UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CIRCUITOS ELÉCTRICOS
SEMESTRE 2020 - 2

Tareas y Apuntes 6

Profesor:
Dr. Juan Carlos Martínez Rosas

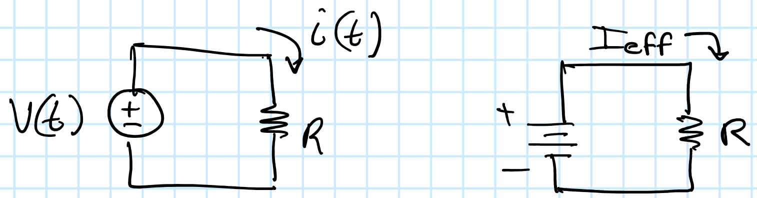
Alumno:
Murrieta Villegas Alfonso

TAREA 6

Monday, 8 June 2020 8:03 PM

Valor Efectivo o RMS

- El valor efectivo de una corriente periódica es la corriente en D.C que entrega la misma potencia promedio a un resistor.



- El objetivo es encontrar I_{eff} que transfiera la misma potencia al resistor R que la sinusoide
- La potencia promedia absorbida por el resistor en un circuito de D.C es

$$P = I_{eff}^2 R$$

- La potencia promedio absorbido en A.C por un res.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R\,dt = \frac{R}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

- Igualando ① y ② y resolviendo para I_{eff}

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$$

- El valor efectivo del voltaje: $V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2\,dt}$

- Esto indica que el valor efectivo es la raíz cuadrado de la media del cuadrado de la señal cuadrado de la media del cuadrado de la señal periódica

$$I_{eff} = I_{rms} \quad , \quad V_{eff} = V_{rms}$$

- Para cualquier función periódica $x(t)$ en general el valor rms está dada por

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2\, dt}$$

6 Encuentre el valor rms para

→ $i(t) = I_m \cos \omega t$ ¦ Solución $I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t\, dt}$$

$$\int_0^T \cos^2 \omega t\, dt = \int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega}\right]\Big|_0^T$$

$$= \frac{T}{2} - \cancel{\frac{\operatorname{sen} 2\omega T}{4\omega}}^{\,0} = \frac{T}{2}$$

$$\therefore I_{rms} = \sqrt{\frac{I_m^2}{\cancel{T}}\left(\frac{\cancel{T}}{2}\right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \;/\!/$$

→ $v(t) = V_m \cos \omega t$ ¦ Solución $V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos(\omega t)^2 dt} = \sqrt{\frac{V_m^2}{T}\int_0^T \cos \omega t^2 dt}$$

$$V_{rms}^2 = \frac{V_m^2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos 2\omega t}{2}\, dt = \frac{V_m^2}{T}\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^T dt + \int_0^T \cos 2\omega t\, dt\right)\right]$$

$$= \frac{V_m^2}{2\pi}\left(\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}\pi - 0) + \frac{1}{4}\left(\cancel{\operatorname{sen}(4\pi\omega) - \operatorname{sen}(0)}^{\,0}\right)\right) =$$

$$V_{rms}^2 = \frac{V_m^2}{2\pi}(\pi) = \frac{V_m^2}{2} \; ; \; V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \;/\!/$$

- Recordando que la potencia promedio es

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

- Entonces esta potencia puede escribirse en términos de valores rms

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

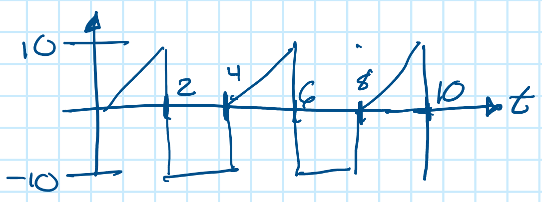
- Similarmente la potencia promedio absorbida por un resistor R en

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} |I|^2 R$$

donde $|I|^2 = I * I^*$ puede se escrita como

$$P = I_{rms}^2 R = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

7 Determine el valor rms de la siguiente forma de onda, si la corriente es pasada por resistor de 2 Ω. Encuentre la potencia promedio absorbida por el resistor.



