Mathe C2

Felix Leitl

9. August 2023

Inhaltsverzeichnis

Stetige Funktionen

Definition 1: Stetig

Def:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion

- f heißt stetig im Punkt $x \in I$, wenn gilt:
  Für jede Folge (X_n) in I mit $x_n \to x$ gilt auch $f(x_n) \to f(x)$
- f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ stetig ist

Anschaulich:

- „ f stetig in x “ bedeutet, dass f in x nicht springt
- „ f stetig “ bedeutet, dass f nirgendwo springt

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$

Lemma 1:

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Lemma 2:

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Lemma 3:

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$
Zu jeder rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 1:

Sei I ein Intervall, $x \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die stetig in x sind.
Dann gilt:

- $f + g$ ist stetig in x
- $f - g$ ist stetig in x
- $f \cdot g$ ist stetig in x
- Falls $g(y) \neq 0, \forall y \in I$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in x

Komposition stetiger Funktionen

Satz 2:

Seien I, J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ und $f(I) \subset J$
Ferner sei f stetig in $x \in I$ und g stetig in $y = f(x)$
Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x

Zwischenwertsatz

Satz 3: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in (a, b) jeden beliebigen Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

Satz 4: Variante des Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ jeden beliebigen Wert

$$y \in [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$$

an

Satz über Nullstellen

Satz 5: Nullstellen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. Dann hat f in (a, b) mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$

Satz von Minimum und Maximum

Satz 6: Minimum und Maximum

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_{\text{min}}, x_{\text{max}} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\text{min}}) \leq f(x) \leq f(x_{\text{max}}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere gilt für x_{min} und x_{max}

$$f(x_{\text{min}}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$f(x_{\text{max}}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Definition 2: Schreibweisen

Sei (x_n) eine reelle Folge. Wir schreiben $x_n \to \infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \geq C$$

Analog schreiben wir $x_n \to -\infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \leq C$$

Metrik in normierten Räumen

Definition 3: Metrik

Ist $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann heißt die Abbildung

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := ||x-y||$$

die zur Norm $||\cdot||$ gehörige Metrik

ϵ-Umgebung

Definition 4: ϵ-Umgebung

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Für einen Punt $x \in V$ und $\epsilon > 0$ heißt die Menge

$$B_\epsilon(x) := \{d(x,y) < \epsilon\} = \{y \in V : ||x-y|| < \epsilon\}$$

eine ϵ-Umgebung von x. Man spricht von der offenen Kugel mit Radius ϵ um x

Umgebungen

Definition 5: Umgebung

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $x \in V$ ein Punkt in V. Dann heißt eine Teilmenge $U \subset V$ eine Umgebung von x, wenn sie eine ϵ-Umgebung von x enthält, d.h. wenn $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subset U$

Innere Punkte

Definition 6: Innerer Punkt

Sei $M \subset V$. Ein Punkt $x \in M$ heißt innerer Punkt von M, falls ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset M$ existiert.
Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das Innere von M und wird mit $\mathring{M}$ bezeichnet

Randpunkte

Definition 7: Randpunkt

Sei $M \subset V$. Ein Punkt $x \in V$ heißt Randpunkt von M, falls in jeder Umgebung $B_\epsilon(x)$ ein Punkt aus M und aus $V \backslash M$ ist.
Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M und wird mit ∂M bezeichnet.
Die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der Abschluss von M

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 8: Offene Menge

Eine Teilmenge $O \subset V$ heißt offen, wenn zu jedem $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset O$ existiert, d.h., wenn O Umgebung aller ihrer Punkte $x \in O$ ist.

Definition 9: Abgeschlossene Menge

Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt abgeschlossen, wenn $V \backslash A$ offen ist

Konvergenz in $\mathbb{R}$

Definition 10: Konvergenz

Eine reelle Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad |x_n - x| < \epsilon$$

Mit Hilfe der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ können wir dies auch formulieren als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad d(x_n, x) < \epsilon$$

und mit ϵ-Umgebung als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad x_n \in B_\epsilon(x)$$

Konvergenzkriterien

Lemma 4:

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum (x_n) eine Folge in V und $x \in V$.
Dann sind äquivalent:

1. (x_n) konvergiert gegen x, d.h. $x_n \to x$
2. $||x_n - x||$ ist Nullfolge, d.h. $||x_n - x|| \to 0$
3. Es gilt $||x_n - x|| \geq y_n$ für eine reelle Nullfolge (y_n)

4. Für jede Umgebung U von x:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad x_n \in U$$

Äquivalente Normen

Definition 11: Äquivalente Normen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $||\cdot||_\alpha$ und $||\cdot||_\beta$ zwei Normen auf V. Dann heißen $||\cdot||_\alpha$ und $||\cdot||_\beta$ äquivalent, wenn Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha ||x||_\alpha \leq ||x||_\beta \leq \beta ||x||_\alpha \quad \forall x \in V$$

Satz 7:

$||\cdot||_1, ||\cdot||_2, ||\cdot||_\infty$ sind äquivalent auf $\mathbb{R}^n$

Satz 8:

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent

Äquivalente Normen und ihre Umgebungen

Satz 9:

