

# Mathe C2

Felix Leitl

8. August 2023

## Inhaltsverzeichnis

<b>Stetige Funktionen</b>	<b>2</b>
$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ . . . . .	2
Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	2
Komposition stetiger Funktionen . . . . .	3
Zwischenwertsatz . . . . .	3
Satz über Nullstellen . . . . .	3
Satz von Minimum und Maximum . . . . .	3
Metrik in normierten Räumen . . . . .	4
$\epsilon$ -Umgebung . . . . .	4
Umgebungen . . . . .	4
Innere Punkte . . . . .	4
Randpunkte . . . . .	5
Offene und abgeschlossene Mengen . . . . .	5
Konvergenz in $\mathbb{R}$ . . . . .	5
Konvergenzkriterien . . . . .	5
Äquivalente Normen . . . . .	6
Äquivalente Normen und ihre Umgebungen . . . . .	6
Konvergenz und äquivalente Normen . . . . .	6
Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	6
Abgeschlossene Mengen und Konvergenz . . . . .	7
Grenzwertsätze in normierten Räumen . . . . .	7
<b>Differenzierbare Funktionen</b>	<b>7</b>
<b>Integration</b>	<b>7</b>
<b>Folgen und Reihen</b>	<b>7</b>

## Stetige Funktionen

### Definition 1: Stetig

Def:

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion

- $f$  heißt stetig im Punkt  $x \in I$ , wenn gilt:  
Für jede Folge  $(X_n)$  in  $I$  mit  $x_n \rightarrow x$  gilt auch  $f(x_n) \rightarrow f(x)$
- $f$  heißt stetig, wenn  $f$  in jedem Punkt  $x \in I$  stetig ist

Anschaulich:

- „ $f$  stetig in  $x$ “ bedeutet, dass  $f$  in  $x$  nicht springt
- „ $f$  stetig“ bedeutet, dass  $f$  nirgendwo springt

### $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$

#### Lemma 1:

Zu jeder reellen Zahl  $r \in \mathbb{R}$  und jedem  $\epsilon > 0$  existiert eine rationale Zahl  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $|r - q| < \epsilon$

#### Lemma 2:

Zu jeder reellen Zahl  $r \in \mathbb{R}$  und jedem  $\epsilon > 0$  existiert eine rationale Zahl  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $|r - q| < \epsilon$

#### Lemma 3:

Zu jeder reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{Q}$  mit  $x_n \rightarrow x$   
Zu jeder rationalen Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  existiert eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $x_n \rightarrow x$

## Eigenschaften stetiger Funktionen

### Satz 1:

Sei  $I$  ein Intervall,  $x \in I$  und  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, die stetig in  $x$  sind.  
Dann gilt:

- $f + g$  ist stetig in  $x$
- $f - g$  ist stetig in  $x$
- $f \cdot g$  ist stetig in  $x$
- Falls  $g(y) \neq 0, \forall y \in I$ , so ist  $\frac{f}{g}$  stetig in  $x$

## Komposition stetiger Funktionen

### Satz 2:

Seien  $I, J$  Intervalle,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(I) \subset J$   
Ferner sei  $f$  stetig in  $x \in I$  und  $g$  stetig in  $y = f(x)$   
Dann ist  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x$

## Zwischenwertsatz

### Satz 3:

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Dann nimmt  $f$  in  $(a, b)$  jeden beliebigen Wert  $y$  zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an

### Satz 4:

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Dann nimmt  $f$  in  $[a, b]$  jeden beliebigen Wert

$$y \in [\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x)]$$

an

## Satz über Nullstellen

### Satz 5:

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  und es gelte  $f(a) < 0 < f(b)$  oder  $f(a) > 0 > f(b)$ . Dann hat  $f$  in  $(a, b)$  mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein  $x \in (a, b)$  mit  $f(x) = 0$

## Satz von Minimum und Maximum

### Satz 6:

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Dann nimmt  $f$  in  $[a, b]$  Maximum und Minimum an, d.h. es existieren  $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$  mit

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}), \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere gilt für  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$

$$\begin{aligned} f(x_{\min}) &= \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \\ f(x_{\max}) &= \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \end{aligned}$$

**Definition 2:**

Sei  $(x_n)$  eine reelle Folge. Wir schreiben  $x_n \rightarrow \infty$ , wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \geq C$$

Analog schreiben wir  $x_n \rightarrow -\infty$ , wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \leq C$$

**Metrik in normierten Räumen****Definition 3:**

Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann heißt die Abbildung

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \|x - y\|$$

die zur Norm  $\|\cdot\|$  gehörige Metrik

 **$\epsilon$ -Umgebung****Definition 4:**

Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Für einen Punkt  $x \in V$  und  $\epsilon > 0$  heißt die Menge

$$B_\epsilon(x) := \{d(x, y) < \epsilon\} = \{y \in V : \|x - y\| < \epsilon\}$$

eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$ . Man spricht von der offenen Kugel mit Radius  $\epsilon$  um  $x$

**Umgebungen****Definition 5:**

Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $x \in V$  ein Punkt in  $V$ . Dann heißt eine Teilmenge  $U \subset V$  eine Umgebung von  $x$ , wenn sie eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$  enthält, d.h. wenn  $\epsilon > 0$  existiert mit  $B_\epsilon(x) \subset U$

**Innere Punkte****Definition 6:**

Sei  $M \subset V$ . Ein Punkt  $x \in M$  heißt innerer Punkt von  $M$ , falls ein  $\epsilon > 0$  mit  $B_\epsilon(x) \subset M$  existiert.

