Cálculo estocástico aplicado a las finanzas: Precio de las opciones según el modelo Black–Scholes–Merton y algunas generalizaciones

Juan Margalef–Roig* **y Salvador Miret–Artes***

Instituto de Matemáticas y Física Fundamental (IMAFF)
Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)
Serrano 123, 28006 Madrid, España
margalef@imaff.cfmac.csic.es
s.miret@imaff.cfmac.csic.es

Dedicado al Profesor Enrique Outerelo Domínguez.

ABSTRACT

In this work, the Black–Scholes–Merton (BSM) theory to assign prices to options on shares is presented. A first generalization of this model consists of allowing that the drift (μ), the volatility (σ) and the interest rate (r) can be variables. In other words, we pass from the diffusion model $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ with initial condition S_0, and μ, σ, and r constants to the diffusion model $d\xi_{it} = b^i(t, \xi_{1t}, \ldots, \xi_{nt})dt + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{ij}(t, \xi_{1t}, \ldots, \xi_{nt})dW_t^j$ with initial conditions η_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) and interest rate $r(t, x)$. The class of semimartingales and the stochastic integral of predictable and locally bounded processes with respect to semimartingales allow a very general modelization of the financial markets.

En este trabajo se expone la teoría de Black–Scholes–Merton (BSM) para asignar precio a las opciones sobre acciones. Una primera generalización de este modelo consiste en permitir que la deriva, μ, la volatilidad, σ, y el tipo de interés, r puedan ser variables, es decir, se pasa del modelo con difusión $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ con condición inicial S_0, y μ, σ constantes y tipo de interes r constante al modelo con difusión $d\xi_{it} = b^i(t, \xi_{1t}, \ldots, \xi_{nt})dt + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{ij}(t, \xi_{1t}, \ldots, \xi_{nt})dW_t^j$ con condición inicial η_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y tipo de interés $r(t, x)$. La clase de las semimartingalas y la integral estocástica de procesos previsibles y localmente acotados respecto a semimartingalas permiten una modelización muy general de los mercados financieros.

*Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología mediante los proyectos BFM2003-00825 y BFM2001-2179.

2000 Mathematics Subject Classification: 60G07,60H30,91B24
Key words: Procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales estocásticas, precio de las opciones, teoría de Black–Scholes–Merton, semimartingalas, integración con semimartingalas, modelos financieros generales.

1. Introducción

L. Bachelier en 1900 fue el primero en describir el precio de las acciones financieras mediante el movimiento Browniano [1]. Suponiendo que el precio de las acciones es una expresión lineal del movimiento Browniano con deriva, llegó a asignar precio a algunas opciones cotizadas en Francia en aquella época y estableció comparaciones con el mercado real.

El modelo que desarrolló tiene un activo sin riesgo $B = (B_t)_{t \leq T}$, que cumple $B_t \equiv 1$, y un activo con riesgo (una acción de precio S_t) que cumple $S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$, $t \leq T$, donde $(W_t)_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y T es la fecha de vencimiento de la opción y μ y σ son constante reales que representan la deriva y la volatilidad, respectivamente.

Naturalmente S_t puede ser negativo lo que no refleja bien la vida real. Sin embargo, el modelo no admite arbitrajes y es completo (se pueden replicar las opciones).

Aparte de los resultados financieros, Bachelier desarrolló un importante estudio matemático del movimiento Browniano y todo ello cinco años antes de la publicación del famoso trabajo de Einstein [7]. En 1944, Itô se inspiró en este trabajo de Bachelier para introducir su cálculo estocástico y el movimiento Browniano geométrico $S_t = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t]$ [11]. Este movimiento Browniano geométrico se reveló muy importante para modelizar los mercados financieros, asignando concretamente S_t como precio de la acción. P. A. Samuelson desarrolló, desde 1965, el estudio del movimiento Browniano geométrico en conexión con la economía [22, 19] y recibió el premio Nobel de Economía en 1970 por estas aportaciones. En 1973, F. Black (1938-1995) y M. Scholes [2] e, independientemente, R. Merton [17] utilizaron el movimiento Browniano geométrico para asignar precio a las opciones.

El movimiento Browniano geométrico es la solución única de $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, con condición inicial S_0. Para probarlo basta aplicar la fórmula de Itô. El movimiento Browniano geométrico subyace en todo el modelo de Black, Scholes y Merton (BSM) y en su famosa fórmula para el precio de las opciones. En este modelo hay un activo sin riesgo (cuenta bancaria) $B = (B_t)_{t \geq 0}$ regido por la ecuación $dB_t = rB_t dt$, y un activo con riesgo $S = (S_t)_{t \geq 0}$ regido por la ecuación diferencial estocástica del movimiento Browniano geométrico $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. Así $B_t = B_0 e^{rt}$ y como ya hemos mencionado $S_t = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t]$. El precio de una opción europea tipo *call*, $f(S_T) = (S_T - K)_+ = max(S_T - K, 0)$ viene dado (en este modelo) por la fórmula

$$V_0 = S_0 N \left[\frac{\log(S_0/K) + T(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}} \right] - Ke^{-rT} N \left[\frac{\log(S_0/K) + T(r - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}} \right],$$

donde $\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$, $N(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy$. En particular, para $S_0 = K$ y $r = 0$

$$V_0 = S_0\Big(N\Big[\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\Big] - N\Big[-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\Big]\Big)$$

y $V_0 \sim K\sigma\sqrt{T/2\pi}$ para T pequeño. Podemos comparar con lo que obtuvo Bachelier en su modelo de mercado financiero. El precio de una opción europea tipo *call*, $f(S_T) = (S_T - K)_+$ viene dado (en este modelo de Bachelier) por la fórmula

$$V_0 = (S_0 - K)N\Big[\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\Big] + \sigma\sqrt{T}\,\varphi\Big(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\Big).$$

En particular, para $S_0 = K$, $V_0 = \sigma\sqrt{T/2\pi}$.

Seguimos con el modelo de Bachelier. Sea $\tilde{\pi} = (\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ una estrategia autofinanciada de valor inicial $X_0^{\tilde{\pi}} = V_0$ que replica a $f(S_T) = (S_T - K)_+$, es decir, $X_T^{\tilde{\pi}} = f(S_T)$. Entonces se prueba que

$$\tilde{\gamma}_t = N\Big[\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T - t}}\Big]$$

y

$$\tilde{\beta}_t = -KN\Big[\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T - t}}\Big] + \sigma\sqrt{T - t}\;\varphi\Big(\frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T - t}}\Big).$$

Regresamos ahora al modelo BSM. Ponemos la notación

$$y_{\pm} = \frac{\log(S_0/K) + T(r \pm \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Se prueba que (como en el caso *call*) el precio de una opción europea tipo *put* $f(S_T) = (K - S_T)_+$ viene dado por la fórmula $P_0 = -S_0N[-y_+] + Ke^{-rT}N[-y_-]$ y además (poniendo $V_0 = C_0$) se tiene $P_0 = C_0 - S_0 + Ke^{-rT}$ (paridad *call-put*). Este modelo es completo y por tanto dado $f(S_T) = (S_T - K)_+$, (opción europea tipo *call*), existe una estrategia admisible $\tilde{\pi} = (\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ tal que $X_0^{\tilde{\pi}} = C_0$ y $X_T^{\tilde{\pi}} = f(S_T)$. Se prueba que

$$\tilde{\gamma}_t = N\Big[\frac{\log(S_t/K) + (T - t)(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T - t}}\Big]$$

y

$$\tilde{\beta}_t = -\frac{K}{B_0}e^{-rT}N\Big[\frac{\log(S_t/K) + (T - t)(r - \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T - t}}\Big],$$

(compárese con lo obtenido en el modelo de Bachelier).

Las cantidades V_0 (precio de la opción europea tipo *call* en el modelo de BSM) y V_0 (precio de la opción europea tipo *call* en el modelo de Bachelier), provienen de fórmulas estocásticas generales, en las que se ha particularizado la opción general y se ha puesto para tiempo $t = 0$. Por ejemplo, en el modelo BSM, la fórmula general es $V_t = \mathsf{E}^*(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t)$, donde $dP^* = k_T dP$, $k_T = \exp[-\rho W_T - (1/2)T\rho^2]$, $\rho = (\mu - r)/\sigma$ y h es una opción europea de cuadrado integrable respecto a P^*. Esta fórmula representa el precio de h en el tiempo t. Naturalmente para obtener V_0 se particulariza h a $f(S_T) = (S_T - K)_+$ y se pone finalmente $t = 0$. Las aportaciones de BSM suponen un hito en el desarrollo de la matemática financiera por procedimientos estocásticos y las fórmulas obtenidas se utilizan en el *día a día* de los mercados financieros (Scholes y Merton obtuvieron el premio Nobel de economía en 1997 [20]). A pesar de la popularidad de estas fórmulas, presentan pequeñas imperfecciones (en su aplicación) a la hora de calcular la volatilidad σ. En la práctica se utilizan dos métodos para el cálculo de σ:

1. Método histórico: a partir de los valores de la acción observados en el pasado, se estima σ por procedimientos estadísticos; por ejemplo, mediante las varianzas empíricas [3].

2. Método implícito: nos fijamos en el *call* y *put* europeos. Ocurre que el precio de la opción es una función estrictamente creciente de σ. Si nos vamos a un mercado organizado donde cotice esa opción, podemos igualar la fórmula del precio de la opción a un número $\hat{C}(T, K)$ (precio real) y despejar σ. Aquí afloran los defectos: a) σ varía con T, para K fijo; b) σ varía con K, para T fijo (efecto sonrisa).

Además se constatan importantes diferencias entre la volatilidad histórica y la volatilidad implícita. Para subsanar 2), a), Merton propuso considerar μ y σ [17] como funciones del tiempo $\mu(t)$ y $\sigma(t)$. Para el efecto sonrisa 2), b), B. Dupire propuso el modelo $dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t)$ [5, 6].

Una clase de procesos suficientemente amplia (para incluir los modelos de mercados financieros más estudiados), pero manejable analíticamente, para modelizar los mercados financieros es la clase de las semimartingalas [13, 18, 23, 12]. Recordamos que un proceso adaptado X es semimartingala si admite una descomposición de la forma $X_t = X_0 + M_t + A_t$, donde M es una martingala local 0 en 0 y A un proceso de variación finita 0 en 0.

Lo más importante que cabe decir de esta clase de procesos (las semimartingalas) es que:

1. Es estable por cambio de probabilidad equivalente, es decir, si Q es probabilidad equivalente a P, entonces X es semimartingala respecto a Q si y sólo si X es semimartingala respecto a P.

2. Si $X = X_0 + M + A$ es una semimartingala y H es un proceso previsible localmente acotado, existe una integral bien definida respecto a X; $H.X = H_0X_0 + H.M + H.A$. Además, la integral $H.X$ es de nuevo semimartingala.

3. Existe una fórmula de cambio de variable. Sea X un proceso con valores en $\mathbf{R}^n$ tal que las n componentes X^i son semimartingalas y sea F una función de clase 2 definida en $\mathbf{R}^n$. Entonces el proceso $F \circ X$ es una semimartingala y

$$\begin{aligned} F \circ X_t &= F \circ X_0 + \sum_i \int_{(0,t]} D^i F \circ X_{s-} dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t D^i D^j F \circ X_{s-} d < X^{ic}, X^{jc} >_s \\ &+ \sum_{0<s\leq t} (F \circ X_s - F \circ X_{s-} - \sum_i D^i F \circ X_{s-} \Delta X_s^i). \end{aligned}$$

La primera consecuencia es que para toda martingala local M se tiene que $M_t^2 - [M,M]_t = 2\int_0^t M_{s-} dM_s$ es una martingala local 0 en 0. La segunda consecuencia es: sean X, Y semimartingalas. Entonces XY es semimartingala y

$$X_t Y_t = \int_{(0,t]} X_{s-} dY_s + \int_{(0,t]} Y_{s-} dX_s + [X,Y]_t,$$

que se escribe también

$$d(XY)_t = X_{t-} dY_t + Y_{t-} dX_t + d[X,Y]_t$$

y si X es un proceso de variación finita, $d(XY)_t = X_{t-} dY_t + Y_t dX_t$.

4. La integral estocástica respecto a semimartingalas describe adecuadamente el crecimiento del capital en estrategias de gestión.

5. Se tiene la invariancia de la integral estocástica: (una consecuencia del teorema de Girsanov general). Sea H un proceso previsible localmente acotado y sea X una semimartingala (no hace falta precisar si respecto a P o respecto a Q, donde Q es equivalente a P, ver 1)). Entonces las integrales estocásticas $H_P.X$ y $H_Q.X$, tomadas respecto a P y Q, son iguales.

6. Se tienen las propiedades:

   a) La aplicación $H \to H.X$ es lineal en H.

b) Si X es martingala local, $H.X$ es también martingala local.

c) Si X es de variación finita, entonces $H.X$ coincide con la integral Stieltjes.

d) $\Delta(H.X) = H\Delta X$, donde $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.

e) $H_1.(H_2.X) = (H_1H_2).X$.

En la sección 2 se desarrolla la teoría BSM y algunas generalizaciones (permitiendo que μ, σ y r sean variables) [23, 15, 14, 10, 9, 26].

En la sección 3 se modeliza el mercado financiero en el contexto de la clase de las semimartingalas [18, 23, 12, 10, 4].

2. Modelo Black–Scholes–Merton (BSM) para los mercados financieros a tiempo continuo

El modelo propuesto por BSM para describir la evolución de las cotizaciones es un modelo a tiempo continuo con un activo con riesgo, es decir una acción de precios S_t en el instante t, y un activo sin riesgo de precio S_t^0 en el instante t tal que dicho precio está regido por la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dS_t^0}{dt} = rS_t^0, S_0^0 = 1,$$

donde r es una constante positiva (el tipo de interés instantáneo). Por consiguiente, $S_t^0 = e^{rt}$, $t \geq 0$.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad (completo), $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ una filtración de este espacio continua por la derecha (es decir $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, $t \geq 0$) tal que cada $\mathcal{F}_t$ tiene los eventos P-nulos de $\mathcal{F}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ un proceso de Wiener respecto a P y μ, σ, y $x_0 \neq 0$ constantes reales.

