Algorithmik kontinuierlicher Systeme

Felix Leitl

2. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

Direkte Verfahren

Direkte Verfahren Lösen ein Problem nach endlich vielen Schritten. Verwendung: kleine, vollbesetzte Matrizen.

LR-Zerlegung

Ziel

$$A = LR$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & * \end{pmatrix}$$

Algorithmus

1. i-te Zeile in R übertragen
2. i-te Spalte dividiert durch a_{ii} in L über nehmen. Erstes Element der Spalte gleich 1 setzten
3. Mit i-ter Zeile die i-te Spalte eliminieren

Komplexität

$\mathcal{O}(n^3)$

Anwendung

- $\det(A) = \det(L) \times \det(R) = 1 \times \det(R)$
- Lösen mehrerer GLS:
  - $Ly = b$ mit Vorwärtssubstitution $\mathcal{O}(n^2)$
  - $Rx = y$ mit Rückwärtssubstitution $\mathcal{O}(n^2)$

LRP-Zerlegung

$$A = PLR$$

QR-Zerlegung

Ziel

$$A = QR$$

Housholder-Spiegelungen

Mit einer Housholder-Spiegelung in eriner Spalte Nullen einfügen (außer Diagonalelement)
→ nach $n-1$ Schritten erhält man die Dreiecksmatrix R

$$\begin{aligned} R &= H_{n-1} \dots H_2 H_1 A \\ Q &= (H_{n-1} \dots H_2 H_1)^{-1} = H_1 H_2 \dots H_{n-1} \end{aligned}$$

Givens-Rotationen

Mit einer Givens-Rotation ein Element (unterhalb der Diagonalen) zu Null machen
→ nach $n(n-1)/2$ Schritten erhält man die Dreiecksmatrix R

$$J_{ij}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Wobei c_1 an Position jj ist und c_2 an Position ii

$$\begin{aligned} c &= \cos(\varphi) = \frac{\sigma \cdot a_{jj}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}} \\ s &= \sin(\varphi) = \frac{-\sigma \cdot a_{ij}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}} \\ \sigma &= \operatorname{sign}(a_{jj}) \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} R &= J_{m,n^*} \dots J_{2,1} A \\ Q &= J_{2,1}^T \dots J_{m,n^*}^T \\ n^* &= \min\{m-1, n\} \end{aligned}$$

Cholesky-Zerlegung

Wenn A symmetrisch und positiv definit ist kann man A faktorisieren in

$$A = LDL^T$$

Wobei L das L der LR-Zerlegung ist und D der Diagonalanteil von R

Lineare Ausgleichsrechnung

Matrizen

Orthogonal

Eine Matrix ist orthogonal, falls eine der Bedingungen erfüllt ist:

- $Q^T Q = Id$
- $QQ^T = Id$
- Spalten oder Zeilen bilden eine Orthonomalbasis
- Die Abbildung Q ist winkel- und längentreu
- Q erhält das Skalarprdukt: $Qx \circ Qy = x \circ y$

Skalarprodukt

$x \circ y = \Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i$

Tridiagonalmatrix

Die inverse einer tridiagonalen Matrix ist in der Regel voll besetzt

Normen

Eigenschaften:

- definit: $x \neq 0 \Rightarrow ||x|| > 0$
- homogen: $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
- sub-additiv: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Matrix-Norm bzw. Operator-Norm

Erfüllt Normeigenschaften und mehr:

- $|||Id||| = 1$
- sub-multiplikativ: $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$
- mit der Vektornorm kompatibel: $||Ax|| \leq |||A||| \cdot ||x||$
- $|||A||| \geq |\lambda|$

Beispiele:

- Spalten-Summen-Norm: $|||A|||_1$
$$|||A|||_1 = \max_j \{\Sigma_i |a_{ij}|\}$$
- Zeilen-Summen-Norm: $|||A|||_\infty$
$$|||A|||_\infty = \max_i \{\Sigma_j |a_{ij}|\}$$

- Spektral-Norm: $|||A|||_2$

$$|||A|||_2 = \sqrt{\lambda \max(A^T A)}$$

- Frobenius-Norm: $||A||_F$

$$||A||_F = \sqrt{\Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

Konditionszahl

$$\kappa(A) = \frac{\max_{x \in \mathbb{R}^n, ||x||=1} ||Ax||}{\min_{x \in \mathbb{R}^n, ||x||=1} ||Ax||}$$

Spektralsatz

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine reelle symmetrische Matrix. Dann gibt es eine Orthonomalbasis aus Eigenvektoren bzw. $A = VDV^T$, wobei D die Diagonalmatrix aller EW ist und die Spalten von V die normierten EV sind.

Diskretisierung

Quantisierung

Interpolation

Bezier Kurven

SVD

$$A = U \Sigma V^T$$

- Σ ist Diagonalmatrix, $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \cdots \geq 0$
- U und V sind orthogonal
- Die Spalten von U bzw. V sind EV von AA^T bzw. $A^T A$
- $\sigma_{kk} = \sqrt{\lambda_k}$ von A
- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}, \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Informationen

$\text{rang}(A) = r$

Bild

$\text{im}(A) =< u_1, \ldots, u_r >$

Kern

$\ker(A) =< v_{r+1}, \ldots, v_n >$

Norm

$|||A|||_2 = \sigma_{11}$

Lösungstheorie

- $n = m$ und $\det(A) \neq 0$: eindeutige Lösung
- $n = m$ und $\det(A) = 0$ oder $n \neq m$:
  - nur lösbar, falls $b \in \mathrm{im}(A)$
  - alle Lösungen: x_0+ $\ker(A)$ wobei x_0 eine spezielle Lösung ist

Pseudo-Inverse

$$A^{\sim 1} = V\Sigma^{\sim 1}U^T$$

wobei

$$\Sigma^{\sim 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_r} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösen

- A hat maximalen Rang ($\mathrm{rank}(A) = \min\{n, m\}$)
  - überbestimmtes System ($n < m$)
    $x = A^{\sim 1}b$ löst $||Ax - b|| = \min$
  - unterbestimmtes System ($n > m$)
    $x = A^{\sim 1}b$ löst $Ax = b$ und erfüllst $||x||_2 = \min$
- $\mathrm{rank}(A) < \min\{n, m\}$
  - $x = A^{\sim 1}b$ minimiert $||Ax - b||_2 = \min$ das Residuum und
  - ist unter allen diesen Lösungen diejenige mit der kleinsten Norm $||x||_2 = \min$

Iterative Verfahren