Mathe C2

Felix Leitl

11. August 2023

Inhaltsverzeichnis

Stetige Funktionen

Definition 1: Stetig

Def:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion

- f heißt stetig im Punkt $x \in I$, wenn gilt:
  Für jede Folge (X_n) in I mit $x_n \to x$ gilt auch $f(x_n) \to f(x)$
- f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ stetig ist

Anschaulich:

- „ f stetig in x “ bedeutet, dass f in x nicht springt
- „ f stetig “ bedeutet, dass f nirgendwo springt

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$

Lemma 1:

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Lemma 2:

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Lemma 3:

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$
Zu jeder rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 1:

Sei I ein Intervall, $x \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die stetig in x sind.
Dann gilt:

- $f + g$ ist stetig in x
- $f - g$ ist stetig in x
- $f \cdot g$ ist stetig in x
- Falls $g(y) \neq 0, \forall y \in I$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in x

Komposition stetiger Funktionen

Satz 2:

Seien I, J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ und $f(I) \subset J$
Ferner sei f stetig in $x \in I$ und g stetig in $y = f(x)$
Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x

Zwischenwertsatz

Satz 3: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in (a, b) jeden beliebigen Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

Satz 4: Variante des Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ jeden beliebigen Wert

$$y \in [\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$$

an

Satz über Nullstellen

Satz 5: Nullstellen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. Dann hat f in (a, b) mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$

Satz von Minimum und Maximum

Satz 6: Minimum und Maximum

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere gilt für $x_{\min}$ und $x_{\max}$

$$f(x_{\min}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$f(x_{\max}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Definition 2: Schreibweisen

Sei (x_n) eine reelle Folge. Wir schreiben $x_n \to \infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \geq C$$

Analog schreiben wir $x_n \to -\infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \leq C$$

Metrik in normierten Räumen

Definition 3: Metrik

Ist $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann heißt die Abbildung

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d(x, y) := ||x - y||$$

die zur Norm $||\cdot||$ gehörige Metrik

ϵ-Umgebung

Definition 4: ϵ-Umgebung

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Für einen Punt $x \in V$ und $\epsilon > 0$ heißt die Menge

$$B_\epsilon(x) := \{d(x, y) < \epsilon\} = \{y \in V : ||x - y|| < \epsilon\}$$

eine ϵ-Umgebung von x. Man spricht von der offenen Kugel mit Radius ϵ um x

Umgebungen

Definition 5: Umgebung

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $x \in V$ ein Punkt in V. Dann heißt eine Teilmenge $U \subset V$ eine Umgebung von x, wenn sie eine ϵ-Umgebung von x enthält, d.h. wenn $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subset U$

Innere Punkte

Definition 6: Innerer Punkt

Sei $M \subset V$. Ein Punkt $x \in M$ heißt innerer Punkt von M, falls ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset M$ existiert.
Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das Innere von M und wird mit $\mathring{M}$ bezeichnet

Randpunkte

Definition 7: Randpunkt

Sei $M \subset V$. Ein Punkt $x \in V$ heißt Randpunkt von M, falls in jeder Umgebung $B_\epsilon(x)$ ein Punkt aus M und aus $V \backslash M$ ist.
Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M und wird mit ∂M bezeichnet.
Die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der Abschluss von M

Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 8: Offene Menge

Eine Teilmenge $O \subset V$ heißt offen, wenn zu jedem $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset O$ existiert, d.h., wenn O Umgebung aller ihrer Punkte $x \in O$ ist.

