VERSUCH 103

Biegung elastischer Stäbe

Dennis Heimann
dennis.heimann@tu-dortmund.de

Felix Ulbrich
felix2.ulbrich@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.11.2023 Abgabe: 28.11.2023

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es, den Elastizitätsmodul von Probestäben mittels Biegung zu ermitteln und damit Rückschlüsse auf das Material der Stäbe zu führen.

2 Theorie

Greifen an der Oberfläche eines Körpers Kräfte an, kann es zu Gestaltsänderungen des Körpers kommen. Ein Beispiel für eine solche Verformung ist die Längenänderung eines Körpers unter dem Einfluss einer zur Oberfläche senkrecht wirkenden Normalspannung σ. Ist die Längenänderung ΔL dabei hinreichend klein gegenüber der Ausgangslänge L, so lässt sich die Verformung gemäß dem Hookschen Gesetz nach

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

beschreiben. Der Proportionalitätsfaktor E ist dabei der Elastizitätsmodul. Dieser ist eine in der Werkstofftechnik wichtige Materialkonstante. Kann die Längenänderung zuverlässig gemessen werden, kann der Elastizizätsmodul direkt aus der Dehnung eines Körpers bestimmt werden. In diesem Versuch wird der Elastizitätsmodul allerdings durch eine andere Art der Verformung bestimmt, nämlich durch die Biegung:

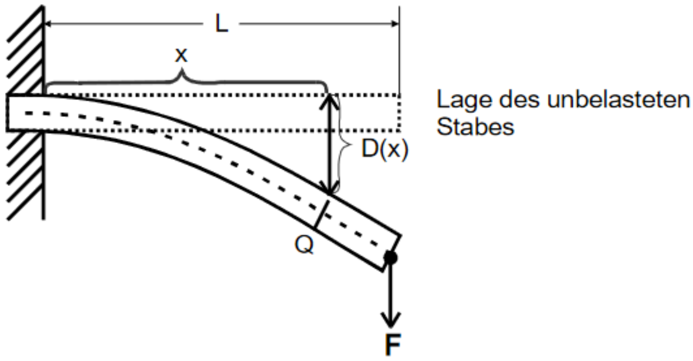

Abbildung 1: Biegung eines einseitig eingespannten Stabes [**V103**].

Wird ein Stab wie in **??** dargestellt einer Kraft F ausgesetzt, bewirkt die Kraft an der Stelle x ein äußeres Drehmoment

$$M_F = F(L - x). \tag{2}$$

Durch die Verformung treten innerhalb des Stabes Spannungen auf. Der obere Teil des Stabes wird dabei gedehnt, während der untere Teil gestaucht wird. Dazwischen liegt eine Fläche, deren Länge unverändert bleibt, die sogenannte neutrale Faser. Die Zug- und Druckspannungen wirken in entgegengesetzte Richtungen, sie erzeugen somit widerum ein inneres Drehmoment

$$M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq \tag{3}$$

im Stab. Q ist dabei die Querschnittsfläche des Stabes, y der Abstand des Flächenelementes dq zur neutralen Faser und $\sigma(y)$ die durch die Verformung hervorgerufene Normalspannung. M_F und M_σ sind entgegengesetzt, sodass es bei

$$M_F = M_\sigma \tag{4}$$

zu einem Gleichgewichtszustand mit einer endlichen Durchbiegung D kommt. Die Spannungen $\sigma(y)$ können durch das Hooksche Gesetz ausgedrückt werden, sodass sich nach einigen Umformungen die Gleichung

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{5}$$

für die Durchbiegung ergibt.Der Term $I = \int_Q y^2 dq$ ist dabei das Flächenträgheitsmoment. Dieses ist abhängig vom Querschnitt des Stabes. Es lässt sich berechenen nach

$$I = Q\frac{b^2}{12} \tag{6}$$

für quadratische Stäbe (wobei b die Kantenlänge ist), bzw nach

$$I = \frac{Q}{4}R^2 \tag{7}$$

für runde Stäbe (mit dem Radius R).