Suponemos que la evolución de la cotización, S_t, de la acción está regida por la ecuación diferencial estocástica

$$d\xi_t = \mu\xi_t dt + \sigma\xi_t dW_t, \xi_0 = x_0, 0 \leq t \leq T.$$

Sabemos que $S_t = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t]$, $0 \leq t \leq T$, (que es la solución única de la ecuación diferencial estocástica anterior), y si $\mu = 0$, entonces S_t, $0 \leq t \leq T$, es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P.

El modelo se estudia en el intervalo $[0, T]$, donde T es la fecha de vencimiento de la opción que se va a estudiar. Tomando logaritmos en la fórmula anterior se obtiene

$$\log S_t = \log S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t = b(t) + \sigma W_t, 0 \leq t \leq T,$$

y

$$F_{\log S_t}(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{[u-b(t)]^2}{2\sigma^2 t}} \frac{1}{\sigma} du, \sigma > 0,$$

lo que indica que $\log S_t$ es normal $b(t), t\sigma^2$.

Por último, observamos que e^{-rt} y S_t son procesos de Itô respecto a W y aplicando la fórmula de integración por partes (estocástica) se tiene que

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t(\mu - r)dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

con condición inicial S_0, donde $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $(\tilde{S}_0 = S_0)$.

2.1. Estrategias autofinanciadas. Teorema de Girsanov

Tomamos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, como antes y agregamos la condición $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$, $0 \le t \le T$, donde $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \le t)$.

Definición 2.1.1 Una estrategia, $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\le t\le T}$, es un proceso estocástico medible con valores en $\mathbf{R}^2$ y adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ tal que H_t^0 y H_t dan, en el instante t, las cantidades de activo sin riesgo y activo con riesgo respectivamente que hay en la cartera. Así el valor de la cartera, en el instante t, y siguiendo la estrategia ϕ es: $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$.

Definición 2.1.2 La estrategia $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\le t\le T}$ es una estrategia autofinanciada si: 1) $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$, P-c.s., 2) $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (H_u^0 r e^{ru} + H_u \mu S_u) du + \int_0^t H_u \sigma S_u dW_u$, P-c.s., $0 \le t \le T$, (obsérvese que $t \to S_t$ es continua, P-c.s.).

Como $V_t(\phi)$ es un proceso de Itô respecto a W, la ecuación de 2) se puede escribir así: $dV_t(\phi) = (H_t^0 r e^{rt} + H_t \mu S_t)dt + H_t \sigma S_t dW_t$, con condición inicial $V_0(\phi)$.

Recordamos que si ξ_t, $0 \le t \le T$, tiene diferencial estocástica

$$d\xi_t = a_t dt + b_t dW_t,$$

con condición inicial ξ_0, y $f(t, \omega)$, $0 \le t \le T$, $\omega \in \Omega$, es una función no anticipativa respecto a $\mathcal{F}_t$, $0 \le t \le T$, (es decir, f es medible y adaptada a $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$), entonces se define la integral estocástica $\int_0^t f(s,\omega) d\xi_s$, mediante la fórmula $\int_0^t f(s,\omega) d\xi_s = \int_0^t f(s,\omega) a(s,\omega) ds + \int_0^t f(s,\omega) b(s,\omega) dW_s$, $0 \le t \le T$, siempre que las dos integrales del segundo miembro existan. Por tanto, la ecuación de 2) se puede poner: $V_t(\phi) - V_0(\phi) = \int_0^t H_u^0 r e^{ru} du + \int_0^t H_u dS_u$ y en notación diferencial $dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t$ que recuerda la caracterización de estrategia autofinanciada en el caso discreto. Naturalmente, a partir de la diferencial $d\tilde{S}_t$, tenemos la fórmula

$$\int_0^t H_u d\tilde{S}_u = \int_0^t H_u \tilde{S}_u (\mu - r) du + \int_0^t H_u \sigma \tilde{S}_u dW_u, 0 \le t \le T.$$

Proposición 2.1.3 Sea $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\le t\le T}$ una estrategia tal que se cumple: 1) de la definición anterior (2.1.2). Ponemos $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$. Entonces: ϕ es una estrategia autofinanciada (es decir se cumple 2) de (2.1.2)) si y sólo si $\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$, P-c.s., $0 \leq t \leq T$.

Demostración: Si ϕ es autofinanciada, basta aplicar la fórmula de integración estocástica por partes a los procesos e^{-rt}, $V_t(\phi)$. Para el recíproco, se aplica dicha fórmula a $\tilde{V}_t(\phi)$, e^{rt}. □

En la sección 3, se generaliza la teoría y se intenta seguir las pautas expuestas aquí, pero no se llega a buen puerto y se precisa una reformulación profunda.

Los teoremas fundamentales de la teoría discreta se han obtenido realizando un cambio de probabilidad que convierte los precios actualizados en martingalas. En tiempo continuo, el teorema de Girsanov suministra el cambio de probabilidad conveniente, en el sentido que convierte los precios actualizados en martingalas.

Es importante observar (será utilizado más adelante) que si P y Q son probabilidades equivalentes sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, $(Q << P$ y $P << Q)$, y ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de variables aleatorias convergente en probabilidad a la variable aleatoria ξ, respecto a P, (es decir, para todo $\epsilon > 0$, $P\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} \to 0$, $n \to \infty$), entonces ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, converge en probabilidad a ξ, respecto a Q, (es decir, para todo $\epsilon > 0$, $Q\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} \to 0$, $n \to \infty$).

Demostración: Ponemos $A_n^\epsilon = \{|\xi_n - \xi| > \epsilon\}$. Como $Q << P$, por el teorema de Radon–Nikodym, existe $\eta \geq 0$ tal que $Q(A) = \int_A \eta dP$, $A \in \mathcal{F}$. Sea $\epsilon > 0$. Queremos probar que $\int_{A_n^\epsilon} \eta dP \to 0$, $n \to \infty$ y sabemos (por hipótesis) que $P(A_n^\epsilon) \to 0$, $n \to \infty$. Si η es simple, es claro que se produce dicha convergencia. Caso general: es consecuencia del teorema de la continuidad absoluta de la integral de Lebesgue. □

Teorema 2.1.4 (Variante del teorema de Girsanov [8]) Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ como al principio de 2.1. Sea $(\theta_t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ un proceso estocástico medible y adaptado tal que $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$, P-c.s. , y tal que el proceso estocástico $k_t = \exp[-\int_0^t \theta_s dW_s - (1/2) \int_0^t \theta_s^2 ds]$, $0 \leq t \leq T$, es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ y respecto a P, (una condición suficiente para que k_t sea martingala es que $\mathsf{E}[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt)] < \infty$). Entonces $\mathsf{E}(k_T) = 1$ y $W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s ds$ es un proceso de Wiener respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ y respecto a P^*, donde $P^*(A) = \int_A k_T dP$, $A \in \mathcal{F}$.

A veces pondremos P^{k_T} en vez de P^*. Es claro que P^* y P son equivalentes.

Proposición 2.1.5 (Invariancia de la integral estocástica) Nos situamos en las hipótesis de 2.1.4. Sea $(H_t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ un proceso estocástico tal que $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$, P-c.s. Tomamos el proceso estocástico $X_t = \int_0^t H_s dW_s + \int_0^t H_s \theta_s ds$, (la integral $\int_0^t H_s dW_s$ está bien definida en el marco de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$). Como P^* y P son equivalentes se tiene que $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$, P^*-c.s. y por tanto se tiene la integral $Y_t = \int_0^t H_s dW_s^*$ en el marco de $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y $(W_t^*, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Entonces $X_t = Y_t$, $0 \leq t \leq T$, (en este sentido decimos que la integral estocástica es invariante por el cambio de probabilidad de Girsanov). Se prueba mediante la observación que precede a 2.1.4.

Observación 2.1.6 El precio del activo con riesgo, S_t, está definido en el escenario "$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$", concretamente es la solución única de

$$d\xi_t = \mu\xi_t dt + \sigma\xi_t dW_t,\ \xi_0 = S_0. \tag{2.1}$$

Realizamos el cambio de Girsanov (2.1.4.) para $\theta_t = (\mu - r)/\sigma (= \rho)$. Entonces el nuevo escenario es "$(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, donde $P^*(A) = \int_A k_T dP$, $A \in \mathcal{F}$, $k_T = \exp(-\rho W_T - (1/2)T\rho^2)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W^* = (W_t^*, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W_t^* = W_t + \rho t$". Ocurre que S_t, (que es solución de (2.1)) es también solución de

$$d\xi_t = r\xi_t dt + \sigma\xi_t dW_t^*,\ \xi_0 = S_0. \tag{2.2}$$

En este sentido decimos que el precio del activo con riesgo es invariante por el cambio de Girsanov. También diremos que el cambio lleva de (2.1) a (2.2).

Proposición 2.1.7 (Invariancia de la estrategia autofinanciada respecto al cambio de Girsanov) Sea $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ una estrategia autofinanciada (2.1.2.), es decir se cumple que: 1) $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$, P-c.s., 2) $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (H_u^0 r e^{ru} + H_u \mu S_u) du + \int_0^t H_u \sigma S_u dW_u$, P-c.s., $0 \leq t \leq T$.

Realizamos el cambio de Girsanov para $\theta_t = (\mu - r)/\sigma(= \rho)$, (es claro que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{W^*}$, $0 \leq t \leq T$) y, como sabemos, obtenemos el escenario (II) "$(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, $dP^* = k_T dP$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W_t^* = W_t + \rho t$ y $d\xi_t = r\xi_t dt + \sigma\xi_t dW_t^*$, $\xi_0 = S_0$". Entonces se tiene que:

a) $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$, P^*-c.s.
b) $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (H_u^0 r e^{ru} + H_u r S_u) du + \int_0^t H_u \sigma S_u dW_u^*$, P^*-c.s., $0 \leq t \leq T$.

Demostración. a) es consecuencia de que P y P^* son equivalentes. Veamos b): Por 2.1.5. , $\int_0^t S_s H_s dW_s + \int_0^t S_s H_s \rho ds = \int_0^t S_s H_s dW_s^*$, de donde $\int_0^t S_s H_s \sigma dW_s + \int_0^t S_s H_s \mu ds = \int_0^t S_s H_s r ds + \int_0^t S_s H_s \sigma dW_s^*$, ecuación que junto a 2) (de la hipótesis) nos da b). □

En definitiva, lo que hemos probado es que si ϕ es estrategia autofinanciada respecto al escenario (I) "$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $d\xi_t = \mu\xi_t dt + \sigma\xi_t dW_t$, $\xi_0 = S_0$", entonces ϕ es estrategia autofinanciada respecto al escenario (II).

Análogamente se prueba el recíproco, es decir: estrategia autofinanciada en (II), implica estrategia autofinanciada en (I).

Proposición 2.1.8 (El precio actualizado $\tilde{S}_t$ es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)$ y P^*) Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ como al principio de 2.1 y sea la ecuación diferencial estocástica (2.1) , (todo lo cual constituye lo que llamamos escenario (I)).

Realizamos el cambio de Girsanov para $\theta_t = (\mu - r)/\sigma (= \rho)$ y obtenemos el escenario (II) como en 2.1.7. Sabemos que el precio, S_t, es igual a $S_0 \exp[(r-\sigma^2/2)t+ \sigma W_t^*]$, que a su vez es solución de (2.2), o bien

$$S_t = S_0 + \int_0^t rS_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s^*$$

$0 \leq t \leq T$. Entonces S_t y e^{-rt} son procesos de Itô respecto a $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, W^* y, (aplicando la fórmula de integración por partes estocástica, en el contexto $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, W^*), $\tilde{S}_t = S_0 + \int_0^t (-rS_s e^{rs} + S_s re^{-rs})ds + \int_0^t \sigma S_s e^{-sr} dW_s^* = S_0 + \int_0^t \sigma \tilde{S}_s dW_s^*$, P^*-c.s., $0 \leq t \leq T$, y $\tilde{S}_t = S_0 \exp[-(\sigma^2/2)t + \sigma W_t^*]$ y $\tilde{S}_t$, $0 \leq t \leq T$, es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P^*.

Este era uno de los objetivos: conseguir que el precio actualizado fuera martingala respecto a una probabilidad equivalente a P.

2.2. Precio de las opciones

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y la ecuación diferencial estocástica (2.1) con condición inicial $\xi_0 = S_0$, y $0 \leq t \leq T$, como en 2.1.8, escenario (I).

Una opción europea es una variable aleatoria, h, $\mathcal{F}_T$-medible y positiva (≥ 0) ($h : \Omega \to [0, \infty)$). Lo más frecuente será que $h = (S_T - K)_+ = max(S_T - K, 0)$, en cuyo caso la opción se llama *call* o bien $h = (K - S_T)_+$, en cuyo caso la opción se llama *put*. Definamos el valor de la opción en cada instante t.

Definición 2.2.1 Una estrategia $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ es admisible si es autofinanciada (2.1.2) y $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t\tilde{S}_t$ es (para cada t) positivo y de cuadrado integrable respecto a P^*, donde $dP^* = k_T dP$, $k_T = \exp[-\rho W_T - (1/2)T\rho^2]$ con $\rho = (\mu - r)/\sigma$ (2.1.4).

Definición 2.2.2 Sea h una opción europea. Se dice que h es simulable si existe $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ estrategia admisible tal que $V_T(\phi) = h$, (se dice también que ϕ simula a h).

