

Mathe C2

Felix Leitl

7. August 2023

Inhaltsverzeichnis

Stetige Funktionen	2
\mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R}	2
Eigenschaften stetiger Funktionen	2
Komposition stetiger Funktionen	2
Zwischenwertsatz	3
Satz über Nullstellen	3
Satz von Minimum und Maximum	3
Metrik in normierten Räumen	4
Differenzierbare Funktionen	4
Integration	4
Folgen und Reihen	4

Stetige Funktionen

Def:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

- f heißt stetig im Punkt $x \in I$, wenn gilt:
Für jede Folge (X_n) in I mit $x_n \rightarrow x$ gilt auch $f(x_n) \rightarrow f(x)$
- f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ stetig ist

Anschaulich:

- „ f stetig in x “ bedeutet, dass f in x nicht springt
- „ f stetig“ bedeutet, dass f nirgendwo springt

\mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R}

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (x_n) in \mathbb{Q} mit $x_n \rightarrow x$
Zu jeder rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \rightarrow x$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Sei I ein Intervall, $x \in I$ und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die stetig in x sind. Dann gilt:

- $f + g$ ist stetig in x
- $f - g$ ist stetig in x
- $f \cdot g$ ist stetig in x
- Falls $g(y) \neq 0, \forall y \in I$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in x

Komposition stetiger Funktionen

Seien I, J Intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(I) \subset J$
 Ferner sei f stetig in $x \in I$ und g stetig in $y = f(x)$
 Dann ist $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x

Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in (a, b) jeden beliebigen Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ jeden beliebigen Wert

$$y \in [\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x)]$$

an

Satz über Nullstellen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. Dann hat f in (a, b) mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$

Satz von Minimum und Maximum

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}), \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere gilt für x_{\min} und x_{\max}

$$\begin{aligned} f(x_{\min}) &= \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \\ f(x_{\max}) &= \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \end{aligned}$$

Sei (x_n) eine reelle Folge. Wir schreiben $x_n \rightarrow \infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \geq C$$

Analog schreiben wir $x_n \rightarrow -\infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \leq C$$

Metrik in normierten Räumen

Differenzierbare Funktionen

Integration

Folgen und Reihen