$$i(t) = \begin{cases} 5t \\ -10 \end{cases}$$

$T = 4$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$$

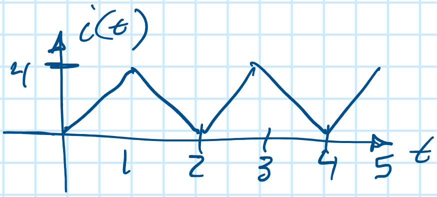
$$I_{rms}^2 = \frac{1}{4}\left[\int_0^2 (5t)^2 dt + \int_2^4 -10\, dt\right] = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{200}{3}\right) + (400 - 200)\right]$$

$$I_{rms}^2 = \frac{1}{4}(266.66) \simeq 66.667 \; ; \quad I_{rms} = 8.164\,[A]$$

$$P = I_{rms}^2 R = (66.667)(2) = 133.33\,[W]$$

8 Encuentre el valor rms de la forma de onda de una

⑧ Encuentre el valor rms de la forma de onda de una corriente que fluye a través de un resistor de 9 Ω, calcular la potencia promedio absorbida por el resistor.



$$i(t) = \begin{cases} 4t \\ -4t+8 \end{cases} \qquad T = 2$$

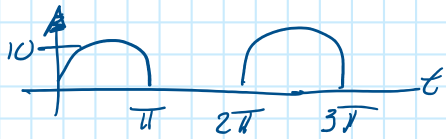
$$I_{rms}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (4t)^2 dt + \int_1^2 (-4t+8)^2 dt$$

$$I_{rms}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{16t^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{16t^3}{3} - \frac{64t^2}{2} + 64t\right)\Big|_1^2\right] =$$

$$I_{rms}^2 = \frac{16}{3} \quad ; \quad I_{rms} \cong 2.3094\,[A]$$

$$P = I_{rms}^2 R = \left(\frac{16}{3}\right)(9) = 48\,[W]$$

⑨ La forma de onda siguiente es una mitad de onda rectificadora de una onda sinusoidal de la potencia promedio disipada en un resistor de 10 Ω



$$V(t) \begin{cases} 10\sin(t) \\ 0 \end{cases} \qquad T = 2\pi$$

$$V_{rms}^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi (10\sin(t))^2 dt\right) = \frac{100}{2\pi}\left(\int_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\right)$$

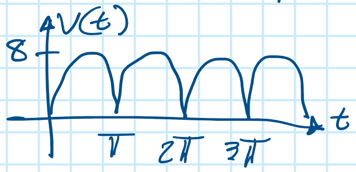
$$V_{rms}^2 = \frac{100}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \left(\frac{1}{4}\left(\cancel{\sin 2\pi - \sin 0}\right)\right)\right] = \left(\frac{100}{2\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 25$$

$$V_{rms} = \sqrt{25} = 5\,[V]$$

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{25}{10} = 2.5\,[W]$$

⑩ Encuentre el valor rms de una onda rectificador

10) Encuentre el valor rms de una onda rectificada de manera completa.
Calcular la potencia promedio disipada en un r de 6Ω



$$V(t) = \begin{cases} 8 \sin(t) \\ -8 \sin(t) \end{cases} \qquad T = 2\pi$$

$$V_{rms}^2 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} 64 \sin t^2 dt + \int_{\pi}^{2\pi} 64 \sin(t)^2 dt\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{64}{2}\left[\left(\int_0^{\pi} dt - \int_0^{\pi} \cos(2t) dt\right) + \left(\int_{\pi}^{2\pi} dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos(2t) dt\right)\right]\right]$$

$$V_{rms}^2 = \frac{64}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\pi - 0\right) - \left(\frac{1}{4}\left(\cancel{\sin 2\pi - \sin 0}\right)^{0}\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{2\pi - \pi}\right)^{\pi} - \left(\cancel{\ldots}\right)^{0}\right] = 32$$