Es claro que si la opción europea h es simulable, entonces h es cuadrado integrable respecto a P^*, es decir $\mathsf{E}^*(h^2) < \infty$. Si tenemos una opción europea, h, que es *call*, es decir $h = (S_T - K)_+$, entonces $\mathsf{E}^*(h^2) < \infty$ ya que $\mathsf{E}^*(S_T^2) < \infty$ y $h^2 \leq S_T^2$.

Teorema 2.2.3 Sea h una opción europea de cuadrado integrable respecto a P^*. Entonces h es simulable (existe ϕ admisible tal que $V_T(\phi) = h$) y el valor al instante t, de toda cartera simulante ϕ es $V_t(\phi) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t]$ donde $dP^* = k_T dP$, $k_T = \exp[-\rho W_T - (1/2)T\rho^2]$, $\rho = (\mu - r)/\sigma$.

Demostración abreviada. Sea $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ estrategia admisible tal que $V_T(\phi) = h$. Por 2.1.3, $\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$, P-c.s., $0 \leq t \leq T$. Por 2.1.5, $\int_0^t H_s\tilde{S}_s dW_s + \int_0^t H_s\tilde{S}_s\rho ds = \int_0^t H_s\tilde{S}_s dW_s^*$, donde $W_t^* = W_t + \rho t$. Así $\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \sigma H_s\tilde{S}_s dW_s^*$. En el contexto " $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, (W_t^*) " se tiene que $\mathsf{E}^*[(\int_0^T \sigma H_s\tilde{S}_s dW_s^*)^2] = \mathsf{E}^*[\int_0^T \sigma^2 H_s^2\tilde{S}_s^2 ds] < \infty$, ya que $\tilde{V}_t(\phi)$ es cuadrado integrable respecto a P^*. Por tanto, $\tilde{V}_t(\phi)$, $0 \leq t \leq T$, es martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P^*. De esta forma, $\tilde{V}_t(\phi) = \mathsf{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)|\mathcal{F}_t]$ y $V_t(\phi) = \mathsf{E}^*[e^{-rT+rt}h|\mathcal{F}_t]$.

Probemos, ahora, la existencia de ϕ (estrategia admisible con $V_T(\phi) = h$). Se define el proceso $M_t = \mathsf{E}^*[e^{-rT}h|\mathcal{F}_t]$, $0 \leq t \leq T$. Entonces M_t, $0 \leq t \leq T$, es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P^*, de cuadrado integrable respecto a P^* (es de cuadrado integrable respecto a P^* por la desigualdad de Doob: " Si $(\xi_t)_{0\leq t\leq T}$ es martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P, entonces $\mathsf{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|\xi_t|^2] \leq 4\mathsf{E}[|\xi_T|^2]$"). Por un teorema de representación de martingalas (ver 2.7), existe un proceso $(a_s, \mathcal{F}_s)_{0\leq s\leq T}$ con $\mathsf{E}^*[\int_0^T a_s^2 ds] < \infty$ y tal que $M_t = M_0 + \int_0^t a_s dW_s^*$, P^*-c.s., $0 \leq t \leq T$.

Tomamos $H_t = a_t/\sigma\tilde{S}_t$, $H_t^0 = M_t - H_t\tilde{S}_t$ y $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$. Entonces ϕ es estrategia autofinanciada y $V_T(\phi) = h$ y $\tilde{V}_t(\phi)$ es positivo y cuadrado integrable respecto a P^*. □

El resultado sobre la representación de martingalas ha sido esencial para la existencia de la estrategia ϕ. Vemos, pues, que hay estrategias ϕ que simulan a h pero el valor de la cartera $V_t(\phi)$ es independiente de la simulante ϕ. Es natural, por tanto, definir el valor de la opción europea h, en el tiempo t, por la expresión

$$\mathsf{E}^*[e^{-rT+rt}h|\mathcal{F}_t].$$

Observamos que el *call* europeo, h, cumple que $\mathsf{E}^*(h^2) < \infty$ y por tanto se le puede aplicar el teorema 2.2.3.

Observación 2.2.4 Supongamos que h, en 2.2.3, es de la forma $h = f(S_T)$ donde f es una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ (suficientemente regular). Entonces

$$V_t = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t] = F(t, S_t),$$

P-c.s., $0 \leq t \leq T$, donde

$$F(t,x) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(xe^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T^* - W_t^*) - (\sigma^2/2)(T-t)})],$$

$0 \le t \le T$, $x \in \mathbf{R}$. Para probarlo basta tener en cuenta:

1) $S_t = S_0 \exp[(r - (\sigma^2/2)t) + \sigma W_t^*]$.

2) S_t es $\mathcal{F}_t$-medible y, respecto a P^*, $W_T^* - W_t^*$ es independiente de $\mathcal{F}_t$.

3) Sean $(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$ espacio de probabilidad, $\mathcal{B}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}_1$, ξ una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$, $\mathcal{B}$-medible y con valores en el espacio medible $(E, \mathcal{E})$, η una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}_1, P)$, con valores en el espacio medible $(F, \mathcal{F})$ e independiente de $\mathcal{B}$ y ϕ una función de Borel y positiva (o acotada) definida en $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$. Entonces $\varphi(x) = \mathsf{E}[\phi(x, \eta)]$, $x \in E$, es de Borel en $(E, \mathcal{E})$ y $\varphi(\xi) = \mathsf{E}[\phi(\xi, \eta)|\mathcal{B}]$, P-c.s.

Además, teniendo en cuenta que, respecto a P^*, $W_T^* - W_t^*$ es Gaussiano, 0, $T - t$, se tiene que $F(t,x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(xe^{(r-(\sigma^2/2))(T-t)} e^{\sigma y \sqrt{T-t}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$.

Caso particular: $f(x) = (x - K)_+$, (y por tanto $h = f(S_T) = (S_T - K)_+$, *call*). Entonces, teniendo en cuenta que $(W_T^* - W_t^*)/\sqrt{T-t}$ es Gaussiano 0, 1 respecto a P^*, se tiene que $F(t,x) = xN[d_1(t,x)] - Ke^{-r(T-t)} N[d_2(t,x)]$, donde $d_1(t,x) = [\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)]/\sigma\sqrt{T-t}$, $x > 0$, $t < T$, $d_2(t,x) = d_1(t,x) - \sigma\sqrt{T-t}$ y $N(d) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{d} e^{-y^2/2} dy$. Naturalmente, en este caso particular, se tiene también que $V_t = F(t, S_t)$, P-c.s., $0 \le t \le T$.

Caso particular: $f(x) = (K - x)_+$, (y por tanto $h = f(S_T) = (K - S_T)_+$, *put*). Entonces $F(t,x) = -xN[-d_1(t,x)] + Ke^{-r(T-t)} N[-d_2(t,x)]$ y $V_t = F(t, S_t)$, P-c.s., $0 \le t \le T$.

Poniendo $t = 0$ en el caso particular de *call* europeo se tiene la fórmula

$$V_0 = F(0, S_0) = S_0 N\Big[\frac{\log(S_0/K) + rT + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\Big] - Ke^{-rT} N\Big[\frac{\log(S_0/K) + rT - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\Big]$$

que permite calcular el precio de la opción.

Después de dar precio a las opciones (2.2.3), veamos su cobertura. En la demostración de 2.2.3 se establece la existencia de una estrategia simulante (o cobertura) de la opción europea h de cuadrado integrable respecto a P^*. La construcción se hace mediante un teorema de representación de martingalas. Veamos una construcción explícita de la cobertura de h.

Sea h como en 2.2.3 y supongamos que $h = f(S_T)$, $f \ge 0$. Entonces (2.2.4) para cualquier ϕ simulante de h se tiene $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} F(t, S_t)$, P-c.s., $0 \le t \le T$. Supongamos que f es suficientemente regular para que $F(t,x)$ sea de clase ∞ en $[0,T] \times \mathbf{R}$. Se pone $\tilde{F}(t,x) = e^{-rt} F(t, xe^{rt})$, $0 \le t \le \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$. Entonces se obtienen las fórmulas $\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$, $\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{F}(0, S_0) + \int_0^t \tilde{F}_x(u, \tilde{S}_u) \sigma \tilde{S}_u dW_u^*$,

$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \sigma \tilde{S}_s H_s dW_s^*$, lo que sugiere la siguiente construcción:

2.2.5 Sea h como en 2.2.3 y supongamos que $h = f(S_T)$, $f \geq 0$, (f suficientemente regular). Entonces

$$H_t = \tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t) = F_x(t, S_t), H_t^0 = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - H_t \tilde{S}_t$$

$0 \leq t \leq T$, es una estrategia admisible que simula a h. En particular, para $f(x) = (x - K)_+$, se obtiene

$$H_t = N[d_1(t, S_t)], H_t^0 = e^{-rt} F(t, S_t) - N[d_1(t, S_t)]\tilde{S}_t$$

estrategia que simula a $h = f(S_T) = (S_T - K)_+$, *call.* Para el caso $f(x) = (K - x)_+$ se obtiene

$$H_t = F_x(t, S_t) = -N[-d_1(t, S_t)], H_t^0 = e^{-rt} F(t, S_t) + N[-d_1(t, S_t)]\tilde{S}_t$$

estrategia que simula a $h = f(S_T) = (K - S_T)_+$, *put.*

Para $t = 0$:

1) $H_0 = N[d_1(0, S_0)]$, $H_0^0 = F(0, S_0) - N[d_1(0, S_0)]S_0$, caso *call.*

2) $H_0 = -N[-d_1(0, S_0)]$, $H_0^0 = F(0, S_0) + N[-d_1(0, S_0)]S_0$, caso *put.*

2.3. Opciones americanas en el modelo BSM

Definición 2.3.1 Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ como al principio de 2.1 y la ecuación diferencial estocástica (2.1), con condición inicial $\xi_0 = S_0$, $0 \leq t \leq T$, (escenario (I), 2.1.7).

a) Una estrategia de gestión con consumo es un proceso estocástico medible y adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$, con valores en $\mathbf{R}^2$ tal que:

1) $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < \infty$, P-c.s.

2) $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 r e^{ru} du + \int_0^t H_u \mu S_u du + \int_0^t H_u \sigma S_u dW_u - C_t$, P-c.s., $0 \leq t \leq T$, donde $(C_t)_{0\leq t\leq T}$ es un proceso estocástico medible, creciente, continuo, adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y nulo en $t = 0$.

b) Una opción americana es un proceso estocástico medible, adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ con valores positivos, $(h_t)_{0\leq t\leq T}$. Nos limitamos al caso $h_t = \psi(S_t)$, donde $\psi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ es una función continua tal que $\psi(x) \leq A + Bx$, $x \in \mathbf{R}_+$, A, B constantes positivas. Si $\psi(x) = (x - K)_+$, se dice que la opción americana, $\psi(S_t)$, es un *call* americano. Si $\psi(x) = (K - x)_+$, se dice que la opción americana, $\psi(S_t)$ es un *put* americano.

c) Se dice que una estrategia de gestión con consumo $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$, $C = (C_t)_{0\leq t\leq T}$, cubre a la opción americana $h_t = \psi(S_t)$, $0 \leq t \leq T$, si se tiene: para todo t, $0 \leq t \leq T$, $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t \geq \psi(S_t) = h_t$, P-c.s.

Se designa por Φ^ψ el conjunto de todas las estrategias de gestión con consumo, ϕ, C, que cubren a la opción americana $h_t = \psi(S_t)$, $0 \leq t \leq T$.

Observación 2.3.2 Partimos del escenario (I), (2.3.1). Realizamos el cambio de Girsanov, con $\theta_t = (\mu - r)/\sigma$, (2.1.4), y nos queda el escenario (II), (2.1.7). Sea ϕ, C, una estrategia de gestión con consumo respecto al escenario (I). Entonces ϕ, C, es también estrategia de gestión con consumo respecto del escenario (II) y viceversa. (Basta aplicar la fórmula de la invariancia de la integral estocástica (2.1.5) al proceso estocástico $H_u \sigma S_u$, $0 \leq u \leq T$).

Observación 2.3.3 La fórmula de 2.3.1, a) , 2), se puede escribir también

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u^0 r e^{ru} du + \int_0^t H_u dS_u - C_t$$

P-c.s., $0 \leq t \leq T$ (2.1.2).

Teorema 2.3.4 Sea $h_t = \psi(S_t)$, $0 \leq t \leq T$, una opción americana. En primer lugar, observamos que $\gamma_t = \exp[-\sigma W_t^* - \sigma^2 t/2]$, $0 \leq t \leq T$, es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ y respecto a P^* y por tanto $\mathsf{E}^*(\gamma_t) = 1$ y $\mathsf{E}^*[\exp(-\sigma W_t^*)] = e^{\sigma^2 t/2} \leq e^{\sigma^2 T/2}$. Observamos también que $\mathsf{E}^*(\gamma_\tau) = 1$, donde τ es un tiempo de parada acotado. Análogamente $\bar{\gamma}_t = \exp[\sigma W_t^* - \sigma^2 t/2]$, $0 \leq t \leq T$, es martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ y respecto a P^* y por tanto $\mathsf{E}^*(\bar{\gamma}_t) = 1$ y $\mathsf{E}^*(\bar{\gamma}_\tau) = 1$, siendo τ un tiempo de parada acotado. Ponemos la notación: $\Upsilon_{t,T} = \{$ los tiempos de Markov respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ con valores en $[t, T]\}$ y la notación $\bar{\bar{\gamma}}_t(\tau) = \exp[(r - \sigma^2/2)(\tau - t) + \sigma(W_\tau^* - W_t^*)]$, $\tau \in \Upsilon_{t,T}$. De esta forma, se tiene la acotación $\exp[-r(\tau - t)]\psi(x\bar{\bar{\gamma}}_t(\tau)) \leq e^{rT}A + e^{rT}Bxe^{rT}e^{\sigma^2 T}\exp[\sigma W_\tau^* - \sigma^2\tau/2]\exp[-\sigma W_t^* - \sigma^2 t/2]$, $x \geq 0$, y por consiguiente $\mathsf{E}^*[\exp(-r(\tau - t))\psi(x\bar{\bar{\gamma}}_t(\tau))] \leq e^{rT}A + e^{rT}Bxe^{rT}e^{2\sigma^2 T}$.