Die Menge aller inneren Punkte von  $M$  heißt das Innere von  $M$  und wird mit  $\overset{\circ}{M}$  bezeichnet

## Randpunkte

### Definition 7:

Sei  $M \subset V$ . Ein Punkt  $x \in V$  heißt Randpunkt von  $M$ , falls in jeder Umgebung  $B_\epsilon(x)$  ein Punkt aus  $M$  und aus  $V \setminus M$  ist.

Die Menge aller Randpunkte von  $M$  heißt der Rand von  $M$  und wird mit  $\partial M$  bezeichnet.

Die Menge  $\overline{M} := M \cup \partial M$  heißt der Abschluss von  $M$

## Offene und abgeschlossene Mengen

### Definition 8:

Eine Teilmenge  $O \subset V$  heißt offen, wenn zu jedem  $x \in O$  ein  $\epsilon > 0$  mit  $B_\epsilon(x) \subset O$  existiert, d.h., wenn  $O$  Umgebung aller ihrer Punkte  $x \in O$  ist.

### Definition 9:

Eine Teilmenge  $A \subset V$  heißt abgeschlossen, wenn  $V \setminus A$  offen ist

## Konvergenz in $\mathbb{R}$

### Definition 10:

Eine reelle Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x \in \mathbb{R}$ , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \epsilon$$

Mit Hilfe der Metrik  $d(x, y) = |x - y|$  können wir dies auch formulieren als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \epsilon$$

und mit  $\epsilon$ -Umgebung als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in B_\epsilon(x)$$

## Konvergenzkriterien

### Lemma 4:

Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum  $(x_n)$  eine Folge in  $V$  und  $x \in V$ . Dann sind äquivalent:

1.  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x$ , d.h.  $x_n \rightarrow x$
2.  $\|x_n - x\|$  ist Nullfolge, d.h.  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$
3. Es gilt  $\|x_n - x\| \geq y_n$  für eine reelle Nullfolge  $(y_n)$

4. Für jede Umgebung  $U$  von  $x$ :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \in U$$

## Äquivalente Normen

### Definition 11:

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\|\cdot\|_\alpha$  und  $\|\cdot\|_\beta$  zwei Normen auf  $V$ . Dann heißen  $\|\cdot\|_\alpha$  und  $\|\cdot\|_\beta$  äquivalent, wenn Konstanten  $\alpha, \beta > 0$  existieren mit

$$\alpha\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq \beta\|x\|_\alpha \quad \forall x \in V$$

### Satz 7:

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  sind äquivalent auf  $\mathbb{R}^n$

### Satz 8:

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann sind alle Normen auf  $V$  äquivalent

## Äquivalente Normen und ihre Umgebungen

### Satz 9:

Sei  $V, \|\cdot\|_\alpha$  ein normierter Raum und  $U \subset V$  eine Umgebung von  $x$  bezüglich  $\|\cdot\|_\alpha$ . Dann ist  $U$  auch Umgebung bezüglich jeder zu  $\|\cdot\|_\alpha$  äquivalenten Norm  $\|\cdot\|_\beta$

## Konvergenz und äquivalente Normen

### Satz 10:

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $\|\cdot\|_\alpha$  und  $\|\cdot\|_\beta$  zwei äquivalente Normen. Dann sind für eine Folge  $(x_n)$  in  $V$  und  $x \in V$  äquivalent:

- $(x_n)$  konvergiert gegen  $x$  bezüglich  $\|\cdot\|_\alpha$
- $(x_n)$  konvergiert gegen  $x$  bezüglich  $\|\cdot\|_\beta$

## Konvergenz in $\mathbb{R}^n$

### Satz 11:

Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^m$  und  $x \in \mathbb{R}^m$ . Dann

konvergiert  $(x(n))$  genau dann gegen  $x$ , wenn gilt

$$x_k^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_k \quad k = 1, \dots, m$$

## Abgeschlossene Mengen und Konvergenz

### Satz 12:

Sei  $A \subset V$  eine Teilmenge eines normierten Raums, dann sind äquivalent:

1.  $A$  ist abgeschlossen
2. Für jede konvergente Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in A$  für alle  $n$  gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$

## Grenzwertsätze in normierten Räumen

### Satz 13:

Der Grenzwert einer in  $V$  konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt

### Satz 14:

Konvergente Folgen sind beschränkt

### Satz 15:

Sei  $V$  ein normierter Raum,  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Folgen in  $V$  und  $(\lambda_n)$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  mit

$$a_n \rightarrow a \in V, \quad b_n \rightarrow b \in V, \quad \lambda_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{K}$$

Dann gilt:

- $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- $a_n - b_n \rightarrow a - b$
- $\lambda_n a_n \rightarrow \lambda a$

## Differenzierbare Funktionen

## Integration

## Folgen und Reihen