Algorithmik kontinuierlicher Systeme

Felix Leitl

2. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

Direkte Verfahren

Direkte Verfahren Lösen ein Problem nach endlich vielen Schritten. Verwendung: kleine, vollbesetzte Matrizen.

LR-Zerlegung

Ziel

$$A = LR$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & * \end{pmatrix}$$

Algorithmus

1. i-te Zeile in R übertragen
2. i-te Spalte dividiert durch a_{ii} in L über nehmen. Erstes Element der Spalte gleich 1 setzten
3. Mit i-ter Zeile die i-te Spalte eliminieren

Komplexität

$\mathcal{O}(n^3)$

Anwendung

- $\det(A) = \det(L) \times \det(R) = 1 \times \det(R)$
- Lösen mehrerer GLS:
  - $Ly = b$ mit Vorwärtssubstitution $\mathcal{O}(n^2)$
  - $Rx = y$ mit Rückwärtssubstitution $\mathcal{O}(n^2)$

LRP-Zerlegung

$$A = PLR$$

QR-Zerlegung

Ziel

$$A = QR$$

Housholder-Spiegelungen

Mit einer Housholder-Spiegelung in eriner Spalte Nullen einfügen (außer Diagonalelement)
→ nach $n-1$ Schritten erhält man die Dreiecksmatrix R

$$
\begin{aligned}
R &= H_{n-1} \dots H_2 H_1 A \\
Q &= (H_{n-1} \dots H_2 H_1)^{-1} = H_1 H_2 \dots H_{n-1}
\end{aligned}
$$

Givens-Rotationen

Mit einer Givens-Rotation ein Element (unterhalb der Diagonalen) zu Null machen
→ nach $n(n-1)/2$ Schritten erhält man die Dreiecksmatrix R

$$
J_{ij}(\varphi) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & c & & -s & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & s & & c & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

Wobei c_1 an Position jj ist und c_2 an Position ii

$$
\begin{aligned}
c &= \cos(\varphi) = \frac{\sigma \cdot a_{jj}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}} \\
s &= \sin(\varphi) = \frac{-\sigma \cdot a_{ij}}{\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}} \\
\sigma &= \operatorname{sign}(a_{jj})
\end{aligned}
$$

Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
R &= J_{m,n^*} \dots J_{2,1} A \\
Q &= J_{2,1}^T \dots J_{m,n^*}^T \\
n^* &= \min\{m-1, n\}
\end{aligned}
$$

Cholesky-Zerlegung

Wenn A symmetrisch und positiv definit ist kann man A faktorisieren in

$$
A = LDL^T
$$

Wobei L das L der LR-Zerlegung ist und D der Diagonalanteil von R

Lineare Ausgleichsrechnung

Matrizen

Orthogonal

Eine Matrix ist orthogonal, falls eine der Bedingungen erfüllt ist:

- $Q^T Q = Id$
- $QQ^T = Id$
- Spalten oder Zeilen bilden eine Orthonomalbasis
- Die Abbildung Q ist winkel- und längentreu
- Q erhält das Skalarprdukt: $Qx \circ Qy = x \circ y$

Skalarprodukt

$x \circ y = \Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i$

Tridiagonalmatrix

Die inverse einer tridiagonalen Matrix ist in der Regel voll besetzt

Diskretisierung

Quantisierung

Interpolation

Bezier Kurven

SVD

Iterative Verfahren