Sea $u : [0, T] \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ la función definida por

$$u(t, x) = \sup_{\tau \in \Upsilon_{t,T}} \mathsf{E}^*[\exp(-r(\tau - t))\psi(x \exp((r - \sigma^2/2)(\tau - t) + \sigma(W_\tau^* - W_t^*)))]$$

donde P^*, W^* proceden del cambio de Girsanov para $\theta_t = (\mu - r)/\sigma$. Entonces existe $[\bar{\phi} = (\bar{H}_t^0, \bar{H}_t)_{0 \leq t \leq T}, \bar{C} = (\bar{C}_t)_{0 \leq t \leq T}]$ estrategia de gestión con consumo que cubre a la opción americana $h_t = \psi(S_t)$, $0 \leq t \leq T$, (es decir $(\bar{\phi}, \bar{C})$ es un elemento de Φ^ψ), tal que $V_t(\bar{\phi}) = \bar{H}_t^0 S_t^0 + \bar{H}_t S_t = u(t, S_t)$, $0 \leq t \leq T$. Además para todo elemento (ϕ, C) de Φ^ψ se tiene que $V_t(\phi) \geq u(t, S_t)$, $0 \leq t \leq T$, (naturalmente $u(t, S_t) \geq \psi(S_t)$, $0 \leq t \leq T$ y $u(T, x) = \psi(x)$).

Después de este teorema es lógico asignar como precio de la opción americana $h_u = \psi(S_u)$, $0 \leq u \leq T$, en el instante t, la cantidad $u(t, S_t)$.

En la demostración de 2.2.3 se ha probado que si ϕ es una estrategia admisible, entonces $\tilde{V}_t(\phi)$, $0 \leq t \leq T$, es martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ y respecto a P^*. Lo que ocurre aquí es que el valor actualizado de cualquier estrategia de gestión con consumo es una supemartingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ y respecto a P^*.

Proposición 2.3.5 En el teorema anterior, (2.3.4), ponemos ψ de la forma $\psi(x) = (x - K)_+$, (opción americana tipo *call*). Tomamos $\psi(S_T)$ y nos vamos a 2.2.3 y 2.2.4 y al caso particular *call*. De esta forma obtenemos $F(t,x) = xN[d_1(t,x)] - Ke^{-r(T-t)}N[d_2(t,x)]$y $F(t,S_t)$ es el precio de la opción europea $\psi(S_T)$ en el tiempo t, $0 \leq t \leq T$, y por tanto $F(t,S_t) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)}\psi(S_T)|\mathcal{F}_t]$. Entonces se tiene que $u(t,x) = F(t,x)$, (después de aplicar 2.3.4 a la opción americana $\psi(S_t)$, $0 \leq t \leq T$), de donde $u(t,S_t) = F(t,S_t)$, $0 \leq t \leq T$. Por consiguiente, el precio de la opción europea (del *call* europeo) $\psi(S_T) = (S_T - K)_+$ en el tiempo t, $F(t,S_t)$, es igual a $u(t,S_t)$ que es el precio de la opción americana $\psi(S_{\bar{t}}) = (S_{\bar{t}} - K)_+$, $0 \leq \bar{t} \leq T$ (*call* americano) en el instante t.

Demostración abreviada. Caso $t=0$. Sea $\tau \in \Upsilon_{0,T}$. Entonces $\mathsf{E}^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+|\mathcal{F}_\tau] \geq \mathsf{E}^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)|\mathcal{F}_\tau] = \tilde{S}_\tau - e^{-rT}K \geq \tilde{S}_\tau - e^{-r\tau}K$, donde $F_\tau = \{A \in \mathcal{F} :$ para todo $t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$. Se ha aplicado que $\tilde{S}_t$, $0 \leq t \leq T$, es martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P^*. Por consiguiente, $\mathsf{E}^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+] \geq \mathsf{E}^*[(\tilde{S}_\tau - e^{-r\tau}K)_+]$. Por otro lado, $u(0,S_0) = \sup_{\tau\in\Upsilon_{0,T}} \mathsf{E}^*[e^{-r\tau}(S_0\exp((r - \sigma^2/2)\tau + \sigma W^*_\tau) - K)_+] = \mathsf{E}^*[(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+]$ y $F(0,S_0) = \mathsf{E}^*[e^{-rT}(S_T - K)_+|\mathcal{F}_0]$ y $u(0,S_0) = F(0,S_0)$ y de la misma forma $u(0,x) = F(0,x)$.

Caso $t > 0$. Sea $\tau \in \Upsilon_{t,T}$. Procedemos de forma análoga:

$(A =)\mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)}(x\exp((r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W^*_T - W^*_t)) - K)_+|\mathcal{F}_\tau] \geq x\exp(\sigma^2 t/2 -\sigma W^*_t)\exp(-\sigma^2\tau/2 + \sigma W^*_\tau) - K\exp(-r(\tau - t))(= B)$.

Así $A \geq B_+$ y $u(t,x) = F(t,x) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)}(x\exp((r - \sigma^2/2)(T - t) + \sigma(W^*_T - W^*_t)) - K)_+]$. □

La proposición 2.3.5 no se puede reproducir para opciones americanas tipo *put* ($\psi(x) = (K - x)_+$). En este caso no podemos afirmar que el precio del *put* europeo $\psi(S_T) = (K - S_T)_+$, en el instante t, sea igual al precio de la opción americana $\psi(S_u) = (K - S_u)_+$, $0 \leq u \leq T$, (*put* americano), en el tiempo t. Luego, en definitiva, el *call* europeo, el *put* europeo y el *call* americano tienen resolución explícita. Queda por resolver el *put* americano.

2.4. Precio de las opciones y ecuaciones en derivadas parciales

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$ filtración de este espacio, y el proceso de Wiener $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq0}$ respecto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$ y respecto a P, $a(t,y)$, $b(t,y)$, $t \geq 0$, $y \in \mathbf{R}$ funciones continuas y η una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_0$-medible. Supongamos que se cumplen las condiciones para la existencia de solución fuerte. Entonces para todo $T > 0$, existe $\xi = (\xi_t)_{0\leq t\leq T}$ proceso estocástico en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, real, medible, adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y continuo tal que ξ es solución fuerte única de

$$d\xi_t = a(t,\xi_t)dt + b(t,\xi_t)dW_t \tag{2.3}$$

con condición inicial η. Además $\mathsf{E}[\sup_{0\le s\le T}|\xi_s|^2] < \infty$. Sea $r(t,x)$ una función continua, acotada y positiva (que representa el tipo de interés sin riesgo). Queremos calcular $(\gamma_t =)\mathsf{E}[e^{-\int_t^T r(s,\xi_s)ds} f(\xi_T)|\mathcal{F}_t]$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ función medible y acotada, (en esta situación general, representa el precio de la opción $f(\xi_T)$ en el tiempo t). Entonces se prueba que $\gamma_t = G(t,\xi_t)$, donde $G(t,x) = \mathsf{E}[e^{-\int_t^T r(u,\xi_u^{t,x})du} f(\xi_T^{t,x})]$ y $\xi_t^{s,x}$, $s \le t$, $x \in \mathbf{R}$, es el flujo de (2.3), es decir,

$$\xi_t^{s,x} = x + \int_s^t a(u,\xi_u^{s,x})du + \int_s^t b(u,\xi_u^{s,x})dW_u$$

$s \le t$, $x \in \mathbf{R}$.

Se considera el operador A definido por

$$A(u)(t,x) = \frac{b(t,x)^2}{2} u_{xx}(t,x) + a(t,x)u_x(t,x),$$

operador de la difusión ξ_t. Entonces se prueba (bajo ciertas hipótesis de regularidad) que $G(t,x)$ es solución única de

$$\begin{cases} u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbf{R} \\ u_t(t,x) + A(u)(t,x) - (ru)(t,x) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Partimos, ahora, del escenario (I), (2.1.7), aplicamos el cambio de Girsanov, para $\theta_t = (\mu - r)/\sigma$, r constante (el tipo de interés), y obtenemos el escenario (II), (2.1.7). Aplicamos a este segundo escenario lo obtenido en la situación general precedente y tenemos: $\mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T)|\mathcal{F}_t] = G(t,S_t)$, donde $G(t,x) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T^{t,x})]$, para toda $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ medible y acotada, y $S_t^{s,x}$, $s \le t$, $x \in \mathbf{R}$, es el flujo de $d\xi_t = r\xi_t dt + \sigma\xi_t dW_t^*$, $\xi_0 = S_0$. En este caso, el operador de difusión es

$$A(u)(t,x) = \frac{\sigma^2}{2} x^2 u_{x,x}(t,x) + rxu_x(t,x)$$

y $G(t,x)$ es solución de

$$\begin{cases} u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbf{R} \\ u_t(t,x) + A(u)(t,x) - ru(t,x) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Además el flujo cumple las fórmulas: $S_t^{s,x} = xS_tS_s^{-1} = xe^{r(t-s)}e^{\sigma(W_t^*-W_s^*)}e^{-\sigma^2(t-s)/2}$, $s \le t$, $S_T^{t,x} = xS_TS_t^{-1} = xe^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma W_T^*}e^{-(r-\sigma^2/2)t-\sigma W_t^*}$, y por tanto

$$G(t,x) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T^*-W_t^*)}e^{-\sigma^2(T-t)/2})] = F(t,x)$$

y $F(t,S_t) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T)\ |\mathcal{F}_t]$, (2.2.4). Luego, en definitiva, $F(t,x)$ es solución de (bajo ciertas hipótesis de regularidad)

$$\begin{cases} u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbf{R} \\ u_t + A(u) - ru = 0, \qquad 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{2.4}$$

y $F(t,S_t)$ es el precio, en el tiempo t, de la opción europea $f(S_T)$.

De la información de 2.2.4, vemos que para obtener $F(t,x)$ hay que calcular una esperanza. Con lo que se ha obtenido aquí, cabe esperar que se pueda evitar el cálculo de la esperanza resolviendo una ecuación en derivadas parciales. Bien es cierto que en el caso *call* o *put* europeos, el cálculo de la esperanza se ha podido realizar y se han obtenido expresiones explícitas para $F(t,x)$, (2.2.4 casos particulares).

Una solución de (2.4), con suficiente regularidad, puede ser $F(t,x)$. Veamos un teorema con más precisión. Lo haremos en el caso n-dimensional.

Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ espacio de probabilidad, $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ filtración de este espacio y $W=(W_t^1,\ldots,W_t^p)_{0\leq t\leq T}$ un proceso de Wiener p-dimensional respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P. Sean $b:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $b(s,x)=(b^1(s,x),\ldots,b^n(s,x))$, $s\geq 0$, $x\in\mathbf{R}^n$, $\sigma(s,x)=(\sigma_{ij}(s,x))$ matriz $n\times p$, $\sigma_{ij}:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $s\geq 0$, $x\in\mathbf{R}^n$, tales que b^i, σ_{ij} son medibles. Sea $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ variable aleatoria n-dimensional, en $(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\mathcal{F}_0$-medible. Supongamos que se cumplen las condiciones para la existencia y unicidad. Entonces existe $\xi=(\xi_{1t},\ldots,\xi_{nt})_{0\leq t\leq T}$ solución única de

$$d\xi_{it}=b^i(t,\xi_{1t},\ldots,\xi_{nt})dt+\sum_{j=1}^{p}\sigma_{ij}(t,\xi_{1t},\ldots,\xi_{nt})dW_t^j,\ con\, c.\, i.\, \eta_i, \qquad (2.5)$$

$i=1,\ldots,n$. Además $\mathsf{E}[\sup_{0\leq t\leq T}|\xi_s|^2]<+\infty$, $|\xi_s|^2=\xi_{1s}^2+\cdots+\xi_{ns}^2$.

Se define el operador A, sobre funciones $f(t,x):\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ de clase $C^{1,2}$, de la siguiente forma:

$$A(f)(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)f_{x_ix_j}(t,x)+\sum_{j=1}^{n}b^j(t,x)f_{x_j}(t,x),$$

donde $a(t,x)=\sigma(t,x)\sigma^*(t,x)$. Sean $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ continua y $r:\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ continua y acotada.

Entonces se prueba que $\mathsf{E}[e^{-\int_t^T r(s,\xi_s)ds}f(\xi_T)|\mathcal{F}_t]=F(t,\xi_t)$, donde $F(t,x)=\mathsf{E}[e^{-\int_t^T r(s,\xi_s^{t,x})ds}f(\xi_T^{t,x})]$, $\xi_t=(\xi_{1t},\ldots,\xi_{nt})$ y $\xi_s^{t,x}=(\xi_{1s}^{t,x},\ldots,\xi_{ns}^{t,x})$, $x\in\mathbf{R}^n$, $t\leq s$, es el flujo de (2.5).

Teorema 2.4.1 Sea $u(t,x):[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ de clase $C^{1,2}$ tal que $u_{x_1}(t,x),\ldots$, $u_{x_n}(t,x)$ están acotadas. Supongamos que

$$\left\{\begin{array}{l} u(T,x)=f(x),\ x\in\mathbf{R}^n \\ (u_t+A(u)-ru)(t,x)=0,\quad 0\leq t\leq T,\quad x\in\mathbf{R}^n. \end{array}\right. \qquad (2.6)$$

Entonces $u(t,x)=F(t,x)$, $0\leq t\leq T$, $x\in\mathbf{R}^n$.