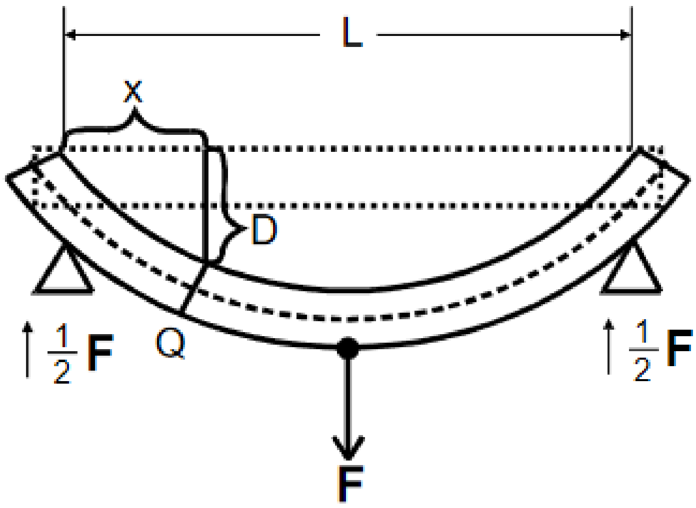

Abbildung 2: Biegung eines beidseitig eingespannten Stabes [1].

Bei einem beidseitig eingespannten Stab, bei dem die Kraft in der Mitte des Stabes angreift (siehe **??**) ergeben sich die Gleichungen

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(3L^2x - 4x^3\right) \qquad \text{fr } 0 \geq x \geq \frac{L}{2} \tag{8}$$

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right) \qquad \text{fr } \frac{L}{2} \geq x \geq L \tag{9}$$

für die Durchbiegung.

3 Durchführung

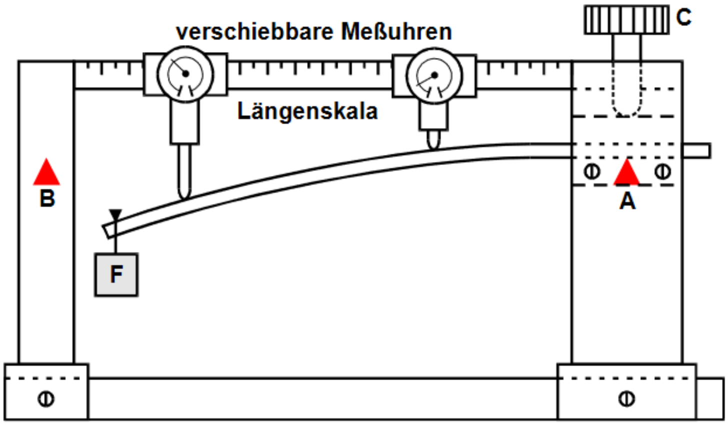

Abbildung 3: Grundlegende Anordnung des Versuchsaufbaus [**V103**].

Zur Bestimmung des Elastizitätsmodules wird der in **??** dargestellte Versuchsaufbau genutzt. Ein Probestab wird dabei zunächst einseitig am Auflagepunkt A eingespannt während am freien Ende ein Gewicht angehängt wird. Mit den verschiebbaren Messuhren kann nun an verschiedenen Stellen x die Auslenkung D abgelesen werden. Da die Proben nicht perfekt gerade sind, wird dabei wie folgt vorgegangen: Bevor das Gewicht angehängt wird, wird die Messuhr zunächst an die zu untersuchende Messstelle x geschoben und auf 0 geeicht. Nun wird das Gewicht angehängt, sodass an der Messuhr direkt die Auslenkung abgelesen werden kann. Das Gewicht wird wieder entfernt und die Messuhr wird zur nächsten Messstelle geschoben. Dieser Vorgang wird für insgesamt 20 verschiedene Messstellen durchgeführt.
In einer zweiten Messreihe wird der Probenstab beidseitig eingespannt. Das Gewicht wird in der Mitte des Stabes angehängt. In dieser Messreihe werden beide Messuhren genutzt, sodass bei jedem Schritt jeweils ein Messwert links sowie rechts vom Gewicht abgelesen werden kann. Wie zuvor werden die Messuhren zunächst ohne angehängtes Gewicht auf 0 geeicht. Dann wird das Gewicht angehängt und an den Messuhren wird die Auslenkung abgelesen. Danach wird das Gewicht wieder abgenommen und die Messuhren werden zu den nächsten Messstellen geschoben. Insgesamt wird die Auslenkung an jeweils 10 verschiedenen Messtellen auf beiden Seiten des Stabes bestimmt.
Am Ende wird der genutzte Stab gewogen und es wird sowohl die Länge als auch der Durchmesser (beim runden Probestab) bzw. die Kantenlängen (beim rechteckigen Stab) der Stäbe notiert.
Die gesamte Messreihe wird für einen runden und einen rechteckigen Stab des selben Materials durchgeführt.