$$\therefore V_{rms} = \sqrt{64} \approx 5.6568 \; [V]$$

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{32}{6} = 5.333 \; [W]$$

TAREA 6

Monday, 8 June 2020 7:21 PM

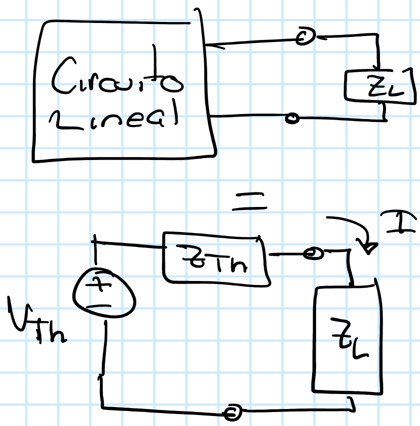
Máxima Transferencia de Potencia Promedio

- La máxima potencia podía ser entregada a la carga si la resistencia de carga R_L era igual a la resistencia de Thevenin R_{TH} para circuitos puramente resistivos

- La carga es usualmente representada por una impedancia la cual puede modelar un motor

① $Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$

② $Z_L = R_L + jX_L$



- La corriente a través de la carga será

$$I = \frac{V_{Th}}{Z_{Th} + Z_L} = \frac{V_{Th}}{(R_{Th} + jX_{Th}) + (R_L + jX_L)}$$

Potencia Promedio:

$$P = \frac{1}{2}|I|^2 R_L = \frac{|V_{Th}|^2 \frac{R_L}{2}}{(R_{Th} + jX_{Th})^2 + (R_L + jX_L)^2}$$

- Ajustar parámetros de carga R_L y X_L tal que P sea máxima

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0 \quad y \quad \frac{\partial P}{\partial X_L} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{|V_{Th}|^2 R_L (X_{Th} + X_L)}{[\ldots]^2}$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{|V_{Th}|^2 R_L (X_{Th} + X_L)}{\left[(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2\right]^2}$$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|V_{Th}|^2\left[(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2 - 2R_L(R_{Th}+R_L)\right]}{\left[(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2\right]^2}$$

como $\frac{\partial P}{\partial X_L} = 0$; $X_L = -X_{Th}$ //

como $\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0$; $R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th}+X_L)^2}$ //

① Demostrar en ⑧ y ⑨ se obtienen los resultados anteriores

→ Igualando $\frac{\partial P}{\partial X_L} = 0$ para aplicar en 8

$$\frac{|V_{Th}|^2 R_L (X_{Th}+X_L)}{\left[(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2\right]^2} = 0 \; ; \; \cancel{|V_{Th}|^2}\,\cancel{R_L}(X_{Th}+X_L) = 0$$

$$\therefore (X_{Th}+X_L) = 0 \; ; \; X_{Th} = -X_L \; ; \; X_L = -X_{Th} //$$

→ Igualando $\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0$ para aplicar 9

$$\frac{|V_{Th}|^2\left[(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2 - 2R_L(R_{Th}+R_L)\right]}{\left[(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2\right]^2} = 0$$

$$\cancel{|V_{Th}|^2}\left[(R_{Th}+R_L)^2 + (X_{Th}+X_L)^2 - 2R_L(R_{Th}+R_L)\right] = 0$$

$$R_{Th}^2 + \cancel{2R_{Th}R} + \cancel{R_L^2} - 2R_L^2 - \cancel{2R_LR_{Th}} + (X_{Th}+X_L)^2 = 0$$

$$R_{Th}^2 + \cancel{2R_{Th}R_L} + \cancel{R_L^2} - 2R_L^2 - \cancel{2R_LR_{Th}} + (X_{Th}+X_L)^2 = 0$$

$$R_{Th}^2 - R_L^2 + (X_{Th}+X_L)^2 = 0$$

$$R_L^2 = R_{Th}^2 + (X_{Th}+X_L)^2 ; \quad R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th}+X_L)^2}$$

Combinando (10) y (11) llevo a la conclusión de que para máxima transferencia de potencia Z_L debe de ser seleccionado, tal que

