Grundlagen der Logik

Felix Leitl

22. September 2023

Aussagenlogische Konsequenz und Beweise

Wahrheitstafel

A	B	C	A →B	...
w	w	w	w	...
w	w	f	w	...
w	f	w	f	...
w	f	f	f	...
f	w	w	w	...
f	w	f	w	...
f	f	w	w	...
f	f	f	w	...

Formel ist eine aussagenlogische Konsequenz, wenn beide Spalten übereinstimmen

Coq

$\wedge I$	split.		
$\wedge E_1$	destruct H as [H0 _]; exact H0.		
$\wedge E_2$	destruct H as [_ H0]; exact H0.		
$\vee I_1$	left.		
$\vee I_2$	right.		
$\vee E$	destruct H as [L|R]. apply H0; exact L. apply H1; exact R.		
$\to I$	intro.	$A \to B$	$A \quad B$
$\to E$	apply H; exact H0.		
$\neg I$	intro.		$\neg A \quad \perp$
$\neg E$	apply NNPP.	$\neg\neg A$	A
$\perp I$	apply H		
$\perp E$	contradiction		
	assert (¬ A)	neu UZ -> alt An	

Formalisierung in Prädikatenlogik

Unifikation

Regeln

Regel	Pre	After
decomp	$f(x) = f(y)$	$x = y$
delete	$f(x) = f(x)$	
orient	$f(x) = y$	$y = f(x)$
elim	$f(x) = y \quad x = z$	$f(z) = y \quad x = z$
conflict	$f(x) = g(x)$	$\perp$
occur	$f(x) = x$	$\perp$

Algorithm

Die Formel ist syntaktisch identisch, hat also einen most generic unifier (mgu), wenn der Algorithmus endet, ohne $\perp$.
Bsp.: $x = h(h(w)) \quad z = h(w) \quad \Rightarrow \quad mgu = [\frac{h(h(w))}{x}, \frac{h(w)}{z}]$

Prädikatenlogische Resolution

Kodierung von $\rightarrow$ durch $\neg$ und $\vee$

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Negationsnormalform

$\neg$ an innerste Stelle ziehen:
$\forall y.\neg(\neg y \wedge \exists x.R(x)) \equiv \forall y.y \vee \forall x \neg R(x)$
Aus $\wedge$ wird $\vee$, aus $\forall$ wir $\exists$ und umgekehrt.

Pränexe Normalform

Alle Quantoren nach vorne ziehen, bei Variablendopplung neue Variablen einführen

Skolemform

Nicht allquantorifizierte Variablen mittels Substitution durch Funktionen austauschen $\sigma[\frac{f(x)}{x}, \frac{h(x)}{y}]$

Konjunktive Normalform (KNF)

$(A \vee B) \wedge (C \vee A)$

Klauselform

Klauseln entlang der KNF Konjunktionen brechen
$\{A, B\}\{C, A\}$

Unerfüllbarkeit durch Klauselmenge zeigen

Idee: wenn man die leere Menge herleiten kann, dann ist die Formel unerfüllbar. Je zwei widersprüchliche Aussagen auslöschen und den Rest der zwei Klauseln zu einer neuen verschmelzen. Mittels Substitution Widersprüche aufzeigen.
Bei Beweis für Erfüllbarkeit, Klauselmenge um flache Aussage erweitern, wenn dann nicht erfüllbar, dann ist die Ursprungsformel erfüllbar

Formale Deduktion

Fitch

$\wedge I$
$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$\wedge E$
$$\frac{A \wedge B}{A \quad B}$$

$\vee I$
$$\frac{A}{A \vee B}$$

$\vee E$
$$\begin{array}{|l} \underline{A \vee B} \\ \begin{array}{|l} \underline{A} \\ \vdots \\ C \end{array} \\ \begin{array}{|l} \underline{B} \\ \vdots \\ C \end{array} \\ C \end{array}$$

$\to I$
$$\begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \underline{A} \\ \vdots \\ B \end{array} \\ A \to B \end{array}$$

$\to E$
$$\frac{\begin{array}{l} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

$\neg I$
$$\begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \underline{A} \\ \vdots \\ \perp \end{array} \\ \neg A \end{array}$$

$\neg E$
$$\frac{\neg \neg A}{A}$$

$\perp I$
$$\frac{A \wedge (\neg A)}{\perp}$$

$\perp E$
$$\frac{\perp}{Q}$$

$\leftrightarrow I$
$$\begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \underline{A} \\ \vdots \\ B \end{array} \\ \begin{array}{|l} \underline{B} \\ \vdots \\ A \end{array} \\ A \leftrightarrow B \end{array}$$

$\leftrightarrow E$
$$\frac{\begin{array}{l} A \leftrightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

$\forall I$
$$\begin{array}{|l} \underline{} \\ \begin{array}{|l} \underline{\boxed{a}} \text{ „generic name"} \\ \vdots \\ P(a) \end{array} \\ \forall x. P(x) \end{array}$$

$\forall E$
$$\begin{array}{|l} \underline{\forall x. P(x)} \\ \begin{array}{|l} \underline{\boxed{a}} \\ P(a) \end{array} \end{array}$$

$\exists I$
$$\begin{array}{|l} \underline{P(a)} \\ \exists x. P(x) \end{array}$$

$\exists E$
$$\begin{array}{|l} \underline{\exists x. P(x)} \\ \begin{array}{|l} \underline{\boxed{a}\, P(a)} \text{ „temporary name"} \\ \vdots \\ Q \text{ „free of } a\text{"} \end{array} \end{array}$$

Induktion

Geschlossene Σ-Terme werden durch die Grammatik $E ::= zero/one/mult(E_1, E_2)$ dargestellt
Induktion über E:

- $E = zero$: $\mathfrak{m}[\![zero]\!]\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(0) \in \{0, 1\}$
- $E = one$: $\mathfrak{m}[\![one]\!]\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(1) \in \{0, 1\}$
- $E = mult(E_1, E_2)$: Nach IV wissen wir $\mathfrak{m}[\![E_1]\!]\mathfrak{n} \in \{0, 1\}$ und $\mathfrak{m}[\![E_2]\!]\mathfrak{n} \in \{0, 1\}$
  $\mathfrak{m}[\![E]\!]\mathfrak{n} = \mathfrak{m}[\![mult(E_1, E_2)]\!]\mathfrak{n} = \mathfrak{m}[\![mult]\!](\mathfrak{m}[\![E_1]\!]\mathfrak{n}, \mathfrak{m}[\![E_2]\!]\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}[\![E_1]\!]\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}[\![E_2]\!]\mathfrak{n}$

Es ergeben sich 4 Fälle:

- $0 \cdot 0$
- $0 \cdot 1$
- $1 \cdot 0$
- $1 \cdot 1$

$\Rightarrow \mathfrak{m}[\![E]\!] \in \{0, 1\}$ in allen Fällen $\square$