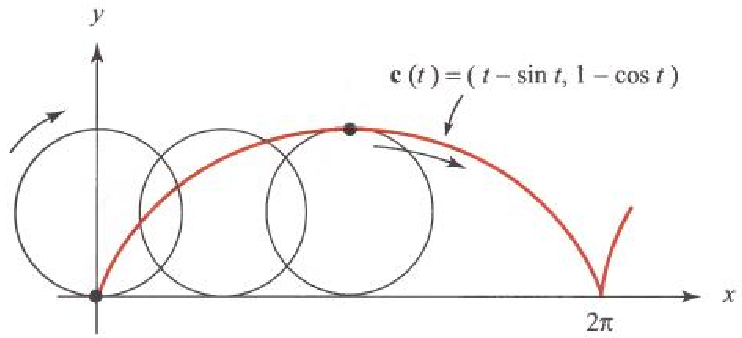


Figure 3.27: A curva traçada por um ponto que se move na borda de um círculo rolante é chamada de cicloide.

O Diferencial do Comprimento do Arco. A fórmula do comprimento do arco sugere que se introduza a seguinte notação, que será útil em nossa discussão sobre integrais de linha.

Um *deslocamento infinitesimal* de uma partícula seguindo um caminho

$$\alpha(t) = x(t)\, e_1 + y(t)\, e_2 + z(t)\, e_3$$

é

$$ds = dx\, e_1 + dy\, e_2 + dz\, e_3 = \left(\frac{dx}{dt} e_1 + \frac{dy}{dt} e_2 + \frac{dz}{dt} e_3\right) dt$$

e seu comprimento

$$\|ds\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

é o diferencial do comprimento do arco. Veja a Figura 3.28.

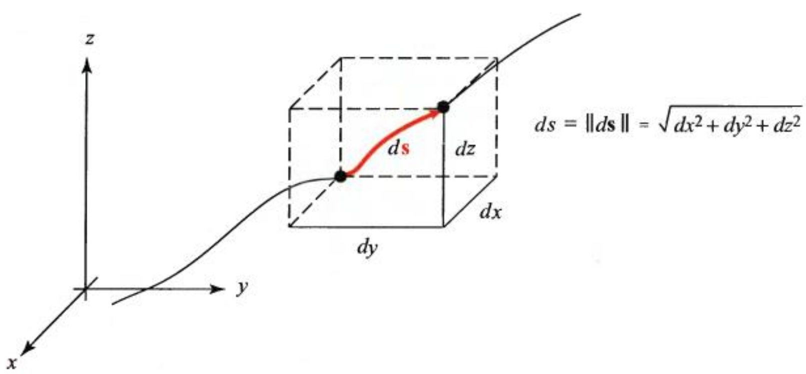


Figure 3.28: Diferencial do comprimento do arco.

Essas fórmulas nos ajudam a lembrar a fórmula do comprimento do arco como

$$\boxed{\text{comprimento do arco} = \int_{t_0}^{t_1} \|ds\|.}$$

Como fizemos antes com conceitos geométricos como comprimento e ângulo, podemos estender a noção de comprimento do arco para funções vetoriais no espaço n-dimensional.

Comprimento de Arco n-dimensional. Considere $\alpha\colon [t_0,\ t_1] \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial. Seu comprimento é definido

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\|\, dt$$

O integrando é a raiz quadrada da soma dos quadrados das funções coordenadas de $\alpha'(t)$; se

$$\alpha(t) = \langle x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_n(t)\rangle\,,$$

então

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + \cdots + [x_n'(t)]^2}\, dt$$

Exercício 3.2.9. Encontre o comprimento do caminho

$$\alpha(t) = \langle \cos t,\ \operatorname{sen} t,\ \cos 2t,\ \operatorname{sen} 2t\rangle \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^4$$

definido no intervalo de 0 a π.

Solução. Temos a derivada da função vetorial, $\alpha'(t) = \langle -\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ -2\operatorname{sen} 2t,\ 2\cos 2t\rangle$, e assim

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},$$

uma constante, então

$$\int_0^{\pi} \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}\pi,$$

é o comprimento do caminho dado. $\diamondsuit$

É comum introduzir a função de comprimento de arco $s(t)$ associada a um caminho $\alpha(t)$ definido por

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\, du,$$

de modo que (pelo teorema fundamental do cálculo)

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|,$$

integrando de forma definida e usando a definição da função $s(t)$,

$$\int_a^b s'(t)\, dt = s(b) - s(a) = s(b).$$

Exercício 3.2.10. Considere o gráfico de uma função de uma variável $y = f(x)$ para x no intervalo $[a,\ b]$. Encontre seu comprimento de arco.

Solução. Podemos considerá-la uma curva parametrizada por $t = x$, ou seja,

$$\alpha(x) = \langle x,\ f(x)\rangle \quad \text{para} \quad x \in [a,\ b].$$

Aplicando a fórmula do comprimento do arco encontramos,

$$L = \int_a^b \|\alpha'(x)\|\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

o que concorda com a fórmula para o comprimento de um gráfico do cálculo de uma variável.

3.2.1 Derivadas de um vetor em relação ao comprimento do arco de uma Curva

Considere uma curva L no espaço. Nela, escolha um ponto M_0 como origem e também uma direção ao longo de L que será considerada positiva. Como parâmetro, tome o comprimento de arco s calculado a partir de M_0 da curva, veja a Figura 3.29. Então, o raio vetor de um ponto M da curva é

$$\alpha = \alpha(s).$$

Com essa escolha de parâmetro,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \tau$$

onde τ é um vetor unitário direcionado ao longo da tangente à curva L na direção dos valores crescentes do parâmetro s.

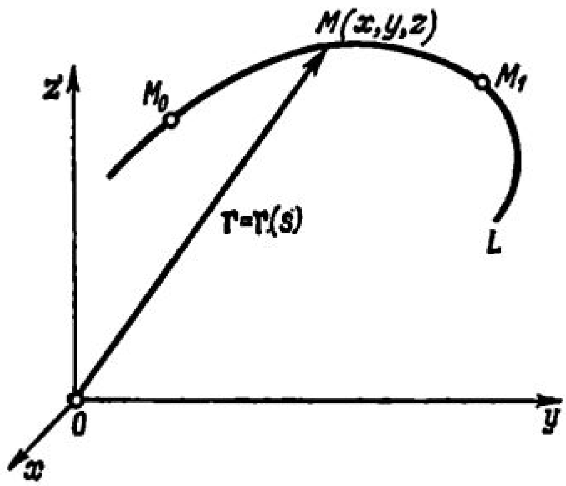


Figure 3.29: O raio vetor α de um ponto M da curva L

3.2.2 A curvatura de uma Curva

Se o vetor α é dado pelas coordenadas

$$\alpha = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3,$$

então

$$\tau = \frac{dx}{ds}\, e_1 + \frac{dy}{ds}\, e_2 + \frac{dz}{ds}\, e_3$$

e

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1.$$

Como $\|\tau\| = 1$, o vetor $d\tau/ds$ é `ortogonal` ao vetor τ.

O módulo do vetor $d\tau/ds$ é

$$\left\|\frac{d\tau}{ds}\right\| = K.$$

Aqui, K é a curvatura da curva L no ponto M.

A reta que tem a direção do vetor $d\tau/ds$ e passa pelo ponto M da curva é denominada `normal principal` da curva no ponto M.

Denotando o vetor unitário dessa direção por $\boldsymbol{\nu}$, temos

$$\frac{d\tau}{ds} = K\,\boldsymbol{\nu}. \tag{3.7}$$

O inverso da curvatura de uma curva em um determinado ponto é chamado de `raio de curvatura` da curva naquele ponto e é denotado por R,

$$R = \frac{1}{K}.$$

Assim, a fórmula (3.7) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d\tau}{ds} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{R}.$$

A partir disso,

$$K = \frac{1}{R} = \left\|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right\|$$

ou

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \tag{3.8}$$

Usando a fórmula (3.8), podemos calcular a curvatura de uma curva em qualquer ponto se a curva for especificada por equações paramétricas em que o parâmetro é o comprimento do arco s.

No caso particular de uma curva plana, um círculo de raio a,

$$\begin{cases} x = & a\cos\dfrac{s}{a} \\ y = & a\,\mathrm{sen}\,\dfrac{s}{a} \end{cases}$$

temos

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right), \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{a}\right)$$

e a fórmula (3.8) produz

$$K = \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{s}{a}} = \frac{1}{a}.$$

Isso significa que a curvatura de um círculo de raio a é constante e é igual ao inverso do raio do círculo.

Se a curva L for dada pela equação vetorial paramétrica $\alpha = \alpha(t)$, onde o parâmetro t é arbitrário, então

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\left\| \dfrac{d\alpha}{dt} \times \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} \right\|}{\left\| \dfrac{d\alpha}{dt} \right\|^3} \tag{3.9}$$

A fórmula (3.9) permite calcular a curvatura da curva em qualquer ponto, desde que tenhamos uma especificação paramétrica arbitrária dessa curva.

Exercício 3.2.11. Calcule a curvatura da curva helicoidal

$$\alpha(t) = a\cos t\, e_1 + a\,\mathrm{sen}\, t\, e_2 + ht\, e_3.$$

Solução. Como a primeira e segunda derivada são dadas por,

$$\frac{d\alpha}{dt} = -a\,\mathrm{sen}\, t\, e_1 + a\cos t\, e_2 + h\, e_3.$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -a\cos t\, e_1 - a\,\mathrm{sen}\, t\, e_2 + 0\, e_3.$$

e seu produto vetorial

$$\frac{d\alpha}{dt} \times \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\,\mathrm{sen}\, t & a\cos t & h \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\, t & 0 \end{vmatrix} = ah\,\mathrm{sen}\, t\, e_1 - ah\cos t\, e_2 + a^2\, e_3.$$

Consequentemente,

$$\left\| \frac{d\alpha}{dt} \times \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right\| = a\sqrt{a^2 + h^2} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Em virtude da fórmula (3.9),

$$K = \frac{1}{R} = \frac{a}{a^2 + h^2}$$

ou

$$R = \frac{a^2 + h^2}{a} = \text{constante}.$$

Assim, uma curva helicoidal tem um raio de curvatura constante. ◊

Exercícios Propostos

(1) Encontre o raio de curvatura de cada uma das curvas fornecidas.

(a) $\alpha = \ln\cos t\, e_1 + \ln\mathrm{sen}\, t\, e_2 + \sqrt{2}t\, e_3$.

(b) $\alpha = t^2\, e_1 + 2t^3\, e_2$

(c) $\alpha = 3t^2\, e_1 + (3t - t^3)\, e_2 + 2\, e_3 \quad \text{para} \quad t = 1$.

(d) $\alpha = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)\, e_1 + a(\operatorname{sen} t - t\cos t)\, e_3$ para $t = \pi/2$.

(e) $\alpha = a\cosh t\, e_1 + a \operatorname{senh} t\, e_2 + at\, e_3$ em qualquer ponto t.

Chapter 4

Funções Reais de Várias Variáveis

4.1 Derivadas Direcionais e Vetor Gradiente

Sabemos pela da regra da cadeia que se $f(x,\ y)$ é diferenciável, então a taxa com que f varia em relação a t ao longo de uma curva diferenciável $x = g(t)$, $y = h(t)$ é,

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt}$$

Em qualquer ponto $P_0 = (x_0,\ y_0) = P_0(g(t_0),\ h(t_0))$, essa equação fornece a taxa de variação de f em relação a t e, portanto, depende, entre outras coisas, do sentido do movimento ao longo da curva.

Essa observação e particularmente importante quando a curva é uma reta e t é o parâmetro de comprimento de arco ao longo da reta medida de P_0 na direção de dado vetor unitário, ou versor, u, pois, nesse caso, df/dt é a taxa de variação de f em relação à distância em seu domínio na direção de u. Variando u, encontramos as taxas com que f varia em relação à distancia quando nos movemos por P_0 em direções diferentes. Nesta seção mostremos uma formula para calculá-las e a partir disto podemos encontra fórmulas de equações de planos tangentes e retas normais a superfície S no espaço.

4.1.1 Derivadas Direcionais no Plano

A seguir desenvolveremos essa ideia com maior precisão. Suponha que a função $f(x,\ y)$ seja definida em uma região Ω no plano xy, que $P_0 = (x_0,\ y_0)$, seja um ponto em Ω e que $u = u_1e_1 + u_2e_2$ seja um vetor unitário. Então as equações

$$x = x_0 + su_1, \quad \text{e} \quad y = y_0 + su_2$$

parametrizam a reta que passa por P_0 paralelamente a u. Se o parâmetro s mede o comprimento de arco de P_0 na direção de u, encontramos a taxa de variação de f em P_0 e na direção de u calculando df/ds em P_0. Veja a Figura 4.1

Definição 4.1.1 (Derivada Direcional)**.** A derivada de $f$em $P_0(x_0,\ y_0)$ na direção do versor $u = u_1e_1 + u_2e_2$ é o número

$$(D_uf)_{P_0} = \left(\frac{df}{ds}\right)_{u,\,P_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,\ y_0+su_2)-f(x_0,\ y_0)}{s}$$

desde que o limite exista.

A derivada direcional é denotada também pelo símbolo,

$$(D_uf)_{P_0} \quad \text{“Derivada de } f \text{ em } P_0 \text{ na direção de } u\text{”}$$

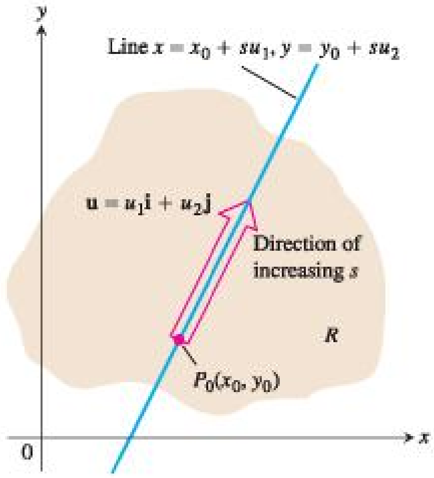


Figure 4.1: A taxa de variação de f em a direção de u no ponto P_0 é a taxa com que f varia ao longo desta reta em P_0.

A seguir resolveremos um exercício utilizando a definição de derivada direcional,

Exercício 4.1.1. Encontre a derivada da função,

$$f(x,\ y) = x^2 + xy$$

em $P_0(1,\ 2)$ na direção do vetor unitário $u = (1/\sqrt{2})\,e_1 + (1/\sqrt{2})\,e_2$

Solução. Calculando o quociente da definição,

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+su_1,\ y_0+su_2)-f(x_0,\ y_0)}{s} &= \frac{f\left(1+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ 2+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(1,\ 2)}{s}\\ &= \frac{(1+s/\sqrt{2})^2+(1+s/\sqrt{2})(2+s/\sqrt{2}))-(1^2+1\cdot 2)}{s}\\ &= \frac{\left(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)+\left(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)-3}{s}\\ &= \frac{s^2+\frac{5s}{\sqrt{2}}}{s}\end{aligned}$$

Aplicando limite quando $s \to 0$ no calculo anterior

$$\lim_{s\to 0}\frac{s^2+\dfrac{5s}{\sqrt{2}}}{s}=\lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\right)==\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+0\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

A taxa de variação de $f(x,\ y)=x^2+xy$ em $P_0(1,\ 2)$ na direção de u é dada por $D_uf((1,\ 2))=5/\sqrt{2}$.

4.1.2 Interpretação Geométrica

A equação $z=f(x,y)$ representa uma superfície S no espaço. Se $z_0=f(x_0,y_0)$, então o ponto $P(x_0,y_0,z_0)$ está em S. O plano vertical que passa por P e $P_0(x_0,y_0)$ paralelo a u intercepta S em uma curva $\mathcal{C}$ (Veja Figura 4.2). A taxa de variação de f na direção de u é a inclinação da tangente a $\mathcal{C}$ em P no sistema destro formado pelos vetores u e k.

Quando $u=i$, a derivada direcional em P_0 é $\partial_x f$ calculada em (x_0,y_0). Quando $u=j$, a derivada direcional em P_0 é $\partial_y f$ avaliada em (x_0,y_0). A derivada direcional generaliza as duas derivadas parciais. Agora podemos pedir a taxa de variação de f em qualquer direção u, não apenas as direções dos versores i e j.

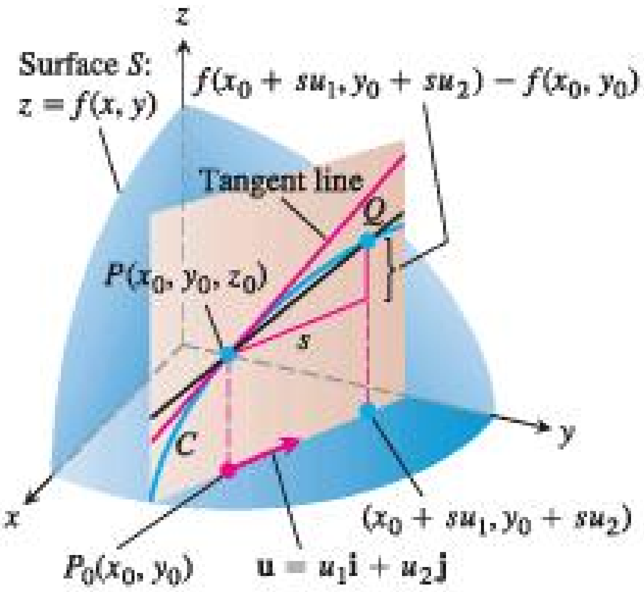


Figure 4.2: A inclinação da curva $\mathcal{C}$ em P_0 é $\lim_{p\to Q}$ coeficiente angular (PQ); esta é a derivada direcional $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{u,\ P_0}=(D_uf)_{P_0}$

4.1.3 Cálculos com Derivadas Direcionais

Podemos formular uma segunda definição equivalente,

Definição 4.1.2 (Derivada Direcional)**.** Se $f(x,\ y)$ é uma função de x e y, e se $u=u_1\,i+u_2\,j$ é um vetor unitário, então a derivada direcional de f na direção de u em $(x_0,\ y_0)$ é denotada por

$D_u f(x_0,\ y_0)$ e é definido por

$$D_u f(x_0,\ y_0) = \frac{d}{ds}[f(x_0 + su_1,\ y_0 + su_2)]\bigg|_{s=0} \tag{4.1}$$

desde que esta derivada exista.

Exercício 4.1.2. Seja $f(x,\ y) = xy$. Encontre e interprete $D_u f(1,\ 2)$ para o vetor unitário

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,i + \frac{1}{2}\,j.$$

Solução. Conclui-se a partir da equação (4.1) que

$$D_u f(1,\ 2) = \frac{d}{ds}\left[f\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}s,\ 2 + \frac{1}{2}s\right)\right]\bigg|_{s=0}.$$

Posto que,

$$f\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}s,\ 2 + \frac{1}{2}s\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}s\right)\left(2 + \frac{1}{2}s\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)s + 2,$$

temos

$$D_u f(1,\ 2) = \frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)s + 2\right]\bigg|_{s=0} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}s + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right]\bigg|_{s=0} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}.$$

Como $1/2 + \sqrt{3} \approx 2,23$, concluímos que se movermos uma pequena distância do ponto $(1,\ 2)$ na direção de u, a função $f(x,\ y) = xy$ aumentará cerca de $2,23$ vezes a distância deslocada.