- $X_L = -X_{Th}$
- $R_L = R_{Th}$

$$Z_L = R_L + jX_L = R_{Th} - jX_{Th} = Z_{Th}^{*}$$

Nota: Para una máxima transferencia de carga deberá ser igual al conjugado complejo de la impedancia de Thevenin

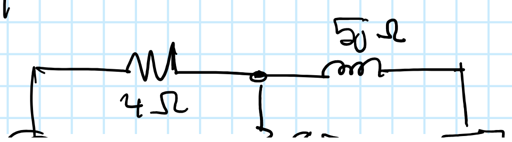
- Este resultado es conocido como el teorema de Máxima Transferencia de Potencia para estado sinusoidal

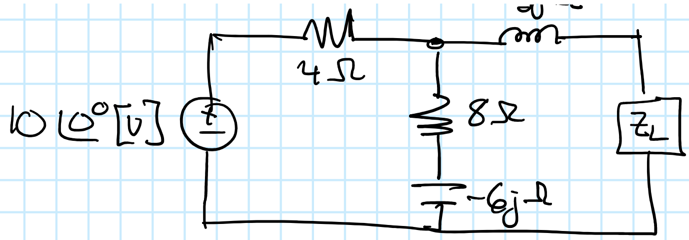
$$P_{max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}}$$

En una situación dada, tal que la carga sea puramente real, la condición para la máxima transferencia de potencia se configura $X_L = 0$

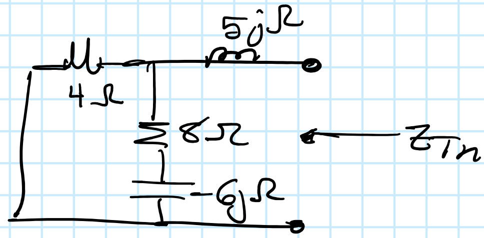
$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2} = |Z_{Th}|$$

- Ejemplo: Determine Z_L que maximice la potencia promedio



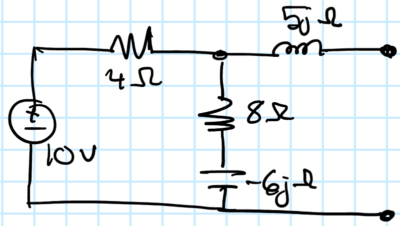


- Primero se obtiene el equivalente en Thevenin



$$Z_{Th} = 5j + 4 \parallel (8-6j) = 2.93 + 4.4j$$

- Para V_{Th} se consideró el siguiente circuito



// Divisor de voltaje

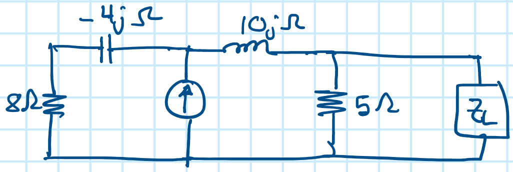
$$V_{Th} = \frac{8-6j}{4+8-6j}(10) \approx 7.454\angle{-10.3}\ [V]$$

- La impedancia de carga provocará una máxima potencia cuando

$$Z_L = Z_{Th}^{*} = 2.933 - 4.467j\ \Omega$$

$$\therefore P_{max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{(7.454)^2}{8(2.933)} \approx 2.368\ [W]$$

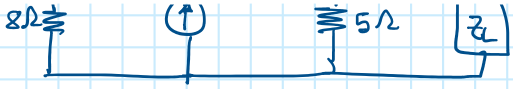
② Encuentre la impedancia de carga Z_L que absorba la máxima potencia promedia. Calcule la máxima potencia promedio



Soluciones:

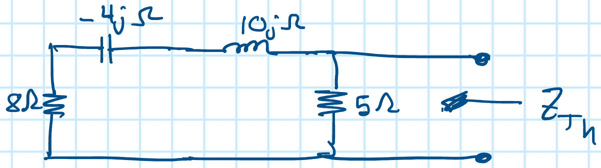
$Z_L = 3.415 - .7317j$

$P = 1.429$ [W]