Definition 9: Abgeschlossene Menge

Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt abgeschlossen, wenn $V \backslash A$ offen ist

Konvergenz in $\mathbb{R}$

Definition 10: Konvergenz

Eine reelle Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad |x_n - x| < \epsilon$$

Mit Hilfe der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ können wir dies auch formulieren als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad d(x_n, x) < \epsilon$$

und mit ϵ-Umgebung als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad x_n \in B_\epsilon(x)$$

Konvergenzkriterien

Lemma 4:

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum (x_n) eine Folge in V und $x \in V$.
Dann sind äquivalent:

1. (x_n) konvergiert gegen x, d.h. $x_n \to x$
2. $||x_n - x||$ ist Nullfolge, d.h. $||x_n - x|| \to 0$
3. Es gilt $||x_n - x|| \geq y_n$ für eine reelle Nullfolge (y_n)

4. Für jede Umgebung U von x:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad x_n \in U$$

Äquivalente Normen

Definition 11: Äquivalente Normen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $||\cdot||_\alpha$ und $||\cdot||_\beta$ zwei Normen auf V. Dann heißen $||\cdot||_\alpha$ und $||\cdot||_\beta$ äquivalent, wenn Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha||x||_\alpha \leq ||x||_\beta \leq \beta||x||_\alpha \quad \forall x \in V$$

Satz 7:

$||\cdot||_1, ||\cdot||_2, ||\cdot||_\infty$ sind äquivalent auf $\mathbb{R}^n$

Satz 8:

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen auf V äquivalent

Äquivalente Normen und ihre Umgebungen

Satz 9:

Sei $V, ||\cdot||_\alpha$ ein normierter Raum und $U \subset V$ eine Umgebung von x bezüglich $||\cdot||_\alpha$. Dann ist U auch Umgebung bezüglich jeder zu $||\cdot||_\alpha$ äquivalenten Norm $||\cdot||_\beta$

Konvergenz und äquivalente Normen

Satz 10:

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $||\cdot||_\alpha$ und $||\cdot||_beta$ zwei äquivalente Normen. Dann sind für eine Folge (x_n) in V und $x \in V$ äquivalent:

- (x_n) konvergiert gegen x bezüglich $||\cdot||_\alpha$
- (x_n) konvergiert gegen x bezüglich $||\cdot||_\beta$

Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

Satz 11:

Sei $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^m$. Dann konvergiert $(x(n))$ genau dann gegen x, wenn gilt

$$x_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k \quad k = 1, ..., m$$

Abgeschlossene Mengen und Konvergenz

Satz 12:

Sei $A \subset V$ eine Teilmenge eines normierten Raums, dann sind äquivalent:

1. A ist abgeschlossen
2. Für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ für alle n gilt auch $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$

Grenzwertsätze in normierten Räumen

Satz 13:

Der Grenzwert einer in V konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt

Satz 14:

Konvergente Folgen sind beschränkt

Satz 15:

Sei V ein normierter Raum, (a_n) und (b_n) Folgen in V und (λ_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit

$$a_n \to a \in V, \quad b_n \to b \in V, \quad \lambda_n \to \lambda \in \mathbb{K}$$

Dann gilt:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n - b_n \to a - b$
- $\lambda_n a_n \to \lambda a$

Cauchey-Folgen

Definition 12: Cauchey-Folge

Eine Folge (a_n) in V heißt Cauchey-Folge, wenn gilt:

$$\forall \epsilon \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \quad ||a_n - a_m|| < \epsilon$$

Satz 16:

Jede Cauchey-Folge in V ist beschränkt

Satz 17:

Jede konvergente Folge in V ist eine Cauchey-Folge

Konvergenz von Chauchey-Folgen

Definition 13:Vollständig

Ein normierter Raum heißt vollständig, wenn jede Chauchey-Folge in V konvergiert

Satz 18:

$\mathbb{R}$ ist vollständig

Satz 19:

Sei V endlichdimensional. Dann ist V vollständig

Konvergenz und Teilfolgen

Satz 20:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V konvergiert genau dann gegen a, wenn jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert

Satz 21: Bolzano-Weierstrass

Sei V endlichdimensional. Dann besitzt jede beschränkte Folge in V eine konvergente Teilfolge

Stetigkeit in normierten Räumen

Satz 22:

Sind $f, g : D \to Y$ sowie $h : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset Y$ stetig, dann sind auch $f + g : D \to Y, f - g : D \to Y$ und $hf : D \to Y$ stetig