Idea de la demostración. Para $t=0$. Basta tener en cuenta que

$$M_t=\exp\left(-\int_0^t r(s,\xi_s^{0,x})ds\right)u(t,\xi_t^{0,x})$$

es una martingala. Entonces $\mathsf{E}(M_0) = \mathsf{E}(M_T)$ y $u(0,x) = F(0,x)$. Para $\bar{t} > 0$. Basta tener en cuenta que $M_t = \exp[-\int_{\bar{t}}^{t} r(s, \xi_s^{\bar{t},x}) ds] u(t, \xi_t^{\bar{t},x})$, $\bar{t} \le t \le T$, es martingala. Entonces $\mathsf{E}(M_{\bar{t}}) = \mathsf{E}(M_T)$ y por tanto $u(\bar{t}, x) = F(\bar{t}, x)$. $\square$

Observación Si se introduce la hipótesis (α) *Existe* $C > 0$ *tal que para todo* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n$ *y todo* $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, *se tiene que* $\sum_{i,j} a_{ij}(t,x) y_i y_j \ge C(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$, además de hipótesis de regularidad sobre b y σ, entonces (2.6) tiene solución.

Partimos ahora del escenario (I), (2.1.7), aplicamos el cambio de Girsanov, para $\theta_t = (\mu - r)/\sigma$, r constante (el tipo de interés), y obtenemos el escenario (II), (2.1.7). Aplicamos 2.4.1 a este segundo escenario y tenemos: el operador A se convierte en el operador $A(g)(t,x) = \sigma^2 x^2 g_{xx}(t,x)/2 + rxg_x(t,x)$, $g : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de clase $C^{1,2}$, que en este caso designaremos por A^{bs}. Además para $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua y r (el tipo de interés), se tiene $\mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t] = F(t, S_t)$, donde $F(t,x) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T^{t,x})] = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(x S_T S_t^{-1})]$, $S_T^{x,t} = x S_T S_t^{-1}$, ($F(t,x)$ es la misma que la $F(t,x)$ de 2.2.4). Por último, si $u(t,x) : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es de clase $C^{1,2}$, $u_x(t,x)$ es acotada en $[0,T] \times \mathbf{R}$ y

$$\begin{cases} u(T,x) = f(x), \; x \in \mathbf{R} \\ (u_t + A^{bs}(u) - ru)(t,x) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{2.7}$$

entonces $u(t,x) = F(t,x)$.

Luego, en resumen, el precio de la opción europea $f(S_T)$ en el tiempo t, $\mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t]$ es igual a $F(t, S_t)$, donde

$$F(t,x) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T^* - W_t^*) - \sigma^2 (T-t)/2})]$$

y si $u(t,x)$ es $C^{1,2}$ con u_x acotada cumple (2.7), entonces $u(t,x) = F(t,x)$, $0 \le t \le T$, $x \in \mathbf{R}$.

En los casos particulares $f(x) = (x-K)_+$, (y $f(x) = (K-x)_+$), la función $F(t,x)$ tiene una expresión explícita (2.2.4) y se prueba directamente que $F(t,x)$ satisface (2.7).

El operador A^{bs} no verifica la condición (α), (2.4.1), lo que dificulta obtener $F(t,x)$ como solución de (2.7), cuando f no es *call* europeo ni *put* europeo, pues en estos casos $F(t,x)$ tiene una expresión explícita que es directamente solución de (2.7).

Seguimos en los escenarios (I) y (II). Tomamos logaritmo del precio, $X_t = \log S_t$. Entonces X_t es solución de

$$dX_t = (r - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t^*$$

con $X_0 = \log S_0$ y el generador infinitesimal de la difusión X_t es

$$A^{bs-\log}(u)(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx}(t,x) + (r - \sigma^2/2) u_x(t,x).$$

Este operador sí que cumple la condición (α), (2.4.1). Ponemos

$$\tilde{A}^{bs-\log} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial}{\partial x^2} + (r-\sigma^2/2)\frac{\partial}{\partial x} - r().$$

Se tiene el siguiente resultado: si $v(t,x)$ es solución (regular) de

$$\begin{cases} v_t + \tilde{A}^{bs-\log}(v) = 0, & (t,x) \in [0,T]\times\mathbf{R} \\ v(T,x) = f(e^x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}, \tag{2.8}$$

entonces $F(t,x) = v(t,\log(x))$, para toda f continua .

Vamos a localizar este problema de ecuaciones en derivadas parciales. Nos situamos en el teorema 2.4.1. Suponemos que $n = p = 1$ y que b, σ, r no dependen de t. A partir del operador A de 2.4.1 se construye el operador $\tilde{A}(g)(t,x) = A(g)(t,x) - r(x)g(t,x)$, $A(g)(t,x) = (1/2)\sigma^2(x)g_{xx}(t,x) + b(x)g_x(t,x)$. Entonces (2.6) de 2.4.1 se convierte en

$$\begin{cases} u(T,x) = f(x),\ x \in \mathbf{R} \\ (u_t + \tilde{A}(u))(t,x) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2.9}$$

donde $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua y $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua y acotada. Además, $\mathsf{E}[\exp(-\int_t^T r(X_s)ds)f(X_T)|\mathcal{F}_t] = F(t,X_t)$, donde $F(t,x) = \mathsf{E}[\exp(-\int_t^T r(X_s^{t,x})ds)$ $f(X_T^{t,x})]$, siendo X_t, $X_s^{t,x}$, $t \le s$, la difusión y el flujo, respectivamente, de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,\ X_0 = \eta.$$

Por último, si $u(t,x) : [0,T]\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es $C^{1,2}$ y u_x está acotada y u satisface (2.9), entonces $u(t,x) = F(t,x)$, $0 \le t \le T$, $x \in \mathbf{R}$.

Nos planteamos (2.9), no en todo $\mathbf{R}$, sino en el intervalo (c,d), imponiendo condiciones de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t + \tilde{A}(u) = 0,\ (t,x) \in [0,T]\times(c,d) \\ u(t,c) = u(t,d) = 0,\ 0 \le t \le T \\ u(T,x) = f(x),\ x \in (c,d) \end{cases}. \tag{2.10}$$

Teorema 2.4.2 Sea u una función de clase $C^{1,2}$ en (t,x) con u_x acotada y solución de (2.10). Entonces para todo $(t,x) \in [0,T]\times(c,d)$,

$$u(t,x) = \mathsf{E}\big[1_{\{\forall s\in[t,T],X_s^{t,x}\in(c,d)\}}e^{-\int_t^T r(X_s^{t,x})ds}f(X_T^{t,x})\big]$$

donde $X_s^{t,x}$, $s \ge t$ es el flujo de $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ y $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua y $r : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua y acotada.

Esta situación general la aplicamos a los escenarios (I) y (II) (2.1.7) tomando logaritmos. Concretamente la aplicamos a "$(\Omega,\mathcal{F},P^*)$, $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, $W^* = (W_t^*)_{0\le t\le T}$" y

$$dX_t = (r-\sigma^2/2)dt + \sigma dW_t^* \tag{2.11}$$

con $X_0 = \log S_0$ y $\bar{f}(x) = f(e^x)$, donde $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continua y r constante (el tipo de interés)". Entonces el operador infinitesimal de la difusión X_t, $0 \le t \le T$, de (2.11) es $(1/2)\sigma^2 g_{xx}(t,x) + (r - \sigma^2/2) g_x(t,x)$, que agregándole $-rg(t,x)$ se convierte en el operador $\tilde{A}^{bs-\log}(g)(t,x)$. Además $\mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)}\bar{f}(X_T)|\mathcal{F}_t] = F(t, X_t)$, donde $F(t,x) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)}\bar{f}(X_T^{t,x})]$, siendo $X_s^{t,x}$, $t \le s$, el flujo de (2.11), (de la misma forma que $X_t = \log S_t$, se tiene también que $\log S_s^{t,x} = X_s^{t,\log x}$). Además si $u(t,x) : [0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es $C^{1,2}$ y u_x está acotado y cumple las ecuaciones

$$\begin{cases} u(T,x) = \bar{f}(x), \; x \in \mathbf{R} \\ u_t + \tilde{A}^{bs-\log}(u) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{2.12}$$

entonces $u(t,x) = F(t,x)$, $0 \le t \le T$, $x \in \mathbf{R}$.

Por último, si $u(t,x)$ es $C^{1,2}$ y $u_x(t,x)$ está acotada y u satisface las ecuaciones

$$\begin{cases} u_t + \tilde{A}^{bs-\log}(u) = 0, (t,x) \in [0,T] \times (c,d) \\ u(t,c) = u(t,d) = 0, 0 \le t \le T \\ u(T,x) = \bar{f}(x), x \in (c,d) \end{cases} \quad . \tag{2.13}$$

Entonces para todo $(t,x) \in [0,T] \times (c,d)$, $u(t,x) = \mathsf{E}^*[1_{\{\forall s \in [t,T], X_s^{t,x} \in (c,d)\}} \; e^{-r(T-t)} \bar{f}(X_T^{t,x})]$ siendo $X_s^{t,x}$ el flujo de (2.11).

Lo que interesa, en definitiva, es resolver (2.12) (o (2.8)) ya que entonces

$$u(t, \log x) = \mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T^{t,x})]$$

y $\mathsf{E}^*[e^{-r(T-t)} f(S_T)|\mathcal{F}_t] = F(t, X_t) = u(t, \log S_t)$, que es el precio, en t, de la opción europea $f(S_T)$.

Para hallar una solución (aproximada) de (2.12), primero se localiza y a continuación se discretiza el problema local en tiempo y en espacio [21]. Una localización de (2.12), con condiciones de contorno de Dirichlet, es el problema (2.13), (ponemos $(c,d) = (-l, l)$, $l > 0$). La primera cuestión es acotar el error al sustituir $u(t,x)$, solución de (2.12), por $u^l(t,x)$, solución de (2.13). Se prueba que

$$|u(t,x) - u^l(t,x)| \le M\left[e^{-\frac{|l - |r'T| - x|^2}{\sigma^2 T}} + e^{-\frac{|l - |r'T| + x|^2}{\sigma^2 T}}\right]$$

donde M es cota de f y $r' = r - \sigma^2/2$. De esta acotación se deduce que para t, x fijas, $lim_{l \to \infty} u^l(t,x) = u(t,x)$. Esta convergencia es, incluso, uniforme en t, x, siempre que x permanezca en una parte compacta de $\mathbf{R}$. El paso siguente es discretizar (2.13).

Por esta vía queda resuelta la opción europea del tipo $f(S_T)$.

2.5. Opciones americanas y ecuaciones en derivadas parciales

Nos situamos en las hipótesis generales de 2.4.1, (con f suficientemente regular). Queremos calcular

$$\Phi(t,x) = \sup_{\tau\in\Upsilon_{t,T}} \mathsf{E}[e^{-\int_t^\tau r(s,X_s^{t,x})ds} f(X_\tau^{t,x})]$$

(hemos cambiado ξ_t por X_t). Observamos, en primer lugar, que $\Phi(t,x) \geq f(x)$ y (tomando $t = T$) $\Phi(T,x) = f(x)$. Se prueba que $\exp[-\int_0^t r(s,X_s)ds]\Phi(t,X_t)$, $0 \leq t \leq T$, es supermartingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P, que mayora a $f(X_t)$, $0 \leq t \leq T$, y es la más pequeña supermartingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P, que mayora a $f(X_t)$, $0 \leq t \leq T$.

Teorema 2.5.1 Sea $u(t,x)$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^n$, una solución (regular) de

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + A(u) - ru \leq 0,\ \ u \geq f,\ \ en\ [0,T]\times\mathbf{R}^n \\ (u_t + A(u) - ru)(f-u) = 0,\ \ en\ [0,T]\times\mathbf{R}^n \\ u(T,x) = f(x),\ \ en\ \mathbf{R}^n \end{array}\right. . \tag{2.14}$$

Entonces $u(t,x) = \Phi(t,x)$.

Nos situamos, ahora, en los escenarios (I), (II), (2.1.7). De 2.3.4 , se tiene que $u(t,x) = \sup_{\tau\in\Upsilon_{t,T}} \mathsf{E}^*[e^{-r(\tau-t)}\psi(S_\tau^{t,x})]$ y $u(t,S_t)$ es el precio de la opción americana $\psi(S_u)$, $0 \leq u \leq T$, en el instante t, donde $S_s^{t,x}$, $t \leq s$, es el flujo de $d\xi_t = r\xi_t dt + \sigma\xi_t dW_t^*$, $\xi_0 = S_0$. Entonces por 2.5.1, si $v(t,x)$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}$, es solución (regular) de

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + A(u) - ru \leq 0,\ \ u \geq \psi,\ \ en\ [0,T]\times\mathbf{R} \\ (u_t + A(u) - ru)(\psi-u) = 0,\ \ en\ [0,T]\times\mathbf{R} \\ u(T,x) = \psi(x),\ \ en\ \mathbf{R} \end{array}\right. , \tag{2.15}$$

donde $A(u)(t,x) = (1/2)\sigma^2x^2u_{xx}(t,x) + rxu_x(t,x)$, entonces $v(t,x) = u(t,x) = \sup_{\tau\in\Upsilon_{t,T}} \mathsf{E}^*[e^{-r(\tau-t)}\psi(S_\tau^{t,x})]$ y, como se ha dicho antes, $u(t,S_t)$ es el precio de la opción americana $\psi(S_u)$, $0 \leq u \leq T$.

El *call* americano se ha resuelto en 2.3.5. Veamos, ahora, el *put* americano.

Tomamos logaritmo de S_t y obtenemos que $X_t = \log S_t$ es la difusión de $dX_t = (r-\sigma^2/2)dt + \sigma dW_t^*$, $X_0 = \log S_0$, y el generador infinitesimal de la difusión X_t es $A^{bs-\log}(u) = (1/2)\sigma^2u_{xx} + (r-\sigma^2/2)u_x$, que restándole ru queda el operador $\tilde{A}^{bs-\log}$.