Sei $V, ||\cdot||_\alpha$ ein normierter Raum und $U \subset V$ eine Umgebung von x bezüglich $||\cdot||_\alpha$. Dann ist U auch Umgebung bezüglich jeder zu $||\cdot||_\alpha$ äquivalenten Norm $||\cdot||_\beta$

Konvergenz und äquivalente Normen

Satz 10:

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $||\cdot||_\alpha$ und $||\cdot||_beta$ zwei äquivalente Normen. Dann sind für eine Folge (x_n) in V und $x \in V$ äquivalent:

- (x_n) konvergiert gegen x bezüglich $||\cdot||_\alpha$
- (x_n) konvergiert gegen x bezüglich $||\cdot||_\beta$

Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

Satz 11:

Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Dann konvergiert $(x(n))$ genau dann gegen x, wenn gilt

$$x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k \quad k = 1, ..., m$$

Abgeschlossene Mengen und Konvergenz

Satz 12:

Sei $A \subset V$ eine Teilmenge eines normierten Raums, dann sind äquivalent:

1. A ist abgeschlossen
2. Für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ für alle n gilt auch $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$

Grenzwertsätze in normierten Räumen

Satz 13:

Der Grenzwert einer in V konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt

Satz 14:

Konvergente Folgen sind beschränkt

Satz 15:

Sei V ein normierter Raum, (a_n) und (b_n) Folgen in V und (λ_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit

$$a_n \to a \in V, \quad b_n \to b \in V, \quad \lambda_n \to \lambda \in \mathbb{K}$$

Dann gilt:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n - b_n \to a - b$
- $\lambda_n a_n \to \lambda a$

Cauchey-Folgen

Definition 12: Cauchey-Folge

Eine Folge (a_n) in V heißt Cauchey-Folge, wenn gilt:

$$\forall \epsilon \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \quad ||a_n - a_m|| < \epsilon$$

Satz 16:

Jede Cauchey-Folge in V ist beschränkt

Satz 17:

Jede konvergente Folge in V ist eine Cauchey-Folge

Konvergenz von Chauchey-Folgen

Definition 13:Vollständig

Ein normierter Raum heißt vollständig, wenn jede Chauchey-Folge in V konvergiert

Satz 18:

$\mathbb{R}$ ist vollständig

Satz 19:

Sei V endlichdimensional. Dann ist V vollständig

Konvergenz und Teilfolgen

Satz 20:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V konvergiert genau dann gegen a, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert

Satz 21: Bolzano-Weierstrass

Sei V endlichdimensional. Dann besitzt jede beschränkte Folge in V eine konvergente Teilfolge

Stetigkeit in normierten Räumen

Satz 22:

Sind $f, g : D \to Y$ sowie $h : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset Y$ stetig, dann sind auch $f + g : D \to Y, f - g : D \to Y$ und $hf : D \to Y$ stetig

Stetigkeit auf Unterräumen

Satz 23:

Sei $f : X \to Y$ stetig und $D \subset X$ eine Teilmenge von X. Dann sind auch die Einschränkungen $f|_D : D \to Y$ stetig

ϵ-δ-Kriterium

Satz 24:

Eine Funktion $f : D \to Y$ ist genau dann steig im Punkt x/inD, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad ||x - y||_X < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_Y < \epsilon \quad \forall y \in D$$

Gleichmäßig stetig

Definition 14: Gleichmäßigkeit

Eine Funktion $f : D \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : \quad ||x - y||_X < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_Y < \epsilon \quad \forall y \in D$$

Lipschitz-Stetigkeit

Definition 15: Lipschitz-stetig

Eine Abbildung $f : D \to Y$ auf $D \subset X$ heißt Lipschitz-stetig, wenn ein $L \geq 0$ existiert mit

$$||f(x) - f(y)||_Y \leq L||x - y||_X \quad \forall x, y \in X$$

Satz 25:

Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist gleichmäßig stetig

Stetigkeit linearer Abbildungen

Satz 26:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax$. Dann ist f Lipschitz-stetig und somit insbesondere gleichmäßig stetig und stetig

Steigung von Funktionen

Es scheint zu gelten, dass eine Funktion mit Lipschitz-Konstante L maximal die Steigung L haben kann

Funktionsgrenzwerte

Definition 16:

Sei $f : D \to Y$ eine Funktion und $x \in D$. Wir schreiben

$$f(y) \xrightarrow[y \to x]{} C,$$

wenn für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \neq x$ gilt:

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} C$$

Differenzierbarkeit

Definition 17: Differenzierbar im Punkt

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $x \in (a, b)$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir den Grenzwert die Ableitung von f im Punkt x und schreiben dafür $f'(x)$

Definition 18: Differenzierbar

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn sie in allen Punkten $x \in (a, b)$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f

Definition 19: Stetig differenzierbar

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar und die Ableitung $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig ist

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz 27:

Seien $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in U$. Dann ist f auch stetig in x

Satz 28: Rechenregeln

Seien $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ in $x \in U$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ ist in x differenzierbar mit $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$

2. $f+g : U \to \mathbb{R}$ ist in x differenzierbar mit $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Satz 29: Produktregel

Seien $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ in $x \in U$ differenzierbar. Dann ist auch $fg : U \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar mit $(fg)'(x) = f'(x)g'(x)$

Differenzierbare Funktionen

Integration

Folgen und Reihen