Recurrencias homogéneas

Método de ecuación característica

Recurrencias homogéneas

Son de la forma:

$$a_0 T(n) + a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \dots + a_k T(n-k) = 0$$

Donde los coeficientes a_i son números reales, y k es un número natural entre 1 y n. Para resolverlas, es necesario buscar soluciones que sean combinaciones de funciones exponenciales de la forma:

$$T(n) = c_1 p_1(n) r_1^n + c_2 p_2(n) r_2^n + \dots + c_k p_k(n) r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i p_i(n) r_i^n$$

Donde los valores $c_1, c_2, \dots, c_n$ y $r_1, r_2, \dots, r_n$ son números reales, y $p_1(n), \dots, p_k(n)$ son polinomios en n con coeficientes reales.

Para resolverlas, hay que hacer el cambio $x^n = T(n)$, con lo cual se obtiene la **ecuación característica** asociada:

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_k = 0$$

Se llama $r_1, r_2, \dots, r_k$ a sus raíces, ya sean reales o complejas. Dependiendo del orden de multiplicidad de tales raíces, pueden darse los dos siguientes casos:

Primer caso: raíces distintas

Si todas las raíces de la ecuación característica son distintas (esto es, $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$), entonces la solución de la ecuación en recurrencia viene dada por la expresión:

$$T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$$

Donde los coeficientes c_i se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Segundo caso: raíces con multiplicidad mayor que 1

Si alguna de las raíces tiene multiplicidad m>1, entonces la ecuación característica puede ser escrita en la forma:

$$(x - r_1)^m (x - r_2) \ldots (x - r_{k-m+1})$$

En cuyo caso, la solución de la ecuación en recurrencia viene dada por la expresión:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} c_i n^{i-1} r_1^n + \sum_{i=m+1}^{k} c_i r_{i-m+1}^n$$

Donde los coeficientes c_i se determinan a partir de las condiciones iniciales.