Stetigkeit auf Unterräumen

Satz 23:

Sei $f : X \to Y$ stetig und $D \subset X$ eine Teilmenge von X. Dann sind auch die Einschränkungen $f|_D : D \to Y$ stetig

ϵ-δ-Kriterium

Satz 24:

Eine Funktion $f : D \to Y$ ist genau dann steig im Punkt x/inD, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad ||x - y||_X < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_Y < \epsilon \quad \forall y \in D$$

Gleichmäßig stetig

Definition 14: Gleichmäßigkeit

Eine Funktion $f : D \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : \quad ||x - y||_X < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_Y < \epsilon \quad \forall y \in D$$

Lipschitz-Stetigkeit

Definition 15: Lipschitz-stetig

Eine Abbildung $f : D \to Y$ auf $D \subset X$ heißt Lipschitz-stetig, wenn ein $L \geq 0$ existiert mit

$$||f(x) - f(y)||_Y \leq L||x - y||_X \quad \forall x, y \in X$$

Satz 25:

Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist gleichmäßig stetig

Stetigkeit linearer Abbildungen

Satz 26:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax$. Dann ist f Lipschitz-stetig und somit insbesondere gleichmäßig stetig und stetig

Steigung von Funktionen

Es scheint zu gelten, dass eine Funktion mit Lipschitz-Konstante L maximal die Steigung L haben kann

Funktionsgrenzwerte

Definition 16:

Sei $f : D \to Y$ eine Funktion und $x \in D$. Wir schreiben

$$f(y) \xrightarrow[y \to x]{} C,$$

wenn für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \neq x$ gilt:

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} C$$

Differenzierbare Funktionen

Differenzierbarkeit

Definition 17: Differenzierbar im Punkt

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $x \in (a, b)$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir den Grenzwert die Ableitung von f im Punkt x und schreiben dafür $f'(x)$

Definition 18: Differenzierbar

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn sie in allen Punkten $x \in (a, b)$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f

Definition 19: Stetig differenzierbar

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar und die Ableitung $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig ist

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz 27:

Seien $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in U$. Dann ist f auch stetig in x

Satz 28: Linearität

Seien $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ in $x \in U$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ ist in x differenzierbar mit $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
2. $f + g : U \to \mathbb{R}$ ist in x differenzierbar mit $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Satz 29: Produktregel

Seien $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ in $x \in U$ differenzierbar. Dann ist auch $fg : U \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar mit $(fg)'(x) = f'(x)g'(x)$

Satz 30:

Seien $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad $n > 0$, dann ist p stetig differenzierbar und p' ist ein Polynom vom Grad $n - 1$. Insbesondere gilt:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \Rightarrow \quad p'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}$$

Satz 31: Quotientenregel

Sieein $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in .U$ und $g(x) \neq 0$. Dann gilt auch $\frac{f}{g} : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x mit

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Satz 32: Kettenregel

Seien $U, W \subset \mathbb{R}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in U$, $f(U) \subset W$ und $g : W \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y = f(x) \in W$. Dann ist auch $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x mit

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Differenzierbarkeit und lineare Approximation

Satz 33:

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $x \in U$ mit Ableitung $f'(x)$, wenn

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + r(h)$$

mit $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ gilt. (bzw. unter Verwendung der Landau-Symbole: $r \in o(h)$)

Differenzierbarkeit heißt, dass sich f lokal gut durch eine lineare Funktion approximieren lässt

Monotone Funktionen

Definition 20: Monoton

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

- monoton wachsend, wenn $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad \forall x, y \in D$
- monoton fallend, wenn $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad \forall x, y \in D$
- streng monoton wachsend, wenn $x \leq y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad \forall x, y \in D$
- streng monoton fallend, wenn $x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y) \quad \forall x, y \in D$

