Mathe C2

Felix Leitl

7. August 2023

Inhaltsverzeichnis

Stetige Funktionen

Def:
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion

- f heißt stetig im Punkt $x \in I$, wenn gilt:
  Für jede Folge (X_n) in I mit $x_n \to x$ gilt auch $f(x_n) \to f(x)$
- f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in I$ stetig ist

Anschaulich:

- „ f stetig in x " bedeutet, dass f in x nicht springt
- „ f stetig " bedeutet, dass f nirgendwo springt

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Zu jeder reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$und jedem $\epsilon > 0$ existiert eine rationale Zahl $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \epsilon$

Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$
Zu jeder rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ existiert eine Folge (x_n) in $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$

Eigenschaften stetiger Funktionen

Sei I ein Intervall, $x \in I$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die stetig in x sind. Dann gilt:

- $f + g$ ist stetig in x
- $f - g$ ist stetig in x
- $f \cdot g$ ist stetig in x
- Falls $g(y) \neq 0, \forall y \in I$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in x

Komposition stetig er Funktionen

Seien I, J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ und $f(I) \subset J$
Ferner sei f stetig in $x \in I$ und g stetig in $y = f(x)$
Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ stetig in x

Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in (a, b) jeden beliebigen Wert y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ jeden beliebigen Wert

$$y \in [\min_{x \in [a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x)]$$

an

Satz über Nullstellen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. Dann hat f in (a, b) mindestens eine Nullstelle, d.h. es existiert ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$

Satz von Minimum und Maximum

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Dann nimmt f in $[a, b]$ Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_{\text{min}}, x_{\text{max}} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\text{min}}) \leq f(x) \leq f(x_{\text{max}}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Insbesondere gilt für x_{min} und x_{max}

$$f(x_{\text{min}}) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$
$$f(x_{\text{max}}) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Sei (x_n) eine reelle Folge. Wir schreiben $x_n \to \infty$, wenn gilt
$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \geq C$$

Analog schreiben wir $x_n \to -\infty$, wenn gilt

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x_n \leq C$$

Metrik in normierten Räumen

Ist $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann heißt die Abbildung

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := ||x-y||$$

die zur Norm $||\cdot||$ gehörige Metrik

ϵ-Umgebung

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Für einen Punt $x \in V$ und $\epsilon > 0$ heißt die Menge

$$B_\epsilon(x) := \{d(x,y) < \epsilon\} = \{y \in V : ||x-y|| < \epsilon\}$$

eine ϵ-Umgebung von x. Man spricht von der offenen Kugel mit Radius ϵ um x

Umgebungen

Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $x \in V$ ein Punkt in V. Dann heißt eine Teilmenge $U \subset V$ eine Umgebung von x, wenn sie eine ϵ-Umgebung von x enthält, d.h. wenn $\epsilon > 0$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subset U$

Innere Punkte

Sei $M \subset V$. Ein Punkt $x \in M$ heißt innerer Punkt von M, falls ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset M$ existiert.
Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das Innere von M und wird mit $\mathring{M}$ bezeichnet

Randpunkte

Sei $M \subset V$. Ein Punkt $x \in V$ heißt Randpunkt von M, falls in jeder Umgebung $B_\epsilon(x)$ ein Punkt aus M und aus $V \backslash M$ ist.
Die Menge aller Randpunkte von M heißt der Rand von M und wird mit ∂M bezeichnet.
Die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ heißt der Abschluss von M

Differenzierbare Funktionen

Integration

Folgen und Reihen