4.1.4 Cálculos e Gradientes

Agora, vamos desenvolver uma fórmula mais eficiente para calcular a derivada direcional para uma função diferenciável f. Começamos com a reta

$$x = x_0 + su_1 \quad \text{e} \quad y = y_0 + su_2 \tag{4.2}$$

por $P_0(x_0,\ y_0)$, parametrizada pelo comprimento do arco s aumentando na direção do vetor unitário $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$. Então, utilizando a regra da cadeia

$$\begin{aligned}
(D_u f)_{P_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dy}{ds} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot u_2 \\
&= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} e_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} e_2\right] \cdot [u_1 e_1 + u_2 e_2] \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Definição 4.1.3 (Vetor Gradiente)**.** O vetor gradiente (gradiente) de $f(x,\ y)$ no ponto $P_0(x_0,\ y_0)$

é o vetor

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\, e_2 = \partial_x f\, e_1 + \partial_y f\, e_2$$

obtido por intermédio do calculo de derivadas parciais da função f no ponto P_0.

A notação ∇f e lida tanto como “grad f” quanto como “gradiente de f”. O símbolo ∇ isolado é lido como “nabla”. Outra notação para o gradiente é grad f, lida da maneira como é escrita.

A equação (4.3) diz que a derivada de f na direção de u em P_0 é o produto escalar de u com o gradiente de f em P_0.

Teorema 4.1.1 (Derivada Direcional é um Produto Escalar)**.** *Se $f(x,\ y)$ for diferenciável em uma região aberta contendo $P_0(x_0,\ y_0)$, então*

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,\ P_0} = (D_u f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot u \tag{4.4}$$

o produto escalar do gradiente de f em P_0 e o vetor u.

Exercício 4.1.3 (Derivada Direcional usando o Gradiente)**.** Encontre a derivada de $f(x,\ y) = xe^y + \cos xy$ no ponto $(2,\ 0)$ na direção de $v = 3\, i - 4\, j$,

Solução. A direção de v obtida dividindo-se v por seu comprimento;

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{v}{5} = \frac{3}{5}\, i - \frac{4}{5}\, j$$

As derivadas parciais de f são contínuas cm todos os pontos e em $(2,\ 0)$ sao dadas por

$$\partial_x f(2,\ 0) = (e^y - y\,\mathrm{sen}(xy))\Big|_{(2,\ 0)} = e^0 - 0 = 1$$

$$\partial_y f(2,\ 0) = (xe^y - x\,\mathrm{sen}(xy))\Big|_{(2,\ 0)} = 2e^0 - 2 \cdot 0 = 2$$

O gradiente de f em $(2,\ 0)$ é

$$\nabla f\Big|_{(2,\ 0)} = \partial_x f(2,\ 0)\, i + \partial_y f(2,\ 0)\, j = i + 2\, j$$

Veja a Figura 4.3

A derivada de f em $(2,\ 0)$ na direção de v é, portanto,

$$(D_u f)_{(2,\ 0)} = \nabla f\Big|_{(2,\ 0)} \cdot u = (i + 2\, j) \cdot \left(\frac{3}{5}\, i - \frac{4}{5}\, j\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1$$

e isso conclui o exercício. ◊

4.1.5 Propriedades da Derivada Direcional

O cálculo do produto escalar na formula

$$D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f||u| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

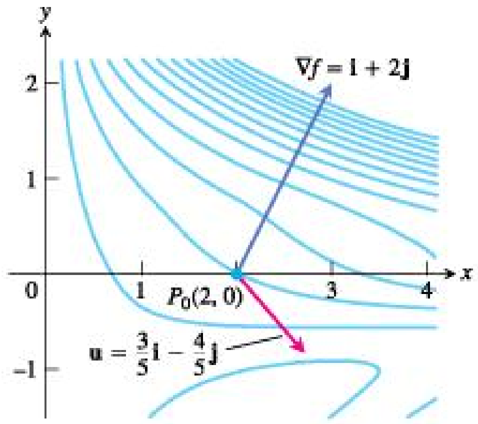


Figure 4.3: A taxa com que f varia na direção de u é $\nabla f \cdot u = -1$

onde θ é o ângulo entre os vetores u e ∇f revela-nos as propriedades a seguir.

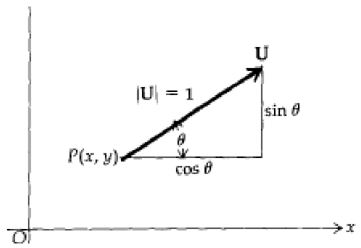


Figure 4.4: U é o vetor unitário $\cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$

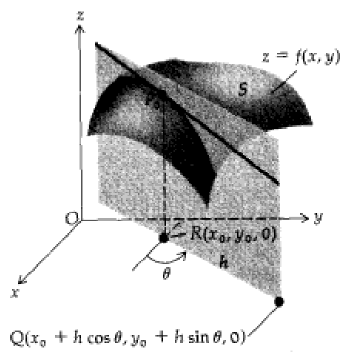


Figure 4.5: Definição de derivada direcional com vetor unitário $u = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, j$

- A função f aumenta mais rapidamente quando $\cos\theta = 1$ ou quando u é a direção de ∇f. Isto é, a cada ponto P no seu domínio, ∇f cresce mais rapidamente na direção e no sentido do vetor gradiente ∇f em P. A derivada nessa direção é

$$D_u f = |\nabla f| \cos 0 = |\nabla f|.$$

- De maneira similar, f decresce mais rapidamente na direção e no sentido de $-\nabla f$. A derivada nessa direção é

$$D_u f = |\nabla f| \cos \pi = -|\nabla f|.$$

- Qualquer direção u ortogonal ao gradiente $\nabla f \neq 0$ é uma direção de variação zero em f porque θ é então igual a $\pi/2$ e

$$D_u f = |\nabla f| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\nabla f| \cdot 0 = 0.$$

Como veremos mais à frente, essas propriedades são verdadeiras tanto em três dimensões como em duas.

Exercício 4.1.4 (Direções de Variação Máxima, Mínima e Zero)**.** Encontre as direções nas quais

$$f(x,\ y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

(a) Cresce mais rapidamente no ponto $(1,\ 1)$; (b) Decresce mais rapidamente em $(1,\ 1)$;

(c) Quais são as direções de variação zero de f em $(1,\ 1)$?

Solução.

(a) A função aumenta mais rapidamente na direção e no sentido de ∇f em $(1,\ 1)$. O gradiente nesse ponto é

$$(\nabla f)_{(1,\,1)} = (x\,i + y\,j)\Big|_{(1,\,1)} = i + j.$$

Sua direção ou versor é,

$$u = \frac{(\nabla f)_{(1,\,1)}}{|(\nabla f)_{(1,\,1)}|} = \frac{i+j}{|i+j|} = \frac{i+j}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i + \frac{1}{\sqrt{2}}\,j$$

(b) A função decresce mais rapidamente na direção e no sentido de $-\nabla f$ em $(1,\ 1)$, e sua direção ou versor é,

$$-u = -\frac{(\nabla f)_{(1,\,1)}}{|(\nabla f)_{(1,\,1)}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,i - \frac{1}{\sqrt{2}}\,j$$

(c) As direções de variação zero em $(1,\ 1)$ são as direções ortogonais a ∇f,

$$n = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,i + \frac{1}{\sqrt{2}}\,j \quad \text{e} \quad -n = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - \frac{1}{\sqrt{2}}\,j$$

Veja a Figura 4.6.

Gradientes e Reta Tangente a Curvas de Nível

Se uma função diferenciável $f(x,\ y)$ tiver um valor constante C ao longo de uma curva lisa $\alpha(t) = g(t)\,i + h(t)\,j$ (fazendo da curva uma curva de nível de f), então $f(g(t),\ h(t)) = C$.

Derivar ambos os lados dessa equação em relação a t, usando a regra da cadeia leva às equações

$$\frac{d}{dt} f(g(t),\ h(t)) = \frac{d}{dt} C,$$

e pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt}\,i + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt}\,j = 0.$$

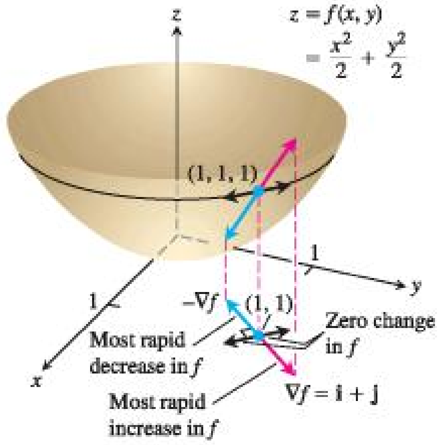


Figure 4.6: A direção em que $f(x,\, y)$ aumenta mais rapidamente em $(1,\; 1)$ é a direção de $(\nabla f)_{(1,\,1)} = i + j$. Corresponde à direção e ao sentido de subida mais íngreme na superfície em $(1,\, 1,\, 1)$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\, i + \frac{\partial f}{\partial y}\, j\right) \cdot \left(\frac{dg}{dt}\, i + \frac{dh}{dt}\, j\right) = 0. \tag{4.5}$$

A equação (4.5) diz que $\nabla\, f$ é normal ao vetor tangente $\alpha'(t)$, portanto é normal à curva.

Em todo ponto $(x_0,\; y_0)$ no domínio de uma função diferenciável $f(x,\; y)$ o gradiente d e f normal à curva de nível que passa por $(x_0,\; y_0)$.

A equação (4.5) confirma nossa observação dc que os córregos correm perpendicularmente às curvas de nível em mapas topográficos.

Como o córrego deve alcançar seu destino da maneira mais rápida, deve correr na direção oposta á dos gradientes, devido a Propriedade 2 da derivada direcional. A equação (4.5) nos diz que essas direções são perpendiculares às curvas de nível.

Essa observação também nos permite encontrar equações para retas tangentes às curvas de nível. Elas são as retas normais aos gradientes. A reta que passa por um ponto $P_0(x_0,\; y_0)$ normal a um vetor $N = A\, i + B\, j$ tem a equação

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Se N é o gradiente

$$(\nabla f)_{P_0} = \partial_x f(P_0)\, i + \partial_y f(P_0)\, j$$

a equação torna-se

$$\partial_x f(x_0,\; y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0,\; y_0)(y - y_0) = 0 \tag{4.6}$$

Exercício 4.1.5 (Reta Tangente a uma Elipse)**.** Encontre uma equação para a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

no ponto $(-2,\; 1)$.

Solução. A elipse é uma curva de nível da função

$$f(x,\ y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

O gradiente de f em $(-2,\ 1)$ é,

$$\nabla f\Big|_{(-2,\ 1)} = \left(\frac{x}{2}\,i + 2y\,j\right)\Bigg|_{(-2,\ 1)} = -i + 2\,j$$

A tangente é a reta

$$(-1)(x+2) + (2)(y-1) = 0$$

Assim

$$x - 2y = -4$$

Se soubermos os gradientes de duas funções f e g, automaticamente saberemos os gradientes de sua soma e diferença, de seu produto e quociente e da multiplicação por uma constante.

O estudante deverá justificar essas propriedades nas listas de Exercícios Propostos. Observe que elas tem a mesma forma que as propriedades correspondentes para derivadas de funções de uma variável

4.1.6 Propriedades Algébricas do Vetor Gradiente

Multiplicação por constante,

$$\nabla(k\,f) = k\,\nabla f \quad \text{para qualquer número} \quad k.$$

Regra da Adição

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$$

Regra do produto

$$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\nabla\,f$$

Regra do Quociente

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

Exercício 4.1.6. Verificar as propriedades do gradiente utilizando as seguintes funções escalares,

$$f(x,\ y) = x - y \quad \text{e} \quad g(x,\ y) = 3y$$

Solução. Calculamos o gradiente de cada função rela de duas variáveis,

$$\nabla f = i - j \quad \text{e} \quad \nabla g = 3\,j.$$

Para uma constante qualquer $k = 2$,

$$\nabla(2f) = \nabla(2x - 2y) = i + 2\,j = 2\,\nabla f$$

O gradiente da soma,

$$\nabla(f + g) = \nabla(x + 2y) = i + 2\,j = \nabla f + \nabla g$$

O gradiente da soma,

$$\nabla(f - g) = \nabla(x - 4y) = i - 4\,j = \nabla f - \nabla g$$

O gradiente do produto,

$$\begin{aligned}
\nabla(f\,g) = \nabla(3xy - 3y^2) &= 3y\,i + (3x - 6y)\,j \\
&= 3y(i - j) + 3y\,j + (3x - 6y)\,j \\
&= 3y(i - j) + (3x - 3y)\,j \\
&= 3y(i - j) + (x - y)3\,j = g\nabla f + f\,\nabla g
\end{aligned}$$

O gradiente do quociente

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \nabla\left(\frac{x - y}{3y}\right) = \nabla\left(\frac{x}{3y} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3y}\,i - \frac{x}{3y^2}\,j \\
&= \frac{3y\,i - 3x\,j}{9y^2} = \frac{3y(i - j) - (3x - 3y)\,j}{9y^2} \\
&= \frac{3y(i - j) - (x - y)3j}{9y^2} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}.
\end{aligned}$$

4.1.7 Funções Reais de Três Variáveis

Para uma função diferenciável $f(x,\ y,\ z)$ e um vetor unitário $u = u_1\,i + u_2\,j + u_1\,k$ no espaço, temos

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\,e_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\,e_3$$

e

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial x} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3$$

A derivada direcional pode ser escrita novamente na forma

$$D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f||u| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

assim as propriedades relacionadas anteriormente para funções de duas variáveis continuam valendo. Em qualquer ponto dado, f aumenta mais rapidamente na direção de ∇f e decresce mais rapidamente na direção de $-\nabla f$. Em qualquer direção ortogonal a ∇f a derivada é zero,

Exercício 4.1.7 (Direções de variação máxima, mínima e zero)**.** Resolva em detalhes as seguintes questões

(a) Encontre a derivada de $f(x,\ y,\ z) = x^3 - xy^2 - z$ em $P_0(1,\ 1,\ 0)$ na direção de $v = 2i - 3j + 6\,k$.

(b) Em que direções f varia mais rapidamente em P_0 e quais são as taxas de variação nessas direções?

Solução. A direção de v é obtida dividindo-se v pelo seu comprimento,

$$|v| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

logo,

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2}{7}\,i - \frac{3}{7}\,j + \frac{6}{7}\,k$$

As derivadas parciais de f em P_0, são

$$\partial_x f = (3x^2 - y^2)\Big|_{(1,\,1,\,0)} = 2, \quad \partial_y f = -2xy\Big|_{(1,\,1,\,0)} = -2, \quad \partial_z f = -1\Big|_{(1,\,1,\,0)} = -1$$

O gradiente de f em P_0 é

$$\nabla f\Big|_{(1,\,1,\,0)} = 2\,i - 2\,j - k.$$

A derivada direcional de f em P_0 na direção de v é, portanto,

$$\begin{aligned}(D_u f)_{(1,\,1,\,0)} &= \nabla f\Big|_{(1,\,1,\,0)} \cdot u = (2i - 2j - k)\cdot\left(\frac{2}{7}i - \frac{3}{7}\,j + \frac{6}{7}\,k\right)\\ &= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}.\end{aligned}$$

(b) A função cresce mais rapidamente na direção de $\nabla f = 2i - 2j - k$ e decresce mais rapidamente na direção do vetor $-\nabla f$. As taxas de variação nas direções são, respectivamente,

$$|\nabla f| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{e} \quad -|\nabla f| = -3.$$

4.2 Campos Vetoriais

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ é uma função $\mathbf{F}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que atribui a cada ponto $\mathbf{x}$ em seu domínio A um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Se $n = 2$, a função F é chamada de CAMPO VETORIAL NO PLANO e se $n = 3$, a função $\mathbf{F}$ é um CAMPO VETORIAL NO ESPAÇO.

O campo $\mathbf{F}$ figura como anexado uma seta em cada ponto (Veja a Figura 4.7).

Em contraste, uma função $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que atribui um número a cada ponto de seu domínio é um CAMPO ESCALAR.

Um campo vetorial $\mathbf{F}(x,\,y,\,z)$ em $\mathbb{R}^3$ tem três campos escalares componentes F_1, F_2 e F_3 de modo que

$$\mathbf{F}(x,\,y,\,z) = \left(F_1(x,\,y,\,z),\ F_2(x,\,y,\,z),\ F_3(x,\,y,\,z)\right).$$

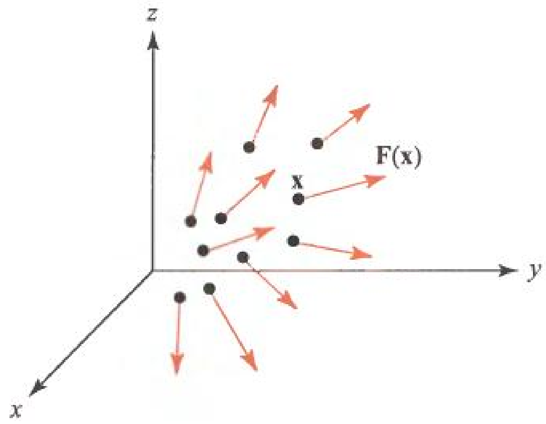


Figure 4.7: Um campo vetorial $\mathbf{F}$ atribui um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a cada ponto $\mathbf{x}$ de seu domínio

Se cada uma das componentes F_1, F_2 e F_3 é uma função de classe C^k, dizemos que o campo vetorial $\mathbf{F}$ é da classe C^k, os campos vetoriais serão assumidos no que segue como sendo pelo menos da classe C^1, a menos que indicado de outra forma.

Em muitas aplicações, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ representa uma grandeza vetorial física (força, velocidade, etc.) associada à posição $\mathbf{x}$.

Visualizamos campos vetoriais traçando a seta que representa $\mathbf{F}(x,\ y)$ no ponto $(x,\ y)$ ou $\mathbf{F}(x,\ y,\ z)$ em cada ponto $(x,\ y,\ z)$.