$Z_L = 3.415 - .7317j$

$P = 1.429$ [W]

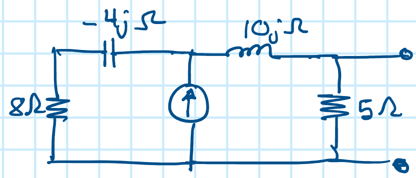


$Z_1 = 10j + 8 - 4j =$

$= 8 + 6j$

$$Z_{Th} = 8 + 6j \parallel 5 = \frac{5(8+6j)}{13+6j} \simeq 3.4146 + .7317j \; [\Omega] \; //$$

Para P_{max}



① $I_1(8-4j) + I_2(5+10j) = 0$

② $-I_1 + I_2 = 2A$

$I_1 = I_2 - 2$

//Resolviendo Sistema Ecua.

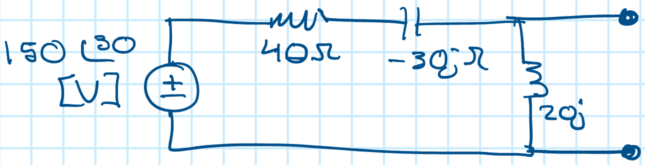
$$(I_2 - 2)(8-4j) + I_2(5+10j) = 0$$

$$I_2(13-6j) = 16 - 8j \; ; \; I_2 \simeq 1.2483 - .039j$$

$$\therefore V_{Th} = I_2 R = (1.2483 - .039j)(5) \simeq 6.247 \angle -51.34°$$

$$P_{max} = \frac{(6.247)}{8(3.4146)} \simeq 1.42856 \; [W] \; //$$

● Encuentre R_L que absorba la máxima potencia promedia. Calcule la potencia promedio.

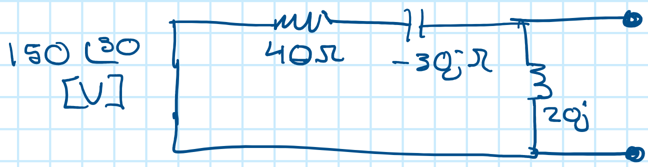


$$Z_{Th} = 40 - 30j \parallel 20j$$

$$= \frac{(40-30)(20j)}{40-10j} =$$

$$R_L = Z_{Th} \simeq 9.411 + 22.353j \; // \; [\Omega]$$

Para P_{max}



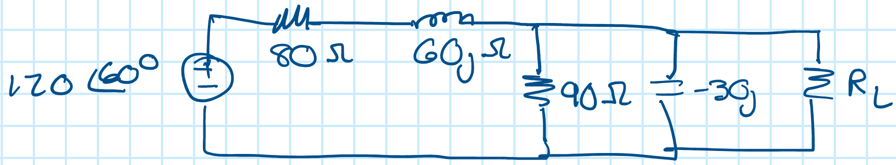
$$V_{Th} = \frac{20j}{40-10j}(150\angle 30)$$

$$V_{Th} = \frac{20\angle 90}{\ldots}(150\angle 30) \simeq \ldots$$

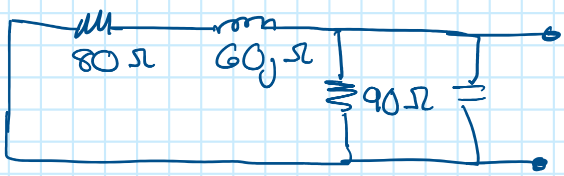
$$V_{Th} = \frac{20\angle 90}{41.23\angle -14.06}(150\angle 30) \cong 72.76\angle 134.03°$$

$$\therefore P_{max} = \frac{(72.76)^2}{8(9.411)} \cong 70.3121\,[W]$$

6) El resistor R_L ajustado hasta absorber la máxima potencia promedio. Calcule R_L y la máxima potencia promedio.