Teorema 2.5.2 El problema

$$\left\{\begin{array}{l} v_t + \tilde{A}^{bs-\log}(v) \leq 0,\ \ en\ [0,T]\times\mathbf{R} \\ v(t,x) \geq (K-e^x)_+ (=\phi(x)),\ \ en\ [0,T]\times\mathbf{R} \\ (v(t,x)-\phi(x))(v_t(t,x) + \tilde{A}^{bs-\log}v((t,x)) = 0,\ \ en\ [0,T]\times\mathbf{R} \\ v(T,x) = \phi(x),\ \ en\ \mathbf{R} \end{array}\right. \tag{2.16}$$

admite una solución única $v(t,x)$ continua y acotada. Además, $v(t,\log x) = u(t,x) = \sup_{\tau\in\Upsilon_{t,T}} \mathsf{E}^*[e^{-r(\tau-t)}f(S_\tau^{t,x})]$, donde $f(x) = (K-x)_+$ y $S_\tau^{t,x}$ (el flujo) es igual a

$xe^{r(\tau-t)}\ e^{\sigma(W^*_\tau - W^*_t)}e^{-\sigma^2(\tau-t)/2}$, (sabemos que $u(t,S_t)$ es el precio, en el instante t, del *put* americano $f(S_u)=(K-S_u)_+$, $0\le u\le T$), [14].

El problema (2.16) se localiza con condiciones de contorno tipo Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{l}(2.16), (\textit{poniendo } (-l,l) \textit{ en vez de } \mathbf{R})\\ v_x(t,-l)=v_x(t,l)=0,\ t\in[0,T]\end{array}\right. . \tag{2.17}$$

Se estima el error, al pasar de (2.16) a (2.17) [14] y se discretiza (2.17) en tiempo y en espacio.

2.6. Cuando el activo no es BSM

Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ espacio de probabilidad, $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ filtración de este espacio y $W=(W_t)_{0\le t\le T}$ proceso de Wiener respecto a la filtración y respecto a P. Sean $b,\sigma:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ medibles (no dependientes del tiempo) y η variable aleatoria $\mathcal{F}_0$-medible. Supongamos que se cumplen las condiciones para la existencia y unicidad. Entonces existe una única difusión $(X_t)_{0\le t\le T}$ de

$$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t,\ X_0=\eta \tag{2.18}$$

(esta difusión es el precio del activo no necesariamente BSM). Además

$$\mathsf{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|X_t|^2\Big]<\infty.$$

Sean $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continua y positiva y $r:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continua, acotada y positiva (tipo de interés del activo sin riesgo). Entonces, (por 2.4.1), $\mathsf{E}[e^{-\int_t^T r(X_s)ds}f(X_T)|\mathcal{F}_t]=F(t,X_t)$ donde $F(t,x)=\mathsf{E}[e^{-\int_t^T r(X_s^{t,x})ds}f(X_T^{t,x})]$ y $X_s^{t,x}$, $t\le s$, es el flujo de (2.18). Además si $u(t,x):[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ es $C^{1,2}$ y u_x está acotada y u cumple la ecuación

$$\left\{\begin{array}{l}u(T,x)=f(x), x\in\mathbf{R}\\ (u_t+\tilde{A}(u))(t,x)=0,\ 0\le t\le T, x\in\mathbf{R}\end{array}\right. \tag{2.19}$$

donde $\tilde{A}(u)(t,x)=(1/2)\sigma^2(x)u_{xx}(t,x)+b(x)u_x(t,x)-r(x)u(t,x)$, entonces $u(t,x)=F(t,x)$, $0\le t\le T$, $x\in\mathbf{R}$. Para resolver (2.19), (en primer lugar), localizamos con condiciones de contorno tipo Dirichlet y nos queda

$$\left\{\begin{array}{l}(2.19),\ \textit{poniendo } (-l,l) \textit{ en vez de } \mathbf{R}\\ u(t,-l)=u(t,l)=0,\ 0\le t\le T\end{array}\right. \tag{2.20}$$

Sabemos, de 2.4.2, que si u es $C^{1,2}$ con u_x acotada y u es solución de (2.20), entonces para todo $(t,x)\in[0,T]\times(-l,l)$, $u(t,x)=\mathsf{E}[1_{\{\forall s\in[t,T],X_s^{t,x}\in(-l,l)\}}\ e^{-\int_t^T r(X_s^{t,x})ds}$ $f(X_T^{t,x})]$, donde $X_s^{t,x}$, $t\le s$, es el flujo de (2.18).

En vez de resolver (2.19), se resuelve (2.20). Se estima el error $|u - u^l|$ de forma análoga al final de 2.4, (u es solución de (2.19) y u^l es solución de (2.20)). Para resolver (2.20), se discretiza en tiempo y en espacio: se toma el paso, en el espacio, $h = 2l/(N+1)$ y los puntos $x_i = -l + ih$, $0 \leq i \leq N+1$. Para cada $t \in [0,T]$ sea $u_h(t) = (u_h^i(t))_{1\leq i\leq N}$ un vector de $\mathbf{R}^N$, (ponemos también la condición de Dirichlet $u_h^0(t) = u_h^{N+1}(t) = 0$). Observamos que $u_h^i(t)$ representa una cota levantada en el punto (t, x_i).

Cambiamos el operador $\tilde{A}$ por el operador $\tilde{A}_h$ sobre $\mathbf{R}^N$ definido como sigue: $[\tilde{A}_h(v)]_i = (1/2)\sigma(x_i)^2.(1/h)[(1/h)(v^{i+1} - v^i) - (1/h)(v^i - v^{i-1})] + b(x_i)(1/2h)(v^{i+1} - v^{i-1}) - r(x_i)v^i$. La f de (2.20) se discretiza tomando $f_h = (f(x_i))_{1\leq i\leq N}$, es decir, $f_h^i = f(x_i)$ y $f_h^0 = f_h^{N+1} = 0$. Entonces se sustituye el problema (2.20) por el problema

$$\begin{cases} \frac{du_h(t)}{dt} + \tilde{A}_h(u_h(t)) = 0, 0 \leq t \leq T \\ u_h(T) = f_h \end{cases} . \tag{2.21}$$

El problema (2.21) se discretiza respecto del tiempo: sea $\theta \in [0,1]$ y k un paso del tiempo tal que $T = kM$. Se aproxima $u_h(t)$, (solución de (2.21)), en el instante nk, $0 \leq n \leq M$, (es decir, $u_h(nk)$), por $u_{h,k}^n \in \mathbf{R}^N$, $0 \leq n \leq M$, solución de

$$\begin{cases} u_{h,k}^M = f_h \\ (n \textit{ decreciente}) \\ (1/k)(u_{h,k}^{n+1} - u_{h,k}^n) + \theta\tilde{A}_h u_{h,k}^n + (1-\theta)\tilde{A}_h u_{h,k}^{n+1} = 0, 0 \leq n \leq M-1 \end{cases} . \tag{2.22}$$

La solución de (2.22), $u_{h,k}^n$, $0 \leq n \leq M$, la designamos por $u_{h,k}$. Dicha solución la visualizamos como cotas levantadas en los puntos de la retícula $(nk, -l + ih)$, $0 \leq n \leq M$, $1 \leq i \leq N$. Por último, se designa por $u_h^k(t,x)$ a la función

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}(u_{h,k}^n)_i 1_{((n-1)k,nk]\times(x_i-(h/2),x_i+(h/2)]} \\ \sum_{i=1}^{N}(u_{h,k}^0)_i 1_{0\times(x_i-(h/2),x_i+(h/2)]} \end{cases} \tag{2.23}$$

y se prueba que u_h^k converge (cuando h, k tienden a 0) a una solución de (2.20) [21].

2.7. Representación de martingalas

Para probar 2.2.3 ha sido esencial utilizar un teorema sobre representación de martingalas.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad (completo) y $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtración de este espacio continua por la derecha ($\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$, $t \geq 0$) tal que cada $\mathcal{F}_t$ tiene los eventos P-nulos de $\mathcal{F}$. A la familia de martingalas cuadrado integrable respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P la designaremos por M_T.

Si $(x_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es un elemento de M_T, existe un único (salvo equivalencia estocástica) proceso estocástico creciente y previsible, $\langle x\rangle_t$, $0 \leq t \leq T$, tal que $\forall t, 0 \leq$

$t \leq T, x_t^2 = m_t + \langle x\rangle_t$, P-c.s., $(m_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y P. Además si $t \geq s$, se tiene que $\mathsf{E}[(x_t - x_s)^2|\mathcal{F}_t] = \mathsf{E}[\langle x\rangle_t - \langle x\rangle_s|\mathcal{F}_s]$, P-c.s.

Ejemplos: (1) Si $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es un proceso de Wiener respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y respecto a P, entonces W es un elemento de M_T y $W_t^2 - t$, $0 \leq t \leq T$, es una martingala respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y P y $\langle W\rangle_t = t$, (P-c.s.), $0 \leq t \leq T$. (2) Si $a(t,\omega)$ es un elemento de E_T, (es decir $a(t,\omega)$ es medible y adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ y $\mathsf{E}[\int_0^T a^2(t,\omega)dt] < \infty$), $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es un proceso de Wiener y $(x_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es la martingala continua $x_t = \int_0^t a(s,\omega)dW_s$, $0 \leq t \leq T$, entonces $(x_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es un elemento de M_T y $\langle x\rangle_t = \int_0^t a^2(s,\omega)ds$.

Sean $x, y \in M_T$. Entonces existe un único (salvo equivalencia estocástica) proceso estocástico $\langle x, y\rangle_t$, $0 \leq t \leq T$, que es la diferencia entre dos procesos estocásticos crecientes y previsibles, tal que para todo t, $0 \leq t \leq T$,

$$x_t y_t = m_t + \langle x, y\rangle_t, P - c.s.,$$

donde $(m_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es una martingala respecto a P. Además para todo $t \geq s$,

$$\mathsf{E}[(x_t - x_s)(y_t - y_s)|\mathcal{F}_s] = \mathsf{E}[\langle x, y\rangle_t - \langle x, y\rangle_s|\mathcal{F}_s], P - c.s.$$

Para probarlo basta aplicar el resultado anterior a $x - y$ y $x + y$ y tomar $\langle x, y\rangle_t = (1/4)[\langle x + y\rangle_t - \langle x - y\rangle_t]$ y $m_t = x_t y_t - \langle x, y\rangle_t$.

Nota: En general $\langle x + y\rangle_t \neq \langle x\rangle_t + \langle y\rangle_t$. Cuando $\langle x, y\rangle_t = 0$, $0 \leq t \leq T$, entonces $\langle x + y\rangle_t = \langle x\rangle_t + \langle y\rangle_t$, P-c.s., $0 \leq t \leq T$. Además $\langle x, y\rangle_t = 0$, $0 \leq t \leq T$, equivale a que $(x_t y_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es martingala.

Ejemplo Sean $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ un proceso de Wiener y $a(t,\omega), b(t,\omega) \in E_T$ y $x_t = \int_0^t a(s,\omega)dW_s$, $y_t = \int_0^t b(s,\omega)dW_s$. Entonces $(x_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, $(y_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ son martingalas continuas que pertenecen a M_T y $\langle x + y\rangle_t = \int_0^t a(s,\omega)b(s,\omega)ds$, $0 \leq t \leq T$. En particular, si $b(s,\omega) \equiv 1$, entonces $y_t = W_t$ y $\langle x, y\rangle_t = \langle x, W\rangle_t = \int_0^t a(s,\omega)ds$, P-c.s., $0 \leq t \leq T$.

Veamos la generalización de la última fórmula. Sea W un proceso de Wiener y $x \in M_T$. Entonces existe un proceso estocástico $(a(t,\omega), \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ perteneciente a E_T tal que para todo t, $0 \leq t \leq T$, $\langle x, W\rangle_t = \int_0^t a(s,\omega)ds$, P-c.s.

Teorema 2.7.1 (teorema fundamental) Sean $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ un proceso de Wiener y $(x_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ un elemento de M_T. Entonces $x_t = \int_0^t a(s,\omega)dW_s + z_t$, P-c.s., $0 \leq t \leq T$, donde $a(t,\omega)$ es un elemento de E_T y $\langle x, W\rangle_t = \int_0^t a(s,\omega)ds$ y $(z_t, \mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ es un elemento de M_T. Además si ponemos $y_t = \int_0^t a(s,\omega)dW_s$, se tiene que $y = (y_t)$ es un elemento de M_T y $\langle z, y\rangle_t = 0$, $0 \leq t \leq T$.

Para probarlo se toma $a(s,\omega)$ como en el resultado anterior y $z_t = x_t - y_t$. Se prueba que $\langle x, y\rangle_t = \int_0^t a^2(s,\omega)ds$, de donde $\langle z, y\rangle_t = \langle x, y\rangle_t - \langle y\rangle_t = 0$.

Ejemplo Nos situamos en las hipótesis del teorema anterior. Supongamos que $\mathsf{E}(x_t^2) = \mathsf{E}\int_0^t a^2(s,\omega)ds$, donde $a(s,\omega)$ es la dada en el teorema anterior. Entonces $z_t = 0$, P-c.s., $0 \le t \le T$, siendo z_t la dada por el teorema anterior.

Teorema 2.7.2 Sea $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ un proceso de Wiener respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ y respecto a P tal que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$, $0 \le t \le T$, donde $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \le t)$, y sea $(x_t, \mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ una martingala cuadrado integrable (es decir, es una martingala continua por la derecha y $\sup_{t\le T} \mathsf{E}(x_t^2) < \infty$). Entonces existe un proceso estocástico $(a(s,\omega), \mathcal{F}_s)_{0\le s\le T}$, con $\mathsf{E}\int_0^T a^2(s,\omega)ds < \infty$, y tal que para todo t, $0 \le t \le T$, $x_t = x_0 + \int_0^t a(s,\omega)dW_s$, P-c.s.