Obviamente, não podemos fazer isso para todos os pontos, então fazemos isso para alguns pontos representativos. Também podemos usar software matemático para plotar um campo vetorial. O comando em cada software para plotar um campo vetorial depende se é um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

4.3 Operações de Divergência e Rotacional

Para cada uma das operações de divergência e rotacional, faremos uso do operador "del", definido por

$$\nabla = i\,\partial_x + j\,\partial_y + k\,\partial_z$$

Para funções de uma variável, a obtenção de uma derivada pode ser considerada uma operação ou processo; isto é, dada uma função $y = f(x)$, sua derivada é o resultado da operação em y pelo operador derivação $D = d/dx$. Da mesma forma, podemos escrever o gradiente de f como

$$\nabla f = (i\,\partial_x + j\,\partial_y)\ f = i\,\partial_x f + j\,\partial_y f,$$

para funções de duas variáveis, e

$$\nabla f = (i\,\partial_x + j\,\partial_y + k\,\partial_z)\ f = i\,\partial_x f + j\,\partial_y f + k\,\partial_z f$$

para três variáveis. Em termos operacionais, o gradiente de f é obtido tomando o operador ∇ e aplicando-o para o campo escalar f.

Definição da Divergência

Definimos a divergência de um campo vetorial **F** tomando o produto escalar do operador ∇ com o campo vetorial **F**.

Definição 4.3.1 (Divergência)**.** Se $\mathbf{F} = F_1\, i + F_2\, j + F_3\, k$ campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, a divergência de **F** é o campo escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3$$

Da mesma forma, se $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$, sua divergência é

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F_i = \partial_{x_1} F_1 + \partial_{x_2} F_2 + \cdots + \partial_{x_n} F_n$$

Exercício 4.3.1. Calcular a divergência do seguinte campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,\ y,\ z) = x^2 y\, i + z\, j + xyz\, k.$$

em $\mathbb{R}^3$.

Solução. Ao aplicar a definição de divergência devemos calcular primeiro as derivadas parciais na direção se sentido dos versores ou vetores unitários canônicos, isto é,

$$\partial_x F_1(x,\ y,\ z) = 2xy; \quad \partial_y F_2(x,\ y,\ z) = 0; \quad \partial_z F_3(x,\ y,\ z) = xy$$

Logo obtemos,

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 2xy + 0 + xy = 3xy$$

que é o campo escalar divergência. $\Diamond$

A divergência tem uma importante interpretação física. Se imaginarmos **F** para ser o campo de velocidade de um gás (ou um fluido), então div **F** representa a *taxa de expansão por unidade de volume sob o fluxo do gás* (ou fluido). Se div $\mathbf{F} < 0$, o gás (ou fluido) está comprimindo. Para um campo vetorial $\mathbf{F}(x,\ y) = F_1\, i + F_2\, j$ no plano, a divergência,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$$

mede a taxa de expansão da área.

Esta interpretação é explicada graficamente, como segue. Escolha uma pequena região W com um ponto $\mathbf{x}_0$. Para cada ponto $\mathbf{x}$ em W, defina $\mathbf{x}(t)$ ser a linha de fluxo emanando de $\mathbf{x}$. O conjunto de pontos $\mathbf{x}(t)$ descreve como o conjunto W flui após o tempo t (veja a Figura 4.8).

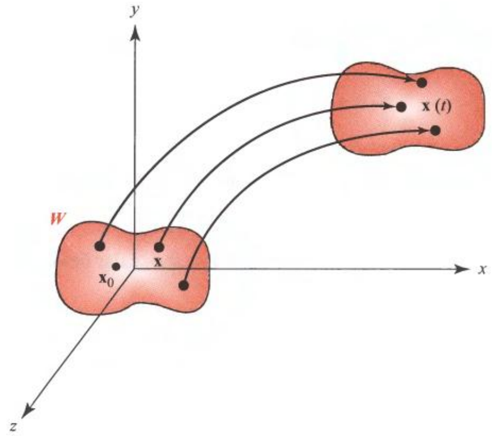


Figure 4.8: Uma região W fluindo ao longo das linhas de fluxo de um campo vetorial.

Denota-se para a região que resulta depois que o tempo t decorreu com $W(t)$, e seja $V(t)$ seu volume (ou área em duas dimensões). Então a *taxa relativa de mudança de volume* é a divergência; mais precisamente,

$$\frac{1}{V(0)}\frac{d}{dt}V(t)\bigg|_{t=0} \approx \operatorname{div}\mathbf{F}(0)$$

com a aproximação sendo mais exata quando W encolhe cada vez mais para $\mathbf{x}_0$.

Exercício 4.3.2. Considere o campo vetorial num avião dado por $\mathbf{V}(x,\ y) = x\,i$. Relacionar o sinal da divergência de $\mathbf{V}$ com a taxa de mudança de áreas sob o fluxo.

Solução. Pensamos no campo vetorial $\mathbf{V}$ como o campo de velocidade de um fluido no plano. O campo vetorial $\mathbf{V}$ aponta para a direita quando $x > 0$ e à esquerda se $x < 0$, como vemos na Figura 4.9.

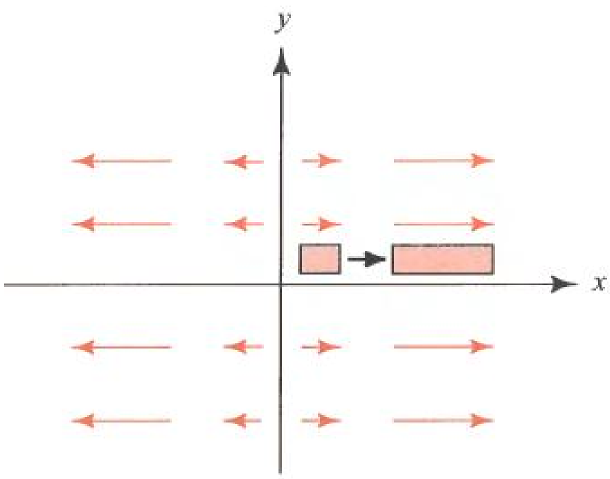


Figure 4.9: O fluido está se expandindo.

O comprimento de $\mathbf{V}$ fica mais curto em direção à origem. Como o fluido se move, ele se expande (a área do retângulo sombreado aumenta), então esperamos div $\mathbf{V} > 0$. De fato, efetuando-se o calculo do campo escala divergência, valida-se a nossa conjectura, isto é,

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_x V_1(x,\ y) + \partial_y V_2(x,\ y) = 1 + 0 = 1 > 0$$

Exercício 4.3.3. As linhas de fluxo do campo vetorial $\mathbf{F} = x\,i + y\,j$ são linhas retas direcionadas para longe da origem, relacionar o sinal do campo escalar divergência com a taxa de expansão se as linhas de fluxo fossem de um fluído.

Solução. Como linhas de fluxo são de um fluido, observamos que o fluido está se expandindo, pois se move afastando-se da origem, de modo que div $\mathbf{F}$ deve ser positivo. Na verdade, calculando o divergente usando a definição obtemos,

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_x F_1(x,\ y) + \partial_y F_2(x,\ y) = 1 + 1 = 2 > 0,$$

o que confirma a nossa afirmação. Veja a Figura 4.10.

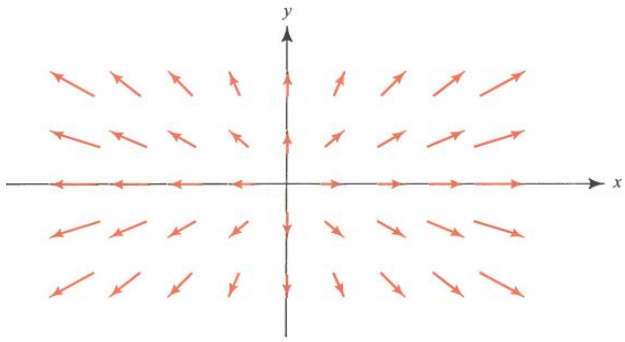


Figure 4.10: O campo vetorial $\mathbf{F}(x,\ y) = x\,i + y\,j$

4.4 O Rotacional de um Campo Vetorial

Para calcular o rotacional, a segunda operação básica realizada em campos vetoriais, aplicamos o produto cruz do operador ∇ com o campo vetorial $\mathbf{F}$.

Definição 4.4.1 (Rotacional)**.** Se $\mathbf{F} = F_1\,i + F_2\,j + F_3\,k$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, o rotacional de $\mathbf{F}$ é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por,

$$\nabla \times F = (\partial_y F_3 - \partial_z F_2)\ i + (\partial_z F_1 - \partial_x F_3)\ j + (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\ k$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.$$

Se escrevermos o campo vetorial por $\mathbf{F} = P\,i + Q\,j + R\,k$ em $\mathbb{R}^3$, que é notação alternativa, a mesma fórmula para o rotacional será,

$$\nabla \times F = (\partial_y R - \partial_z Q)\ i + (\partial_z P - \partial_x R)\ j + (\partial_x Q - \partial_y P)\ k$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

A seguir resolvemos alguns exercícios para fixar e reforçar algumas ideias e conceitos.

Exercício 4.4.1. Considere o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x,\ y,\ z) = x\,i + xy\,j + k$. Encontre o rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$.

Solução. Usamos a fórmula do rotacional anterior,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0-0)\,i - (0-0)\,j + (y-0)\,k = y\,k.$$

Assim,

$$\nabla \times \mathbf{F} = y\,k.$$

é o rotacional procurado. ◊

Exercício 4.4.2. Encontre o rotacional do campo vetorial $\mathbf{F} = xy\,i - \operatorname{sen} z\,j + k$ em $\mathbb{R}^3$.

Solução. Aplicando a definição de rotacional ao campo vetorial,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & -\operatorname{sen} z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ -\operatorname{sen} z & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_z \\ xy & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ xy & -\operatorname{sen} z \end{vmatrix} k$$

Portanto,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \cos z\,i - x\,k,$$

é a resposta do rotacional procurado. ◊

Ao contrário da divergência, que pode ser definida em $\mathbb{R}^n$ para qualquer n, definimos o rotacional apenas no espaço tridimensional (ou para campos vetoriais planares, em relação ao terceiro componente como zero).

O significado físico do rotacional será discutido no Capítulo posterior, quando estudarmos o teorema de Stokes. No entanto, podemos agora considerar uma situação específica, em que o rotacional está associada a rotações.

A seguinte identidade é uma relação básica entre o gradiente e o rotacional, que deve ser comparada com o fato de que para qualquer vetor $\mathbf{v}$, temos que seu produto cruz resulta em $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$.

Rotacional de um Gradiente

Para quaisquer campo escalar f de classe C^2

$$\text{rot } \nabla f = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Ou seja, o rotacional de qualquer campo gradiente é o vetor zero.

Prova. Pela definição $\nabla f = (\partial_x f,\ \partial_y f,\ \partial_z f)$, assim outra vez pela definição de rotacional,

$$\begin{aligned}\text{rot } \nabla f = \nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{vmatrix} \\ &= \left(\partial^2_{yz} f - \partial^2_{zy} f\right)\, i + \left(\partial^2_{zx} f - \partial^2_{xz} f\right)\, j + \left(\partial^2_{xy} f - \partial^2_{yx} f\right)\, k = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Cada componente é zero devido à igualdade das derivadas parciais mistas. □

Exercício 4.4.3. Seja o campo vetorial $\mathbf{V}(x,\ y,\ z) = y\, i - x\, j$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\mathbf{V}$ não é um campo gradiente

Solução. Se o campo vetorial $\mathbf{V}$ fosse um campo gradiente, então ele satisfaria $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ pela afirmação mostrada anteriormente. Mas o rotacional de $\mathbf{V}$ é,

$$\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\, k \neq \mathbf{0}$$

que é contraditório, logo $\mathbf{V}$ não e um campo gradiente. ◊

Existe uma operação em campos vetoriais no plano que está intimamente relacionada ao rotacional. Se $\mathbf{F} = P(x,\ y)\, i + Q(x,\ y)\, j$ é um campo vetorial no plano, ele também pode ser considerado como um campo vetorial no espaço para o qual o componente k é zero e os outros dois componentes são independentes de z. O rotacional de F então se reduz a

$$\nabla \times \mathbf{F} = \Big(\partial_x\, Q(x,\ y) - \partial_y\, P(x,\ y)\Big)\, k$$

e sempre aponta na direção de k. A função

$$\partial_x\, Q(x,\ y) - \partial_y\, P(x,\ y)$$

de x e y é chamado de rotacional escalar de $\mathbf{F}$.

Exercício 4.4.4. Encontre o rotacional escalar do campo vetorial plano, dado por $\mathbf{V}(x,\ y) = -y^2\, i + x\, j$

Solução. O rotacional é

$$\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y^2 & x & 0 \end{vmatrix} = (1+2y)\, k$$

então o rotacional escalar, que é o coeficiente do versor k, é dada pela relação $1+2y$. $\Diamond$

Uma relação básica entre as operações de divergência e rotacional é fornecida a seguir.

Divergência de um Rotacional

Para qualquer campo vetorial $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ de classe C^2,

$$\text{div rot } \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Ou seja, a divergência de qualquer rotacional é zero.

Tal como acontece com a rotacional de um gradiente, a prova baseia-se na igualdade das derivadas parciais mistas. O estudante da disciplina deve escrever os detalhes.

Exercício 4.4.5. Mostre que o campo vetorial $\mathbf{V}(x,\ y,\ z) = x\, i + y\, j + z\, k$ em $\mathbb{R}^3$ não pode ser o rotacional de algum campo vetorial $\mathbf{F}$, ou seja, não existe $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

Solução. Se fosse assim, div $\mathbf{V}$ seria zero pela propriedade mostrada anteriormente. Mas

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_x\, x + \partial_y\, y + \partial_z\, z = 1+1+1 = 3 \neq 0,$$

então $\mathbf{V}$ não pode ser rot $\mathbf{F}$ para qualquer $\mathbf{F}$. $\Diamond$

4.5 O Operador Laplaciano

O operador de Laplace ∇^2, que opera em campos escalares f, é definido para ser a divergência do gradiente,

$$\nabla^2 f = \text{div } \nabla f = \nabla \cdot (\nabla f) = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f$$

Este operador desempenha um papel importante em muitas leis físicas.

Exercício 4.5.1. Mostre que $\nabla^2 f = 0$ para o campo escalar

$$f(x,\ y,\ z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{|r|} \quad \text{e} \quad (x,\ y,\ z) \neq (0,\ 0,\ 0)$$

onde $r = x\, i + y\, j + z\, k$

Solução. As primeiras derivadas parciais são,

$$\partial_x f = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \partial_y f = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \partial_z f = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Computando as segundas derivadas, obtemos

$$\partial_x^2 f = \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\partial_x^2 f = \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\partial_x^2 f = \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Assim obtemos,

$$\begin{aligned}\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f &= \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Exercício 4.5.2. Justifique a seguinte identidade,

$$\operatorname{div}(f\,\mathbf{F}) = f \operatorname{div}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla f$$

Solução. O campo vetorial $f\,\mathbf{F}$ tem componentes $f\,F_i$, para $i = 1,\ 2,\ 3$ e assim

$$\operatorname{div}\ (f\,\mathbf{F}) = \partial_x\,(f\,F_1) + \partial_y\,(f\,F_2) + \partial_z\,(f\,F_3)\,.$$

Contudo,

$$\partial_x\,(f\,\mathbf{F}) = f\,\partial_x F_1 + F_1 \partial_x f$$

pela regra do produto, com expressões semelhantes para os demais termos. Portanto,

$$\operatorname{div}\ (f\,\mathbf{F}) = f\Big(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3\Big) + F_1\partial_x f + F_2 \partial_x f + F_3 \partial_z f$$

Vamos usar essas identidades para refazer o Exercício 4.5.1.

Exercício 4.5.3. Mostre ou justifique a seguinte identidade,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|r|}\right) = 0,$$

sendo a função de posição $r = x\,i + y\,j + z\,k \neq 0\,i + 0\,j + 0\,k = \mathbf{0}$ é não nula.

Solução. Como no caso do potencial gravitacional,

$$\nabla\left(\frac{1}{|r|}\right) = \frac{-r}{|r|^3}$$

em geral, $\nabla(|r|^n) = n\,|r|^{n-2}\,r$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Utilizando a identidade

$$\nabla\cdot(f\,\mathbf{F}) = f\,\nabla\cdot\mathbf{F} + \nabla f\cdot\mathbf{F}$$

e identificando $f = -1/|r|^3$ e $\mathbf{F} = r$, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(-\frac{r}{|r|^3}\right) &= -\frac{1}{|r|^3}\nabla \cdot r + r \cdot \nabla\left(-\frac{1}{|r|^3}\right) \\ &= -\frac{3}{|r|^3} + r \cdot \left(\frac{3\,r}{|r|^5}\right) = -\frac{3}{|r|^3} + \frac{3}{|r|^3} = 0.\end{aligned}$$

e isso mostra a identidade requerida. $\Diamond$

Identidades Básicas de Análise Vetorial

Agora temos essas operações básicas em mãos: gradiente, divergência, rotacional e o operador de Laplace. A tabela a seguir contém algumas fórmulas gerais básicas que são úteis ao calcular com campos vetoriais.

1	$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2	$\nabla(cf) = c\nabla f$, para uma constante c
3	$\nabla(fg) = f\,\nabla g + g\,\nabla f$
4	$\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, em pontos x onde $g(x) \neq 0$
5	$\mathrm{div}(F+G) = \mathrm{div}\ F + \mathrm{div}\ G$
6	$\mathrm{rot}\ (F+G) = \mathrm{rot}\ F + \mathrm{rot}\ G$
7	$\mathrm{div}\ (f\,F) = f\ \mathrm{div}\ F + F \cdot \nabla f$
8	$\mathrm{div}(F \times G) = G \cdot \mathrm{rot}\ F - F \cdot \mathrm{rot}\ G$
9	$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ F = 0$
10	$\mathrm{rot}\ (f\,F) = f\ \mathrm{rot}\ F + \nabla f \times F$
11	$\mathrm{rot}\ \nabla f = 0$
12	$\nabla^2(f\,g) = f\,\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$
13	$\mathrm{div}\ (\nabla f \times \nabla g) = 0$
14	$\mathrm{div}\ (f\ \nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$

Chapter 5

Funções Reais de Várias Variáveis

Uma função f real de várias variáveis, $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}$ é uma correspondência de um conjunto D de vetores de $\mathbb{R}^n$ (ou uma n-upla de números reais) para um conjunto B de números reais, de maneira que para cada vetor $\mathbf{x} = (x^1,\ x^2,\ x^3, \ldots, x^{n-1},\ x^n) \in D$ existe um único elemento $f(\mathbf{x}) \in B$. O conjunto $D = D_f$ é chamado de *domínio da função* e o conjunto B é chamado de *contradomínio da função* ou imagem.

O conjunto de todos os valores possíveis de $\mathbf{x}$ (no caso, o conjunto D) é chamado de domínio da função. O conjunto de todos os valores possíveis para $f(\mathbf{x})$ é chamado de imagem da função.

5.0.1 Notações e Nomenclatura

O valor real da função f de denota por $z = f(\mathbf{x})$. As variáveis $\mathbf{x} = (x^1,\ x^2, \ldots, x^n)$ são chamadas de variáveis *independentes* da função. Finalmente a variável z é chamada de variável *dependente*.

Em particular se $n = 1$, $\mathbf{x} = x$; se $n = 2$, $\mathbf{x} = (x,\ y)$; se $n = 5$, $\mathbf{x} = (x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5)$, e assim por diante.