4 Auswertung

4.1 Eigenschaften der zu vermessenden Körper

4.1.1 Messwerte der Stabeigenschaften

Der rechteckige Stab hat eine Länge von $L = 600(1)$, eine Masse von $M = 536.0(0.1)$ und einen Durchmesser von $d = 10(0.05)$. Der runde Stab hat eine Länge von $L = 590(1)$, eine Masse von $M = 412.2(0.1)$ und einen Durchmesser von $d = 10(0.05)$.

4.1.2 Flächenträgheitsmoment und Materialabgleich

Das Flächenträgheitsmoment des Stabes mit der runden Grundfläche lässt sich mithilfe von Gleichung (**??**) und dem Radius $a = \frac{d}{2} = \frac{0.01}{2}m = 0.005m$ berechnen.
Somit ist

$$I_{Kreis} = \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi \times 0.005^4}{4}m^4 = 4.909 \times 10^{-10}m^4.$$

Das Flächenträgheitsmoment des Stabes mit der quadratischen Grundfläche lässt sich nach Gleichung (**??**) berechnen und ergibt

$$I_{Quadrat} = \frac{a^4}{12} = \frac{0.01^4}{12}m^4 = 8.\overline{3} \times 10^{-10}m^4$$

Die Dichte eines Körpers lässt sich mithilfe

$$\rho = \frac{m}{V}$$

berechnen. Somit ist die Dichte des runden Stabes

$$\rho_{Rund} = \frac{m}{\pi \times a^2 \times L} = \frac{0.4122}{\pi \times 0.005^2 \times 0.590}\frac{kg}{m^3} \approx 8895.41\frac{kg}{m^3} \approx 8.89\frac{g}{cm^3}$$

und die Dichte des Stabes mit quadratischer Grundfläche

$$\rho_{Quadrat} = \frac{m}{a^2 \times L} = \frac{0.5360}{0.01^2 \times 0.600}\frac{kg}{m^3} \approx 8933.33\frac{kg}{m^3} \approx 8.93\frac{g}{cm^3}.$$

.

4.2 Einseitig eingespannter Stab

4.2.1 Messwerte der Auslenkung

An den eingespannten Stab ist in einem Abstand von $l = 510$ eine Masse von $m = 0.5(0.001)$ angehängt worden. In den Tabellen **??** und **??** sind die Werte für die Durchbiegung ΔD eines Quaderförmigen Stabes und eines zylinderförmigen Stabes in Abhängigkeit von der Entfernung zum Einspannpunkt gemessen worden.

Tabelle 1: Durchbiegung des runden Stabes in Abhängigkeit der Entfernung zum Einspannpunkt

Tabelle 2: Durchbiegung des quaderförmigen Stabes in Abhängigkeit der Entfernung zum Einspannpunkt

Für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird nun Δx gegen $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ aufgetragen.

build/rund_einseitig_plot.pdf

Abbildung 4: Durchbiegung eines einseitig eingespannten runden Stabes [**V103**].

