Kai Hebeler
Maximilian Jacobi
Jonas Keller
Institut für Kernphysik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Computational Physics

Sommersemester 2020
9. Übung
22.06.2020 - 26.06.2020

Aufgabe 1: Lorenz-Gleichungen

Die Lorenz-Gleichungen sind ein Beispiel für Gleichungen, die ein *deterministisches Chaos* beschreiben. Sie sind gegeben durch:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \qquad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \qquad \frac{dz}{dt} = xy - bz. \tag{1}$$

Hierbei sind σ, r, und b Konstanten.

1. Schreiben Sie ein Programm, welches die Lorenz-Gleichungen für $\sigma = 10$, $r = 28$, und $b = 8/3$ in einem Intervall von t $\in$ [0, 50] mit den Anfangsbedingungen (x, y, z) = (0, 1, 0) löst. Plotten Sie y als Funktion der Zeit. Was bemerken Sie?

2. Stellen Sie nun z als Funktion von x graphisch dar. Sie sollten ein Bild des berühmten "Lorenz-Attraktor" sehen, eine schmetterlingsähnliche Form, bei der sich einzelne Linien innerhalb des Plots nie wiederholen.

Aufgabe 2: Pendel

In dieser Aufgabe soll ein angetriebenes Pendel betrachtet werden. Als externe Kraft wird hierbei eine oszillierende Kraft horizontal zur Masse ausgeübt. Die Bewegungsgleichung des Pendels lautet dann:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta + C\cos\theta\sin\Omega t, \tag{2}$$

wobei C und Ω Konstanten sind.

1. Schreiben Sie ein Programm, das die Gleichung für θ als Funktion der Zeit mit $l = 10$ cm, $C = 2\ \mathrm{s}^{-2}$ und $\Omega = 5\ \mathrm{s}^{-1}$ löst und plotten Sie θ als Funktion der Zeit von $t = 0$ bis $t = 100$ s. Starten Sie das Pendel bei $\theta = 0$ und $d\theta/dt = 0$.

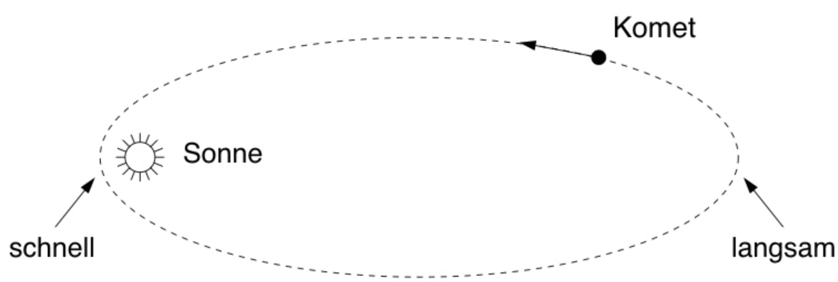
2. Ändern Sie nun den Wert von Ω, wobei Sie C konstant halten, um die Resonanz zu finden, bei der das Pendel mit der treibenden Kraft schwingt. Stellen Sie diese Resonanz graphisch dar.

Aufgabe 3: Kometenbahn

Viele Kometen bewegen sich auf stark elliptischen Bahnen um die Sonne. Somit befinden sie sich einen Großteil der Zeit weit entfernt von der Sonne, wo sie sich sehr langsam bewegen, wogegen sie sich nur kurz in Sonnennähe, wo sie sich mit höherer Geschwindigkeit bewegen (siehe Bild). Dies ist ein typisches System für dessen Lösung sich eine adaptive Schrittgröße anbietet. Für den Zeitraum, in dem sich ein Komet sehr langsam bewegt, reichen große Zeitschritte aus. Während des kurzen Zeitraums, in dem sich der Komet sehr schnell in Sonnennähe bewegt, sind hingegen kleine Zeitschritte notwendig. Wenn man annimmt, dass sich der Komet in der xy-Ebene mit der Sonne im Zentrum bewegt, kann seine Bewegung durch zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{y}{r^3}. \tag{3}$$

Hierbei sind M und m die Sonnen- und Komentenmasse und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



1. Formen Sie, mit Hilfe der in der Vorlesung behandelten Methoden, die zwei Gleichungen 2. Ordnung in vier Gleichungen 1. Ordnung um.

2. Schreiben Sie ein Programm, welches die Gleichungen mit dem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung und einer festen Schrittweite löst. Wählen Sie einen Kometen mit den Anfangsbedingungen $x = 4{\cdot}10^9$ km, $y = 0$ und $v_x = 0$, $v_y = 500\ \mathrm{ms}^{-1}$. Stellen Sie die Bewegungsbahn des Kometen graphisch dar. Wählen Sie die feste Schrittgröße h so, dass Sie mindestens zwei volle Umlaufbahnen des Kometen exakt berechnen können. Da die Umlaufbahnen periodisch sind, ist ein guter Indikator für eine genaue Berechnung, dass aufeinanderfolgende Bahnen des Kometen aufeinander liegen. Falls dies nicht der Fall ist, müssen Sie eine kleinere Schrittweite wählen.

3. Erweitern Sie Ihr Programm, so dass Sie eine adaptive Schrittgröße für die Berechnung verwenden. Dabei sollte die Position des Kometen eine Genauigkeit von $\delta = 1$ km pro Jahr haben. Plotten Sie erneut die Bewegungsbahn des Kometen. Wie verhalten sich Geschwindigkeit, Genauigkeit und Schrittweite im Vergleich zu Ihrer Berechnung aus Aufgabenteil 2?

4. Visualisieren Sie die Position des Kometen und die Zeitschritte in jedem Runge-Kutta Schritt. Sie sollten sehen, dass die Schrittweite kleiner wird wenn sich der Komet in Sonnennähe befindet, und größer wenn sich der Komet weit draußen im Sonnensystem bewegt.

Nehmen Sie sich abschließend Zeit, um Ihren Code aufzuräumen und ausreichend zu kommentieren