Definição 5.0.1. O conjunto dado por,

$$D_f = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ :\ z = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}\Big\},$$

é chamado domínio de definição ou domínio de existência da função f.

Exercício 195. Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela lei de correspondência.

$$f(x,\ y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Determine seu domínio e faça o gráfico

Solução. A cada ponto $\mathbf{x} = (x, y)$ pertencente a $D_f \subsetneq \mathbb{R}^2$ podemos fazer corresponder um número $z \in \mathbb{R}$, dado por

$$z = f(x,\ y) = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}$$

Neste caso, estamos diante de uma função real de duas variáveis reais denotada por

$$\begin{aligned} f\,:\, D_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\ y) &\longmapsto z = f(x,\ y) \end{aligned}$$

Esta função pode representar, por exemplo, a temperatura em uma chapa circular de raio $r = 3$.

Pela definição de raiz quadrada, temos que a seguinte desigualdade é válida,

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{logo} \quad 9 \geq x^2 + y^2.$$

O conjunto $D_f \subsetneq \mathbb{R}^2$, isto é, o conjunto de pontos $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ ou $x^2 + y^2 \leq 9$ é chamado o domínio dessa função, e é denotado por

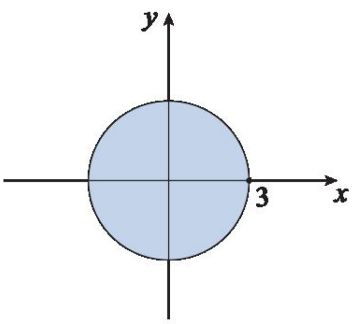
$$D_f = \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \leq 9\Big\}$$

A representação geométrica deste domínio esta dado pelo círculo fechado de raio três. Veja a Figura 5.1

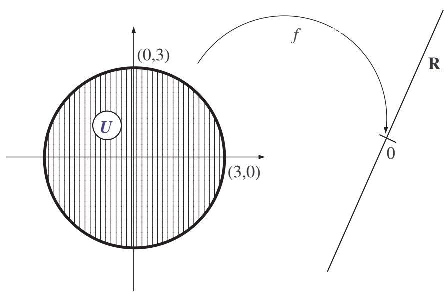
A imagem dessa função é o conjunto dos números $z \in \mathbb{R}$, tais que $0 \leq z \leq 3$, e é denotada por

$$\text{Im}(f) = \Big\{z \in \mathbb{R}\ :\ 0 \leq z \leq 3\Big\} \quad \text{ou} \quad \text{Im}(f) = [0,\ 3]$$

e assim esta concluído o exercício. $\Diamond$



(a) Domínio da função f



(b) A correspondência f

Figure 5.1: Domínio e correspondência da função f

Salientamos que, para que tenhamos uma função, cada ponto $\mathbf{x}$ do conjunto D deve ser associado a apenas um número real z. De outra forma, se $f(\mathbf{x}_1) = z_1$ e $f(\mathbf{x}_1) = z_2$, e f é uma função, então obrigatoriamente $z_1 = z_2$.

Quando uma função f é dada através de alguma expressão termos $\mathbf{x}$ de e nada é dito sobre seu domínio, entende-se que o domínio é o maior conjunto de no qual a expressão dada faz sentido como um número real.

Exercício 196. Encontre o domínio da função real de duas variáveis definida por

$$f(x,\ y) = \ln(x - y)$$

Solução. A função real definida por $f(x,\ y) = \ln(x-y)$ é uma função de duas variáveis. Portanto, o seu domínio D_f é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$.

Pela definição da função logaritmo, temos que $z = \ln(x-y)$ é um número real quando $x - y > 0$ ou $x > y$.

Assim, o domínio da função real f é

$$D_f = \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x > y\Big\}$$

e assim obtemos o conjunto desejado. $\Diamond$

A figura 5.2 mostra a região do $\mathbb{R}^2$ que representa graficamente esse domínio

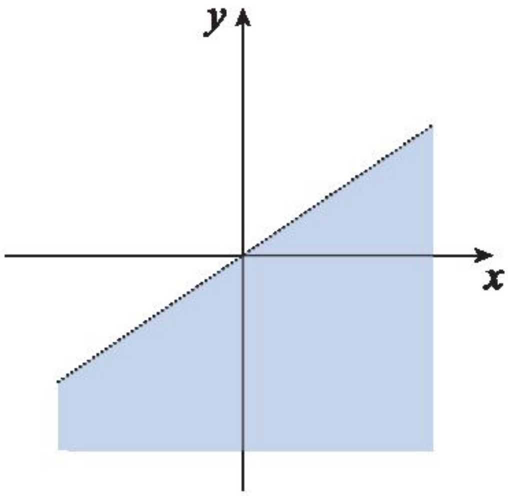


Figure 5.2: Domínio da função $\ln(x-y)$

Exercício 197. Encontre o domínio da função real g de três variáveis definida por

$$g(x,\ y,\ z) = (25 - x^2 - y^2 - z^2)^{1/2}$$

Solução. A função real g possui três variáveis independentes, logo seu domínio D_gé um subconjunto do $\mathbb{R}^3$.

Pela definição da raiz quadrada podemos afirmar que $z = g(\mathbf{x})$ é um numero real sempre

$$25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$$

Assim, o domínio da função real g é dado por

$$D_g = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\Big\}$$

e é representado pela região esférica do $\mathbb{R}^3$ de raio $r = 5$, mostrada na figura 5.3

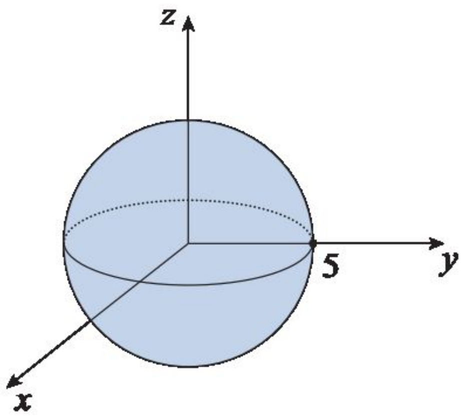


Figure 5.3: Domínio da função $z = g(\mathbf{x})$

Exercício 198. Considere a função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,\ y) = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$$

Encontre seu domínio e imagem. Depois esboce seu gráfico.

Solução. Pela definição de raiz quadrada $36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0$. Então o domínio da função g esta definida pelo conjunto

$$D_g = \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0\Big\} = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \leq 1\right\}.$$

A imagem ou o conjunto imagem é obtida pela manipulação algébrica da relação,

$$z = \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2} \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{36 - 4x^2 - 9y^2}{9}} = \sqrt{4 - (4/9)x^2 - y^2}$$

logo podemos determinar a variação da variável z da seguinte maneira,

$$z = \sqrt{4 - (4/9)x^2 - y^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - (4/9)x^2 - y^2 \geq 0$$

e observamos as possibilidades

$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - (4/9)x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = (4/9)x^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2}$$

ou seja atingimos o valor mínimo da superfície na fronteira da elipse, também

$$z > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} < 1$$

em pontos no interiores da elipse, nos pontos $(x,\ 0)$ dos eixos coordenados

$$z = \sqrt{4 - (4/9)x^2} \quad \Leftrightarrow \quad (4/9)x^2 + z^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1$$

temos uma elipse no eixos xz e nos pontos $(0,\ y)$ obtemos,

$$z = \sqrt{4 - y^2} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + z^2 = 4$$

que é uma circunferência no plano yz de raio 2.

Nos pontos da diagonal $(x,\ x)$ obtemos

$$z = \sqrt{4 - (13/9)x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{13}{36}\,x^2 + \frac{1}{4}\,z^2 = 1,$$

que é uma elipse no plano $x = y$.

Finalmente no ponto $(0,\ 0)$

$$z = \sqrt{4 - (4/9)x^2 - y^2} \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{4} = 2$$

ou seja atingimos o valor máximo da superfície no ponto $(0,\ 0)$.

A partir dessas informações podemos formular conjunto imagem

$$\mathrm{Im}(g) = \Big\{ z \in \mathbb{R} :\ 0 \leq z \leq 2 \Big\}.$$

O gráfico é mostrada na Figura 5.9 $\Diamond$

Exercício 199. Determine o domínio "mais amplo" das seguintes funções com leis de correspondência

(a) $f(x,\ y) = \sqrt{x^2\,y}$ (b) $f(x,\ y) = \ln\Big[(x-1)(y-1)\Big]$

Solução. (a) O valor da imagem z é um número real quando $x^2y \geq 0$, isto é, pela lei de sinas no produto, $y \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Portanto obtemos

$$D_f = \Big\{ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0 \Big\}$$

O semi-plano superior esta mostrado na seguinte Figura 5.4

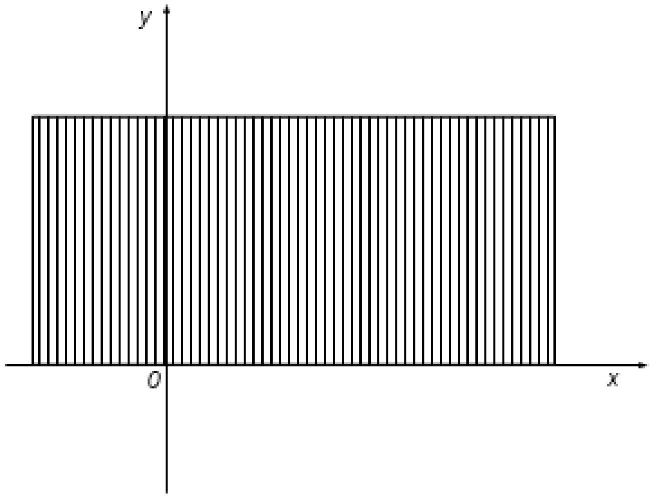


Figure 5.4: Domínio da função de duas variáveis

(b) O valor da imagem z é um número real se $(x-1)(y-1) > 0$. Assim sendo,

$$D_f = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ (x-1)(y-1) > 0\ \right\}$$

Pela lei de sinais no produto de fatores dados, obtemos a partir do conjunto

$$\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \colon x-1 > 0,\ y-1 > 0\right\} \cup \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \colon x-1 < 0,\ y-1 < 0\right\}$$

a descrição do domínio D_f esta dada na Figura 5.5 $\Diamond$

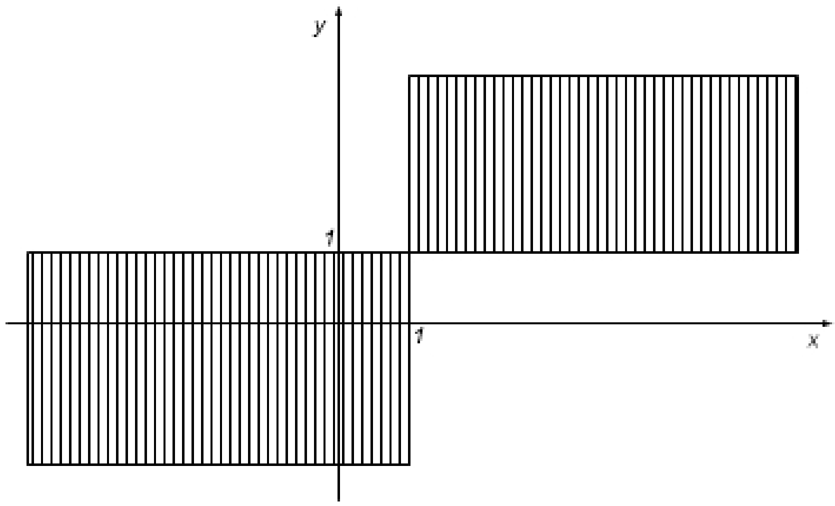


Figure 5.5

Exercício 200. Determine o domínio "mais amplo" das seguintes funções com leis de correspondência

(a) $f(x,\ y) = \sqrt{y^2 - 4x^2}$ (b) $f(x,\ y) = \dfrac{2}{xy-1}$

Solução. (a) A partir da definição da raiz temos $y^2 - 4x^2 \geq 0$ para que z seja um numero real. Portanto

$$D_f = \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 - 4x^2 \geq 0\ \Big\}.$$

Por outro lado a inequação,

$$y^2 - 4x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y - 2x)(y + 2x) \geq 0$$

que também equivalente à

$$y - 2x \geq 0 \quad \text{e} \quad y + 2x \geq 0 \tag{5.1}$$

ou

$$y - 2x \leq 0 \quad \text{e} \quad y + 2x \leq 0 \tag{5.2}$$

O gráfico cartesiano da relação (5.1) juntamente com a segunda relação (5.2) é nado no seguinte Figura 5.6

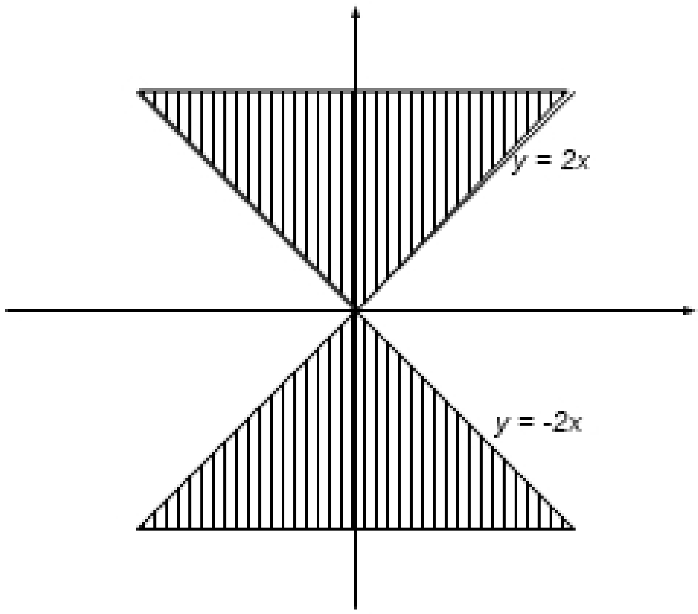


Figure 5.6

Assim o domínio D_f é o conjunto dos pontos $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma

$$D_f = \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ (y \geq 2x \quad \text{e} \quad y \geq -2x) \quad \text{ou} \quad (y \leq 2x \quad \text{e} \quad y \leq -2x)\Big\}$$

(b) A partir do denominador $xy - 1 \neq 0$ temos que $f(x,\ y)$ é valor real. Assim, podemos escrever o domínio,

$$D_f = \Big\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy \neq 1\ \Big\}$$

é um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$, excepto os pares que formam a hipérbole equilátera cuja equação cartesiana é $xy = 1$. $\Diamond$

Exercício 201. Calcular a regra de correspondência $f(x)$ sempre que

$$f(y/x) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}, \quad x,\ y > 0.$$

Solução. Arranjando o quociente sob o radical e fazendo $v = y/x$ teremos,

$$f(y/x) = \sqrt{(y/x)^2+1} \quad \text{logo} \quad f(v) = \sqrt{1/v^2+1} = \frac{\sqrt{1+v^2}}{|v|}$$

Portanto temos a fórmula de correspondência

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}, \quad x \neq 0$$

e isso conclui o exercício. ♢

Exercício 202. Encontre a fórmula para $f(x,\ y)$ sempre que

$$f(x+y,\ x-y) = xy + y^2.$$

Solução. Resolvendo os seguintes sistemas,

$$w = x+y \quad \text{e} \quad \theta = x-y$$

teremos,

$$x = \frac{1}{2}(w+\theta) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{2}(w-\theta)$$

Nas variáveis w e θ teremos,

$$f(w,\ \theta) = \frac{1}{4}(w+\theta)(w-\theta) + \frac{1}{4}(w-\theta)^2 = \frac{1}{2}(w^2 - w\theta)$$

Voltando as variáveis originais

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2}\Big(x^2 - xy\Big) \quad \text{para todo} \quad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$$

e assim concluí o exercício. ♢

Exercício 203. Considere a seguinte relação

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

Calcular as funções f e z sempre que $z = x$ quando $y = 1$.

Solução. Aplicando a hipótese dada, temos

$$x = 1 + f(\sqrt{x}-1) \quad \text{então} \quad f(\sqrt{x}-1) = x - 1$$

A seguir fazemos uma mudança de variável $w = \sqrt{x} - 1$ reescrevemos a equação anterior em termos de w,

$$f(w) = (w+1)^2 - 1 = w^2 + 2w \quad \text{então} \quad f(x) = x^2 + 2x$$

Portanto, a segunda função procurada é dada por,

$$z = x^2 + 2x + \sqrt{y}, \quad y \geq 0$$

e isso concluí o exercício. $\Diamond$

Exercício 204. Considere $z = xf(y/x)$. Calcular z e f, sempre que

$$z = \sqrt{1+y^2} \quad \text{para} \quad x = 1.$$

Solução. Aplicando a hipótese fornecida temos,

$$\sqrt{1+y^2} = f(y),$$

assim obtemos

$$f(y/x) = \sqrt{1+(y/x)^2} = \frac{1}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}$$

Consequentemente, substituindo a relação anterior na expressão inicial, obtemos a segunda função,

$$z = xf(y/x) = \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}, \quad x \neq 0$$

obtendo assim o requerido. $\Diamond$

Exercícios Propostos

1. Determinar o domínio e o conjunto imagem das seguintes funções,

   (a) $z = 5 - x - y$

   (b) $z = \sqrt{x^2+y^2-16}$

   (c) $z = 4 + x^2 + y^2$

   (d) $z = \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2-y^2}}$

5.0.2 Esboços de Gráficos e Curvas de Nível

Da mesma forma que no estudo de funções reais de uma variável, a noção de gráfico desempenha um papel importante no estudo das funções de várias variáveis.

Definição 5.0.2 (Gráfico de uma Função)**.** Considere a função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com domínio D_f. O gráfico da função f esta definido como um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ denotado por

$$\text{Graf}(f) = \left\{(\mathbf{x},\ f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \ :\ \mathbf{x} \in D_f\right\} \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Se f é uma função de duas variáveis, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ para os quais $(x,\ y)$ é um ponto no domínio de f e $z = f(x,\ y)$,

$$\mathrm{Graf}(f) = \Big\{(\mathbf{x},\ f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{2+1}\ :\ \mathbf{x} \in D_f\Big\} \subsetneq \mathbb{R}^3.$$

Assim, o gráfico de uma função f de duas variáveis é uma *superfície* que é o conjunto de todos os pontos no espaço tridimensional cujas coordenadas cartesianas são dadas pelos triplas ordenadas de números reais $(x,\ y,\ z)$. Como o domínio de f é um conjunto de pontos no plano xy, e porque para cada par ordenado $(x,\ y)$ no domínio de f corresponde um valor único de z, nenhuma reta perpendicular ao plano xy pode interceptar o gráfico de f em mais de um ponto.

Usaremos principalmente o caso onde a função tem duas variáveis independentes. O gráfico para essas funções, em geral, representa uma superfície no espaço tridimensional.

Observação 5.0.1. Para o caso $n = 1$ o gráfico da função é uma curva, porém para $n = 2$ é uma superfície.