In **??** sind die mit der Funktion $Lx^2 - \frac{x^3}{3}$ transformierten Messwerte für den einseitig eingespannten Stab zusammen mit einer Ausgleichsgeraden der form $f(x) = ax + b$ mit $a = 3.968 \times 10^{-2}$ und $b = 4.908 \times 10^{-5}$ aufgetragen. Daraus lässt sich mithilfe von **??** das Elastizitätsmodul des runden Stabes aus der Steigung a der Ausgleichsgeraden bestimmen.

$$E = \frac{m \times g}{2kI} = \frac{0.5 \times 9.81}{2 \times 3.968 \times 10^2 \times 4.909 \times 10^{-10}} = (1.259 \pm 0.009) \times 10^{11}$$

.

build/eckig_einseitig_plot.pdf

Abbildung 5: Durchbiegung eines einseitig eingespannten quadratischen Stabes [**V103**].

Für den quadratischen Stab ist das Vorgehen analog. Mit **??**, den Parametern $a = 2.638 \times 10^{-2}$ und $b = 4.014 \times 10^{-5}$ der Ausgleichsgeraden ergibt sich ein Elastizitätsmodul von

$$E = \frac{m \times g}{2kI} = \frac{0.5 \times 9.81}{2 \times 2.638 \times 10^2 \times 8.33 \times 10^{-10}} = (1.116 \pm 0.012) \times 10^{11}$$

.

4.3 Beidseitig eingespannter Stab

Beim beidseitig eingespannten Stab ist die Masse $m = 1(0.001)$ in einer Entfernung von $l = 27.5(0.01)$ eingespannt worden. In **??** und **??** ist die Durchbiegung beider Stäbe bei verschiedenen Entfernungen zur aufliegenden Masse gemessen worden.

Tabelle 3: Durchbiegung des runden zweiseitig eingespannten Stabes in Abhängigkeit der Entfernung zum Einspannpunkt

Tabelle 4: Durchbiegung des quaderförmigen zweiseitig eingespannten Stabes in Abhängigkeit der Entfernung zum Einspannpunkt

Nun wird analog zu den einseitig befestigten Stäben die zweiseitig eingespannten Stäbe geplottet und ausgewertet.

`build/eckig_zweiseitig_links_plot.pdf`

Abbildung 6: Durchbiegung eines zweiseitig eingespannten quadratischen Stabes links von Mittelpunkt [**V103**].

In **??** sind die mit $3L^2x - 4x^3$ transformierten Messwerte für die linke Seite des quadratischen beidseitig eingespannten Stabes sowie eine Ausgleichsgeraden der Form $f(x) = ax+b$ mit den Parametern $a = 8.927 \times 10^{-4}$ und $b = 4.030 \times 10^{-6}$ zu sehen. Daraus lässt sich erneut das Elastizitätsmodul mithilfe von **??** berechnen. Es ergibt sich

$$E = \frac{m \times g}{48kI} = \frac{1 \times 9.81}{48 \times 8.333 \times 10^{-10} \times 8.927 \times 10^{-4} \times} = (2.57 \pm 0.12) \times 10^{11}.$$

`build/eckig_zweiseitig_rechts_plot.pdf`

Abbildung 7: Durchbiegung eines zweiseitig eingespannten quadratischen Stabes rechts von Mittelpunkt [**V103**].

Auch für die rechte Seite werden die mit $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^4$ transformierten Messwerte in **??** geplottet und eine Ausgleichsgerade gefittet. Daraus lässt sich das Elastizitätsmodul mit **??** und der Steigung der Ausgleichsgeraden von $a = 6.180 \times 10^{-4}$ berechnen und ergibt

$$E = \frac{m \times g}{48kI} = \frac{1 \times 9.81}{48 \times 8.333 \times 10^{-10} \times 6.180 \times 10^{-4}} = (4.00 \pm 0.40) \times 10^{11}.$$

Die gleichen Auswertungsschritte werden auch für den beidseitig eingespannten runden Stab gemacht.

build/rund_zweiseitig_links_plot.pdf

Abbildung 8: Durchbiegung eines zweiseitig eingespannten quadratischen Stabes rechts von Mittelpunkt [**V103**].

