Metrischer Raum

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Unter einem **metrischen Raum** versteht man in der Mathematik eine Menge, auf der eine Metrik definiert ist. Eine **Metrik** (auch **Abstandsfunktion**) ist eine Funktion, die je zwei Elementen des Raums einen nicht negativen reellen Wert zuordnet, der als *Abstand* der beiden Elemente voneinander aufgefasst werden kann.

Inhaltsverzeichnis

Formale Definition

Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik auf X, wenn für beliebige Elemente x, y und z von X die folgenden Axiome erfüllt sind:

(1) Positive Definitheit: $d\,(x,y) \geq 0$ und $d\,(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) Symmetrie: $d\,(x,y) = d(y,x)$,

(3) Dreiecksungleichung: $d\,(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Die Forderung $d(x,y) \geq 0$ kann weggelassen werden, denn sie folgt aus den anderen, da

$$0 = \frac{1}{2} d(x,x) \leq \frac{1}{2}(d(x,y) + d(y,x)) = \frac{1}{2}(d(x,y) + d(x,y)) = d(x,y).$$

Grundbegriffe

(X, d) heißt metrischer Raum, wenn d eine Metrik auf X ist. Manche Autoren fordern zusätzlich, dass X eine nichtleere Menge sein soll. In der Praxis bezeichnet man zumeist X allein als den metrischen Raum, wenn aus dem Kontext klar ist, dass in diesem Raum die Metrik d benutzt wird.

Eine Abbildung vom Raum in sich selbst heißt Isometrie, sofern sie die Metrik erhält. Figuren, die von einer Isometrie aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent zueinander.

Verallgemeinerungen und Spezialisierungen

Durch Abschwächung, Weglassen oder Verschärfung von einer oder mehreren der Bedingungen (1) bis (3) ergeben sich verschiedene Verallgemeinerungen bzw. Spezialisierungen. Die Bezeichnungen für die Verallgemeinerungen sind leider nicht für alle Gebiete der Mathematik, in denen sie verwendet werden, standardisiert. So wird speziell unter einer *Semimetrik* in der Funktionalanalysis etwas anderes verstanden als in der Topologie (siehe unten).

Ultrametrik

→ *Hauptartikel: Ultrametrik*

Wird die Bedingung der Dreiecksungleichung dahingehend verschärft, dass der Abstand $d(x, y)$ nicht länger sein darf als der längere der beiden Abstände $d(x, z)$ und $d(z, y)$ (mit beliebigem z), erhält man den Begriff der *Ultrametrik*.

Pseudometrik

Wird auf die Bedingung $d\,(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ verzichtet, so erhält man den Begriff der Pseudometrik. In der Funktionalanalysis wird hierfür auch die Bezeichnung Halbmetrik oder Semimetrik verwendet. In *pseudometrischen Räumen* können nichtidentische Punkte den Abstand 0 haben. Eine Pseudometrik ist positiv semidefinit, d. h. Abstände sind stets größer oder gleich 0.

Quasimetrik

Wird auf die Symmetrie verzichtet, erhält man den Begriff der Quasimetrik. Aus einer Quasimetrik d' lässt sich durch $d(x, y) := \frac{1}{2}(d'(x, y) + d'(y, x))$ eine Metrik auf X erzeugen.

Nicht-archimedische Metriken

Wird die Dreiecksungleichung abgeschwächt oder verschärft, dann erhält man nicht-archimedische Metriken. Ein Beispiel ist etwa $d(x, y) \leq K(d(x, z) + d(z, y))$ für ein $K > 1$ oder die Ultrametrik.

In der Topologie werden Metriken ohne Dreiecksungleichung manchmal auch als Semimetriken bezeichnet.

Prämetrik

Wird nur Nicht-Negativität und Bedingung (1) gefordert, dann spricht man von einer Prämetrik. Auf $\mathbb{R}$ ist zum Beispiel durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{f r } x > y \\ |x-y| & \text{sonst} \end{cases}$$

eine solche Prämetrik definiert.

Beispiele

Durch Normen erzeugte Metriken

Jede Norm auf einem Vektorraum induziert durch die Festlegung

$$d(x,y) \equiv \|x-y\|$$

eine Metrik. Somit ist jeder normierte Vektorraum (und erst recht jeder Innenproduktraum, Banachraum oder Hilbertraum) ein metrischer Raum.

Eine Metrik, die aus einer p-Norm abgeleitet ist, heißt auch *Minkowski-Metrik*. Wichtige Spezialfälle sind

- die *Manhattan-Metrik* zu $p = 1$
- die *Euklidische Metrik* zu $p = 2$
- die *Maximum-Metrik* zu $p = \infty$

Weitere Beispiele für Normen (und damit auch für Metriken) finden sich im Artikel Norm (Mathematik).

Aus einer p-Norm abgeleitet sind zum Beispiel die Metriken der folgenden wichtigen Räume:

- der eindimensionale Raum der reellen oder komplexen Zahlen mit dem absoluten Betrag als Norm (mit beliebigem p) und der dadurch gegebenen Betragsmetrik

  $$d(x,y) = |x-y|$$

- der euklidische Raum mit seiner durch den Satz des Pythagoras gegebenen euklidischen Metrik (zur euklidischen Norm für $p = 2$)

  $$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

Als eine *Fréchet-Metrik* wird gelegentlich eine Metrik

$$d(x,y) = \rho(x-y)$$

bezeichnet, die von einer Funktion ρ induziert wird, welche die meisten Eigenschaften einer Norm besitzt, aber nicht homogen ist.