Exercício 205. Esboçar o gráfico da equação

$$x + 3y + 3z = 3.$$

Solução. A equação $x + 3y + 3z = 3$ é a equação de um plano inclinado que corta os eixos coordenados em

$$x = 3, \qquad y = 1 \qquad \text{e} \qquad z = 1.$$

Resolvendo essa equação para z em função de $(x,\ y)$, obtemos a função

$$z = f(x,\ y) = \frac{1}{3}\Big(3 - x - 3y\Big)$$

cujo domínio é todo o plano xy e cuja imagem é todo o eixo z.

Nesta situação de forma analítica temos a expressão do gráfico,

$$\begin{aligned}\mathrm{Graf}(f) &= \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\ :\ z = \frac{3 - x - 3y}{3}, \quad \mathbf{x} \in D_f = \mathbb{R}^2\Big\} \\ &= \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\ :\ x + 3y + 3z + 3 = 3\Big\}\end{aligned}$$

Assim, o gráfico de f é o plano acima representado. Resumidamente, dizemos que o gráfico da função é descrito pela equação $x + 3y + 3z = 3$.

A figura 5.7 representa a parte do plano que está no primeiro octante.

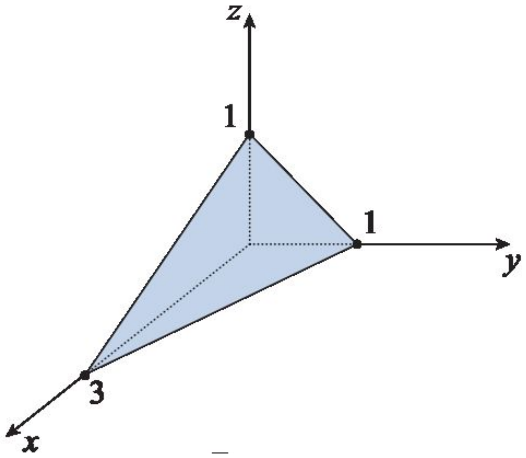


Figure 5.7: Gráfico da função $z = f(\mathbf{x})$ no primeiro octante

Exercício 206. Faça um esboço do gráfico da função,

$$z = f(x,\ y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Solução. A função f que é o conjunto de todos os pares ordenados da forma $(\mathbf{x},\ z)$ tal que

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Assim, o gráfico de f é o hemisfério sobre e acima do plano xy com um raio de 3 e seu centro na origem. Um esboço do gráfico deste hemisfério superior da esfera centrada na origem, $x^2+y^2+z^2 = 9$. Veja o gráfico na Figura 5.8 $\lozenge$

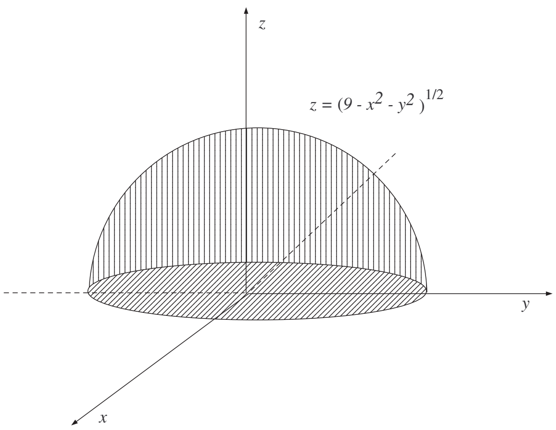


Figure 5.8: Hemisfério Superior

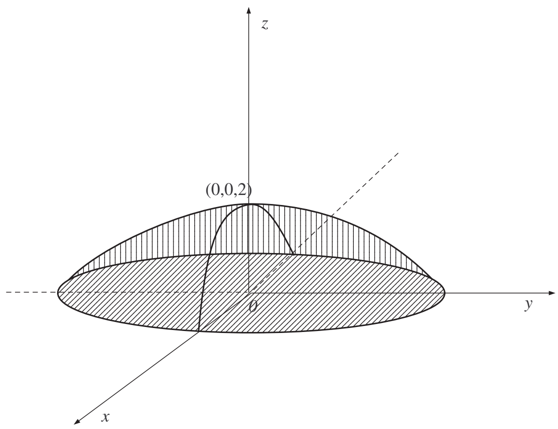


Figure 5.9: Semi-elipsoide superior

Exercício 207. Faça um esboço do gráfico da função f tendo valores dados pela correspondência,

$$f(x,\ y) = x^2 + y^2.$$

Solução. O gráfico de f é a superfície com a equação $z = x^2 + y^2$. O traço da superfície no plano xy é encontrado usando a equação $z = 0$ simultaneamente com a equação da superfície. Obtemos

$x^2 + y^2 = 0$, que é a origem.

Os traços nos planos xz e yz são encontrados usando as equações $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente, com a equação $z = x^2 + y^2$. Obtemos as parábolas $z = x^2$ e $z = y^2$. A seção transversal da superfície em um plano $z = k$, paralelo ao plano xy, é um círculo com centro no eixo z e raio $\sqrt{k}$. Com esta informação temos o esboço requerido que pode ser mostrado na Figura 5.10. $\Diamond$

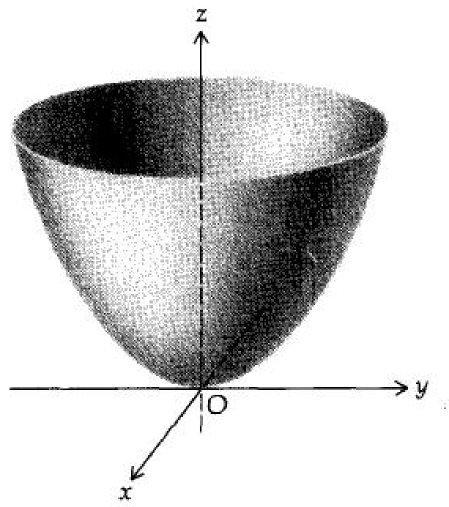


Figure 5.10: Esboço da função $f(x,\ y) = x^2 + y^2$

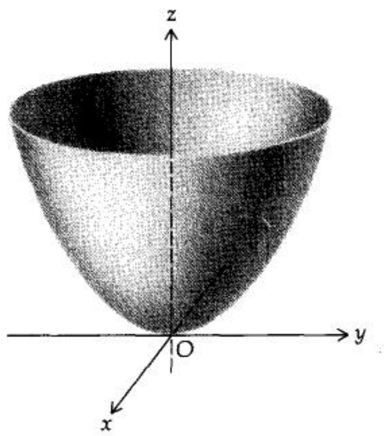
5.1 Conjuntos de Nível

Um forma conveniente de visualizar o gráfico de uma função de várias variáveis é por intermédio da ideia de conjunto de nível. Podemos ilustrar considerando a função $z = f(x,\ y)$ onde $f(x,\ y) = x^2 + y^2$. Então seu conjunto de nível se encontra ou é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, onde variável z toma o valor contante k, isto é, $x^2 + y^2 = k$. Isto representa uma circunferência de raio $k > 0$ em $\mathbb{R}^2$, o qual é chamado de *curva de nível* da função f correspondente ao valor $z = k$.

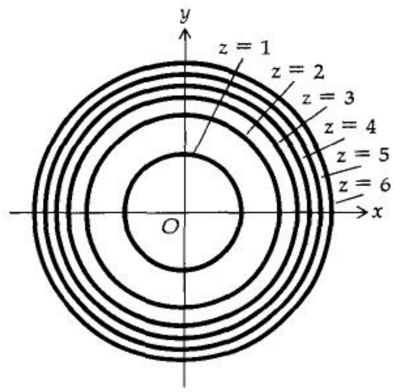
Explanando melhor este método importante de representa uma função de duas variáveis geometricamente. Trata-se de um método semelhante ao de representar uma paisagem tridimensional por um mapa topográfico bidimensional.

Suponha que a superfície $z = f(x,\ y)$ seja interceptada pelo plano $z = k$, e a curva de interseção seja projetada no plano xy. Esta curva projetada tem $f(x,\ y) = k$ como uma equação, e a curva é chamada de *curva de nível* (ou curva de contorno) da função f em k. Cada ponto na curva de nível corresponde ao único ponto na superfície que está k unidades acima dele se k for positivo, ou k unidades abaixo dele se k for negativo.

Considerando diferentes valores para a constante k, obtemos um conjunto de curvas de nível. Este conjunto de curvas é chamado de mapa de contorno. O conjunto de todos os valores possíveis de k é o intervalo da função f, e cada curva de nível, $f(x,\ y) = k$, no mapa de contorno consiste nos pontos $(x,\ y)$ no domínio de f com igual valores da função de k. Por exemplo, para a função $f(x,\ y) = x^2 + y^2$, as curvas de nível são círculos com o centro na origem. As curvas de nível particulares para $z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ e 6 são mostradas na Figura 5.11b.



(a) Esboço do gráfico



(b) Varias Curvas de Nível

Figure 5.11: Dois gráficos pela Curvas de Nível

Um mapa de contorno mostra a variação de z com x e y. As curvas de nível geralmente são mostradas para valores de z em intervalos constantes, e os valores de z estão mudando mais rapidamente quando as curvas de nível estão próximas umas das outras do que quando estão distantes; isto é, quando as curvas de nível estão próximas, a superfície é íngreme, e quando as curvas de nível estão distantes, a elevação da superfície está mudando lentamente.

Em um mapa topográfico bidimensional de uma paisagem, uma noção geral de sua declividade é obtida considerando-se o espaçamento de suas curvas de nível. Também em um mapa topográfico, se o caminho de uma curva de nível for seguido, a elevação permanece constante.

Para ilustrar o uso de curvas de nível, suponha que a temperatura em qualquer ponto de uma placa de metal plana seja dada pela função f; isto é, se t graus é a temperatura, então no ponto $(x,\ y)$, $t = f(x,\ y)$. Então as curvas com equações da forma $f(x,\ y) = k$, onde k é uma constante, são curvas nas quais a temperatura é constante. Estas são as curvas de nível de f e são chamadas de isotérmicas. Além disso, se V volts fornece a quantidade de potencial elétrico em qualquer ponto $(x,\ y)$ do plano xy, e $V = f(x,\ y)$, então as curvas de nível de f são chamadas de *curvas equipotenciais* porque o potencial elétrico em cada ponto de tal curva é o mesmo.

O comportamento ou estrutura de uma função esta parcialmente determinada pelo aspecto de seus *conjuntos de nível*, portanto, entender esses conjuntos ajuda a entender a função em questão.

Definição 5.1.1. Considere $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e a constante $k \in \mathbb{R}$. Então o conjunto de nível esta definido pelo conjunto

$$\left\{\mathbf{x} = (x^1,\ x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \ :\ f(\mathbf{x}) = k\right\}$$

Observação 5.1.1. Se $n = 2$ nos referimos a uma *curva de nível* (de valor k). Chamaremos de curva de nível de uma função f de duas variáveis a projeção sobre plano xy de cada curva obtida pela interseção de $z = k$, para algum $c \in \mathbb{R}$ com a superfície de f.

As curvas de nível de uma função f são constituídas pelos pontos do domínio f que satisfazem a equação $f(x,\ y) = k$ com $k \in \mathbb{R}$, de outra forma, é o conjunto dos pontos do domínio para os quais o valor se f é constante e é igual a k.

Se $n = 3$ nos referimos a uma *superfície de nível.*

Sempre o conjunto de nível se encontra no domínio da função.

Exercício 208. Considere a função real

$$z = f(x,\ y) = (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Identifique suas curvas de nível.

Solução. A função f possui as seguintes curvas de nível, mostrados na figura 5.12,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = k \quad \text{onde} \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Para cada valor de k obtemos circunferências concêntricas centradas no ponto $(1,\ 1)$

A superfície correspondente para f,

$$z = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

é um paraboloide elíptico mostrado na Figura 5.13 $\Diamond$

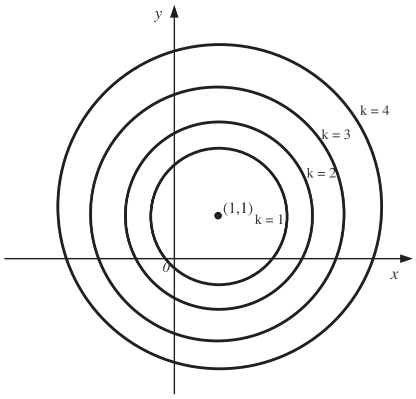


Figure 5.12: Curvas de Nível

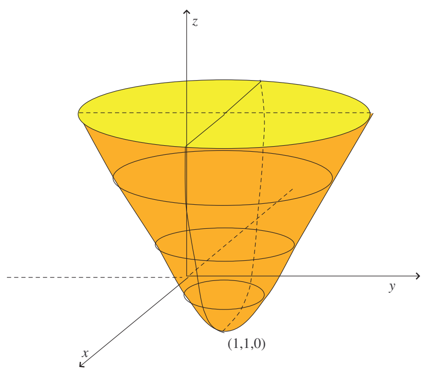


Figure 5.13: Superfície

Exercício 209. Considere a função real

$$z = f(x,\ y) = (x-1)^2 - (y-1)^2.$$

Identifique suas curvas de nível.

Solução. As curvas de nível da função f, são da forma

$$(x-1)^2 - (y-1)^2 = k \quad \text{onde} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

A cada valor escolhido para k obtemos hiperbólas mostradas no seguinte gráfico. O desenho da Figura 5.14 mostra o gráfico da superfície

$$z = (x-1)^2 - (y-1)^2 \quad \text{para todo} \quad (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$$

que é um paraboloide hiperbólico ou uma cela centrada no ponto $(1,\ 1,\ 0)$. $\Diamond$

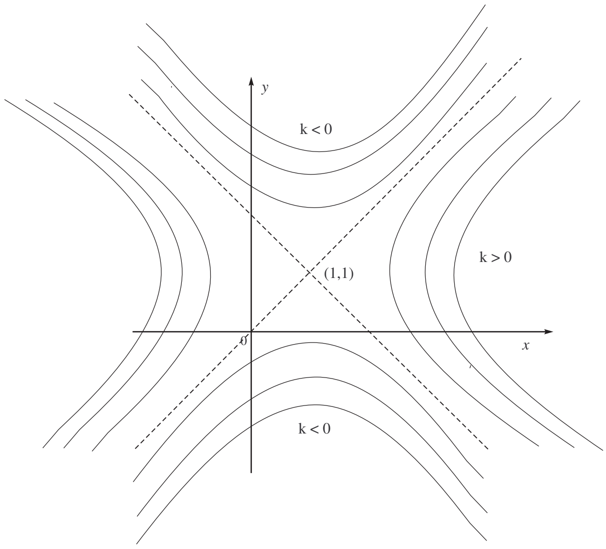


Figure 5.14: Curvas de Nível

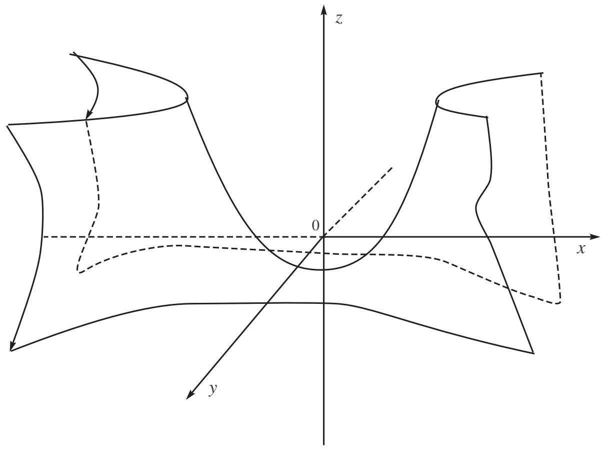


Figure 5.15: Superfície sela

Exercício 210. Seja a função $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,\ y) = x^2 + y^2 + 1,$$

e os planos $z = 3$, $z = 4$ e $z = 5$.

Solução. As projeções sobre o plano xy das interseções do gráfico de f com os planos $z = 3$, $z = 4$ e $z = 5$ dados são as curvas de nível k_1, k_2 e k_3.

As curvas de nível k_1, k_2 e k_3 são circunferências, respectivamente, das equações

$$x^2 + y^2 + 1 = 3, \quad x^2 + y^2 + 1 = 4, \quad x^2 + y^2 + 1 = 5$$

e assim concluímos o exercício. $\Diamond$

Exercício 211. Seja f a função real para a qual

$$f(x,\ y) = 8 - x^2 - 2y.$$

Desenhe um esboço do gráfico de f e um mapa de contorno de f mostrando as curvas de nível de f em $10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4,\ -6$ e -8.

Solução. Um esboço do gráfico de f é mostrado na Figura 5.16. Isto é, a superfície dada por $z = 8 - x^2 - 2y$.

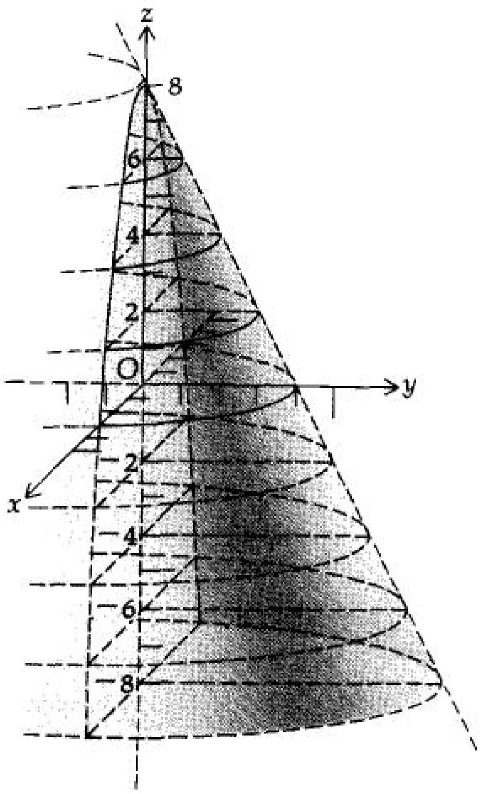


Figure 5.16

O traço no plano xy é obtido estabelecendo $z = 0$, que dá a parábola

$$x^2 = -2(y - 4).$$

Definindo $y = 0$ e $x = 0$, obtemos os traços nos planos xz e yz, que são, respectivamente, a parábola

$$x^2 = -(z - 8) \quad \text{e a reta} \quad 2y + z = 8.$$

A seção transversal da superfície feita pelo plano $z = k$ é uma parábola que tem seu vértice na reta

$$2y + z = 8$$

no plano yz e se abre para a esquerda. As seções transversais para $z = 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ -2,\ -4,\ -6$ e -8 são mostradas na figura.