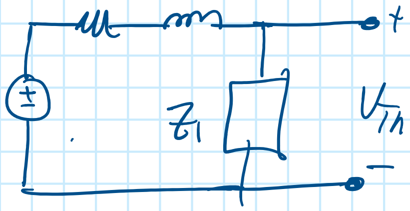
→ Para R_L



$$Z_{Th} = (80 + 60j) \parallel 90 \parallel -30j$$

$$\cong 17.18 - 24.57j$$

→ Para V_{Th} y P_{max}



$$Z_1 = 90 \parallel -30j = 9 - 27j$$

$$V_{Th} = \frac{9-27j}{(80+60j)+(9-27j)}(120\angle 60)$$

$$\cong (.3\angle -91.91)(120\angle 60)$$

$$V_{Th} = 35.98\angle -31.91\,[V]$$

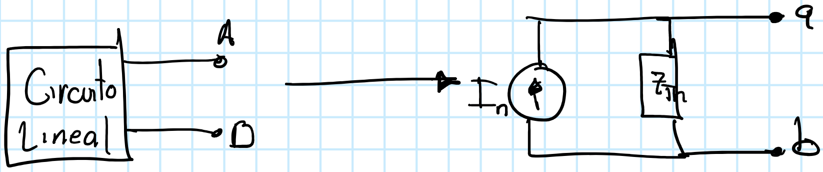
$$\therefore P_{max} = \frac{|V_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{(35.98)^2}{8(17.18)} \cong 9.418\,[W]$$

TAREA 6

Monday, 8 June 2020 6:10 PM

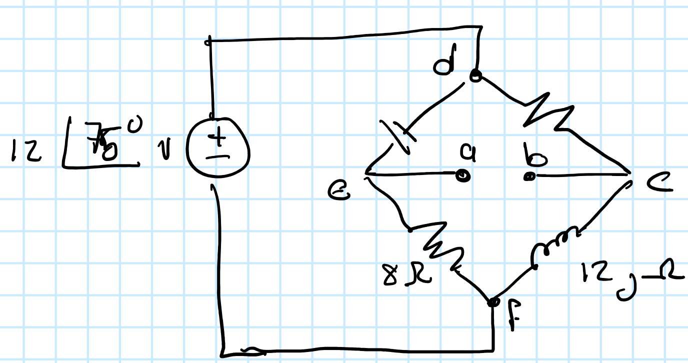
Circuitos Equivalentes Norton y Thevenin

- Los teoremas de Norton y Thevenin son aplicados a circuitos en A.C, al igual que en D.C. La única diferencia es el manejo de números complejos.
- Se ilustro como resolta un circuito Lineal reducido en su equivalente en Thevenin y Norton.



$$\left.\begin{array}{l} V_{Th} = Z_N I_n \\ Z_{Th} = Z_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Transformación de fuentes} \\ \text{igualdad de impedancias} \end{array}$$

- Obtenga el circuito equivalente de Thevenin



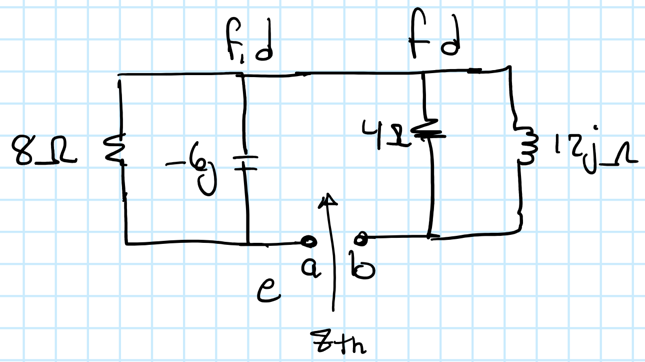
Sol: Se procede a encontrar Z_{Th} configurado la fuente de voltaje anulada