In **??** sind die um $3L^2x - 4x^3$ transformierten Messwerte für die linke Seite eines beidseitig eingespannten runden Stabes und eine dazugehörige Ausgleichsgerade mit $a = -1053 \times 10^{-3}$ und $b = -4$ aufgetragen. Daraus lässt sich erneut mit **??** das Elastizitätsmodul

$$E = \frac{m \times g}{48kI} = \frac{1 \times 9.81}{48 \times 4.909 \times 10^{-10} \times 1.290 \times 10^{-3}} = (3.23 \pm 0.10) \times 10^{11}$$

berechnen.

build/rund_zweiseitig_rechts_plot.pdf

Abbildung 9: Durchbiegung eines zweiseitig eingespannten quadratischen Stabes rechts von Mittelpunkt [**V103**].

Die mit $4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3$ transformierten Messwerte auf der rechten Seite des zweiseitig eingespannten runden Stabes sind in **??** aufgetragen und mit einer Ausgleichsgeraden mit $a = -2.626 \times 10^{-2}$ und $b = -3$ versehen. Aus der Steigung der Ausgleichsgerade lässt sich erneut mit **??** das Elastizitätsmodul

$$E = \frac{m \times g}{48kI} = \frac{1 \times 9.81}{48 \times 4.909 \times 10^{-10} \times 7.446 \times 10^{-4}} = (5.6 \pm 0.6) \times 10^{11}$$

brechen.

5 Diskussion

Das Material des zu untersuchenden Stab hat große optische Ähnlichkeiten zum Material Kupfer. Die aus den Messwerten berechnete Dichte des runden Stabes liegt bei $\rho = 8.89 \frac{g}{cm^3}$ und ist damit mit einer Abweichung von 0.33% relativ nahe am Literaturwert von Kupfer mit $\rho = 8.92 \frac{g}{cm^3}$ò[**MIT**]è. Die berechnete Dichte des Stabes mit quadratischer

Grundfläche liegt mit $\rho = 8.93 \frac{g}{cm^3}$ und einer Abweichung von 0.11% sehr nahe am Literaturwert. Somit kann davon ausgegangen werden, dass es sich bei beiden Stäben um Kupfer handelt. Der theoretische Wert des Elastizitätsmodul bei Kupfer beträgt $120 = 1.2e11$ò[**MIT**]è Die aus den Messwerten der einseitigen Einspannung ermittelten Elastizitätsmodule sind mit Abweichungen von 7.6% und 4.7% sehr nahe am Literaturwert für Kupfer mit für Kupfer mit $E = 1.2 \times 10^{11}$. Im Gegensatz dazu sind die Ergebnisse bei den doppelten einspannungen deutlich schlechter. Das aus den Messwerten der linken Seite des doppelt eingespannten rechteckigen Stabes berechnete Elastizitätsmodul $E = (2.75 \pm 0.12) \times 10^{11}$ hat eine Abweichung von 56.3% vom Literaturwert. und das aus den Messwerten der rechten Seite des doppelt eingespannten rechteckigen Stabes berechnete Elastizitätsmodul $E = (4.00 \pm 0.40) \times 10^{11}$ hat eine Abweichung von 69.8% vom Literaturwert. Die Ergebnisse des runden Stabes sind mit $E = (3.23 \pm 0.10) \times 10^{11}$ und einer Abweichung von 62.8% für die linke Seite und $E = (5.6 \pm 0.6) \times 10^{11}$ mit einer Abweichung von 78.5% für die rechte Seite liegen auch sehr weit vom Literaturwert entfernt. Ein Grund dafür könnte die deutlich kleinere Biegung bei der doppelten Einspannung sein wodurch die Messunsicherheiten der Messuhren deutlich stärker ins Gewicht fallen. Ebenso treten bei beim verrechnen von werten aus unterschiedlichen Größenordnungen deutlich größere Fehler auf.