As curvas de nível de f são as parábolas

$$x^2 = -2\left(y - 4 + \frac{1}{2}\,k\right).$$

O mapa de contorno de f com esboços das curvas de nível necessárias é mostrado na seguinte Figura 5.17. $\Diamond$

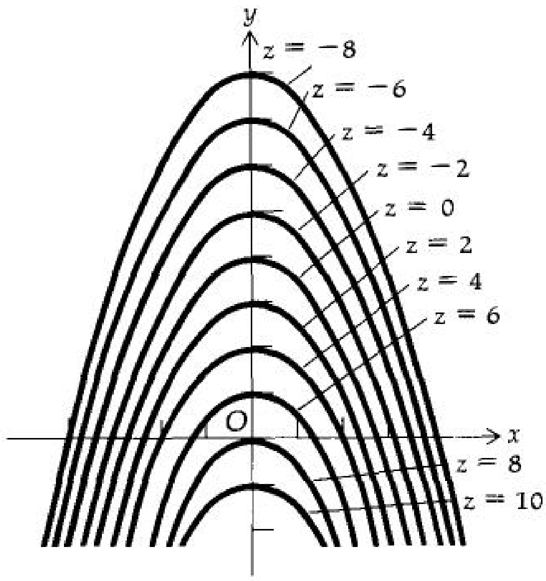


Figure 5.17: Curvas de nível

Análoga às curvas de nível para uma função de duas variáveis é uma situação semelhante para funções de três variáveis. Se f é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$, então se k é um número no intervalo de f, o gráfico da equação $f(x,\ y,\ z) = k$ é uma superfície. Essa superfície é chamada de *superfície de nível* de f em k.

Cada superfície no espaço tridimensional pode ser considerada como uma superfície nivelada de alguma função de três variáveis. Por exemplo, se a função h é definida pela equação $h(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 - z$, então a superfície mostrada na Figura 5.10 é a superfície de nível de h em $\{0\}$. Da mesma forma, a superfície com a equação $z - x^2 - y^2 + 5 = 0$ é a superfície de nível de h em 5.

Definição 5.1.2 (Método de Seções)**.** Por uma seção do gráfico de f queremos dizer a interseção do gráfico e um plano (vertical).

Aplicaremos a definição do Método de Seções no seguintes exercícios resolvidos

Exercício 212. Descreva o gráfico da função quadrática dada por

$$f(x,\ y) = x^2 + y^2.$$

Solução. O gráfico é o paraboloide de revolução

$$z = x^2 + y^2,$$

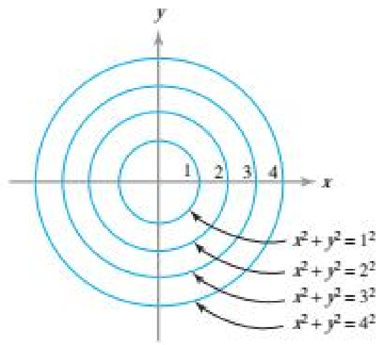
orientado para cima a partir da origem, em torno do eixo z.

A curva de nível de valor k está vazia para $k < 0$; para $k > 0$ a curva de nível de valor k é o conjunto

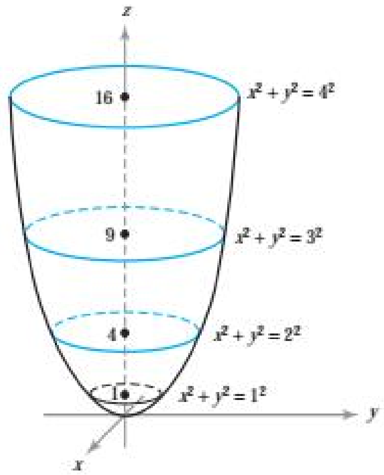
$$\left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = k\right\},$$

um círculo de raio $\sqrt{k}$ centrado na origem.

Assim, elevado à altura k acima do plano xy, o conjunto do nível definido é um circunferência de raio $\sqrt{k}$, indicando uma forma parabólica (ver Figura 5.18a e Figura 5.18b)



(a) Algumas curvas de Nível da função f



(b) Curvas de nível no gráfico da função f

Aplicando seções, se $\mathcal{P}_1$ é o plano xz em $\mathbb{R}^3$, definido por $y = 0$, então a seção de f no Exercício 212 é o conjunto

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathrm{Graf}[f] = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ y = 0, \quad z = x^2\right\},$$

que é uma parábola no plano xz. Da mesma forma, se $\mathcal{P}_2$ denota o plano yz, definido por $x = 0$, então a seção

$$\mathcal{P}_2 \cap \mathrm{Graf}[f] = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x = 0, \quad z = y^2\right\}$$

é uma parábola no plano yz (ver Figura 5.19). Geralmente é útil calcular pelo menos uma seção para complementar as informações fornecidas pelos conjuntos de níveis $\Diamond$

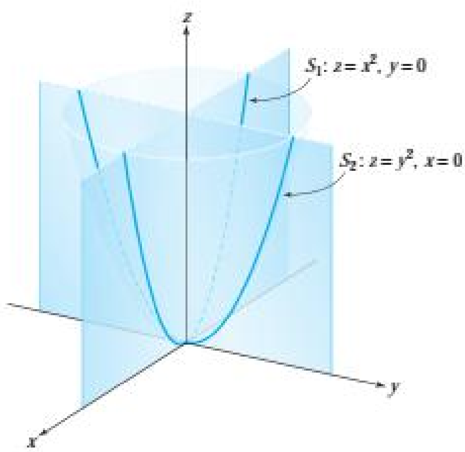


Figure 5.19

Exercício 213. O gráfico da função quadrática

$$f(x,\ y) = x^2 - y^2$$

é chamado de paraboloide hiperbólico, ou sela, centrado na origem. Esboce o gráfico.

Solução. Para visualizar esta superfície, primeiro desenhamos as curvas de nível. Para determinar as curvas de nível, resolvemos a equação $x^2 - y^2 = k$. Considere os valores $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 4$. Para $k = 0$, temos $y^2 = x^2$, ou $y = \pm x$, de modo que esse conjunto de níveis consiste em duas retas que passam pela origem.

Para $k = 1$, a curva de nível é $x^2 - y^2 = 1$, ou $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, que é uma hipérbole que passa verticalmente pelo eixo x nos pontos $(\pm 1,\ 0)$ (consulte a Figura 5.20). De forma similar, para $k = 4$, a curva de nível é definida por $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$, a hipérbole passando verticalmente pelo eixo x em $(\pm 2,\ 0)$.

Para $k = -1$, obtemos a curva $x^2 - y^2 = -1$, isto é, $x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$, a hipérbole passando horizontalmente pelo eixo y em $(0,\ \pm 1)$. E para $k = -4$, a hipérbole por $(0,\ \pm 2)$ é obtida.

Essas curvas de nível são mostradas na Figura 5.20.

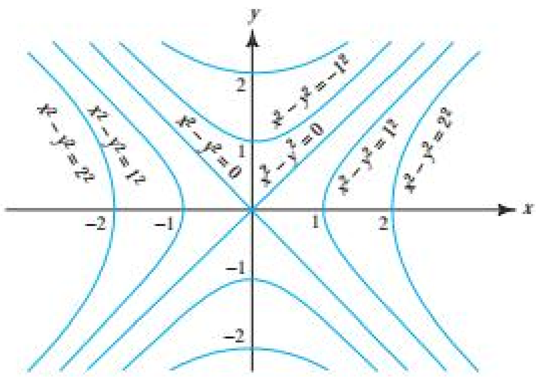


Figure 5.20: Curvas de nível da função f

Como não é fácil visualizar o gráfico de f apenas a partir desses dados, vamos calcular duas seções, como no exercício anterior. Para a seção no plano xz, temos

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathrm{Graf}[f] = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ y = 0, \quad z = x^2\right\}$$

que é uma parábola com abertura para cima; e para o plano yz,

$$\mathcal{P}_2 \cap \mathrm{Graf}[f] = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x = 0, \quad z = -y^2\right\}$$

que é uma parábola com abertura para baixo. O gráfico agora pode ser visualizado levantando as curvas de nível para as alturas apropriadas e suavizando a superfície resultante. Sua localização é auxiliada pelo cálculo das seções parabólicas. Este procedimento gera a “sela hiperbólica” indicada na Figura 5.21. ◊

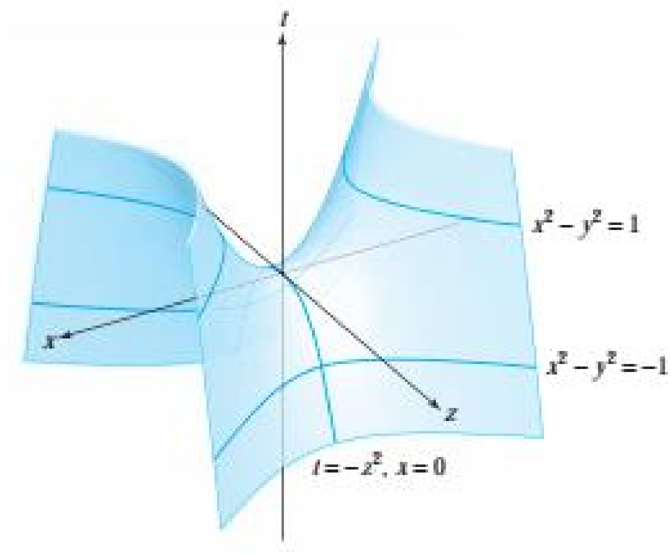


Figure 5.21: Algumas curvas de nível sobre o gráfico da função f

Exercício 214. Descreva os conjuntos de níveis da função

$$f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,\ y,\ z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Solução. Este é o análogo tridimensional do Exercício 212. Neste contexto, os conjuntos de níveis são superfícies no domínio tridimensional $\mathbb{R}^3$. O gráfico, em $\mathbb{R}^4$, não pode ser visualizado diretamente, mas as seções podem ser calculadas.

O conjunto de nível definido com valor k é o conjunto

$$S_k = \Big\{(x,\ y,\ z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = k\Big\},$$

que é a esfera centrada na origem com raio $\sqrt{k}$ para $k > 0$, é um único ponto na origem para $k = 0$ e está vazia para $k < 0$. O nível define para $k = 0,\ 1,\ 4$ e 9 estão indicados na Figura 5.22. $\Diamond$

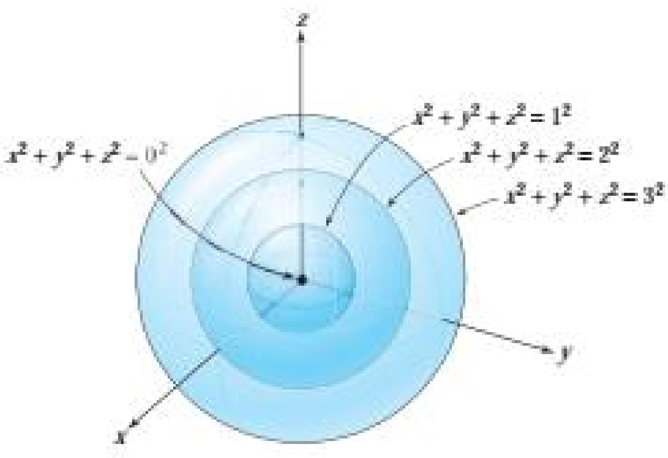


Figure 5.22: Algumas Superfícies de nível para f

Exercício 215. Descreva o gráfico da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

que é o análogo tridimensional do Exercício 213, e também é chamado de "sela".

Solução. Formalmente, o gráfico de f é um subconjunto do espaço quadridimensional. Se denotarmos pontos neste espaço por $(x,\ y,\ z,\ t)$, então o gráfico é dado por

$$\Big\{(x,\ y,\ z,\ t)\ :\ t = x^2 + y^2 - z^2\Big\}.$$

As superfícies de nível de f são definidas por

$$S_k = \Big\{(x,\ y,\ z)\ :\ x^2 + y^2 - z^2 = k\Big\}.$$

Para $k = 0$, este é o cone $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ centrado no eixo z. Para k negativo, digamos, $k = -a^2$, obtemos $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$, que é um hiperboloide de duas folhas ao redor do eixo z, passando pelo eixo z nos pontos $(0,\ 0,\ \pm a)$.

Para k positivo, digamos, $k = b^2$, a superfície de nível é o hiperboloide de folha única de revolução em torno do eixo z definido por $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$, que intercepta o plano xy na circunferência de raio $|b|$. Essas superfícies de nível são esboçadas na Figura 5.23.

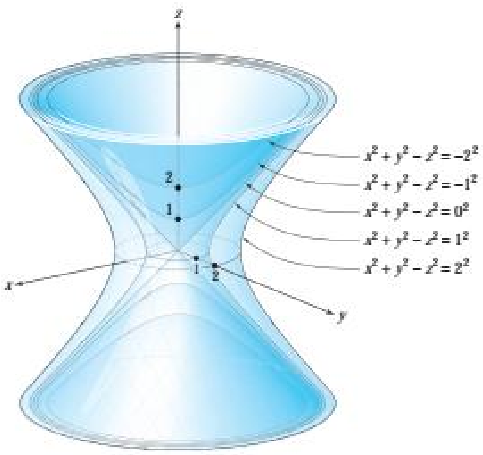


Figure 5.23: Algumas superfícies de nível da função f

Outra visão do gráfico pode ser obtida a partir de uma seção. Por exemplo, o subespaço

$$S_{y=0} = \Big\{(x,\ y,\ z,\ t)\ :\ y = 0\Big\}$$

intersecta o gráfico na seção

$$S_{y=0} \cap \mathrm{Graf}[f] = \Big\{(x,\ y,\ z,\ t)\ :\ y = 0,\ t = x^2 - z^2\Big\},$$

ou seja, o conjunto de pontos da forma

$$\left(x,\ 0,\ z,\ x^2 - z^2\right),$$

que pode ser considerada uma superfície no espaço xzt (ver Figura 5.24). $\Diamond$

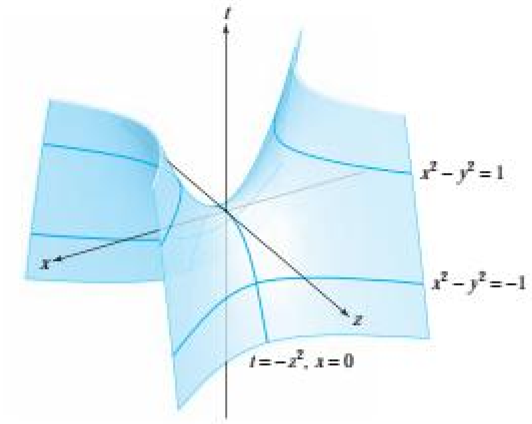


Figure 5.24: A seção $y = 0$ do gráfico da função f

Vimos como os métodos de seções e conjuntos de níveis podem ser usados para entender o comportamento de uma função e seu gráfico; essas técnicas podem ser bastante úteis para estudantes que desejam uma visualização abrangente de dados complicados. Existem muitos programas de computador disponíveis para fazer isso, como o MATLAB e mostramos os resultados de desse programa posteriormente.

Definição 5.1.3 (Composição de Funções de duas Variáveis)**.** Se f é uma função de uma única variável e g é uma função de duas variáveis, então a função composta $f \circ g$ é a função de duas variáveis definidas por

$$(f \circ g)(x,\ y) = f(g(x,\ y))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os pontos $(x,\ y)$ no domínio de g tal que $g(x,\ y)$ está no domínio de f.

Exercício 216. Dado $f(t) = \ln t$ e $g(x,\ y) = x^2 + y$, encontre $h(x,\ y)$ se $h = f \circ g$, e encontre o domínio de h.

Solução. Pela definição de composição de funções,

$$\begin{aligned} h(x,\ y) &= (f \circ g)(x,\ y) = f(g(x,\ y)) \\ &= f(x^2 + y) \\ &= \ln\left(x^2 + y\right) \end{aligned}$$

O domínio de g é o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$, e o domínio de f é $]0,\ +\infty[$. Portanto, o domínio de h é o conjunto de todos os pontos $(x,\ y)$ para os quais $x^2 + y > 0$. $\Diamond$

A Definição 5.1.3 pode ser estendida para uma função composta de n variáveis como segue.

Definição 5.1.4 (Composição de Funções)**.** Seja a função $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e uma segunda função $g: D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então a função composta $g \circ f$ esta dada por,

$$g \circ f(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = g\Big(f\left(x^1,\ x^2,\ x^3, \ldots, x^n\right)\Big)$$

e seu domínio é o conjunto,

$$D_{g \circ f} = \Big\{ \mathbf{x} \in D_f \ :\ f(\mathbf{x}) \in D_g \Big\}$$

Veja a Figura 5.25

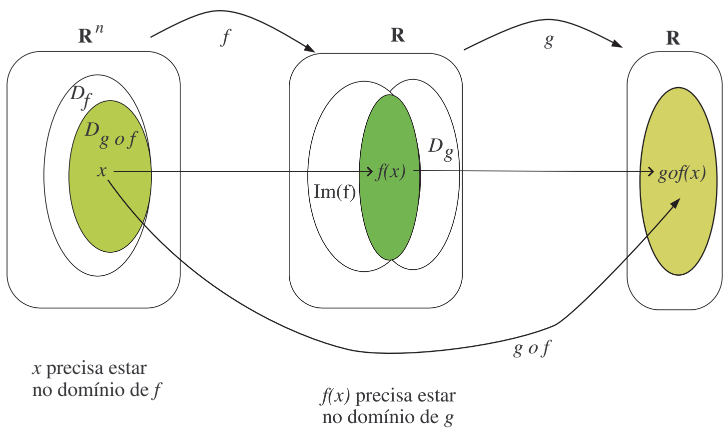


Figure 5.25: Composição de funções

Uma **função polinomial** de duas variáveis x e y é uma função f tal que $f(x,\ y)$ é a soma dos termos da forma $dx^n y^m$, onde d é um número real e n e m são inteiros não negativos. O grau da função polinomial é determinado pela maior soma dos expoentes de x e y que aparecem em qualquer termo. Assim, a função f definida por

$$f(x,\ y) = 5x^3y^2 - 6xy^3 + 2x^2y - 7x^2 + y$$

é uma função polinomial de grau 5.

Uma **função racional** de duas variáveis é uma função h tal que $h(x,\ y) = f(x,\ y)/g(x,\ y)$, onde f e g são duas funções polinomiais. Por exemplo, a função f definida por

$$f(x,\ y) = \frac{x^3y^3}{x^3 + y^3}$$

é uma função racional.

Exercício 217. Dadas as funções g e f, definidas pelas fórmulas,

$$g(x) = \arccos(x) \quad \text{e} \quad f(x,\ y,\ z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}.$$

Encontrar a função $g \circ f$ e seu correspondente domínio.

Solução. Primeiro calculamos os domínios das funções f e g denotados por D_f e D_g respectivamente,

$$D_f = \Big\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\Big\} \quad \text{e} \quad D_g = \Big\{x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq x \leq 1\Big\}$$

Assim sendo podemos construir a função composta,

$$g \circ f(x,\ y,\ z) = g\left(f(x,\ y,\ z)\right) = \arccos\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}\right).$$

A seguir calculamos o domínio da função composta,

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{(x,\ y,\ z) \in D_f \subset \mathbb{R}^3 :\ f(x,\ y,\ z) \in D_g\} \\ &= \{(x,\ y,\ z) \in D_f \subset \mathbb{R}^3 :\ -1 \leq f(x,y,z) \leq 1\} \\ &= \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9} \leq 1\} \\ &= \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 9 \leq 1\} \\ &= \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 10\} \end{aligned}$$

Portanto o domínio procurado é,

$$D_{g\circ f} = \Big\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 :\ 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 10\ \Big\}.$$

Veja se gráfico na Figura 5.26.