Satz 34:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist $f : D \to W = f(D)$ invertierbar, d.h. es existiert eine Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to \mathbb{R}$ mit

$$f^{-1} \circ f = Id : D \to D, \quad f \circ f^{-1} = Id : W \to W$$

Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 35:

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Ferner sei f differenzierbar im Punkt $x \in U$ mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : W = f(U) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y = f(x)$ und es gilt:

$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Globale und lokale Extrema

Definition 21: Extrema

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x \in D$. Dann hat f in x ein

- globales Minimum, wenn $f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in D$
- globales Maximum, wenn $f(x) \geq f(y) \quad \forall y \in D$
- lokales Minimum, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit $f(x) \leq f(y) \quad \forall y \in B_\epsilon(x) \cap D$
- lokales Maximum, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit $f(x) \geq f(y) \quad \forall y \in B_\epsilon(x) \cap D$

Einseitige Funktionsgrenzen

Definition 22: Einseitige Funktionsgrenzen

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to Y$. Wir schreiben:

$$f(y) \xrightarrow[y \searrow x]{} \text{ bzw. } \lim_{y \searrow x} f(y) = C$$

wenn für jede Folge x_n in D mit $x_n > x$ gilt:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} C$$

Wir schreiben

$$f(y) \xrightarrow[y \nearrow x]{} C \text{ bzw. } \lim_{y \nearrow x} f(y) = C$$

wenn für jede Folge (x_n) in D mit $x_n < x$ gilt:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} C$$

Optimalitätsbedingung

Satz 36:

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ und $x \in D$ ein innerer Punkt. Die Funktion f habe ein lokales Extremum in x und sei differenzierbar in x. Dann gilt $f'(x) = 0$

Satz 37:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differnzierbar und im Punkt $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar mit

$$f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) > 0 \quad (\text{ bzw. } f''(x) < 0)$$

Dann nimmt f in x ein lokales Minimum (bzw. Maximum) an.

Satz von Rolle

Satz 38: Rolle

Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$. Ferner sei f differenzierbar in (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$

Anschaulich: Wenn $f(a) = f(b)$, dann gibt es mindestens einen Punkt mit horizontaler Tangente

Mittelwertsatz

Satz 39: Mittelwert

Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und f differenzierbar in (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Anschaulich: es gibt mindestens einen Punkt bei dem die Tangentensteigung der Sekantensteigung auf $[a, b]$ entspricht

Anwendung: Monotonie und Ableitung

Satz 40:

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

1. $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist monoton wachsend
2. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist monoton fallend
3. $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton wachsend
4. $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton fallend

Anwendung: Lipschitz-Stetigkeit und Ableitung

Satz 41:

Sei $f(a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in (a, b)$$

mit $L = \sup_{\xi \in (a,b)} |f'(\xi)|$. Ferner ist dies das kleinste L, für das die Abschätzung gilt. Achtung: Es kann $L = \infty$ gelten

Raum der stetig differenzierbaren Funktionen

Definition 23: Fortsetzbar

Wir sagen, dass eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ stetig (auf $\overline{U}$) fortsetzbar ist, wenn eine stetige Funktion $\hat{f} : \overline{U} \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f}|_U = f$ existiert

Satz 42:

Sei U offen und beschränkt. Dann ist $C^1(\overline{U})$ ein Untervektorraum von $C(\overline{U})$ und ein vollständig normierter Raum mit der Norm

$$||f||_{\infty,1} := ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

Satz 43:

Sei $f \in C^1([a,b])$ und $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konstant

Höhere Ableitung

Definition 24: Zweite Ableitung

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt zweimal differenzierbar, wenn f differenzierbar ist und auch $f' : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dann heißt $f'' = (f')' : U \to \mathbb{R}$ die zweite Ableitung

Definition 25: k-te Ableitung

Allgemein heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar mit $k \geq 1$, wenn f $(k-1)$-mal differenzierbar und die $(k-1)$-te Ableitung wieder differenzierbar ist. Wir schreiben dann $f^(k)$ für die k-te Ableitung von f

