

PARTIEL
ANALYSE DES SIGNAUX ET DES IMAGES

**Les questions seront traitées dans l'ordre et correctement numérotées.
Les réponses seront justifiées et les résultats encadrés.**

Exercice 1

On considère un signal analogique $s(t)$ que l'on échantillonne à la fréquence $\nu_e = 8192\text{Hz}$ pendant un temps T ce qui donne N échantillons.

1. Quel doit être la durée T pour que le spectre obtenu par TFD comporte une résolution de deux raies par Hertz ? En déduire le nombre d'échantillons de signal nécessaires.
2. On suppose que ce signal $s(t)$ est une sinusoïde pure, de fréquence $\nu_1 = 2000\text{Hz}$ et d'amplitude 5 Volts. On souhaite calculer la transformée de Fourier discrète de ce signal à partir d'une fenêtre rectangulaire.
 - a. En étant attentif au signal $s(t)$ concerné et à la fréquence d'échantillonnage choisie, représenter l'allure du spectre d'amplitude de la TFD de ce signal.
 - b. En faisant l'application numérique, en déduire les raies fréquentielles (amplitudes et positions exactes en fréquence) au voisinage de ν_1 .
3. Sans changer l'amplitude, la fréquence du signal $s(t)$ est modifiée pour passer à $\nu_1 = 2000,25\text{Hz}$. Représenter alors l'allure des raies données par la TFD sur le même voisinage de ν_1 que précédemment et expliquer le phénomène.
4. La variation observée de la TFD entre les questions 2 et 3 serait-elle plus ou moins marquée si on utilisait une fenêtre différente de la fenêtre rectangulaire ? Justifiez.

Exercice 2

Un signal acoustique $s(t)$ considéré comme constant et valant 2 V pendant quelques millisecondes est perturbé lors de sa mesure par un bruit additif blanc gaussien $b(t)$ de moyenne 1V et de variance 3. Le signal résultant est noté $x(t)$.

Pour cette mesure on réussit à prélever un échantillon de $x(t)$ à l'instant t_1

Pour savoir si le signal $s(t)$ est présent ou pas, on compare la valeur de l'échantillon $x(t_1)$ à un seuil de 1Volt. Calculer la probabilité d'observer $x(t_1)$ supérieur à ce seuil sachant que le signal $s(t)$ est absent.

Exercice 3

1. On considère un signal $x_a(t)$ défini comme ayant un spectre d'amplitude triangulaire centré, de fréquence maximale $F = 40\text{kHz}$ et d'amplitude maximale A (on ne cherchera pas à expliciter l'expression de $x_a(t)$). Ce signal est multiplié par un signal cosinusoidal de fréquence $\nu_0 = 110\text{kHz}$. De cette opération, qu'on appelle modulation d'amplitude, résulte le signal $x_m(t)$.

On désire transmettre ce signal modulé en l'échantillonnant et en transmettant les échantillons sous forme numérique.

- a. Représenter le spectre d'amplitude du signal $x_m(t)$
 - b. Trouver le nombre minimal d'échantillons à transmettre par seconde en justifiant.
 - c. Donner l'expression du signal échantillonné et représenter son spectre d'amplitude
2. On échantillonne en réalité ce signal à 100 kHz
 - a. Dessiner l'allure du spectre d'amplitude du signal $x_m(t)$ échantillonné
 - b. Expliquer le phénomène observé et ses conséquences.

FORMULAIRE

Formules Trigo :

$$\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a).\cos(b) + \sin(b).\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a).\cos(b) - \sin(b).\cos(a)$$

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin(a).\sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a).\sin(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Définition de la convolution $y(t)=x(t)*h(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

$$z_a(t) \stackrel{\pi}{\rightarrow}$$

Décomposition en série de Fourier réelle et complexe + Relations entre a_n , b_n et c_n

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+2\pi j \frac{n}{T} t}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-2\pi j \frac{n}{T} t} dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) = c_n^*$$

Quelques propriétés liées aux séries de Fourier

Dérivation :

Soit $x(t)$ un signal périodique de période T et X_k ses coefficients de décomposition en série de Fourier complexe alors les coefficients de décomposition en série de Fourier complexe de la fonction :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad \text{sont :} \quad \left(2\pi j k \frac{1}{T}\right)^n X_k$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

$$x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\nu)$$

■ Changement d'échelle : $x(kt) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{1}{|k|} X\left(\frac{\nu}{k}\right)$

■ Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\nu)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\nu)$

■ Dérivation :

■ Par rapport au temps

$$\left\| \begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(\nu) \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\text{TF}} (2\pi j \nu)^n X(\nu) \end{array} \right\|$$

■ Par rapport à la fréquence

$$\left\| \begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{\text{TF}} X(v) \\ t^n x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \frac{d^n X(v)}{dv^n} \frac{1}{(-2\pi j)^n} \end{array} \right.$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \rightarrow \quad X(v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(v - \frac{n}{T}\right)$$

Définition de l'intercorrélation pour $x(t)$ et $y(t)$ d'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de l'intercorrélation pour $x(t)$ et $y(t)$ d'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X\left(v = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période v_e en v

Expression matricielle de la TFD :

Ligne
Numéro
k

Colonne numéro n

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Expression de la fenêtre de Hanning calculée sur N points :

$$h(n) = 0.5 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \right) \quad \text{avec } n=0,1,\dots,N-1$$

Expression de la fenêtre de Hamming calculée sur N points :

$$h(n) = 0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N} \right) \quad \text{avec } n=0,1,\dots,N-1$$

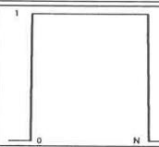
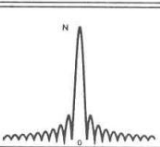
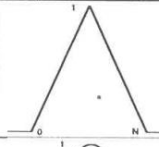
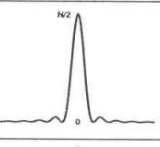
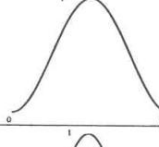
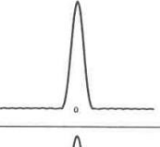
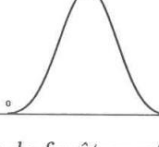
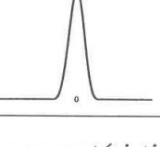
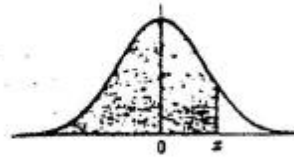
Nom		Représentation temporelle	Représentation fréquentielle	Largeur lob.princ.	Amp. relative $\frac{\text{lob.princ}}{\text{lob.sec.}}$
Rectangulaire				$\frac{2}{N}$	-13 dB
Triangulaire				$\frac{4}{N}$	-25 dB
Hamming				$\frac{4}{N}$	-41 dB
Blackman				$\frac{6}{N}$	-57 dB

Table 3 Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques

AIRES SOUTENDUES PAR LA COURBE
NORMALE CANONIQUE DE $-\infty$ à x

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9163	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000