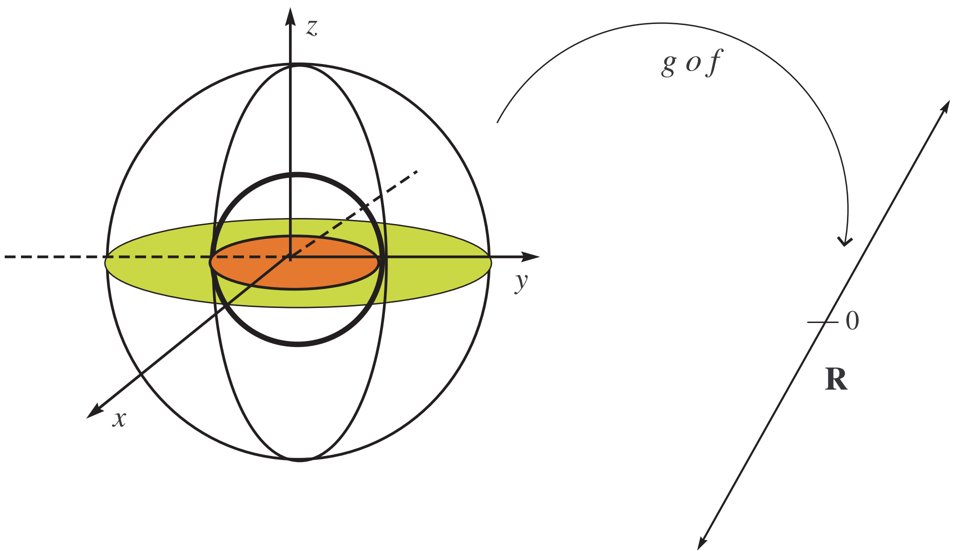


Figure 5.26: Domínio Esférico

Exercício 218. Dadas duas funções definidas por

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x \quad \text{e} \quad g(x,\ y,\ z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4},$$

encontre a função $f \circ g$ e seu domínio.

Solução. Utilizando a definição de composição de funções

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x,\ y,\ z) &= f\left(g(x,\ y,\ z)\right)\\ &= f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}\right)\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}\right)\end{aligned}$$

O domínio de g é o conjunto de todos os pontos $(x,\ y,\ z)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $x^2+y^2+z^2-4\geq 0$, e o domínio de f é $[-1,\ 1]$. Assim, o domínio de $f\circ g$ é o conjunto de todos os pontos $(x,\ y,\ z)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $0\leq x^2+y^2+z^2-4\leq 1$ ou, equivalentemente, $4\leq x^2+y^2+z^2\leq 5$. $\Diamond$

Exercícios Propostos

Em cada um dos seguintes exercícios determinar o domínio e esboçar sua gráfica

1. $f(x,\ y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ Resp: $D_f=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\leq 1\}$
2. $f(x,\ y)=3-\sqrt{-(y-x)^2}$ Resp: $D_f=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\colon x=y\}$
3. $f(x,\ y)=x+\operatorname{arcsen}(y)$ Resp: $D_f=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\colon -1\leq y\leq 1\}$
4. $f(x,\ y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$ Resp: $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 2,\ -2\leq y\leq 2\}$
5. $f(x,\ y)=\operatorname{arcsen}(y/x)$ Resp: $D_f=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\colon -1\leq y/x\leq 1\}$
6. $f(x,\ y)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$

   Resp: $D_f=\Big\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\colon x\geq 2,\ -2\leq y\leq 2\Big\}\cup\Big\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\colon x\leq -2,\ -2\leq y\leq 2\Big\}$
7. $f(x,\ y)=\sqrt{y\,\mathrm{sen}(x)}$

   $$\begin{aligned}\text{Resp: } D_f=&\Big\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 2\pi n\leq x\leq(1+2n)\pi,\quad y\geq 0\Big\}\\ &\cup\Big\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ :\ (1+2\pi)n\leq x\leq(2+2n)\pi,\quad y\leq 0,\quad n\in\mathbb{Z}\Big\}\end{aligned}$$
8. $f(x,\ y)=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$ Resp: $D_f=\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\geq 0,\ y>\sqrt{x}\}$
9. $f(x,\ y)=\ln(x^2-y)$ Resp: $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y>-x^2\}$
10. $f(x,\ y)=\arctan[(x-y)/(1+x^2y^2)]$ Resp: $D_f=\mathbb{R}^2$
11. $f(x,\ y)=\sqrt{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}$

    Resp: $D_f=\Big\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 2k\pi\leq x^2+y^2\leq(1+2k)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Big\}$

Appendix A

Noções Elementares de Cálculo

A.1 Preliminares

Antes de estudar as sequências e séries de funções, recordamos alguns dos fatos básicos concernentes às funções contínuas e diferenciáveis, aos quais fizemos referências. Não apresentaremos demonstrações, embora tais demonstrações possam facilmente se basear nas, propriedades mais profundas do sistema de números reais tratadas em disciplinas de análise. Para um estudo completo, o leitor poderá se reportar a qualquer texto de Cálculo Avançado (ver, Marsden [8]).

A.2 Propriedades das Funções Elementares

Definição 15: Continuidade Pontual

Dizemos que uma função f, definida num intervalo I do eixo dos x, é `contínua` num ponto x_0 de I se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, dependente em geral de ε e x_0, tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{para todos os pontos} \quad x \in I,$$

para os quais

$$\|x - x_0\| < \delta.$$

Se a função f é contínua em todo ponto de I, dizemos que f é contínua em I.

Este é o conceito clássico de continuidade, fundamental para qualquer curso de cálculo elementar. Entretanto, não é geralmente introduzido nesse nível a seguinte noção de continuidade uniforme.

O conceito de continuidade de uma função num ponto é essencialmente de natureza local, o mesmo não se pode afirmar sobre a continuidade uniforme. A noção de continuidade uniforme de uma função é de caráter global porque afirmamos continuidade uniforme de uma função sobre seu domínio e não num ponto de seu domínio.

Definição 16: Continuidade Uniforme num Intervalo

Uma função f diz-se `uniformemente contínua` num intervalo I se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, dependente, em geral, de ε mas não de x, e tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{quando} \quad x_1,\ x_2 \in I$$

e para os quais

$$|x_1 - x_2| < \delta.$$

É claro que uma função `uniformemente contínua` num intervalo é também `contínua` nesse intervalo. Porém, o seguinte exemplo mostra que a recíproca é falsa.

Exercício 219. Seja a função f real definida pela regra de correspondência,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad 0 < x \leq 1.$$

Mostre que a função f não é uniformemente contínua.

Solução. Seja x_0 um ponto qualquer do intervalo $]0,\ 1]$, isto é, fixamos $x_0 > 0$. Para decidir como escolher δ devemos examinar a expressão

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|}.$$

Se $|x - x_0| < \delta$, então teremos

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{\delta}{|xx_0|} = \frac{\delta}{xx_0}.$$

Se verificarmos $\delta < x_0/2$, então deveríamos ter, $x - x_0 > x_0/2$, portanto $x > x_0/2$, de maneira a ter que

$$\frac{\delta}{xx_0} < \frac{2\delta}{x_0^2}.$$

Agora para cada $\varepsilon > 0$, escolhemos

$$\delta = \min\left[\frac{x_0}{2},\ \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right]$$

Pelos argumentos anteriores mostramos que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Assim temos satisfeitas as condições da Definição 15, e $f(x) = 1/x$ é contínua em x_0, em decorrência no intervalo $0 < x \leq 1$. Porém, o valor dado de δ depende de ε e de x_o, e examinando a Figura A.1,

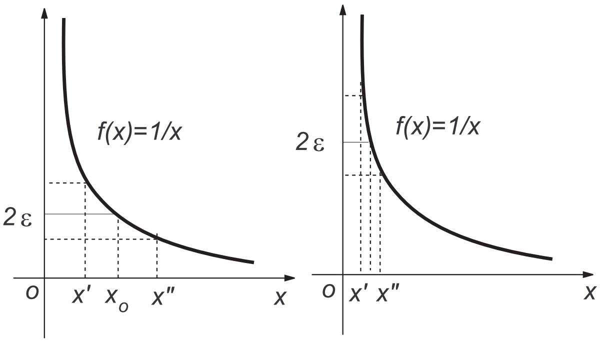


Figure A.1: Continuidade Uniforme

convencemo-nos de que este é, necessariamente o caso.

Porque, dado qualquer $\varepsilon > 0$ pode-se fazer com que os pontos x', x'' da figura fiquem tão próximos de x_0 quanto se deseje, simplesmente escolhendo-se x_0 suficientemente próximo de 0. Como se deve escolher δ não maior do que $|x_0 - x'|$, tal fato mostra que ele não pode depender apenas de ε. Portanto, f *não é uniformemente contínua* em $0 < x \leq 1$. ◊

A dificuldade neste exemplo provém, de que o intervalo $0 < x \leq 1$ em consideração não é um conjunto fechado. Isto é uma consequência do seguinte teorema geral.

Teorema A.1

Se f é uma função contínua num intervalo fechado $a \leq x \leq b$, então ela é uniformemente contínua neste intervalo.

Todos os conceitos expostos acima se estendem facilmente a funções de várias variáveis. Antes de iniciar, os enunciamos a seguir para fins de referência.

Definição 17: Continuidade de uma função escalar

Uma função de valor real f definida numa região Ω de $\mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de Ω se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, dependente, em geral, de ε e de $\mathbf{y}$, tal que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |f(x_1, \ldots, x_n) - f(y_1, \ldots, y_n)| < \varepsilon$$

quando $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ estão em Ω e

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} < \delta.$$

Dizemos que f é contínua em Ω se ela é contínua em todo ponto de Ω.

Definição 18: Continuidade Uniforme

Uma função f é uniformemente contínua em Ω se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, dependente, em geral, de ε mas não de $\mathbf{x}$, tal que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon \quad \text{quando} \quad \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \Omega$$

sempre que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta.$$

Se considerarmos funções definidas em regiões Ω limitadas e fechadas, teremos o seguinte teorema.

Observação 33. *Uma região Ω de $\mathbb{R}^n$ é fechada se ela contém todos os seus pontos limites. É limitada, se existe um número real M tal que, para todo ponto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de Ω, temos*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq M.$$

Teorema A.2

Se a função f é contínua numa região Ω limitada e fechada, então é uniformemente contínua em Ω.

Duas propriedades das funções contínuas, são dadas pelos dois seguintes teoremas.

Teorema A.3: Propriedade do Máximo e do Mínimo

Se f é contínua num intervalo fechado $a \leq x \leq b$, então ela assume aí um, valor máximo e um valor mínimo. De modo mais geral, se f é contínua numa egião Ω de $\mathbb{R}^n$ limitada e fechada, então existem números reais m, M e pontos $\mathbf{y} = (y_1, \ldots y_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ em Ω, tais que

$$m \leq f(\mathbf{x}) \leq M$$

para todo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ em Ω, e tais que $f(\mathbf{y}) = m$ e $f(\mathbf{z}) = M$.

Teorema A.4: Propriedade do Valor Intermediário

Se a função f é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$ e $f(a) \neq f(b)$, então para qualquer número real M entre $f(a)$ e $f(b)$ existe um, ponto x_o, $a \leq x_0 \leq b$, tal que $f(x_0) = M$. Enunciado análogo vale para funções de várias variáveis.

Embora estejamos familiarizados com os problemas de máximo e mínimo, pode passar despercebida a importância do Teorema A.4. Simplesmente, este teorema poderá, sem dúvida, ser utilizado para dar como certa a existência de raízes de equações; por exemplo, se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ e se f é contínua em $a \leq x \leq b$, então $f(x_0) = 0$ para algum x_0 deste intervalo. Mas a um nível mais profundo, o Teorema A.4 é uma consequência das propriedades básicas do próprio sistema de números reais e pode ser interpretado como a de relacionar a noção intuitiva que temos de continuidade, com a definição abstrata de continuidade dada na Definição 15.

Passando agora às definições e teoremas relativos à derivação e à integração, enunciamos, primeiramente, a

Definição 19: Derivada de uma função real

Seja a função f definida num intervalo aberto que contenha x_0. Se existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

chama-se ele derivada de f em x_0 e é representado por $f'(x_0)$ ou por $\frac{d}{dx}f(x_0)$. Se f tem derivada em cada ponto de um intervalo aberto $a<x<b$, então dizemos que f é diferenciável neste intervalo.

Observação 34. *Mais adiante necessitaremos estender este conceito, para incluir também os extremos de um intervalo.*

Constitui simples exercício mostrar que, se f *é diferenciável num intervalo* $a<x<b$, *então ela também é contínua neste intervalo.* Enunciemos, para referência, o teorema mais importante, em certo sentido.

Teorema A.5: Teorema do Valor Médio

Se f é contínua no intervalo fechado dado $a \le x \le b$ e diferenciável no intervalo aberto $a<x<b$, então existe um ponto x_o, $a<x_o<b$, tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0).$$

A interpretação geométrica deste resultado acha-se ilustrada na Figura A.2.

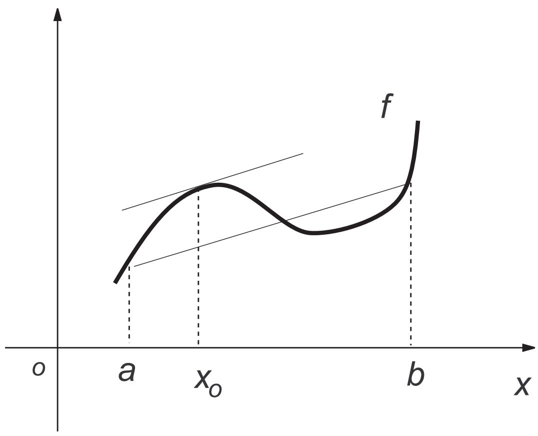


Figure A.2: Valor Médio

Significa que existe pelo menos um ponto no intervalo aberto $a<x<b$, onde a tangente à curva $y=f(x)$ é paralela à secante que liga os pontos $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$.

Passando agora à integração, supomos que o leitor tenha já algum treinamento sobre a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ de uma função contínua f. Uma definição detalhada seria demasiado longa para ser apresentada. Embora, dada uma função contínua f, é útil recordar a seguinte nomenclatura,

(a) $\int_a^b f(x)\,dx$ chama-se `integral definida` de f no intervalo $a \leq x \leq b$, a ao passo que

(b) se x_0 está no intervalo $a \leq x \leq b$, então a função

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx, \quad a \leq x \leq b,$$

denomina-se a `integral indefinida` de f em $a \leq x \leq b$.

A conexão básica e importante entre derivação e integração é fornecida pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema A.6).

Teorema A.6

Se a função f é contínua em $a \leq x \leq b$ e

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

é uma `integral indefinida` de f em $a \leq x \leq b$, então F é diferenciável e $F'(x) = f(x)$.

Resulta quase que imediatamente do Teorema do Valor Médio (Teorema A.5) que duas integrais indefinidas de f em $a \leq x \leq b$ diferem no máximo por uma constante aditiva. Assim, chegamos à fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

onde F é qualquer "antiderivada" da função f em $a \leq x \leq b$.

Enunciamos, por fim, duas propriedades das integrais.

Teorema A.7

Se a função f é contínua em $a \leq x \leq b$, então

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Teorema A.8: Teorema do Valor Médio para Integrais

Se a função f é contínua em $a \leq x \leq b$, então existe um x_o no intervalo aberto $a < x < b$, tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x_0).$$

Geometricamente, $f(x_0)$ é a altura média de f neste intervalo.

Existem três conceitos diferentes de convergência estudados em conexão com sequência e séries de funções. Dentre dos quais a convergência pontual e a uniforme trataremos a seguir. Finalmente temos um terceiro chamado de convergência em media.

Appendix B

Funções Definidas por Integrais

A definição de funções por integrais é análoga, sob muitos aspectos, a suas definições por séries, e nesta seção consideraremos os problemas de derivação e integração de tais funções.

Seja a função $f(x,\ t)$ definida e contínua no retângulo $\Omega\colon a < s < b, \quad c < t < d$. Então, a integral $\displaystyle\int_c^d f(s,\ t)\,dt$ existe para $a \le s \le b$ e define uma função $F(s)$.

Teorema B.1

Dentro das condições enunciadas acima, a função

$$F(s) = \int_c^d f(s,\ t)\,dt$$

é contínua em $a < s < b$ ou em símbolo $F \in C(]a,\ b[)$

Prova. Temos

$$\begin{aligned} |F(s+h) - F(s)| &= \left| \int_c^d [f(s+h,\ t) - f(s,\ t)] dt \right| \\ &\le \int_c^d |f(s+h,\ t) - f(s,\ t)|\,dt \end{aligned}$$

Como $f(s,\ t)$ é *uniformente* contínua no retângulo, ver Teorema A.2, podemos, para qualquer $\varepsilon > 0$, exibir um $\delta > 0$, tal que

$$|f(s+h,\ t) - f(s,\ t)| \le \frac{\varepsilon}{d-c} \quad \text{quando} \quad |h| < \delta$$

e com s e $s+h$ no retângulo R. Então, $|h| < \delta$ implica que

$$|F(s+h) - F(s)| \le \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c} = \varepsilon$$

com isto temos o resultado desejado. $\square$

Perguntamos, a seguir, se $F(s)$ é diferenciável e se vale a fórmula natural

$$F'(s) = \int_c^d \frac{\partial}{\partial s} f(s,\ t)\, dt$$

Com pequenas restrições, isto resulta verdadeiro.

Teorema B.2

Se $f(s,\ t)$ for contínua em R e se $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ existir e for contínua em R, então

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_c^d f(s,\ t) dt = \int_c^d \frac{\partial}{\partial s} f(s,\ t)\, dt.$$

Prova. Calculemos

$$\frac{1}{h}[F(s+h,\ t) - F(s)] = \int_c^d \frac{1}{h}[f(s+h,\ t) - f(s)]\, dt.$$

Pelo teorema do valor médio

$$\frac{1}{h}[f(s+h,\ t) - f(s,\ t)] = \frac{\partial f(s+\theta h,\ t)}{\partial s},$$

em que θ é algum número entre 0 e 1. Portanto,

$$F'(s) = \lim_{h\to 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_c^d \frac{\partial f(s+\theta h,\ t)}{\partial s}\, dt,$$

e como $\dfrac{\partial f(s,\ t)}{\partial s}$ foi suposta contínua, o Teorema B.1 produz o resultado desejado. $\square$

A fórmula do Teorema B.2 pode ser estendida de modo a permitir limites variáveis na integral, como segue.