Nota. Si W es un proceso de Wiener y $a(t,\omega)$ es un elemento de E_T, entonces $\int_0^t a(s,\omega)dW_s$, $0 \le t \le T$, es un elemento de M_T. Este teorema es un recíproco de este resultado.

Idea de la demostración. Por el resultado previo a 2.7.1, existe $a(t,\omega)$ de E_T tal que $\langle x, W\rangle_t = \int_0^t a(s,\omega)ds$, P-c.s. Ponemos $\tilde{x}_t = x_t - x_0$. Entonces $(\tilde{x}_t, \mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ es de nuevo una martingala cuadrado integrable y $\langle \tilde{x}, W\rangle_t = \int_0^t a(s,\omega)ds$, P-c.s. Así, por 2.7.1, $\tilde{x}_t = \int_0^t a(s,\omega)dW_s + z_t$, P-c.s., $0 \le t \le T$, donde $(z_t, \mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ es una martingala cuadrado integrable. Además $\langle z, y\rangle_t = 0$, $0 \le t \le T$, siendo $y_t = \int_0^t a(s,\omega)dW_s$, lo que implica que $(z_t y_t, \mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ es martingala y por tanto $\mathsf{E}(z_t y_t) = 0$, $0 \le t \le T$. A partir de aquí se prueba que $z_t = 0$, P-c.s., $0 \le t \le T$. Este teorema es el que se ha utilizado en 2.2.3 (precio de la opción europea). $\square$

2.8. Las griegas

Nos situamos en 2.2.4, $(h = f(S_t))$. (1) Se prueba que si f es creciente (decreciente), entonce $F(t,x)$ es creciente (decreciente) en x, (2) Se prueba que si f es convexa, entonces $F(t,x)$ crece con σ.

Seguimos en 2.2.4, pero en los subcasos *call* y *put*. Entonces $F(t,x)$ crece estrictamente con σ.

Nos fijamos en el *call* europeo (2.2.4). Entonces

1. $F_x(t,x) = N\left[\frac{\log(x/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$ y se llama *delta* del *call* europeo.
2. $F_{xx}(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{x}e^{-d_1^2/2}$ y se llama *gamma* del *call* europeo.
3. $F_t(t,x)$ se llama *theta* del *call* europeo.
4. $F_\sigma(t,x)$ se llama *vega* del *call* europeo.

Nos fijamos en el *put* europeo (2.2.4). Entonces: a) $F_x(t,x) = -N(-d_1)$ y se llama *delta* del *put* europeo, etc.

En general, si el valor en t de una cartera se puede escribir de la forma $\psi(t, S_t)$, ($\psi(t,x)$ suficientemente regular), entonces a $\psi_x(t,x)$ se le llama δ de la cartera, etc.

Por último, ¿ cómo se calcula la σ (volatilidad)?. Nos situamos de nuevo en el *call* europeo (o *put* europeo) (2.2.4). Tenemos la fórmula

$$F(0,S_0) = S_0 N\Big[\frac{\log(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big] - Ke^{-rT}N\Big[\frac{\log(S_0/K) + (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\Big]$$

que da el precio del *call* europeo. Si nos vamos a un mercado organizado donde cotice esa opción, podemos igualar la fórmula anterior a un número, $\hat{C}(T,K)$, y despejar σ. Aquí afloran ciertas imperfecciones: (1) σ varía con T, para K fijo; (2) σ varía con K, para T fijo; la función $K \to \sigma$ da una curva (la gráfica) cóncava respecto al eje vertical positivo (efecto sonrisa).

3. Modelo general para los mercados financieros a tiempo continuo

Se contempla una fecha de vencimieno T para las opciones. Partimos de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una filtración $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ tal que: 1) $\mathcal{F}_0$ contiene todos los cero-conjuntos de P, 2) $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$, $0 \le t \le T$. Supondremos que $\mathcal{F}_0$ está generado por Ω y todos los cero-conjuntos de P y que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

3.1. Los precios

Suponemos que en el mercado hay $K+1$ activos $S^0, S^1, \ldots, S^K$ y que los precios de estos activos son, respectivamente, los procesos estocásticos $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^K$, $0 \le t \le T$. Suponemos que los procesos estocásticos anteriores (los precios) están adaptados a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$, son continuos por la derecha con límite por la izquierda (CDLI) y son estrictamente positivos. Suponemos que S_t^0, $0 \le t \le T$, tiene variación finita, es continuo y $S_0^0 = 1$. Definimos los procesos $\alpha_t = \log(S_t^0)$, $0 \le t \le T$, y $\beta = 1/S_t^0$, $0 \le t \le T$.

Es conveniente definir el proceso estocático vectorial $Z = (Z^1, \ldots, Z^K)$ (precio descontado), donde $Z_t^n = \beta_t S_t^n$, $0 \le t \le T$, $n = 1, \ldots, K$.

Sea $\mathbf{P}$ el conjunto de probabilidades Q en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que Z es una martingala vectorial respecto a Q y Q es equivalente a P, ($\beta_t S_t^0 = 1$, $0 \le t \le T$). Supondremos que $\mathbf{P} \ne \phi$.

3.2. Algunos resultados de la integración estocástica

Una supermartingala es un proceso adaptado y CDLI, X_t, $0 \le t \le T$, tal que X_t es integrable y $\mathsf{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \le X_s$ para $0 \le s < t \le T$. El proceso X_t, $0 \le t \le T$, se dice que es una martingala si X_t, $0 \le t \le T$, y $-X_t$, $0 \le t \le T$, son supermartingalas. (Se deduce, en este caso, que las martingalas son uniformemente integrables).

Un proceso $M(t)$, $0 \leq t \leq T$, adaptado y CDLI se dice que es una martingala local si existe una sucesión creciente de tiempos de parada T_n tal que $P(T_n = T) \to 1$, $n \to \infty$, y $M(t \wedge T_n)$, $0 \leq t \leq T$, es martingala para todo n. Es claro que toda martingala es martingala local. Además:

1. Un proceso positivo X_t, $0 \leq t \leq T$, es martingala si y sólo si X_t, $0 \leq t \leq T$, es supermartingala y $\mathsf{E}X_T = X_0$.

2. Toda martingala local positiva (≥ 0) es una supermartingala.

3. Una martingala local positiva M_t, $0 \leq t \leq T$, es una martingala si y sólo si $\mathsf{E}M_T = M_0$.

Un proceso A_t, $0 \leq t \leq T$, se dice que es VF (variación finita) si es adaptado CDLI y las trayectorias son de variación finita, ($A_{0-} = 0$, por convenio).

Definición 3.2.1 Un proceso X_t, $0 \leq t \leq T$, es una semimartingala si admite una descomposición $X_t = X_0 + M_t + A_t$, donde M_t, $0 \leq t \leq T$, es una martingala local 0 en 0 y A_t, $0 \leq t \leq T$, es un proceso VF 0 en 0 , (esta descomposición no es única en general), (por tanto X es adaptado y CDLI).

Definición 3.2.2 Un proceso H_t, $0 \leq t \leq T$, es previsible simple si existen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ y variables aleatorias acotadas $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ tal que ξ_0 es $\mathcal{F}_0$-medible, ξ_1 es $\mathcal{F}_{t_1}$-medible, ..., ξ_{n-1} es $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$-medible y $H_t = \xi_i$ si $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ y H_0 constante. Por tanto H_t, $0 \leq t \leq T$, es acotado, adaptado continuo por la izquierda (CI) y constante a trozos. La σ-álgebra previsible en $\Omega \times [0, T]$ es (por definición) la generada por los procesos previsibles simples. Un proceso H_t, $0 \leq t \leq T$, se dice que es previsible si es medible con la σ-álgebra previsible. Todo proceso previsible está adaptado y es CI.

Definición 3.2.3 Un proceso estocástico H_t, $0 \leq t \leq T$, es localmente acotado si existen constantes $C_1, C_2, \ldots$ y tiempos de parada $T_1, T_2, \ldots$ crecientes tales que $P(T_n = T) \to 1$, $n \to \infty$ y $|H_t| \leq C_n$ para $0 \leq t \leq T_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Se prueba que un proceso adaptado, que es continuo por la izquierda y con límite por la derecha (CILD), es previsible y localmente acotado.

Sea X una semimartingala y H un proceso previsible simple (3.2.2.). Se define la integral estocástica $Z_t = \int_0^t H dX$ de la siguiente forma:

$$Z_t = H_0 X_0 + \xi_0 (X_{t_1} - X_{t_0}) + \xi_1 (X_{t_2} - X_{t_1}) + \cdots + \xi_{j-1} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) + \xi_j (X_t - X_{t_j})$$

si $t_j < t \leq t_{j+1}$.

Caso general: Sea X una semimartingala y H un proceso previsible y localmente acotado. Se puede proceder pasando (convenientemente) al límite la situación de proceso previsible simple, o de forma más sintética con el siguiente desarrollo: Sea entonces $X = X_0 + M + A$, como en 3.2.1. Se define en primer lugar la integral estocástica $\int_0^t HdM$ recurriendo al siguiente teorema fundamental [18]: *Sea M una martingala local y H un proceso previsible y localmente acotado. Entonces existe una martingala local $H.M$, ($\int_0^t HdM$, $0 \leq t$), única tal que para toda martingala acotada N se tiene que $[H.M, N] = H.[M, N]$, donde $H.[M, N]$ es una integral de Stieltjes ordinaria ($[M, N]$es VF). Además $(H.M)_0 = H_0 M_0$, $(H.M)^c = H.M^c$ y $\Delta(H.M)_s = H_s \Delta M_s$. Si M es martingala local VF y de variación localmente integrable, entonces $H.M$ es integral Stieltjes (se calcula como integral Stieltjes sobre las trayectorias), (recordamos: un proceso A se dice que es un proceso de variación localmente integrable si es VF (adaptado) y existen tiempos de parada $T_n \uparrow \infty$ tales que $\mathsf{E}[\int_{(0,T_n]} |dA_s|] < \infty$, para todo n).* El corchete se define sobre semimartingalas de la siguente forma: $[X, X]_t =< X^c, X^c >_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s^2$ y $[X, Y]$ por polarización. Se tiene la definición equivalente:

$$[X, Y]_t = X_0 Y_0 + lim_n \sum_i (X(t_{i+1}^n) - X(t_i^n))(Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)),$$

donde $t_i^n = it/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n$, X, Y son semimartingalas y la convergencia es en probabilidad. Efectivamente (para dar sentido a la integral de Stieltjes $H.[M, N]$) se prueba que $[X, Y]$ es VF y además $[X, Y]_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s \Delta Y_s$ si X es VF o Y es VF.

Una vez definida $H.M$, se define $H.X = H_0 X_0 + H.M + H.A$, donde $H.A$ es la integral Stieltjes, ($(H.A)_0 = H_0 A_0$). Se prueba además que $H.X$ no depende de la descomposición de $X = X_0 + M + A$, $H.X$ es semimartingala y $H_t \Delta X_t = \Delta(H.X)_t$, $0 \leq t \leq T$ y $H.X^c = (H.X)^c$ y si T es tiempo de parada, $H.X^T = (H.X)^T$. Naturalmente ponemos la notación $H.X = \int HdX$, ($(H.X)_0 = H_0 X_0$).

Si X e Y son semimartingalas, entonces X_- e Y_- son (CILD) y adaptados y por tanto son previsibles y localmente acotados. Se prueba, aplicando la fórmula de cambio de variable, que

$$[X, Y]_t = X_t Y_t - \int_0^t X_{s_-} dY_s - \int_0^t Y_{s_-} dX_s, \tag{3.1}$$

$0 \leq t \leq T$ .Si X es una martingala, no ocurre en general que $\int HdX$ sea una martingala. De hecho si X es un proceso de Wiener W, entonces la integral que acabamos de definir $\int HdX$ coincide con la integral estocástica $\int HdW$ del cálculo de Itô. Ya sabemos que si el integrando no es adecuado la integral de Itô $\int HdW$ no es en general martingala. Lo que sí tenemos, del teorema fundamental, es que si X es martingala local y H es previsible y localmente acotado, entonces $H.X$ es martingala local.

Observación importante. Los conceptos "proceso previsible", "localmente acotado" son invariantes respecto a probabilidades equivalentes. El concepto de semimartingala es también invariante respecto a probabilidades equivalentes [18] y el corchete de semimartingala también. La misma integral estocástica $\int HdX$es también invariante respecto a probabilidades equivalentes.

De la ecuación (3.1), teniendo en cuenta que $[X, Y]$ es VF, es claro que el producto de semimartingalas es una semimartingala, (en definitiva aplicando la fórmula de cambio de variable) [18]. La integral estocástica con integrando un proceso previsible y localmente acotado e integrador una semimartingala es la adecuada para la descripción del modelo económico que estudiamos.

3.3. Las estrategias

Ya hemos dicho, en 3.1 , que S^0 es VF y por tanto S^0 es una semimartingala. Por otra parte Z^n, $n = 1, 2, \ldots, K$ es una martingala respecto a cualquier $Q \in \mathbf{P}$, de donde $S^n = S^0 Z^n$ es una semimartingala respecto a P (por tanto respecto a cualquier $Q \in \mathbf{P}$). Así$(S^0, S^1, \ldots, S^K)$ es una semimartingala vectorial respecto a cualquier Q equivalente a P.

Definición 3.3.1 Una estrategia de gestión es un proceso $K+1$ dimensional $\phi = \{\phi_t, 0 \leq t \leq T\}$ tal que ϕ_t^n, $0 \leq t \leq T$, es previsible y localmente acotado, $0 \leq n \leq K$. A cada estrategia de gestión ϕ se le asocian los procesos

$$V_t(\phi) = \phi_t S_t = \sum_{n=0}^{K} \phi_t^n S_t^n$$

$0 \leq t \leq T$ (proceso valor de la cartera)

$$G_t(\phi) = \sum_{n=0}^{K} \int_0^t \phi_u^n dS_u^n$$

$0 \leq t \leq T$, (proceso ganancias).

