

Mathe C2

Felix Leitl

8. August 2023

Inhaltsverzeichnis

Stetige Funktionen	2
\mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R}	2
Eigenschaften stetiger Funktionen	2
Komposition stetiger Funktionen	3
Zwischenwertsatz	3
Satz über Nullstellen	3
Satz von Minimum und Maximum	3
Metrik in normierten Räumen	4
ϵ -Umgebung	4
Umgebungen	4
Innere Punkte	4
Randpunkte	5
Offene und abgeschlossene Mengen	5
Konvergenz in \mathbb{R}	5
Konvergenzkriterien	5
Äquivalente Normen	6
Äquivalente Normen und ihre Umgebungen	6
Konvergenz und äquivalente Normen	6
Konvergenz in \mathbb{R}^n	6
Abgeschlossene Mengen und Konvergenz	7
Grenzwertsätze in normierten Räumen	7
Differenzierbare Funktionen	7
Integration	7
Folgen und Reihen	7

Stetige Funktionen

Definition 1: Stetig

Def:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

- f heißt stetig im Punkt $x \in I$, wenn gilt:
Für jede Folge (X_n) in I mit $x_n \rightarrow x$ gilt auch $f(x_n) \rightarrow f(x)$
- f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ stetig ist

Anschaulich:

- „ f stetig in x “ bedeutet, dass f in x nicht springt
- „ f stetig“ bedeutet, dass f nirgendwo springt

\mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R}

Lemma 1:

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Lemma 2:

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Lemma 3:

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (x_n) in \mathbb{Q} mit $x_n \rightarrow x$
Zu jeder rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \rightarrow x$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 1:

Sei I ein Intervall, $x \in I$ und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die stetig in x sind.
Dann gilt:

- $f + g$ ist stetig in x
- $f - g$ ist stetig in x
- $f \cdot g$ ist stetig in x
- Falls $g(y) \neq 0, \forall y \in I$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in x

Komposition stetiger Funktionen

Satz 2:

Seien I, J Intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(I) \subset J$
Ferner sei f stetig in $x \in I$ und g stetig in $y = f(x)$
Dann ist $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x

Zwischenwertsatz

Satz 3: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in (a, b) jeden beliebigen Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

Satz 4: Variante des Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ jeden beliebigen Wert

$$y \in [\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x)]$$

an

Satz über Nullstellen

Satz 5: Nullstellen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. Dann hat f in (a, b) mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$

Satz von Minimum und Maximum

Satz 6: Minimum und Maximum

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}), \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere gilt für x_{\min} und x_{\max}

$$\begin{aligned} f(x_{\min}) &= \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \\ f(x_{\max}) &= \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \end{aligned}$$

Definition 2: Schreibweisen

Sei (x_n) eine reelle Folge. Wir schreiben $x_n \rightarrow \infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \geq C$$

Analog schreiben wir $x_n \rightarrow -\infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \leq C$$

Metrik in normierten Räumen

Definition 3: Metrik

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann heißt die Abbildung

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \|x - y\|$$

die zur Norm $\|\cdot\|$ gehörige Metrik

ϵ -Umgebung

Definition 4: ϵ -Umgebung

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Für einen Punkt $x \in V$ und $\epsilon > 0$ heißt die Menge

$$B_\epsilon(x) := \{d(x, y) < \epsilon\} = \{y \in V : \|x - y\| < \epsilon\}$$

eine ϵ -Umgebung von x . Man spricht von der offenen Kugel mit Radius ϵ um x

Umgebungen

Definition 5: Umgebung

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $x \in V$ ein Punkt in V . Dann heißt eine Teilmenge $U \subset V$ eine Umgebung von x , wenn sie eine ϵ -Umgebung von x enthält, d.h. wenn $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subset U$

Innere Punkte

Definition 6: Innerer Punkt

Sei $M \subset V$. Ein Punkt $x \in M$ heißt innerer Punkt von M , falls ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset M$ existiert.

Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das Innere von M und wird mit $\overset{\circ}{M}$ bezeichnet

Randpunkte

Definition 7: Randpunkt

Sei $M \subset V$. Ein Punkt $x \in V$ heißt Randpunkt von M , falls in jeder Umgebung $B_\epsilon(x)$ ein Punkt aus M und aus $V \setminus M$ ist.

Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M und wird mit ∂M bezeichnet.

Die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der Abschluss von M

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 8: Offene Menge

Eine Teilmenge $O \subset V$ heißt offen, wenn zu jedem $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset O$ existiert, d.h., wenn O Umgebung aller ihrer Punkte $x \in O$ ist.

Definition 9: Abgeschlossene Menge

Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt abgeschlossen, wenn $V \setminus A$ offen ist

Konvergenz in \mathbb{R}

Definition 10: Konvergenz

Eine reelle Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \epsilon$$

Mit Hilfe der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ können wir dies auch formulieren als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \epsilon$$

und mit ϵ -Umgebung als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in B_\epsilon(x)$$

Konvergenzkriterien

Lemma 4:

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum (x_n) eine Folge in V und $x \in V$. Dann sind äquivalent:

1. (x_n) konvergiert gegen x , d.h. $x_n \rightarrow x$
2. $\|x_n - x\|$ ist Nullfolge, d.h. $\|x_n - x\| \rightarrow 0$
3. Es gilt $\|x_n - x\| \geq y_n$ für eine reelle Nullfolge (y_n)

4. Für jede Umgebung U von x :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in U$$

Äquivalente Normen

Definition 11: Äquivalente Normen

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ zwei Normen auf V . Dann heißen $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ äquivalent, wenn Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq \beta\|x\|_\alpha \quad \forall x \in V$$

Satz 7:

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sind äquivalent auf \mathbb{R}^n

Satz 8:

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent

Äquivalente Normen und ihre Umgebungen

Satz 9:

Sei $V, \|\cdot\|_\alpha$ ein normierter Raum und $U \subset V$ eine Umgebung von x bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$. Dann ist U auch Umgebung bezüglich jeder zu $\|\cdot\|_\alpha$ äquivalenten Norm $\|\cdot\|_\beta$

Konvergenz und äquivalente Normen

Satz 10:

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $\|\cdot\|_\alpha$ und $\|\cdot\|_\beta$ zwei äquivalente Normen. Dann sind für eine Folge (x_n) in V und $x \in V$ äquivalent:

- (x_n) konvergiert gegen x bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$
- (x_n) konvergiert gegen x bezüglich $\|\cdot\|_\beta$

Konvergenz in \mathbb{R}^n

Satz 11:

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n , $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R}^m und $x \in \mathbb{R}^m$. Dann

konvergiert $(x(n))$ genau dann gegen x , wenn gilt

$$x_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_k \quad k = 1, \dots, m$$

Abgeschlossene Mengen und Konvergenz

Satz 12:

Sei $A \subset V$ eine Teilmenge eines normierten Raums, dann sind äquivalent:

1. A ist abgeschlossen
2. Für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ für alle n gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$

Grenzwertsätze in normierten Räumen

Satz 13:

Der Grenzwert einer in V konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt

Satz 14:

Konvergente Folgen sind beschränkt

Satz 15:

Sei V ein normierter Raum, (a_n) und (b_n) Folgen in V und (λ_n) eine Folge in \mathbb{K} mit

$$a_n \rightarrow a \in V, \quad b_n \rightarrow b \in V, \quad \lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{K}$$

Dann gilt:

- $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- $a_n - b_n \rightarrow a - b$
- $\lambda_n a_n \rightarrow \lambda a$

Differenzierbare Funktionen

Integration

Folgen und Reihen