Teorema B.3

Sejam $f(s,\ t)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ contínuas no retângulo R: $a \leq s \leq b$, $c \leq t \leq d$, e sejam $c(s)$ e $d(s)$ funções continuamente diferenciáveis com imagem no intervalo fechado $c \leq t \leq d$ (veja a Figura B.1). Então,

$$\frac{d\,F(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_{c(s)}^{d(s)} f(s,\ t) dt = \int_{c(s)}^{d(s)} \frac{\partial\, f(s,\ t)}{\partial s} dt$$
$$+ f(s,\ d(s))d'(s) - f(s,\ c(s))c'(s)$$

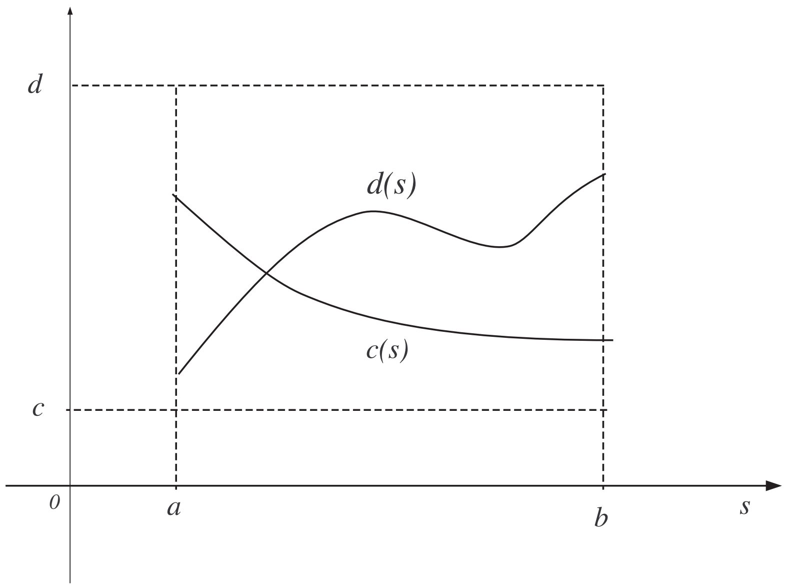


Figure B.1: Imagem das funções c e d

Prova. Seja $G(s,\ u,\ v)$ a função definida por

$$G(s,\ u,\ v) = \int_u^v f(s,\ t)\,dt.$$

Então, $F(s) = G(s,\ c(s),\ d(s))$, e a regra da cadeia para funções de várias variáveis fornece,

$$\begin{aligned} F'(s) = \frac{\partial G}{\partial s}(s,\ c(s),\ d(s)) &+ \frac{\partial G}{\partial u}(s,\ c(s),\ d(s))\,c'(s) \\ &+ \frac{\partial G}{\partial v}(s,\ c(s),\ d(s))\,d'(s). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Mas, pelo Teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{\partial G}{\partial v}(s, c(s),\ d(s)) = f(s,\ d(s))$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}(s, c(s),\ d(s)) = -f(s,\ c(s))$$

e aplicando o Teorema B.2, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial s}(s,\ c(s), d(s)) = \int_{c(s)}^{d(s)} \frac{\partial f(s,\ t)}{\partial s}\,dt$$

Estas equações, juntamente com (B.1), dão a fórmula desejada, conhecida na literatura como fórmula de Leibnitz. □

Voltemos agora nossa atenção para as integrais impróprias; seja f contínua por partes no intervalo $0 \leq x \leq \infty$. Veja também a seção, espaço das funções contínuas por partes.

Definição 20: Convergência

Díz-se que a integral imprópria $\int_0^\infty f(x)dx$ converge, se existe o limite

$$\lim_{B\to\infty}\int_0^B f(x)\,dx$$

Mais precisamente, diz-se que a integral dada converge para L, e escrevemos $L = \int_0^\infty f(x)dx$, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um número positivo M (dependente, em geral, de ε), tal que

$$\left|L - \int_0^B f(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{quando} \quad B > M.$$

De forma semelhante, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ é definida para funções contínuas por partes em $\mathbb{R}$, pelo limite duplo

$$\lim_{\substack{A\to\infty\\B\to\infty}}\int_A^B f(x)\,dx \tag{B.2}$$

Agora, se existe $\int_0^\infty f(s,t)dt$ para cada valor de s no intervalo I, então ela definirá uma função

$$F(s) = \int_0^\infty f(s,\ t)\,dt$$

neste intervalo. A situação aqui, é análoga àquela que se apresenta ao se definir uma função como o limite (soma) pontual de uma série infinita; por exemplo, a continuidade de $f(s,\ t)$ na região $0 \le t < \infty$, s em I, não implica a continuidade de $F(s)$ em I. Por esta razão, estendemos o conceito de convergência uniforme, como segue.

Definição 21: Convergência Uniforme

A integral $\int_0^\infty f(s,\ t)dt$, diz-se convergir uniformemente para $F(s)$ em I se para todo $\varepsilon > 0$ existir um número positivo M, dependente em geral de ε mas não de s, tal que

$$\left|F(s) - \int_0^B f(s,\ t)dt\right| < \varepsilon$$

quando $B > M$, e s estiver em I.

Se $F(s) = \int_0^\infty f(s,\ t)\,dt$ uniformemente em I, então a integral $\int_0^B f(s,\ t)\,dt$ poderá ser compreendida como uma aproximação de $F(s)$ neste intervalo (veja a discussão correspondente, relativa à convergência uniforme de séries). Temos, além disso, o

Teorema B.4

Se $f(s,\ t)$ for contínua para s em I e $0 \le t < \infty$, e se $F(s) = \int_0^\infty f(s,\ t)\,dt$ convergir uniformemente em I, então $F(s)$ será contínua em I.

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $B > 0$, tal que

$$\left| F(s) - \int_A^B f(s,\ t)\, dt \right| < \varepsilon/3$$

para todo s em I. Então,

$$\begin{aligned}
|F(s+h) - F(s)| &\leq \left| F(s+h) - \int_0^B f(s+h,\ t)\, dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^B f(s+h,\ t)\, dt - \int_0^B f(s,\ t)\, dt \right| \\
&\quad + \left| \int_0^B f(s,\ t)\, dt - F(s) \right| \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3} \left| \int_0^B f(s+h,\ t) - \int_0^B f(s,\ t)\, dt \right|.
\end{aligned}$$

Escolhamos agora $\delta > 0$ de modo tal que o último termo seja menor que $\varepsilon/3$ quando $|h| < \delta$. (O Teorema B.1 fornece tal δ). □

O problema de integrar uma função da forma

$$F(s) = \int_0^\infty f(s,t)dt, \quad s \quad \text{em} \quad I,$$

obriga-nos a considerar a questão da permutação da ordem de integração em integrais iteradas. Recordemos que, para o retângulo finito R: $a \leq s \leq b, \quad c \leq t \leq d$, temos sempre

$$\int_a^b \int_c^d f(s,t)dtds = \int_c^d \int_a^b f(s,t)\, dsdt$$

(contanto que f seja contínua, é claro). Entretanto, este resultado, em geral, é falso quando as integrações são efetuadas em intervalos ilimitados.

Para examinar mais de perto esta situação, devemos definir o que se entende por integrais duplas impróprias e explicar sua relação com as integrais impróprias iteradas.

Definição 22: Convergência de Integral Dupla

Seja R o primeiro quadrante do plano st. Dizemos que a integral dupla imprópria

$$\iint_R f(s,\ t)\, dsdt$$

converge para L, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um número positivo M, tal que

$$\left| L - \int_0^B \int_0^A f(s,\ t)\, dsdt \right| < \varepsilon$$

quando A, B forem ambos maiores que M.

(Definições análogas são dadas quando R é um semiplano ou plano inteiro.)

Portanto, se fizermos

$$F(A,\ B) = \int_0^B \int_0^A f(s,\ t)\, dsdt$$

então,

(a) a integral dupla $\iint_R f(s,t)\, dsdt$ será o limite duplo

$$\lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} F(A,\ B);$$

(b) as integrais iteradas serão dadas pelos limites iterados

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(s,\ t)\, dsdt = \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} F(A,\ B)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(s,\ t)\, dtds = \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} F(A,\ B)$$

A questão da igualdade das três integrais, então, é justamente um caso particular do problema correspondente para limites. Portanto, o seguinte resultado é de interesse neste contexto.

Teorema B.5

Suponhamos exista o duplo limite $L = \lim\limits_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} F(A,\ B)$, isto é, suponhamos que, para todo $\varepsilon > 0$, exista um $M > 0$, tal que $|L - F(A,\ B)| < \varepsilon$ quando $A \geq M$ e $B \geq M$.

(1) Se existir $\lim\limits_{A\to\infty} F(A,\ B) = L(B)$ para todo B, então

$$\lim_{B\to\infty} L(B) = L.$$

(2) Se existir $\lim\limits_{B\to\infty} F(A,\ B) = L(A)$ para todo A, então

$$\lim_{A\to\infty} L(A) = L.$$

Prova. Basta provar o primeiro item. Ora,

$$|L - L(B)| \leq |L - F(A,\ B)| + |F(A,\ B) - L(B)|. \tag{B.3}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos M_1 de modo tal que $|L - F(A,\ B)| < \varepsilon/2$, quando $A \geq M_1$ e $B \geq M_1$. Mantendo $B > M_1$ fixo, podemos encontrar um $M \geq M_1$, tal que $|F(A,\ B) - L(B)| < \varepsilon/2$ quando $B \geq M$. Logo, $|L - L(B)| < \varepsilon$, e como tal pode ser efetuado para qualquer $B \geq M_1$ a demonstração está encerrada. □

Reformulado em termos de integrais, o Teorema B.5 afirma que, se existe $L = \iint_R f(s,\ t)\, dsdt$, então a existência de $\int_0^\infty f(s,t)dt$ para todo s implica que a integral iterada $\int_0^\infty \int_0^\infty f(s,\ t)\, dtds$ existe e é igual a L (e analogamente ocorre isto com a outra ordem de integração). Mais interessante, porém, é o problema, inverso, de inferir a existência da integral dupla a partir da existência, de uma das integrais iteradas. Para isto, entra mais uma vez a noção de convergência uniforme e reformulamos a Definição 21 de maneira apropriada para limites.

Definição 23: Convergência Uniforme

Se $F(A,\ B)$ converge uniformemente para $L(B)$ quando A vai ao infinito, se para todo $\varepsilon > 0$ existir um número $M > 0$ (dependente, em geral, de ε mas não de B), tal que

$$|F(A,\ B) - L(B)| < \varepsilon, \qquad \text{quando} \qquad A \geq M$$

Podemos agora enunciar a principal consequência.

Teorema B.6

Suponhamos que $F(A,\ B)$ convirja uniformemente para $L(B)$ quando A vai ao infinito e que exista $L = \lim\limits_{B\to\infty} L(B)$. Então,

(1) $\lim\limits_{\substack{A\to\infty\\B\to\infty}} F(A,\ B) = L$, e

(2) se existe $\lim\limits_{B\to\infty} F(A,\ B) = L(A)$ para todo A, então $\lim\limits_{A\to\infty} L(A) = L$

Prova. Provaremos o primeiro item. Temos

$$|L - F(A,\ B)| \leq |L - L(B)| + |L(B) - F(A,\ B)|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos M_1 de modo que o primeiro termo do segundo membro seja menor que $\varepsilon/2$ quando $B > M_1$, e escolhamos M_2 (Utilizando-nos da convergência uniforme), de modo que o segundo termo seja menor que $\varepsilon/2$ quando $A \geq M_2$. Com $M = \max\{M_1,\ M_2\}$, teremos $|L - F(A,\ B)| < \varepsilon$, quando $A,\ B$ forem ambos maiores que M.

O segundo item decorre agora do Teorema B.5. □

Para o caso particular das integrais iteradas impróprias, o teorema acima assume a seguinte forma.

Teorema B.7

Se a integral $\int_0^\infty f(s,\ t)dt$ convergir uniformemente, e se existir a integral iterada

$$L = \int_0^\infty \int_0^\infty f(s,\ t)\, dtds$$

então a integral dupla existirá também e satisfará

$$\iint_R f(s,\ t)\, dsdt = \int_0^\infty \int_0^\infty f(s,\ t)\, dtds.$$

Se, além disso, existir também a integral $\int_0^\infty f(s,\ t)\, ds$, então teremos

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(s,\ t)\, dtds = \int_0^\infty \int_0^\infty f(s,\ t)\, dsdt$$

Corolário B.0.0.1. *Se $f(s,\ t)$ for contínua em $a \leq s \leq b$, $0 \leq t < \infty$, e se*

$$F(s) = \int_0^\infty f(s,t)dt, \quad a \leq s \leq b,$$

sendo a convergência para $F(s)$ uniforme em $a \leq s \leq b$, então

$$\int_a^b F(s)\, ds = \int_a^b \int_0^\infty f(s,\ t)\, dtds = \int_0^\infty \int_a^b f(s,\ t)\, dsdt.$$

Prova. Precisaremos apenas aplicar o teorema à função $\hat{f}(s,\ t)$, definida em $0 \leq s < \infty$, $0 \leq t < \infty$ por

$$\hat{f}(s,\ t) = \begin{cases} f(s,\ t) & \text{se,} \quad a \leq s \leq b \\ 0 & \text{para outros valores de} \quad s \end{cases}$$

Porque, então, $\int_0^\infty \hat{f}(s,\ t)\, dt$ convergirá uniformemente em $0 \leq s < \infty$ para a função

$$\hat{F}(s) = \begin{cases} F(s) & \text{se,} \quad a \leq s \leq b \\ 0 & \text{para outros valores de} \quad s \end{cases}$$

e

$$\int_0^\infty \hat{f}(s,\ t)ds = \int_a^b \hat{f}(s,\ t)ds = \int_a^b f(s,\ t)\, ds$$

existirá. □

Os teoremas apresentados acima tratam do problema de integrar funções definidas por integrais impróprias. Uma consequência útil, concernente à derivação de tais funções, é a seguinte,

Teorema B.8

Se $\dfrac{\partial f(s,\ t)}{\partial s}$ for contínua por partes em, $a \leq s \leq b$ para cada t, e se

$$F(s) = \int_0^\infty f(s,\ t)\, dt \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{\partial f(s,\ t)}{\partial s}\, dt$$

convergirem uniformemente em $a \leq s \leq b$, então

$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial f(s,\ t)}{\partial s}\, dt$$

Prova. Seja $H(s) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial f(s,\ t)}{\partial s}\, dt$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_a^u H(s) ds = \int_a^u \int_0^\infty \frac{\partial\, f(s,\ t)}{\partial s}\, dtds &= \int_0^\infty \int_a^u \frac{\partial\, f(s,t)}{\partial s}\, dsdt \\
&= \int_0^\infty [f(u,\ t) - f(a,\ t)]dt \\
&= F(u) - F(a),
\end{aligned}$$

donde $H(u) = F'(u)$ por derivação. □

B.1 Aplicações

Um dos principais exemplos no texto de uma função definida por uma integral é a transformada de, Laplace

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s) \tag{B.4}$$

de uma função contínua por partes. Como f não precisa de ser contínua, a convergência uniforme de (B.4) (estabelecida abaixo) não é suficiente para estabelecer a continuidade de $F(s)$. Contudo, para funções f de ordem exponencial, temos, para $h > 0$,

$$\begin{aligned}
|F(s+h) - F(s)| &= \left| \int_0^\infty (e^{-(s+h)t} - e^{-st}) f(t)\, dt \right| \\
&= \left| \int_0^\infty (e^{-ht} - 1) e^{-st} f(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_0^\infty (1 - e^{-ht}) e^{-st} |f(t)|\, dt
\end{aligned}$$

Portanto, se α, M são constantes quaisquer escolhidas de modo que $|f(t)| \leq Me^{s_1 t}$ segue-se que, para $s > \alpha$,

$$\begin{aligned} |F(s+h) - F(s)| &\leq M \int_0^\infty (1 - e^{-ht}) e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= M \left[\frac{1}{s-h} - \frac{1}{h+s-\alpha} \right], \end{aligned}$$

e, consequentemente, que $F(s+h) - F(s)$ tende para zero, quando h vai ao zero por valores positivos. Ligeira modificação no argumento dá o mesmo resultado, se h vai ao zero por valores negativos, e assim estará comprovada a continuidade de $F(s)$ para $s > \alpha$. Demonstramos, assim, o seguinte teorema.

Teorema B.9

Se f for contínua por partes em $0 \leq t < \infty$ e for de ordem exponencial, e se α_o for o ínfimo do conjunto de números reais a para os quais $|f(t)| \leq Me^{s_1 t}$ (para alguma constante M), então $\mathcal{L}[f]$ será contínua em $\alpha_0 < s < \infty$

Observação 35. *O número α_o, chamado, algumas vezes, de ordem de f, é maior ou igual à abscissa de convergência s_0 de f. No entanto, como foi mostrado em seu lugar, podemos ter $s_0 < \alpha_0$.*

Finalmente, justifiquemos a fórmula

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s) = \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-st} f(t)\, dt$$

dada em seção anterior desta obra, mostrando que cada uma das integrais

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} f(t)\, dt, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{B.5}$$

converge uniformemente em $\alpha \leq s < \infty$ onde $\alpha < \alpha_o$ (veja Teorema B.9 para a definição de α_0). De fato, escolhendo s_1 $(\alpha_0 < s_1 < \alpha)$ e M, de modo que $|f(t)| \leq Me^{s_1 t}$, temos, para $s > \alpha$,

$$\begin{aligned} \left| \int_A^\infty t^n e^{-st} f(t)\, dt \right| &\leq M \int_A^\infty t^n e^{(s-s_1)t}\, dt \\ &\leq M \int_A^\infty t^n e^{(\alpha - s_1)t}\, dt \end{aligned}$$

Mas a última expressão tende para zero quando A vai ao infinito (t^n é de ordem exponencial), e como ela não depende de s, está demonstrada a convergência uniforme de (B.5) em $\alpha \leq s < \infty$. Em vista do Teorema B.8, pode-se efetuar qualquer quantidade de derivações, de $\mathcal{L}[f](s)$ derivando-se sob o sinal de integral. $\square$

Bibliography

[1] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*, New York:Dover, (1953).

[2] Churchill, V. R. *Fourier Series and Boundary Value Problems*, MacGraw-Hill, New York, (1990).

[3] Kreyszig, E. *Advanced Engineering Matemathematics*, Seven edition, John Wiley & Sons, Inc, New York, (1993).

[4] Boyce, E. W. & DiPrima, C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Seven Edition, John Wiley & Sons, Inc, New York, (2001).

[5] Courant, R. & Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 2 , Springer-Verlag, Berlin, (1980).

[6] John, Fritz. *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[7] Rudin, Walter *Principles of Mathematical Analysis*, MacGraw-Hill, 1976.

[8] Marsden, J & Hofman M., *Elementary Classical Analysis*, Addison-Wesley, (1998)

Index