- Redibujando el circuito con la fuente de voltaje acumulada

f d   f d

De tal manera que

acumulada



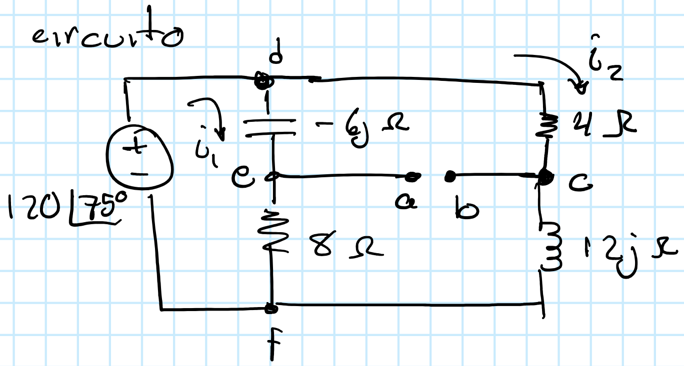
De tal manera que la resistencia de 8 Ω queda en paralelo al capacitor de −6j

$$Z_1 = -6j \parallel 8 = \frac{-6 \times 8}{8-6j} = 2.88 - 3.84j$$

$$Z_2 = 4 \parallel 12j = \frac{4 \times 12j}{4+12j} = 3.6 + 1.2j$$

$$\therefore Z_{th} = Z_1 + Z_2 = 6.48 - 2.64j$$

- Para encontra V_{Th} se considera el siguiente circuito



– Se procede a calcular las corrientes I_1 e I_2

$$I_1 = \frac{120\angle 75^\circ}{8-6j}\ [A] \qquad I_2 = \frac{120\angle 75^\circ}{4+12j}\ [A]$$

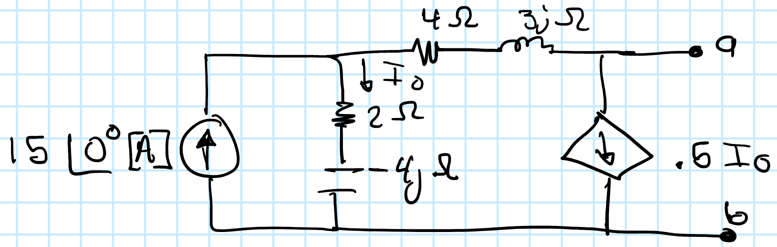
- Aplicando KVL alrededor del laza localizado de lo anterior

$$V_{Th} = 4I_2 + 6j\,I_1 = \frac{480\angle 75^\circ}{4+12j} + \frac{720\angle 75^\circ + 90^\circ}{8-6j}$$

$$\cong 37.95\angle 3.43^\circ + 72\angle 201.87^\circ \cong$$

$\cong -28.936 - 24.55j = 37.95 \angle 220.31° \, [V]$

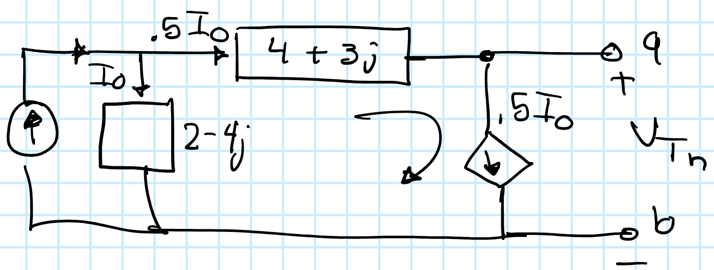
▶ Análisis del procedimiento | Ejemplo 2



• KCL en nodo 1

$15 = I_o + .5 I_o \; ; \; I_o = 10 \, [A]$

• Aplicando KVL al lazo en el lado derecho



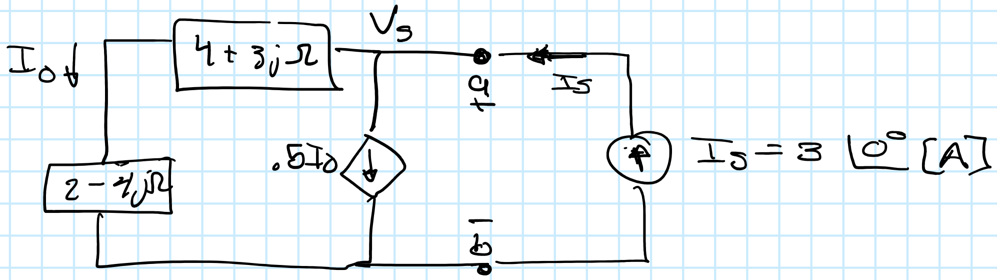
$-I_o(2-4j) + .5 I_o(4+3j) + V_{Th} = 0$