Definición 3.3.2 Una estrategia de gestión ϕ es autofinanciada si

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi)$$

$0 \leq t \leq T$. (Por consiguiente $V(\phi)$ es adaptada y CDLI para cualquier ϕ autofinanciada).

Definición 3.3.3 Sea ϕ una estrategia de gestión. Ponemos

$$G_t^*(\phi) = \sum_{n=1}^{K} \int_0^t \phi_u^n dZ_u^n$$

$0 \le t \le T$,

$$V_t^*(\phi) = \beta_t V_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t^1 Z_t^1 + \cdots + \phi_t^K Z_t^K$$

$\beta_t = 1/S_t^0$ (se llama ganancia descontada y valor descontado respectivamente).

Proposición 3.3.4 Sea ϕ una estrategia de gestión. Entonces ϕ es autofinanciada si y sólo si $V_t^*(\phi) = V_0^*(\phi) + G_t^*(\phi)$, $0 \le t \le T$. Además $V_t(\phi) \ge 0$ si y sólo si $V_t^*(\phi) \ge 0$, $0 \le t \le T$.

Demostración. Supongamos que ϕ es autofinanciada. Entonces $V(\phi) = V_0(\phi) + G(\phi)$, de donde $\Delta V_t(\phi) = \Delta G_t(\phi) = \phi_t \Delta S_t$ (por las propiedades de la integral estocástica) y $V_-(\phi) = \phi S_-$. Puesto que β_t es un proceso continuo y VF, se tiene que $[\beta, V(\phi)] = V_0(\phi)$ y por tanto $V^*(\phi) - V_0(\phi) = \int \beta dV(\phi) + \int \phi S_- d\beta = \int \beta dG(\phi) + \int \phi S_- d\beta = \int \beta \phi dS + \int \phi S_- d\beta = \phi \, . (\int \beta dS + \int S_- d\beta)$. Análogamente $\beta S - S_0 = \int \beta dS + \int S_- d\beta$, de donde $V^*(\phi) - V_0(\phi) = G^*(\phi) = \phi . Z$.

En esta implicación se ha utilizado la propiedad: “Si f y g son previsibles y localmente acotadas y X es una semimartingala, entonces $g.(f.X) = (gf).X$”.

Para la implicación inversa se tiene que $\Delta V_t^*(\phi) = \Delta G_t^*(\phi) = \sum_{n=1}^K \phi_t^n \Delta Z_t^n$, $V_{t-}^*(\phi) = \phi_t Z_{t-} + \phi_t^0$ y se razona de forma análoga. $\square$

Corolario Sea ϕ una estrategia autofinanciada tal que $V(\phi) \ge 0$ (lo que en la teoría finita se llama estrategia admisible). Entonces $V^*(\phi) \ge 0$ y $V^*(\phi)$ es una martingala local respecto a cualquier $Q \in \mathbf{P}$ (y por tanto supermartingala respecto a cualquier $Q \in \mathbf{P}$).

Es consecuencia de que $\phi^n . Z^n$ es martingala local para cualquier $Q \in \mathbf{P}$.

Proposición 3.3.5 Sean $\phi^1, \ldots, \phi^K$ procesos previsibles y localmente acotados y v un número positivo. Entonces existe ϕ^0 proceso previsible y localmente acotado único tal que $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^K)$ es una estrategia autofinanciada y $V_0^*(\phi) = v$.

En efecto, basta tomar $\phi_t^0 = v + \sum_{n=1}^K \int_0^t \phi_s^n dZ_s^n - \sum_{n=1}^K \phi_t^n Z_t^n$, $0 \le t \le T$.

Conclusión. Si ϕ es una estrategia autofinanciada tal que $V(\phi) \ge 0$ y $V_0(\phi) = 0$, entonces $V^*(\phi) \ge 0$ y $V^*(\phi)$ es supermartingala respecto a cualquier $Q \in \mathbf{P}$ y por tanto $V_t^*(\phi) = 0$, $0 \le t \le T$. Ocurre que se puede construir una estrategia autofinanciada, ϕ, tal que $V(\phi) \ge 0$, $V_0(\phi) = 1$ y $V_T(\phi) = 0$ (estrategia suicida). Se va complicando seguir las pautas (el paralelismo) del caso finito. En efecto, si ϕ (estrategia autofinanciada con $V(\phi) \ge 0$) simula h, es decir $V_T(\phi) = h$, entonces $\phi + \phi_{suicida}$ simula (también) h, es decir, $V_T(\phi + \phi_{suicida}) = h$, y sin embargo $V_0(\phi + \phi_{suicida}) = V_0(\phi) + 1$. Esto exige ciertos replanteamientos.

3.4. Nueva formulación

Fijamos un $P^* \in \mathbf{P}$. Sea $\mathcal{L}(Z)$ el conjunto de todos los procesos previsibles $H = (H^1, \ldots, H^K)$ tal que el proceso creciente $(L_t^n =)(\int_0^t (H_s^n)^2 d[Z^n, Z^n]_s)^{1/2}$, $0 \le t \le T$, es localmente integrable respecto a P^*, $n = 1, \ldots, K$, es decir existe una sucesión de tiempos de parada $T_1, T_2, \ldots$, creciente, tal que $P^*(T_m = T) \to 1$, $m \to \infty$, y $L^n(t \wedge T_m)$, $0 \le t \le T$, es integrable respecto a P^* para todo m.

Se prueba que $\mathcal{L}(Z)$ contiene todos los procesos $H = (H^1, \ldots, H^K)$ previsibles y localmente acotados.

En [18] se construye la integral $H^n.Z^n$, $n = 1, \ldots, K$, $(\int H^n dZ^n)$, $H \in \mathcal{L}(Z)$, que es de nuevo una martingala local respecto a P^*. Se mantiene la propiedad $\Delta(H^n.Z^n)_t = H_t^n \Delta Z_t^n$, $(H^n.Z^n)_0 = H_0^n Z_0^n$ y la propiedad $[H^n.Z^n, N] = H^n.[Z^n, N]$, para toda martingala local N respecto a P^* y esta relación, escrita para martingalas acotadas, da la unicidad de la integral.

Reformulamos la definición de estrategia de gestión (3.3.1) (seguimos con la notación $\int_0^t H_s^n dZ_s^n = H^n.Z^n - H_0^n Z_0^n$):

Definición 3.4.1 Una estrategia de gestión es todo proceso previsible (por tanto, adaptado) $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^K)$ tal que $(H =)(\phi^1, \ldots, \phi^K) \in \mathcal{L}(Z)$. Ponemos $V^*(\phi) = \beta\phi S$ y $G^*(\phi)_t = \sum_{n=1}^K \int_0^t \phi_s^n dZ_s^n$, $0 \le t \le T$.

Una estrategia de gestión $\phi = (\phi^0, \phi^1, \ldots, \phi^K)$ se dice que es admisible si $V^*(\phi) \ge 0$, $V^*(\phi) = V_0^*(\phi) + G^*(\phi)$ y $V^*(\phi)$ es martingala respecto a P^*, (lo que equivale a que $G^*(\phi)$ es martingala respecto a P^* que a su vez equivale a $\mathsf{E}^*(V_T^*(\phi)) = V_0^*(\phi)$).

Una opción europea es una variable aleatoria positiva (como $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, es $\mathcal{F}_T$-medible). Si h es una opción europea, se dice que es alcanzable (o simulable) si existe ϕ estrategia de gestión admisible tal que $V_T^*(\phi) = \beta_T h$. A $V_0^*(\phi)$ se le llamará precio de h en 0, cuando se haya probado que no depende de ϕ y que existe algún ϕ que simula a h.

Proposición 3.4.2 Si h es una opción europea y ϕ es una estrategia de gestión admisible tal que $V_T^*(\phi) = \beta_T h$, (ϕ simula a h), entonces $V_0^*(\phi) = \mathsf{E}^*(\beta_T h)$ (se llamará precio de la opción europea h en 0, cuando se haya probado la existencia de algún ϕ que simule a h).

Demostración. Por 3.4.1, $V^*(\phi)$ es martingala respecto a P^*, positiva. Así por 3.2, $\mathsf{E}^* V_T^*(\phi) = V_0^*(\phi)$. □

Definición 3.4.3 Sea h una opción europea. (a) Se dice que h es integrable si $\mathsf{E}^*(\beta_T h) < \infty$. (b) Se dice que h es acotada si $\beta_T h$ es acotada.

Teorema 3.4.4 Sea h una opción europea integrable y V_t^*, $0 \le t \le T$, una modificación CDLI de $\mathsf{E}^*(\beta_T h | \mathcal{F}_t)$, $0 \le t \le T$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) h es simulable (es decir, existe ϕ estrategia de gestión admisible tal que $V_T^*(\phi) = \beta_T h$).

(b) Existe $H \in \mathcal{L}(Z)$ tal que $\int HdZ + V_0^* = V^*$. Además, si se cumple (b), se tiene que $V^*(\phi) = V^*$ para toda estrategia de gestión admisible ϕ que simula a h, $(V_T^*(\phi) = \beta_T h)$.

Demostración. Supongamos que se cumple (a). Entonces $H = (\phi^1, \dots, \phi^K) \in \mathcal{L}(Z)$ y $G^*(\phi) = \int HdZ$ y $V^*(\phi) = V_0^*(\phi) + G^*(\phi)$, $V^*(\phi) \geq 0$ y $V^*(\phi)$ es martingala respecto a P^*. Así $V_t^* = \mathsf{E}^*(\beta_T h|\mathcal{F}_t) = \mathsf{E}^*(V_T^*(\phi)|\mathcal{F}_t) = V_t^*(\phi)$ y $V_t^* = V_0^*(\phi) + G_t^*(\phi) = V_0^* + \int_0^t HdZ$, $0 \leq t \leq T$.

Supongamos que se cumple (b). Se toman $\phi^1 = H^1, \dots, \phi^K = H^K$ y ϕ^0 como en 3.3.5 ($\phi^0 = V_0^* + H.Z - \sum_{n=1}^K \phi^n Z^n$). Entonces $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^K)$ es estrategia de gestión admisibe que simula a h, ya que $V^*(\phi) = V_0^* + H.Z = V^*$. □

Luego el problema queda reducido a un problema de representación de martingalas ((b) de 3.4.4).

Definición 3.4.5 Se dice que el mercado es completo si toda opción europea integrable h es simulable (existe ϕ estrategia de gestión admisible tal que $V_T^*(\phi) = \beta_T h$).

Teorema 3.4.6 El mercado es completo si y sólo si toda martingala M respecto a P^* se puede representar de la forma $M = M_0 + \int HdZ$, para algún $H \in \mathcal{L}(Z)$.

Demostración. Es consecuencia directa de 3.4.4, teniendo en cuenta que toda martingala es diferencia de dos martingalas positivas. □

Teorema 3.4.7 Si $\mathbf{P}$, (3.1), tiene un solo elemento, entonces el mercado es completo.

La prueba de este teorema requiere la teoría general de representación de martingalas [12].

Referencias

[1] L. Bachelier: *Théorie de la spéculation.* Tesis doctoral, Facultad de Ciencias de París, 1900 o Ann. Ècole Norm. Sup. **17** (1900), 21–86.

[2] F. Black, M. Scholes: *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* J. Political Econom. **72** (1973), 637.

[3] D. Dacunha–Castelle, M. Duffo: *Probabilités et statistiques, tome 1.* Masson, Paris 1982.

[4] C. Dellacherie: *Un survol de la theorie de l' integrale stochastique*. Stoch. Process. Appl. **10** (1980), 115–144.

[5] B. Dupire: *Model Art*. RISK–magazin **6** (1993), 118–124.

[6] ———: *Pricing with a smile*. RISK–magazin **7** (1994), no. 1, 18–20.

[7] A. Einstein: Ann. Phys. **17** (1905), 549; **19** (1906), 289; **19** (1906), 371.

[8] I.V. Girsanov: Theory of Probability and Appl. **5** (1962), 285–301.

[9] J.M. Harrison, D.M. Kreps: *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*. J. Econom. Theory **20** (1979), 381–408.

[10] J.M. Harrison, S.R. Pliska: *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuum trading*. Stoch. Proces. Appl. **11** (1981), 215–260.

[11] K. Itô: *Stochastic integral*. Imperial Academy, Tokyo. Proceedings **20** (1944), 519-524.

[12] J. Jacod: *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. Lecture Notes Math. **714,** Springer-Verlag, New York 1979.

[13] J. Jacod, A.N. Shiryaev: *Limit theorems for stochastic processes*. Springer-Verlag, Berlin 1987.

[14] P. Jaillet, D. Lamberton, B. Lapeyre: *Variational inequalities and the pricing of american options*. Acta Applicandae Math. **21** (1990), 263–289.

[15] D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Math. and Appl. **9,** Ellipses.

[26] R.S. Liptser, A.N. Shiryaev: *Statistics of random processes I*. Springer-Verlag, Berlin 2001.

[17] R. Merton: *Theory of rational option pricing*. Bell J. Econom. Managem. Sci. **4** (1973), 141.

[18] P.-A. Meyer: *Un cours sur les integrales stochastiques*. En *Seminaire de Probabilité X,*Lecture Notes in Mathematics **511,** 245–400, Springer, New York 1976.

[19] Nobel Prize in Economical Science (1970): Disponible en `http://www.nobel.se/laureates/economy-1970.html`

[20] ——— (1997): Disponible en `http://www.nobel.se/laureates/economy-1997.html`

[21] P.A. Raviart, J.M. Thomas: *Introduction à l'analyse numèrique des équations aux dérivés partielles*. Masson, París 1983.

[22] P.A. Samuelson: *Rational theory of warrant pricing*. Industrial Management Review **6** (1965), 13.

[23] A.N. Shiryaev: *Essentials of stochastic finance*. Adv. Ser. Statistical Science and Appl. Probability, Vol. 3, World Scientific, 2001.