Konvexität

Definition 26: Konvex

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

für alle $x, y \in D$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt. f heißt strikt konvex, falls für $x \neq y$ sogar $<$ gilt

Satz 44:

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und konvex mit $f'(x) = 0$ für ein $x \in (a,b)$. Dann nimmt f in x ein globales Minimum an

Lemma 5:

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und konvex. Dann gilt für alle $x, y \in (a,b)$

$$f(x) + f'(x)(y-x) \leq f(y)$$

Satz 45:

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind äquivalent:

- f ist konvex
- Für alle $x, y \in (a,b)$ gilt $f(x) + f'(x)(y-x) \leq f(y)$

- f' ist monoton wachsend

Punktweise Konvergenz

Definition 27: Punktweise Konvergenz

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ auf dem gleichen Definitionsbereich D. Wir sagen f_n konvergiert punktweise gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f_n(x) \to f(x)$$

Wir schreiben $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{pw} f$

Gleichmäßige Konvergenz

Definition 28: Gleichmäßige Konvergenz

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ auf dem gleichen Definitionsbereich D. Wir sagen f_n konvergiert gleichmäßig, gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn gilt;

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Wir schreiben dann $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{glm} f$

Satz 46:

Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist auch f stetig

Folgen und Reihen

Taylor-Formel

Satz 47:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und $x \in [a, b]$. Dann gilt

$$f(y) = T_n[f, x](y) + R_n(y - x)$$

mit dem Taylor-Polynom

$$T_n[f, x] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y - x)^k$$

und es gilt für das Restglied $R_n(h) \in o(h^n)$, d.h.

$$\frac{R_n(h)}{h^n} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Definition 29: Analytischer Punkt

Falls für die Funktion f

$$T_n[f, x(y)] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-k)^k \xrightarrow[n \to \infty]{=} f(y)$$

in einer Umgebung $B_\epsilon(x)$ gilt, so heißt f analytischer Punkt x

Satz 48:

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Ferner existiert ein $C < \infty$ mit

$$||f^{(n)}||_\infty = \sup_{x \in (a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann ist f in (a,b) analytisch. Ist ferner das Intervall (a,b) beschränkt, dann gilt $T_n[f,x] \xrightarrow[n \to \infty]{glm} f$ für jede festes $x \in (a,b)$

Reihen

Definition 30: Reihe

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$, dann nennen wir die Folge von endlichen Summen

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n \in \mathbb{N}}$$

die zu (a_n) gehöhrige Reihe und die s_n Partialsummen der Reihe. Für die Reihe schreiben wir auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Der Startindex muss nicht immer 1 sein. (Oft ist er 0)

Konvergenz von Reihen

Definition 31: Konvergente Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. In deisem Fall schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Geometrische Reihen

Satz 49:

Für $q \in [0,1)$ konvergiert die geometrische Reihe gegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Absolute Konvergenz

Definition 32: Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist

Reihen als unendliche Summen

Definition 33: Umordnung

Unter einer Umordnung einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ verstehen wir eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ wobei $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist

Satz 50: Umordnungssatz

Für eine absolut konvergente Reihe konvergiert jede Umordnung gegen den gleichen Grenzwert

Satz 51:

Ist eine Reihe konvergent aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jeder Zahl $z \in \mathbb{R}$ eine Umordnung, die gegen z konvergiert. Ferner existierten Umordnungen die divergieren

Cauchey-Kriterium

Satz 52: Cauchey-Kriterium

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}$, konvergiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : \quad |\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$$

Beschränkungskriterium

Satz 53:

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen beschränkt ist

Majorantenkriterium

Satz 54:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit $c : n \geq 0$ und $|a_n| \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut

Quotientenkriterium

Satz 55:

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\theta \in (0, 1)$ mit

$$a_n \neq \text{ und } |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \theta \quad \forall n \geq n_0$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut

Leibnitz-Kriterium

Satz 56:

Sei (a_n) eine monoton fallende oder monoton wachende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Häufungspunkte