$V_{Th} = 10(2-4j) + 5(4+3j) = -55j = 55 \angle -90° \, [V]$

• Para obtener Z_{Th} se remueven las fuentes independientes

− Presencia de fuentes de corriente dependientes

↳ Se conecta arbitrariamente y con valor conveniente



• Aplicando en el nodo KCL :

$3 = I_o + .5 I_o \; ; \; I_o = 2 \, [A]$

• Aplicando KVL (Lazo externo

Aplicando en el nodo KCL

$3 = I_0 + .5 I_0 ; \; I_0 = 2 [A]$

Aplicando KVL

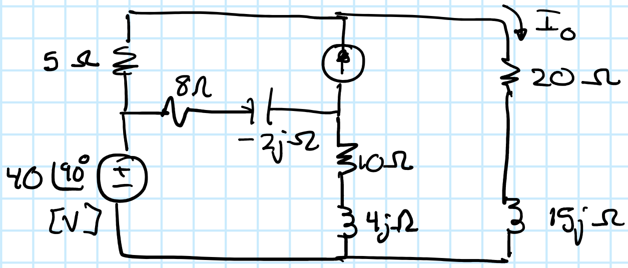
(Lazo externo

$V_s = I_0(4 + 3j + 2 - 4j) = 2(6 - j)$

• La impedancia en Thevenin

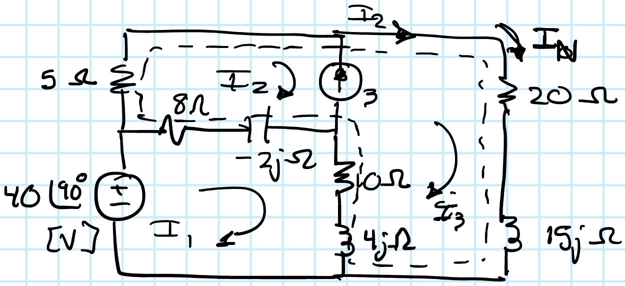
$$Z_{Th} = \frac{V_s}{I_s} = \frac{2(6-j)}{3} = 4 - 0.6667j \, [\Omega]$$

• Obtenga I_0, utilizando el teorema de Norton



Ahora, para obtener I_N se cortocircuitan las terminales a - b y se aplica análisis de malla.

Notar que las mallas 2 y 3 forman una súper malla debido a la fuente de corriente



• Para la malla 1 ①

$-40j + (18 + 2j) I_1 - (8 - 2j) I_2 - (10 + 4j) I_3 = 0$

• Para la super malla ②

$(13 - 2j) I_2 + (10 + 4j) I_3 - (18 + 2j) I_1 = 0$

• En el nodo a, debido a la fuente de corriente ③

$I_3 = I_2 + 3$

• Sustituyendo ecuaciones

$-40j + 5 I_2 = 0 ; \; I_2 = 8j$

• Sustituyendo en ecuación 3

$I_3 = I_2 + 3 = 3 + 8j$

• La corriente de Norton es

$I_N = I_3 = (3 + 8j)$ [A]

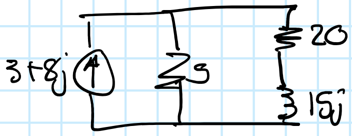
• Sostituyendo en ecuación 3

$I_3 = I_2 + 3 = 3 + 8j$

• La corriente de Norton es

$I_N = I_3 = (3 + 8j)$ [A]

• Circuito simplificado



$$I_0 = \frac{5}{5 + 20 + 15j} I_N$$

$$I_0 = \frac{3 + 8j}{5 + 5j} \cong 1.465 \angle 38.48° \text{ [A]}$$