Recurrencias no homogéneas

Una recurrencia no homogénea es aquella donde la parte derecha ya no es cero. Por ejemplo:

$$\mathbf{T(n)\text{-}2\ T(n\text{-}1) = 3^n}$$

Son de la forma:

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + \ldots + a_k T(n-k) = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \ldots + b_s^n p_s(n)$$

Donde los coeficientes a_i y b_i son números reales, y $p_j(n)$ son polinomios en n de grado d_j.

La forma general de la solución es la ecuación característica:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k)(x-b_1)^{d_1+1}(x-b_2)^{d_2+1} \ldots (x-b_s)^{d_s+1} = 0\,.$$

Ejemplo:

$$T(n)=2T(n-1)+n+2^n \qquad \text{con } T(0)=1$$

Ecuación característica:

$$(x-2)\ (x-1)^2\ (x-2)=(x-2)^2\ (x-1)^2=0$$

Solución:

$$T(n)=C_1\ 2^n+C_2\ n2^n+C_3\ 1^n+C_4\ n1^n$$

Ahora hay que hallar las constantes:

T(0) = 1, y usando T(n) = 2T(n − 1) + n + 2n, es necesario hallar T(1), T(2) y T(3) para formar un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas:

T(1) = 5

T(2) = 16

T(3) = 43

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 1 \\ 2C_1 + 2C_2 + C_3 + C_4 = 5 \\ 4C_1 + 8C_2 + C_3 + 2C_4 = 16 \\ 8C_1 + 24C_2 + C_3 + 3C_4 = 43 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene que C_1=3, C_2=1, C_3=-2 y C_4=-1

$$T(n)=3.2^n+n.2^n-2-n \quad \in \quad O(n2^n)$$

Teorema maestro

Dada la siguiente ecuación de recurrencia:

$$t(n) = \begin{Bmatrix} g(n) & si\ \ 0 \leq n \leq n_0 \\ lT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)^k & si\ n\ \geq n_0 \end{Bmatrix}$$

Donde *n* es el tamaño del problema

L: cantidad de llamadas recursivas

b es el número de partes en que se ha dividido el problema.

l >=1 y b>=1

Se resuelve:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^k) & si \quad \ell < b^k \\ O(n^k \log n) & si \quad \ell = b^k \\ O(n^{\log_b \ell}) & si \quad \ell > b^k \end{cases}$$