Definition 34: Häufungspunkt

Ein Punkt a heißt Häufungspunkt einer Folge (a_n), wenn eine Teilfolge (a_{k_n}) existiert, die gegen a konvergiert

Definition 35: Limes Superior und Inferior

Der Limes Superior und Limes Inferior einer reellen Folge (a_n) sind gegeben durch:

$$\limsup_{n\to\infty} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k, \quad \liminf_{n\to\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$$

Wurzelkriterium

Satz57

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $C = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:

- Falls $C < 1$: Die Reihe konvergiert absolut
- Falls $C > 1$: Die Reihe divergiert
- Falls $C = 1$ und $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für alles bis auf endlich viele n: Die Reihe divergiert

Potenzreihen

Definition 36: Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

Im Folgenden sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt und $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe.

- Für $|x - x_0| < R$ konvergiert die Reihe absolut
- Für $|x - x_0| > R$ divergiert die Reihe

- Für $|x - x_0| = R$ wissen wir nichts

Satz 58:

Die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ mit } f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

haben den Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f auf $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ unendlich oft differenzierbar mit

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$
$$f^{(m)}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(m)}(x)$$

und die Potenzreihen der Ableitungen konvergieren ebenfalls in I absolut sowie gleichmäßig auf $I_r = [x_0 - e, x_0 + r]$ für jedes $0 < r < R$. Ferner stimmt die Potenzreihe mit der Taylor-Reihe überein

Satz von de l'Hospital

Satz 59: Regel von de l'Hospital

Sei $I = (a, b)$ ein Intervall mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Ferner gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und es existiere der Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$$

1. Fall: $\lim_{x \nearrow b} g(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} f(x)$. Dann gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Fall: $\lim_{x \nearrow b} g(x) = \infty$. Dann gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \geq x_0$ und $x_0 \in I$ und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analoges gilt für $x \searrow a$ sowie $x \to \infty$ und $x \to -\infty$

Integration

Treppenfunktion

Definition 37: Treppenfunktion

Eine Funktion $f[a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

und Konstanten $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = c_k$ falls $x \in (t_{k-1}, t_k)$ bzw.

$$f|_{t_{k-1},t_k} = c_k \quad k = 1, ..., n$$

Im Folgenden sei $\tau[a,b]$ die Menge aller Treppenfunktionen, d.h.

$$\tau[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ ist Treppenfunktion}\}$$

Satz 60:

Die Menge aller Treppenfunktionen $\tau[a,b]$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{[a,b]}$

Satz 61:

Ein Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der Unterteilung und damit wohldefiniert

Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen

Satz 62:

Das Integral $\int_a^b (\cdot)dx : \tau[a,b] \to \mathbb{R}$ ist linear und monoton, d.h.

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \forall f, g \in \tau[a,b]$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \qquad \forall f \in \tau[a,b], \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad \forall f, g \in \tau[a,b] \text{ mit } f \leq g$$

Unter- und Obersumme

Definition 38: Unter- und Obersumme

Für beschränktes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir die Unter- und Obersumme durch:

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx := \sup\{\int_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in \tau[a,b], \varphi \leq f\},$$
$$\int_{a}^{b*} f(x)dx := \inf\{\int_a^b \psi(x)dx | \psi \in \tau[a,b], f \leq \psi\}$$

Riemann-integrierabe Funktionen

Definition 39: Riemann-integrierbar

Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn Unter- und Obersummen übereinstimmen, d.h. wenn

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b*} f(x)dx$$

gilt. In diesem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{a*}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b*} f(x)dx$$

Einschließung zwischen Treppenfunktionen

Satz 63:

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \tau[a,b]$ existieren mit

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ und } \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \epsilon$$

Integriebarkeit stetiger Funktionen

Satz 64:

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemannintegrierbar

Satz 65:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann existieren zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \tau[a,b]$ mit

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ und } ||\varphi - \psi||_\infty \leq \epsilon$$

Satz 66:

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist gleichmäßig stetig