Nicht durch Normen erzeugte Metriken

- Auf jeder Menge lässt sich eine triviale Metrik, die sogenannte diskrete Metrik (die sogar eine Ultrametrik ist) definieren durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{f r}\ x = y \\ 1 & \text{f r}\ x \neq y \end{cases}$$

- Auf $\mathbb{R}$ wird durch $\delta(x,y) = |\mathbf{arctan}(x) - \mathbf{arctan}(y)|$ eine Metrik definiert. Bezüglich dieser Metrik ist $\mathbb{R}$ nicht vollständig. So ist z. B. die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine δ-Cauchy-Folge, die nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert. Die von dieser Metrik erzeugte Topologie stimmt zwar mit der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ überein, aber die von den beiden Metriken induzierten uniformen Strukturen sind offensichtlich verschieden.
- Im Allgemeinen nicht durch eine Norm induziert ist die riemannsche Metrik, die aus einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine riemannsche Mannigfaltigkeit macht. Beispiele dafür:
  - die natürliche Metrik auf einer Kugeloberfläche, in der der Großkreis die kürzeste Verbindung (Geodäte) zwischen zwei Punkten ist;
  - die uneigentliche Metrik im Minkowski-Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ der speziellen Relativitätstheorie, in der *zeitähnliche* Abstände durch $[(\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2 - (\Delta y/c)^2 - (\Delta z/c)^2]^{1/2}$ und *ortsähnliche* Abstände durch $[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta ct)^2]^{1/2}$ gegeben sind;
  - die von der Materieverteilung abhängige Verallgemeinerung dieser Metrik in der allgemeinen Relativitätstheorie.
- Die sogenannte *französische Eisenbahnmetrik* ist ein beliebtes Übungsbeispiel für eine nicht durch eine Norm induzierte Metrik. Sie wird unter Bezugnahme auf einen ausgezeichneten Punkt P („Paris“) wie folgt definiert: Der Abstand zweier verschiedener Punkte, deren Verbindungsgerade durch P verläuft, ist ihr Abstand unter der gewöhnlichen Euklidischen Metrik. Der Abstand zweier verschiedener Punkte, deren Verbindungsgerade nicht durch P verläuft, ist die Summe ihrer Abstände von P.
- Die Hausdorff-Metrik misst den Abstand zwischen *Teilmengen*, nicht *Elementen*, eines metrischen Raums; man könnte sie als Metrik zweiten Grades bezeichnen, denn sie greift auf eine Metrik ersten Grades zwischen den Elementen des metrischen Raums zurück.
- Der Hamming-Abstand ist eine Metrik auf dem Coderaum, die die Unterschiedlichkeit von (gleich langen) Zeichenketten angibt.

Einordnung in die Hierarchie mathematischer Strukturen

Metriken geben einem Raum eine globale und eine lokale mathematische Struktur. Die globale Struktur kommt in geometrischen Eigenschaften wie der Kongruenz von Figuren zum Ausdruck. Die lokale metrische Struktur, also die Definition kleiner Abstände, ermöglicht unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen die Einführung von Differentialoperationen.

Der Begriff „topologischer Raum“ verallgemeinert den Begriff „metrischer Raum“: Jeder metrische Raum ist ein topologischer Raum mit der Topologie, die durch die Metrik induziert wird (siehe dazu Umgebung). Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum.

Hierarchie topologischer Räume und der zugehörigen Strukturen

Euklidischer Raum	hat	Skalarprodukt
ist		induziert
Normierter Raum	hat	Norm
ist		induziert
Metrischer Raum	hat	Metrik
ist		induziert
Uniformer Raum	hat	Uniforme Struktur
ist		induziert
Topologischer Raum	hat	Topologie

Ein topologischer Raum heißt metrisierbar, wenn er zu einem metrischen Raum homöomorph ist. Damit ist ein topologischer Raum (X,T) metrisierbar, wenn eine Metrik d auf X existiert, welche die Topologie T induziert.

Ein *vollständiger metrischer Raum* ist ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert. Siehe dazu den ausführlichen Artikel vollständiger Raum. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum. Ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt induziert ist, heißt Hilbertraum. Mangels struktureller Voraussetzungen lassen sich Cauchy-Folge und Vollständigkeit auf *allgemeinen* topologischen Räumen nicht definieren. Existiert zumindest eine uniforme Struktur, dann gibt es wenigstens Cauchy-Filter.

Geschichte

Metrische Räume wurden in der Arbeit *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (1906) von Maurice Fréchet erstmals verwendet.[1] Der Begriff *metrischer Raum* wurde von Felix Hausdorff geprägt.

Literatur

- Otto Forster: *Analysis*. Band 2: *Differentialrechnung im* $\mathbf{R}^n$. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 7. verbesserte Auflage. Vieweg, Wiesbaden 2006, ISBN 3-8348-0250-6 (*Vieweg-Studium. Grundkurs Mathematik*).
- Athanase Papadopoulos: *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. European Mathematical Society, Zürich 2004, ISBN 3-03719-010-8.

Einzelnachweise

1. F. Lemmermeyer: *Topologie*. In: Guido Walz (Hrsg.): *Lexikon der Mathematik*. 1. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Mannheim/Heidelberg 2000, ISBN 978-3-8274-0439-8.